



Aniello Murano

Tecniche di prova per induzione

Lezione n.3

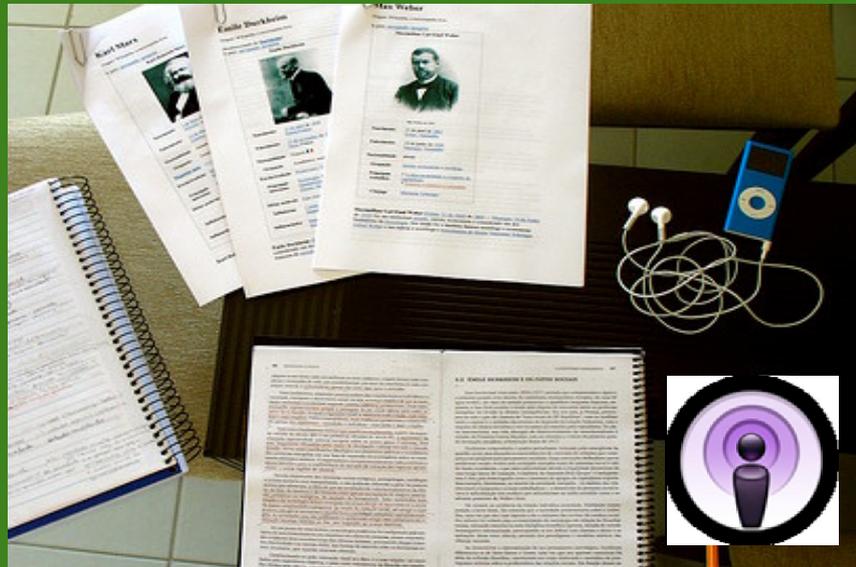
Parole chiave:
Induzione

Corso di Laurea:
Informatica

Codice:

Email Docente:
murano@na.infn.it

A.A. 2008-2009



RIASSUNTO DELLE LEZIONI PRECEDENTI

- [Prima Lezione](#): Introduzione e motivazioni del corso; Sintassi e semantica di ARITHM
- [Seconda lezione](#): Sintassi e semantica operativa del linguaggio imperativo IMP
- [Terza lezione](#): **TECNICHE DI PROVA PER INDUZIONE**



- Le dimostrazioni di proprietà degli elementi di un insieme (e dunque anche dei programmi) si basano spesso sull'uso di un metodo di prova chiamato **induzione**
- Le forme di induzione più comunemente usate sono **l'induzione matematica** e **l'induzione strutturale**
- Induzione matematica e strutturale sono casi particolari di un potente metodo di prova chiamato **induzione ben fondata**
- In questa lezione vedremo in dettaglio:
 - Induzione matematica (la più semplice)
 - Induzione strutturale (la più usata nel contesto della semantica)
 - Induzione ben fondata (la più generale)
 - Induzione sulle derivazioni (utile per i comandi)



- Per utilizzare l'induzione come metodo di prova su un determinato insieme occorre
- Definire l'insieme utilizzando delle regole
 - Per esempio, come abbiamo fatto con gli insiemi A_{exp} , B_{exp} , Com nella sintassi astratta di IMP
- Definire una relazione sugli elementi dell'insieme utilizzando regole
 - Per esempio, come abbiamo fatto per la relazione di derivazione per IMP
- Definire una funzione sugli elementi dell'insieme



Induzione matematica

- Una proprietà $P(n)$ è vera per tutti i numeri naturali se
 - $P(0)$ è vera
 - Se $P(m)$ vera implica $P(m+1)$ vera per tutti i numeri naturali m
- Oppure, usando le regole di inferenza

$$\frac{P(0) \quad \forall m \in \omega . P(m) \rightarrow P(m + 1)}{\forall n \in \omega . P(n)}$$

- Terminologia:
 - $P(0)$ è il **caso base**
 - $P(m)$ è l'**ipotesi induttiva**
 - $\forall m \in \omega . P(m) \rightarrow P(m + 1)$ è il **passo induttivo**



Primo esempio

◆ Theorem:

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

◆ Proof: By induction on n

◆ Base case ($n = 0$)

$$2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$$

◆ Inductive case ($P(n) \Rightarrow P(n + 1)$)

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} && \text{IH} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ →



Secondo esempio

- Si ricordino le regole di valutazione per i comandi Com di IMP
- Si provi che se $\sigma(x) \leq 6$ allora
 $\langle \text{while } x \leq 5 \text{ do } x := x + 1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma[x := 6]$
- Al fine di utilizzare una induzione matematica, conviene riformulare l'enunciato "parametrizzato" sui numeri naturali nel modo seguente
 - Sia $W = \text{while } x \leq 5 \text{ do } x := x + 1$
 - Let $\sigma_i = \sigma[x := 6 - i]$
 - Teorema: $\forall i \in \mathbb{N}, \langle W, \sigma_i \rangle \rightarrow \sigma_0$
- Così formulato, il teorema può essere provato per induzione matematica sull'indice i .



Secondo esempio (caso base)

- Caso Base: $i = 0$ or $\langle W, \sigma_0 \rangle \rightarrow \sigma_0$
- Per provare una valutazione, è necessario costruire l'albero di derivazione :

$$\frac{\frac{\sigma_0(x) = 6}{\langle x, \sigma_0 \rangle \rightarrow 6} \quad \frac{}{\langle 5, \sigma_0 \rangle \rightarrow 5}}{\langle x \leq 5, \sigma_0 \rangle \rightarrow \text{false}}}{\langle \text{while } x \leq 5 \text{ do } x := x + 1, \sigma_0 \rangle \rightarrow \sigma_0}$$

- Questo completa il caso base



Secondo esempio (passo induttivo)

- Bisogna provare che $\forall i \in \mathbb{N}. \langle W, \sigma_i \rangle \rightarrow \sigma_0$ allora $\langle W, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow \sigma_0$
- L'inizio della prova è semplice:
 - Si sceglie un arbitrario $i \in \mathbb{N}$
 - Si assume che $\langle W, \sigma_i \rangle \rightarrow \sigma_0$
 - Si prova che $\langle W, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow \sigma_0$
 - Per quest'ultimo dobbiamo costruire un albero di derivazione.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\langle x, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow 6-(i+1) \leq 5} \qquad \frac{\langle x+1, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow 6-i}{\langle x := x+1, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow \sigma_i} \quad \langle W, \sigma_i \rangle \rightarrow \sigma_0 \\
 \hline
 \frac{\langle x \leq 5, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow \text{true} \qquad \langle x := x+1; W, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow \sigma_0}{\langle \text{while } x \leq 5 \text{ do } x := x + 1, \sigma_{i+1} \rangle \rightarrow \sigma_0}
 \end{array}$$



Osservazione

- Una dimostrazione formale è più potente dell'esecuzione del codice e della successiva valutazione del risultato (Perché?)
- Noi abbiamo provato terminazione e correttezza. La combinazione di queste due proprietà è chiamata **correttezza totale**.
- L'induzione matematica è efficiente quando proviamo proprietà di numeri naturali.
- Ma nell'analisi dei linguaggi di programmazione molto spesso proviamo proprietà di espressioni, comandi, dati in input ai programmi, ecc.
- Abbiamo bisogno di un principio di induzione più forte.



Induzione Strutturale

- Induzione basata sulla struttura dei termini
 "Se la base dell'induzione è vera e se, per un certo termine s , $P(r)$ vale per tutti gli immediati sottotermini r di s , allora $P(n)$ vale per tutti gli elementi n dell'insieme"



Induzione strutturale: Osservazioni

- Questo metodo di prova è chiamato induzione strutturale perché le prove sono guidate dalla struttura delle espressioni
- In una prova, devono essere considerati molti casi, dovuti alle varie forme delle espressioni:
 - Espressioni atomiche (senza sottoespressioni) sono tutti i casi base
 - Le espressioni composte sono i casi induttivi
- L'induzione strutturale è la forma più utile di induzione nello studio dei linguaggi di programmazione



Induzione Strutturale su Aexp

- Una proprietà $P(a)$ è vera per ogni a in Aexp se
 - Per ogni numero naturale m , $P(m)$ vale
 - Per ogni locazione X , $P(X)$ vale
 - Per ogni a_0 e a_1 , se $P(a_0)$ e $P(a_1)$ valgono, allora vale $P(a_0 + a_1)$
 - Per ogni a_0 e a_1 , se $P(a_0)$ e $P(a_1)$ valgono, allora vale $P(a_0 - a_1)$
 - Per ogni a_0 e a_1 , se $P(a_0)$ e $P(a_1)$ valgono, allora vale $P(a_0 \times a_1)$



Esempio sulla struttura delle espressioni

- Si assuma che
 - $L(e)$ sia il numero di costanti e variabili in e
 - $OP(e)$ il numero di operatori in e
- Si provi che per ogni espressione "e" di Aexp. $L(e) = OP(e) + 1$
- Per induzione sulla struttura di e
 - Case $e = n$. $L(e) = 1$ and $OP(e) = 0$
 - Case $e = x$. $L(e) = 1$ and $OP(e) = 0$
 - Case $e = e_1 + e_2$.
 - $L(e) = L(e_1) + L(e_2)$ and $OP(e) = OP(e_1) + OP(e_2) + 1$
 - Per ipotesi induttiva $L(e_1) = OP(e_1) + 1$ and $L(e_2) = OP(e_2) + 1$
 - Dunque $L(e) = OP(e) + 1$
 - Case $e = e_1 * e_2$: come per il caso "+".



\rightsquigarrow_{Aexp} is Deterministic

◆ Structural induction using induction hypothesis:

$$P(a) = \forall \sigma, m, m'. \langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow m \ \& \ \langle a, \sigma \rangle \not\rightsquigarrow m' \Rightarrow m = m'$$

◆ $a \equiv n$

There is only one rule for evaluating numbers: $n = m = m'$

◆ $a \equiv X$

There is only one rule for evaluating locations: $\sigma(X) = m = m'$

◆ $a \equiv a_0 + a_1$ [similar for $(a_0 - a_1)$ and $(a_0 \times a_1)$]

If $\langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow m, m'$ then by the + rule there must exist m_0, m_1 where

$$\langle a_0, \sigma \rangle \rightsquigarrow m_0 \ \& \ \langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow m_1 \ \text{where } m = m_0 + m_1$$

and also exist m'_0, m'_1 where

$$\langle a_0, \sigma \rangle \rightsquigarrow m'_0 \ \& \ \langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow m'_1 \ \text{where } m = m'_0 + m'_1$$

By the induction hypothesis applied to a_0 and a_1 we have

$$m_0 = m'_0 \ \& \ m_1 = m'_1. \ \text{Therefore } m = m_0 + m_1 = m'_0 + m'_1 = m'.$$



\rightarrow_{Aexp} è totale

- Dimostriamo per induzione strutturale che la valutazione di espressioni aritmetiche termina sempre. Cioè, vogliamo provare che \rightarrow_{Aexp} è totale (si ricordi che σ è totale per definizione).
- La precedente proprietà può essere formalmente scritta come

$$P(a) = \forall \sigma, \exists m. \langle a, \sigma \rangle \rightarrow m$$
- La prova per induzione tiene conto dei vari casi
- $a \equiv n$: L'esistenza è dimostrata prendendo $m=n$
- $a \equiv X$: Siccome σ è una funzione totale, $\sigma(X)$ esiste sempre e quindi prendiamo $m=\sigma(X)$
- $a \equiv (a_0 + a_1)$: Per ipotesi induttiva, esistono m_0 e m_1 tale che $(a_0, m_0) \rightarrow m_0$ e $(a_1, m_1) \rightarrow m_1$. Dunque basta prendere $m=m_0+m_1$
- Un ragionamento simile al caso precedente può essere utilizzato per $(a_0 - a_1)$ e $(a_0 * a_1)$



Induzione ben fondata

- Induzione Matematica e Strutturale sono casi particolari di un più generale principio di prova chiamato **induzione ben fondata**
- L'induzione strutturale è efficiente perché il processo di scomporre un'espressione in sottoespressione non può procedere all'infinito.
- Estendiamo questo concetto all'induzione ben fondata introducendo il concetto di **relazione ben fondata**



Relazione ben fondata

- Una relazione binaria $<$ su un insieme A è **ben fondata** se
 1. non esistono catene discendenti infinite $\dots < a_i < \dots a_1 < a_0$, oppure,
 2. se ogni sottoinsieme Q di A ha un elemento minimale, cioè un elemento m di Q tale che $\forall b < m. b \notin Q$ (**Provate che 1 \equiv 2** soluzione su Winskel)
- Se " $a < b$ " si dice che a è un predecessore di b .
- Si noti che $<$ è irreflessiva, (cioè, $a < a$ non vale per nessun a).
- Esempi:
 - Sui numeri naturali la relazione "**maggiore**" è ben fondata, ma "**maggiore uguale**" non lo è perché ammette catene infinite
 - Su Bexp , la relazione " $<$ " **sottoespressione** è ben fondata, per esempio $a \leq 5 < (a \leq 5) \wedge (b \leq 4)$



Principio di Induzione ben fondata

- **Principio di induzione:** Se $P(x)$ è vera, assumendo che $P(y)$ è vera per ogni $y < x$ allora $P(a)$ è vera per ogni a in A
- Esempio 1: Si consideri $<$ come la relazione **successore** $n < m$ **sse** $m=n+1$ sugli interi non negativi. Il principio di induzione ben fondata coincide con l'induzione matematica
 - Dominio sintattico: **numeri naturali**
 - Relazione ben fondata: **Essere successore di**
- Esempio 2: Si consideri $<$ come la relazione tra espressioni aritmetiche tale che $a < b$ **sse** a è una **immediata sotto-espressione di** b , il principio di induzione ben fondata coincide con l'induzione strutturale
 - Dominio sintattico: **Aexp**
 - Relazione ben fondata: **Essere sottoespressione di**



Uso dell'induzione ben fondata

- L'induzione ben fondata è il più importante principio per la dimostrazione della terminazione dei programmi.
- Solitamente, in un programma le incertezze riguardo la terminazione nascono a causa dei cicli o della ricorsione.
- Se si dimostra che l'esecuzione di un ciclo o la ricorsione in un programma decrementa un valore in un insieme ben fondato, alla fine il programma deve terminare
- Esercizio da svolgere:
 - Si consideri il seguente programma di Euclide per il MCD scritto in IMP
$$E \equiv \text{While } \neg (M=N) \text{ do if } M \leq N \text{ then } N := N-M \text{ else } M := M-N$$
 - Si provi per induzione ben fondata che per ogni stato σ
$$\sigma(M) \geq 1 \ \& \ \sigma(N) \geq 1$$
 implica che esiste σ' tale che $\langle E, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$



- L'induzione matematica è utile per provare proprietà sui numeri.
 - Una proprietà $P(n)$ è vera per tutti i numeri naturali n se $P(0)$ è vera (base) e se, per qualsiasi m , $P(m)$ vera implica $P(m+1)$ vera.
 - Con questo metodo si è provato che $\forall e \in \text{Aexp. } L(e) = OP(e) + 1$
- L'induzione strutturale è una tecnica utile per provare proprietà di insiemi **sintattici**, usando una prova che segue dalla struttura della grammatica che definisce l'insieme stesso.
 - Una proprietà $P(x)$ è vera per tutti gli elementi x dell'insieme se è vera per gli oggetti elementari (che non hanno sottotermini) dell'insieme e se, per un certo termine s , $P(r)$ vale per tutti gli immediati sottotermini r di s .
 - Con questo metodo abbiamo provato che $\rightarrow_{\text{Aexp}}$ è deterministica
- E per le proprietà semantiche...



- A volte, l'induzione strutturale non è sufficiente per provare proprietà della semantica operativa (ad esempio quando non esiste una relazione ben fondata su sottoespressioni)
 - Per esempio, con la sola induzione strutturale non è possibile provare che \rightarrow_{COM} è deterministica
- Il motivo è che l'induzione strutturale si basa sulla struttura dei termini, ma esistono termini la cui semantica dipende da termini dello stesso tipo
 - Si pensi per esempio alla semantica del comando **while**
- In questi casi è utile ragionare per induzione sulla struttura delle **derivazioni** invece che sulla struttura delle regole (in pratica se non utilizzo l'informazione aggiuntiva della derivazione, i metodi di prova precedente falliscono)
- Una sottoderivazione di una derivazione è una derivazione utilizzata all'interno dell'albero di derivazione.



Esempio di derivazione

- Dato un termine di un linguaggio il suo significato dipende dalle regole di derivazione semantiche
- Per esempio, per valutare il termine $y := y + (3 * (5 + 4))$, si costruisce un albero di derivazione utilizzando le regole di valutazione per i numeri, la somma, la moltiplicazione ed infine per l'assegnamento di variabili che restituisce la sua valutazione (il nuovo stato).
- Per valutare l'assegnamento dunque si considera la regola dell'assegnamento su una **istanza** della regola.
- Si ricorda che una istanza di una regola è formata da un insieme di **premesse** (x_1, \dots, x_n tutte istanziate) e una **conclusione** (**y**). Per cui una istanza è di solito indicata con una coppia ($\{x_1, \dots, x_n\} / y$).
- Per esempio, sia $\sigma_0(x) = 0$ per ogni locazione x e $\sigma = \sigma_0[27/x]$, una istanza della regola di assegnazione è

$$\frac{\langle y + (3 * (5 + 4)), \sigma_0 \rangle \rightarrow 27}{\langle y := y + (3 * (5 + 4)), \sigma_0 \rangle \rightarrow \sigma}$$



Derivazione di un termine

- Data una istanza di una regola ($\{x_1, \dots, x_n\} / y$), una **derivazione d** di y è una coppia ($\{d_1, \dots, d_n\} / y$) tale che d_i è una derivazione di x_i ($d_i \Vdash x_i$) per ogni i .
- In pratica, una derivazione **d** è ottenuta dall'albero di derivazione guardando solo ai primi due livelli.
- Chiaramente, per un assioma ($;$ / y), l'istanza dell'assioma coincide con la derivazione. Formalmente $d = (\emptyset / y) \Vdash y$
- Talvolta si omette "d" e si usa $\Vdash y$ per indicare che esiste una derivazione di un termine y
 - $\Vdash \langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ significa che $\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ è derivabile nella semantica operativa



$\rightsquigarrow_{\text{Com}}$ is Deterministic

◆ **Theorem 3.11**

$$P(c) = \forall \sigma_0, \sigma, \sigma'. \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma \ \& \ \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma' \Rightarrow \sigma = \sigma'$$

◆ **Derivation d of execution**

$$d \Vdash \langle c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'$$

– $\langle c, \sigma_0 \rangle$ terminates with state σ

◆ **Induction hypothesis**

$$P(d) = \forall \sigma_0, \sigma, \sigma'. d \Vdash \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma \ \& \ \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma' \Rightarrow \sigma = \sigma'$$

◆ **Define $d' < d$ if d' is a sub-derivation of d**

$$\frac{\forall d' < d. P(d') \Rightarrow P(d)}{\forall d. P(d)}$$



! $\rightsquigarrow_{\text{Com}}$ è deterministica

- Teorema
 $P(c) = \forall \sigma_0, \sigma_1, \sigma', \langle c, \sigma_0 \rangle \rightarrow \sigma \ \& \ \langle c, \sigma_0 \rangle \rightarrow \sigma' \text{ allora } \sigma = \sigma'$
- Base della prova: mostrare l'asserto è valido per gli assiomi.
- Passo induttivo: mostrare che se l'asserto è valido per le sottoderivazioni, allora è valido per la derivazione finale.
- Dunque, dobbiamo provare una proprietà di un comando sulle derivazioni.



$\rightsquigarrow_{\text{Com}}$ is Deterministic

◆ Given

$$P(d) = \forall \sigma_0, \sigma, \sigma' \quad d \Vdash \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma \ \& \ \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma' \Rightarrow \sigma = \sigma'$$

◆ Show

$$\forall d' \prec d. P(d') \Rightarrow P(d)$$

◆ Show by cases that

$$\frac{\begin{array}{l} d \Vdash \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma \\ \forall d' \prec d. P(d') \\ \exists d_1. d_1 \Vdash \langle c, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma' \end{array}}{\sigma = \sigma'}$$

Ho bisogno di questa informazione aggiuntiva per provare che Com è det.!!!



$\rightsquigarrow_{\text{Com}}$ is Deterministic

◆ $c \equiv \text{skip}$

$$\bullet d = d_1 = \langle \text{skip}, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma_0$$

◆ $c \equiv X := a$

$$d = \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \langle a, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow n \end{array}}{\langle X := a, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma_0[n/X]} \quad d_1 = \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \langle a, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow n_1 \end{array}}{\langle X := a, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma_0[n_1/X]}$$

$$\bullet \text{ Since } n = n_1 \text{ we have } \sigma = \sigma_0[n/X] = \sigma_0[n_1/X]$$

Abbiamo già provato che la valutazione di Aexp è deterministica



$\rightsquigarrow_{\text{Com}}$ is Deterministic

◆ $c \equiv c_0; c_1$

$$d^0 = \frac{\vdots}{\langle c_0, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma_1} \quad d^1 = \frac{\vdots}{\langle c_1, \sigma_1 \rangle \rightsquigarrow \sigma}$$
$$d = \frac{\quad}{\langle c_0; c_1, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma}$$

$$d_1 = \frac{\frac{\vdots}{\langle c_0, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma_1'}{\quad} \quad \frac{\vdots}{\langle c_1, \sigma_1' \rangle \rightsquigarrow \sigma'}}{\langle c_0; c_1, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$

◆ By induction hypothesis $P(d^0)$ and $P(d^1)$

So, $\sigma_1 = \sigma_1'$, and $\sigma = \sigma'$

◆ Similar for **if** and **while**

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.