

# Capitolo 1

## Linee di trasmissione

### 1.1 Circuiti a costanti concentrate e distribuite

Nei circuiti a costanti concentrate le proprietà elettriche del circuito (resistenza, induttanza, capacità ecc.) si considerano tutte contenute nei relativi componenti circuitali; i collegamenti tra un componente e l'altro si suppongono fatti con conduttori ideali, cioè privi di resistenza, induttanza o capacità.

Questa schematizzazione è valida fino a che le dimensioni geometriche dei componenti e le lunghezze dei collegamenti rimangono piccole rispetto alle lunghezze d'onda associate ai segnali presenti nel circuito, come definito più avanti.

### 1.2 Linee di trasmissione

Una linea di trasmissione è invece un sistema di conduttori idealmente paralleli con sezione e caratteristiche costanti su tutta la lunghezza, le cui proprietà elettriche rilevanti sono proprio quelle distribuite sulla lunghezza.

Due esempi di linee di trasmissione molto diffuse e utilizzate sono la linea bifilare ed il cavo coassiale:

1) linea bifilare: due conduttori rettilinei, di solito a sezione cilindrica, tenuti separati e paralleli da un supporto isolante (fig. 1.1)

2) cavo coassiale: un conduttore centrale cilindrico che corre coassiale ad un secondo conduttore tubolare esterno, detto *schermo*; lo spazio tra i due conduttori è riempito da un materiale isolante (tipicamente polietilene o teflon) (fig. 1.2).

### 1.3 Circuito equivalente di una linea di trasmissione

Ogni linea di trasmissione può essere considerata composta da infiniti elementi di lunghezza infinitesima  $\Delta x$ , ciascuno equivalente ad un circuito contenente una induttanza, capacità, resistenza e conduttanza infinitesime, come illustrato in fig. 1.3. I simboli  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $G$ ,  $Z$  e  $Y$  indicano in questa figura (ed in questo capitolo) rispettivamente induttanza, capacità, resistenza, conduttanza, impedenza ed ammettenza per unità di lunghezza del sistema di conduttori che costituiscono la linea.

In alternativa, l'impedenza  $Z\Delta x$  propria di ognuno degli elementi infinitesimi della linea può essere associata per metà ( $Z\Delta x/2$ ) al conduttore superiore e per l'altra



Figura 1.1: Linea bifilare.



Figura 1.2: Cavo coassiale.

metà al conduttore inferiore. I calcoli svolti nei paragrafi seguenti sono identici e portano agli stessi risultati in entrambi i casi. La situazione riportata in fig. 1.3 corrisponde meglio al caso del cavo coassiale, almeno nel caso del cavo ideale, in cui i campi elettrici e magnetici sono confinati completamente all'interno della cavità cilindrica del conduttore di schermo. Di conseguenza questo conduttore rimane esternamente una superficie equipotenziale ed è possibile collegarne insieme le due estremità senza influire in alcun modo sul comportamento dei segnali. La descrizione alternativa rispecchia invece la simmetria della linea di trasmissione bifilare e fa risaltare il fatto che il campo elettrico è distribuito sulla lunghezza di entrambi i conduttori. Non è possibile collegare insieme le due estremità di uno dei conduttori di una linea bifilare senza alterarne il funzionamento.

#### 1.4 Correnti e tensioni lungo la linea

Per scrivere le equazioni per le tensioni e le correnti lungo la linea si utilizzano le convenzioni riportate in fig. 1.3: la coordinata  $x$  individua la posizione lungo la linea ed ha direzione positiva verso destra; una corrente è positiva quando scorre verso destra nel conduttore superiore (e verso sinistra in quello inferiore); le tensioni indicano il potenziale del conduttore superiore rispetto a quello inferiore.

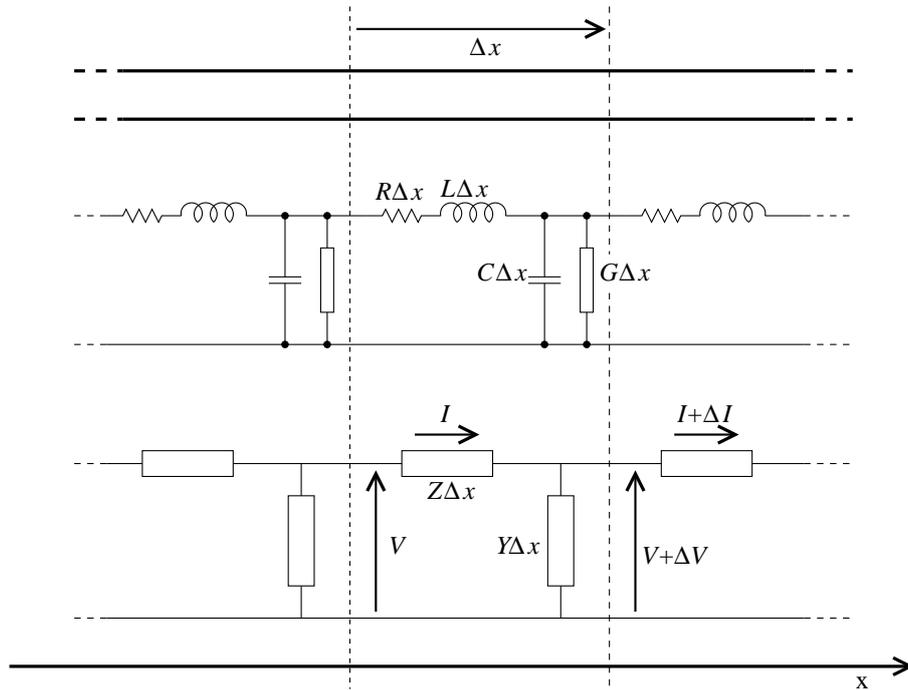


Figura 1.3: Circuito equivalente di una linea di trasmissione.  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $G$  sono induttanza, capacità, resistenza e conduttanza per unità di lunghezza.  $Z = R + j\omega L$  e  $Y = G + j\omega C$  sono impedenza e ammettenza per unità di lunghezza. La corrente  $I$  è positiva quando scorre verso destra nel conduttore superiore; la tensione  $V$  è quella del conduttore superiore rispetto a quello inferiore.

Con queste convenzioni, applicando la legge di Ohm generalizzata ai circuiti in corrente alternata, si possono scrivere per ciascuna cella infinitesima che compone la linea due equazioni:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -IZ \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -VY \quad (1.1)$$

dove  $Z = R + j\omega L$  e  $Y = G + j\omega C$ <sup>1</sup>.  $V$  ed  $I$  sono due quantità complesse che rappresentano ampiezza e fase di tensione e corrente lungo la linea per una componente alternata di frequenza angolare  $\omega$ .

Derivando entrambe le equazioni rispetto alla  $x$  e sostituendo si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -Z \frac{\partial I}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -Y \frac{\partial V}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - ZYV = 0 \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - ZYI = 0 \quad (1.3)$$

Le (1.3) sono equazioni differenziali lineari del secondo ordine ed hanno soluzioni:

$$V(x) = V_1 e^{+\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x} \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>In elettrotecnica ed in elettronica l'unità immaginaria è indicata di solito con la lettera  $j$ , in quanto la  $i$  è usata di preferenza per indicare la corrente.

$$I(x) = I_1 e^{+\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x} \quad (1.5)$$

con

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (1.6)$$

e  $V_{1,2}, I_{1,2}$  costanti determinate dalle condizioni alle estremità della linea.

## 1.5 Cavo coassiale

Nel caso del cavo coassiale  $L$  e  $C$  possono essere calcolati con relativa facilità: <sup>2</sup>

$$C = \epsilon \cdot \frac{2\pi}{\log(D_2/D_1)} \quad (1.7)$$

$$L = \mu \cdot \frac{\log(D_2/D_1)}{2\pi} \quad (1.8)$$

Le quantità  $D_1$  e  $D_2$  rappresentano rispettivamente il raggio esterno del conduttore interno ed il raggio interno del conduttore esterno;  $\epsilon$  e  $\mu$  sono la permeabilità dielettrica e magnetica del materiale isolante che riempie lo spazio tra i due conduttori.

Nel caso di una linea con geometria diversa da quella del cavo coassiale, lo schema di figura 1.3 continuerà ad essere valido, ma i valori dei parametri  $L$  e  $C$  saranno dati da espressioni diverse dalle (1.7) e (1.8).

## 1.6 Linea senza perdite

Nel caso ideale di una linea senza perdite si avrà  $R = 0$  e  $G = 0$  e quindi

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (1.9)$$

Sostituendo in questa espressione il valore di  $C$  ed  $L$  per il cavo coassiale (eq. 1.7 e 1.8) si ottiene:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (1.10)$$

Nel caso che il materiale isolante sia il vuoto:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c} \quad (1.11)$$

dove  $\mu_0$ ,  $\epsilon_0$  e  $c$  sono la permeabilità dielettrica e magnetica e la velocità della luce nel vuoto. <sup>3</sup>

L'espressione completa della tensione lungo la linea, inserendo esplicitamente anche la dipendenza dal tempo, è quindi:

$$V(x, t) = V_1 e^{j(\omega t + \beta x)} + V_2 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (1.12)$$

<sup>2</sup>A rigore l'espressione per  $L$  vale solo per il caso di due conduttori tubolari coassiali di spessore molto sottile.

<sup>3</sup>È possibile realizzare un tale cavo inserendo tra i due conduttori coassiali una striscia elicoidale di materiale isolante di spessore molto sottile, in modo che il dielettrico sia formato praticamente quasi solo da aria.

e analogamente per la corrente:

$$I(x, t) = I_1 e^{j(\omega t + \beta x)} + I_2 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (1.13)$$

Queste due espressioni rappresentano la tensione e la corrente di due segnali con andamento sinusoidale in funzione del tempo e dello spazio, che si propagano lungo la linea con velocità

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \frac{\omega}{\beta} \quad (1.14)$$

Il primo termine ( $V_1, I_1$ ), con velocità negativa, prende il nome di onda regressiva, o riflessa, e si propaga da destra verso sinistra; il secondo termine ( $V_2, I_2$ ), con velocità positiva, prende il nome di onda progressiva, o diretta e si propaga da sinistra verso destra.

Nel caso di una linea ideale senza perdite si ha

$$|v| = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1.15)$$

cioè la stessa velocità che avrebbe un'onda elettromagnetica che si propagasse nel mezzo dielettrico che riempie lo spazio tra i due conduttori.

In un dielettrico ideale  $\mu$  ed  $\epsilon$  sono costanti, in particolare non dipendono da  $\omega$ . In questo caso, in un segnale composto dalla sovrapposizione di più componenti di frequenze diverse, ciascuna componente avrà la stessa velocità  $v$ , dando luogo ad una propagazione senza dispersione. In queste condizioni velocità di fase e velocità di gruppo coincidono e la velocità data dalla (1.15) sarà valida per qualsiasi tipo di segnale.

## 1.7 Lunghezza d'onda

Un segnale con andamento sinusoidale si ripete lungo la linea con periodicità  $\beta x = 2\pi$ . La quantità  $\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi v/\omega$  prende il nome di lunghezza d'onda.

Per un elemento circuitale di lunghezza  $l \ll \lambda$  si potranno considerare le tensioni e le correnti uniformi su tutto l'elemento e ignorare le variazioni tra un punto ed un altro. Si potrà cioè considerare l'elemento come *puntiforme* e supporre le proprietà elettriche *concentrate* tutte nel punto. La condizione  $l \ll \lambda$  equivale alla condizione  $t \ll \tau$ , dove  $\tau = 2\pi/\omega$  è il periodo del segnale e  $t = l/v$  è il tempo necessario a percorrere la lunghezza  $l$ : un circuito può essere considerato a *costanti concentrate* fino a che il tempo di propagazione dei segnali da un punto ad un altro è trascurabile rispetto ai periodi propri delle componenti di frequenza più alta nei segnali stessi.

## 1.8 Linea con perdite. Condizioni di Heaviside

Nel caso di una linea con perdite ( $R, G \neq 0$ ) si ha:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (1.16)$$

In generale questa condizione comporta che la velocità di propagazione sia funzione della frequenza e quindi che si abbia dispersione. Nel caso particolare che le due

quantità complesse  $R + j\omega L$  e  $G + j\omega C$  abbiano lo stesso argomento, cioè si abbia  $L/R = C/G$  (condizioni di Heaviside), si ottiene  $\alpha = \sqrt{RG}$  e  $\beta = \omega\sqrt{LC}$  e quindi ancora velocità costante e propagazione non dispersiva, anche se si tratta di una linea non ideale.

Il termine  $\alpha$  descrive l'attenuazione del segnale lungo la linea per effetto delle perdite:

$$V(x, t) = V_1 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} + V_2 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (1.17)$$

Il primo termine rappresenta un segnale che si propaga da destra verso sinistra e che si attenua quindi procedendo verso la direzione negativa delle  $x$ . Indicando con  $V_0$  l'ampiezza del segnale nell'origine, si ha rispettivamente, per le componenti di onda regressiva e progressiva:

$$\left| \frac{V(x)}{V_0} \right| = e^{\pm \alpha x} \quad (1.18)$$

Volendo esprimere l'attenuazione  $A$  in decibel:

$$A = 20 \log_{10} (e^{\pm \alpha x}) = \pm 20 \alpha x \log_{10}(e) \simeq \pm 8.6 \alpha x . \quad (1.19)$$

Se  $x$  ed  $1/\alpha$  sono espressi in metri, la quantità  $8.6 \alpha$  rappresenta l'attenuazione della linea di trasmissione in  $dB/m$  (decibel per metro).

## 1.9 Impedenza caratteristica della linea.

Dalle eq. (1.4) e (1.5) si può calcolare il rapporto tra tensione e corrente in ogni punto della linea:

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}{I_1 e^{\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x}} \quad (1.20)$$

I valori di  $I_1$  e  $I_2$  si ottengono dalla prima delle eq. (1.1):

$$I(x) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\gamma}{Z} V_1 e^{+\gamma x} + \frac{\gamma}{Z} V_2 e^{-\gamma x} \quad (1.21)$$

e confrontando questo risultato con l'eq. 1.5 (tenendo anche conto della 1.6):

$$I_1 = -\sqrt{\frac{Y}{Z}} V_1 \quad I_2 = \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_2 \quad (1.22)$$

Sostituendo questi coefficienti nella (1.20):

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \frac{V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}{-V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}} \quad (1.23)$$

Per una linea senza perdite:

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \frac{V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}{-V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}} \quad (1.24)$$

### 1.10. LINEA DI TRASMISSIONE CHIUSA SULLA SUA RESISTENZA CARATTERISTICA 1-7

Nel caso sulla linea sia presente una sola onda, ad esempio l'onda diretta, il rapporto tra tensione e corrente è:

$$\frac{V_2(x)}{I_2(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_0 . \quad (1.25)$$

Questo rapporto è costante su tutta la linea, ha le dimensioni di una resistenza e prende il nome di resistenza o impedenza caratteristica della linea. Nel caso di linea ideale senza perdite, o di linea con perdite, ma nelle condizioni di Heaviside,  $Z_0$  è reale, cioè è una resistenza pura senza componente reattiva e non dipende dalla frequenza:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0 . \quad (1.26)$$

Facendo il rapporto tra tensione e corrente per un'onda riflessa, si ottiene:

$$\frac{V_1(x)}{I_1(x)} = -\sqrt{\frac{Z}{Y}} = -Z_0 . \quad (1.27)$$

Il segno meno in questo risultato indica che ad uno stesso valore di tensione in un generico punto lungo la linea è associata, nel caso di un'onda riflessa, una corrente di valore opposto rispetto a quella di un'onda diretta.

Per il cavo coassiale

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_R}{\epsilon_0 \epsilon_R}} \log \frac{D_2}{D_1} \simeq \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} \log \frac{D_2}{D_1} \cdot 60 \Omega \quad (1.28)$$

Per i cavi coassiali comunemente in uso nella strumentazione di laboratorio ed in radiotecnica  $\log(D_2/D_1)$  è dell'ordine dell'unità,  $\mu_R = 1$  ed  $\epsilon_R \simeq 2$  (isolante polietilene o teflon). I valori di  $R_0$  che si ottengono sono dell'ordine di  $50 \dots 100 \Omega$ . Per ottenere valori di  $R_0$  di un ordine di grandezza diverso, a causa della dipendenza logaritmica che compare nella eq. 1.28, occorrerebbero valori di  $D_2/D_1$  di difficile realizzazione pratica.

### 1.10 Linea di trasmissione chiusa sulla sua resistenza caratteristica

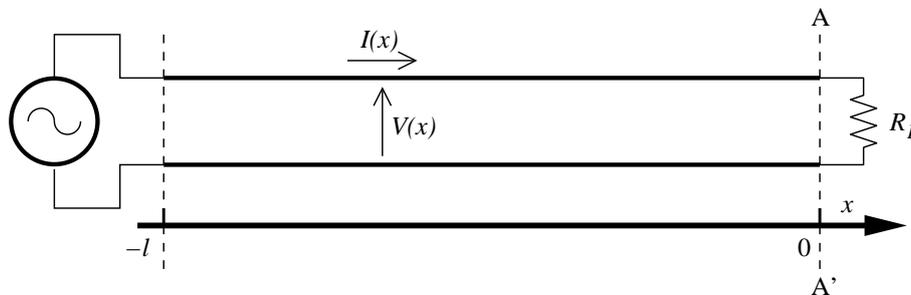


Figura 1.4: Linea terminata sulla sua resistenza caratteristica.

Nella figura (1.4) è riportato un tratto di linea di trasmissione alimentata a sinistra da un generatore e collegata a destra ad una resistenza (*terminazione*) di valore  $R_L = R_0$ . Durante la propagazione del segnale inviato dal generatore, considerando la sola onda diretta, si ha in ogni punto della linea  $V(x)/I(x) = R_0$ ; questo vale anche alla terminazione  $A - A'$  della linea, dove però deve valere anche l'ulteriore condizione  $V/I = R_L$  (che però è ancora eguale ad  $R_0$ ). Si vede quindi che le condizioni al contorno imposte dalla resistenza di terminazione sono soddisfatte da una soluzione composta dalla sola onda diretta.

### 1.11 Linea di trasmissione chiusa su una resistenza diversa dalla resistenza caratteristica. Coefficiente di riflessione.

Riferendosi sempre alla figura (1.4), supponiamo di avere  $R_L \neq R_0$ ; in presenza della sola onda diretta il rapporto  $V/I$  vale  $R_0$  in tutti i punti della linea a sinistra e fino ad  $A - A'$ , mentre deve valere  $R_L$  in  $A - A'$ . La presenza della sola onda diretta non è quindi in grado in questo caso di soddisfare alle condizioni al contorno imposte dalla resistenza di terminazione  $R_L \neq R_0$ ; il segnale che si propaga da sinistra verso destra non può essere interamente assorbito dalla resistenza  $R_L$ , ma viene in parte *riflesso*. In presenza di entrambe le onde, diretta e riflessa, il rapporto  $V/I$  è quello dato dalla eq. (1.24):

$$\frac{V(x)}{I(x)} = R_0 \frac{V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}{-V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}} \quad (1.29)$$

Convienne porre l'origine della coordinata  $x$  in  $A - A'$ ; il generatore verrà ad avere coordinata  $x = -l$ , con  $l$  lunghezza della linea. Quindi, in  $A - A'$ :

$$\frac{V(0)}{I(0)} = R_0 \frac{V_1 + V_2}{-V_1 + V_2} = R_L \quad (1.30)$$

Da questa

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \rho_v \quad (1.31)$$

La quantità  $\rho_v$  prende il nome di coefficiente di riflessione di tensione ed esprime il rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa da una terminazione e l'ampiezza dell'onda diretta.

Viceversa, dalla conoscenza del coefficiente di riflessione  $\rho_v$  è possibile determinare il rapporto

$$\frac{R_L}{R_0} = \frac{1 + \rho_v}{1 - \rho_v} \quad (1.32)$$

Nel caso più generale che la terminazione sia una impedenza complessa  $Z_L$  invece di una resistenza pura  $R_L$ , anche il coefficiente di riflessione  $\rho_v$  sarà una quantità complessa.

## 1.12 Onde stazionarie.

La sovrapposizione lungo la linea delle onde diretta e riflessa da origine ad un fenomeno di interferenza. Supponendo che la linea abbia perdite nulle, o comunque trascurabili ( $\alpha \simeq 0$ ):

$$V(x, t) = V_1 e^{j(\omega t + \beta x)} + V_2 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (1.33)$$

Spostandosi lungo la linea, ad esempio verso destra, l'onda diretta arriva con un ritardo di fase via via maggiore, mentre la fase dell'onda riflessa risulta anticipata: si attraversano una serie di regioni in cui le due onde si sovrappongono dando luogo alternativamente ad interferenza costruttiva e distruttiva. Per vedere quantitativamente questo effetto, calcoliamo

$$|V(x, t)|^2 = |e^{j\omega t}|^2 \cdot (V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}) \cdot (V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x})^* \quad (1.34)$$

Scrivendo  $V_1$  e  $V_2$  in notazione polare

$$V_1 = |V_1| e^{j\varphi} \quad , \quad V_2 = |V_2| e^{j\psi} \quad (1.35)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} |V(x, t)|^2 &= (|V_1| e^{j(\beta x + \varphi)} + |V_2| e^{-j(\beta x + \psi)}) \\ &\quad \cdot (|V_1| e^{-j(\beta x + \varphi)} + |V_2| e^{j(\beta x + \psi)}) \\ &= |V_1|^2 + |V_2|^2 + 2|V_1| \cdot |V_2| \cdot \cos(2\beta x + \varphi + \psi) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Si vede che il modulo di  $V(x, t)$  oscilla tra un massimo  $V_{max} = |V_2| + |V_1|$  ed un minimo  $V_{min} = |V_2| - |V_1|$ , corrispondenti rispettivamente ad interferenza massimamente costruttiva e distruttiva. Nel caso di riflessione completa  $V_{max} = 2|V_2|$  e  $V_{min} = 0$ . La quantità

$$SWR = \frac{|V_2| + |V_1|}{|V_2| - |V_1|} \quad (1.37)$$

prende il nome di *rapporto di onde stazionarie* (*Standing Wave Ratio*).

La distanza tra due massimi e due minimi consecutivi di  $|V|$  si ha quando la differenza di fase tra onda diretta e riflessa compie una variazione complessiva di  $2\pi$ , cioè quando  $\Delta x = \pi/\beta = \lambda/2$ .

## 1.13 Trasformazione di impedenza.

Per effetto dell'interferenza tra onda diretta ed onda riflessa descritta al par. 1.12 il rapporto tra tensione e corrente varia da punto a punto lungo la linea. Dalla eq. (1.24) si ha:

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = R_0 \frac{V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}{-V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}} \quad (1.38)$$

e poichè  $V_1 = V_2(Z_L - R_0)/(Z_L + R_0)$

$$\begin{aligned}
 Z(x) &= R_0 \frac{Z_L(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) - R_0(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x})}{-Z_L(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) + R_0(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x})} \\
 &= R_0 \frac{Z_L \cos(\beta x) - jR_0 \sin(\beta x)}{-jZ_L \sin(\beta x) + R_0 \cos(\beta x)} \\
 &= R_0 \frac{Z_L - jR_0 \tan(\beta x)}{R_0 - jZ_L \tan(\beta x)} \tag{1.39}
 \end{aligned}$$

Questo risultato ci dice che un generatore, collegato ad un tratto di linea di trasmissione di resistenza caratteristica  $R_0$  e chiusa su una impedenza  $Z_L$ , “vede” una impedenza  $Z_l = Z(-l)$  che dipende dalla lunghezza  $l$  della linea. Nel caso di linee con perdite, l’eq. 1.39 diventa

$$Z(x) = R_0 \frac{Z_L(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) - R_0(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})}{-Z_L(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) + R_0(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})} = R_0 \frac{Z_L - R_0 \tanh(\gamma x)}{R_0 - Z_L \tanh(\gamma x)}$$

Alcuni esempi:

1. Linea senza perdite chiusa in cortocircuito ( $Z_L = 0$ ):  $Z_l = jR_0 \tan(\beta l)$ . L’impedenza è una reattanza pura, che per valori di  $l$  piccoli è di tipo induttivo (fig. 1.5, curve in blu); per  $\beta l \rightarrow \pi/2$  si ha  $Z_l \rightarrow \infty$ : il generatore vede attraverso un pezzo di linea di lunghezza  $l = \pi/2\beta = \lambda/4$  il cortocircuito trasformato in un circuito aperto. Per  $l > \lambda/4$  la reattanza diventa negativa, cioè di tipo capacitivo fino a  $l = \lambda/2$ , ecc. Negli stessi grafici, in rosso, è riportata l’impedenza di una linea con perdite. In questo caso la parte reale non è nulla ed in corrispondenza di  $l = \lambda/4, 3/4\lambda$  ecc. l’impedenza non diverge più a infinito, ma diventa reale e finita.
2. Linea aperta ( $Z_L = \infty$ ):  $Z_l = -jR_0/\tan(\beta l)$  in assenza di perdite e  $Z_l = -R_0/\tanh(\gamma l)$  nel caso di una linea con perdite. La situazione è complementare a quella descritta al punto (1): un pezzo di linea corta si comporta come un condensatore; per  $l = \lambda/4$  la terminazione a circuito aperto viene trasformata in un cortocircuito ecc. (fig. 1.6).
3. La linea è lunga esattamente  $l = \lambda/2$  o un suo multiplo intero:  $Z_l = Z_L$ .

Negli esempi (1) e (2), nel caso che la linea (senza perdite) sia molto corta ( $l \ll \lambda$ ) si può sostituire a  $\tan(\beta l)$  il suo sviluppo in serie arrestato al primo ordine. Si ottiene:

1.  $Z_l = jR_0\beta l = j\sqrt{L/C} \omega\sqrt{LC} l = j\omega L l$
2.  $Z_l = jR_0/(\beta l) = j\sqrt{L/C} /(\omega\sqrt{LC} l) = 1/j\omega C l$

Quindi un tratto di linea molto corta equivale ad un elemento circuitale “concentrato”: se la linea è aperta si comporta come un condensatore, se è chiusa in cortocircuito come una induttanza, con i valori di capacità e induttanza propri del tratto di linea considerato.

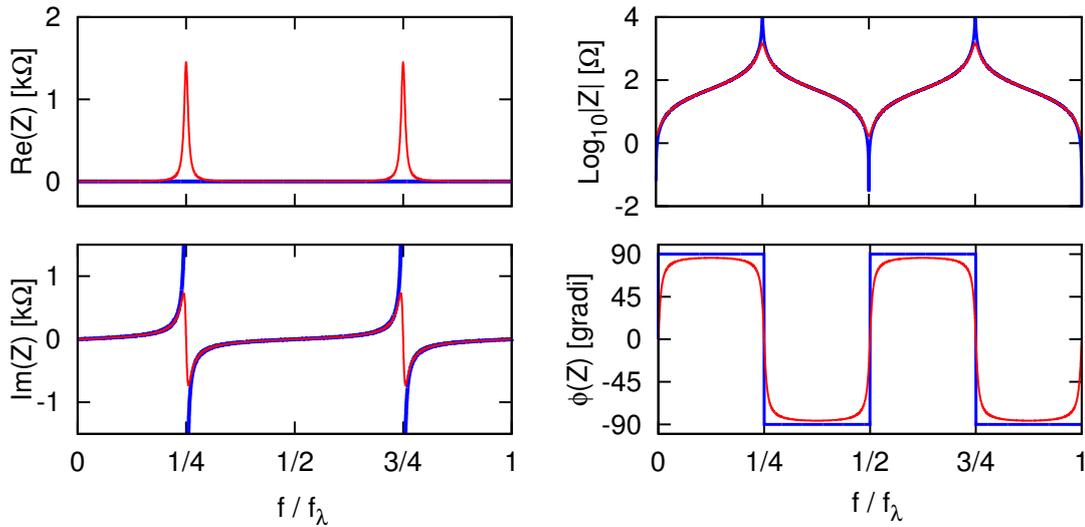


Figura 1.5: Impedenza  $Z$  in funzione della frequenza  $f$  per una linea con  $R_0 = 50 \Omega$  chiusa in cortocircuito. A sinistra è riportata la parte reale ed immaginaria, a destra modulo e fase. Le curve in blu corrispondono ad una linea senza perdite; le curve in rosso ad una linea con una perdita di  $0.2 \text{ dB/m}$  ( $\alpha = 0.023 \text{ m}^{-1}$ ). La frequenza  $f_\lambda$  è quella frequenza per cui la lunghezza d'onda  $\lambda$  è eguale alla lunghezza  $l$  della linea.

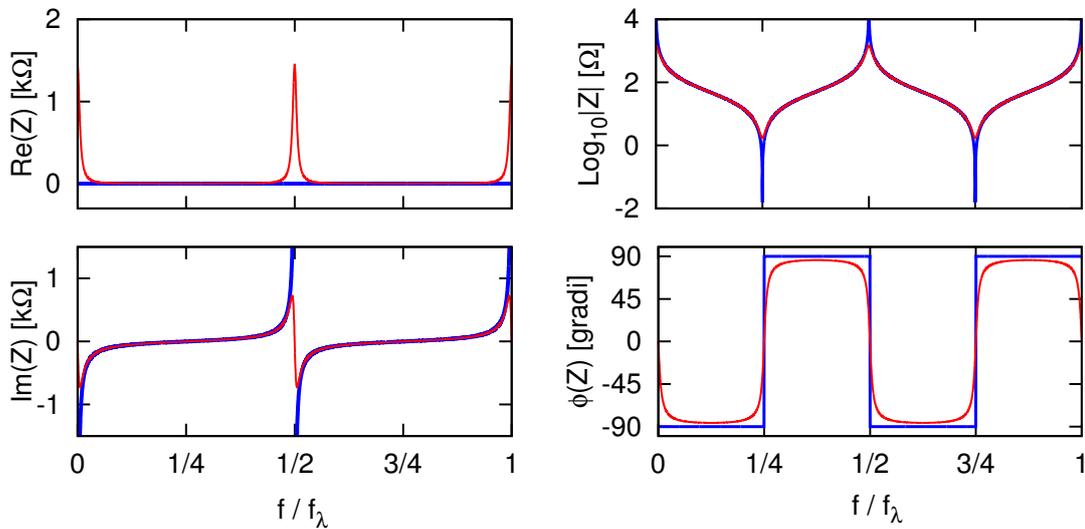


Figura 1.6: Stessi grafici della figura 1.5 nel caso che la linea sia terminata a circuito aperto.

### 1.13.1 Tensioni alle estremità della linea

Il calcolo della tensione presente al termine di una linea di trasmissione, conoscendo la tensione applicata all'ingresso e le caratteristiche e la terminazione della linea, richiede di tenere conto del fenomeno delle onde stazionarie.

Le tensioni  $V_i$  e  $V_t$ , presenti rispettivamente all'inizio ed al termine di una linea di lunghezza  $l$  e coefficiente di propagazione  $\gamma$ , risultano dalla somma dell'onda diretta  $V_2$  e dell'onda riflessa  $V_1$ :

$$V_i = V_1(0) + V_2(0) \quad V_t = V_1(l) + V_2(l) \quad (1.40)$$

dove con l'indice 0 si sono indicati i valori all'inizio della linea e con l'indice  $l$  quelli all'altra estremità. Per effetto della riflessione alla terminazione, secondo la eq. 1.31, vale la relazione

$$V_1(l) = \rho_v V_2(l) \quad (1.41)$$

mentre per effetto della propagazione tra i valori di  $V_1$  e  $V_2$  alle due estremità valgono le relazioni

$$V_2(l) = V_2(0)e^{-\gamma l} \quad V_1(0) = V_1(l)e^{-\gamma l} \quad (1.42)$$

Sostituendo le espressioni 1.41 e 1.42 nelle 1.40 si ottiene

$$\begin{aligned} V_i &= V_2(0) \left( 1 + \rho_v e^{-2\gamma l} \right) \\ V_t &= V_2(0) \left( e^{-\gamma l} + \rho_v e^{-\gamma l} \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Dividendo tra loro le 1.43 e semplificando:

$$\frac{V_t}{V_i} = \frac{1 + \rho_v}{e^{\gamma l} + \rho_v e^{-\gamma l}} \quad (1.44)$$

Per  $\rho_v = 0$ , cioè per una linea correttamente terminata, si ha:

$$\frac{V_t}{V_i} = e^{-\gamma l} \quad (1.45)$$

cioè la normale propagazione senza riflessione. Per una linea aperta ( $\rho_v = 1$ ):

$$\frac{V_t}{V_i} = \frac{2}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = \frac{2}{\cos(\beta l) (e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}) + j \sin(\beta l) (e^{\alpha l} - e^{-\alpha l})} \quad (1.46)$$

Quando  $\beta l$  diventa  $1/2 \pi$ ,  $3/2 \pi$ , ecc., il termine in coseno a denominatore si annulla e per valori di  $\alpha$  piccoli rimane

$$\frac{V_t}{V_i} = \frac{1}{j\alpha} \quad (1.47)$$

Alimentando una linea aperta con un generatore a bassa resistenza interna, in grado di mantenere una tensione  $V_i$  anche su una impedenza che tende ad un cortocircuito (vedi esempio 2 del paragrafo precedente), la tensione alla terminazione della linea può assumere valori molto elevati. Per una linea chiusa in cortocircuito ( $\rho_v = -1$ )

$$\frac{V_t}{V_i} = 0 \quad (1.48)$$

come è ovvio che sia.

## 1.14 Segnali a banda larga e a banda stretta.

Quanto detto nei paragrafi precedenti si riferisce a segnali di tipo monocromatico, cioè segnali il cui spettro di Fourier contiene una singola componente di frequenza  $f = \omega/2\pi$ . Molti segnali di interesse fisico sono invece caratterizzati da uno spettro di Fourier ricco di componenti aventi frequenze diverse. L'intervallo nello spettro di un segnale compreso tra la componente di frequenza più bassa ( $f_{min}$ ) e quella di frequenza più alta ( $f_{max}$ ) costituisce la larghezza di banda (o occupazione di banda) del segnale.

In figura (1.7) sono riportate le bande di frequenza caratteristiche di vari tipi di segnale:

1. Segnale audio:  $20Hz \div 20kHz$ . Larghezza di banda  $\simeq 20kHz$ ; rapporto  $f_{max}/f_{min} = 10^3$
2. Impulsi generati da un fotomoltiplicatore:  $20kHz \div 500MHz$ . Larghezza di banda  $\simeq 500MHz$ ; rapporto  $f_{max}/f_{min} = 2.5 \cdot 10^4$
3. Segnale televisivo in banda UHF, canale 61:  $790 \div 798MHz$ . Larghezza di banda  $= 8MHz$ ; rapporto  $f_{max}/f_{min} = 1.01$

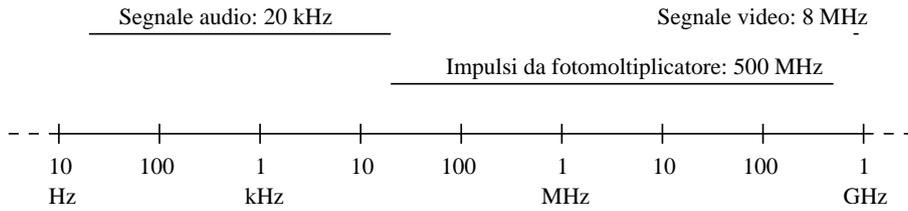


Figura 1.7: Occupazione di banda per vari tipi di segnali.

Il primo ed il secondo di questi esempi rappresentano segnali detti *a banda larga*; il terzo rappresenta un segnale *a banda stretta*. In questa classificazione l'aspetto importante non è la larghezza di banda in  $Hz$  o in  $kHz$ , ma il rapporto tra frequenza massima e minima dello spettro del segnale. Un segnale in cui questo rapporto è molto vicino ad uno, come nel terzo esempio, può essere considerato come un segnale per molti aspetti monocromatico. Le equazioni (1.33), (1.38) e (1.39) riportate nei paragrafi (1.12) e (1.13) si possono applicare al segnale del terzo esempio, a condizione che  $\beta x$  vari solo di poco nella banda di frequenze interessate. Prendendo come valore di  $x$  tutta la lunghezza  $l$  della linea e ricordando che  $\beta = \omega/v$  (eq. 1.15), la condizione richiesta diventa  $\Delta\omega l/v \ll 2\pi$ , cioè  $\Delta\omega \ll 2\pi v/l = \omega\lambda/l$  e quindi

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta f}{f} \ll \frac{\lambda}{l} \quad (1.49)$$

Se si considera una linea lunga anche solo poche lunghezze d'onda, si vede che solo il segnale riportato nel terzo esempio può soddisfare alla condizione richiesta. Le equazioni (1.33), (1.38) e (1.39) applicate ai segnali degli esempi (1) e (2) danno risultati che sono funzione di  $\omega$ , cioè diversi per ogni componente dello spettro e in genere di scarsa utilità.

### 1.15 Riflessione di un segnale a banda larga

Consideriamo come segnale a banda larga un breve impulso (fig. 1.8). Se l'impulso



Figura 1.8: Impulso di durata  $\tau$

si ripete nel tempo con cadenza  $f$  il suo spettro di Fourier contiene la frequenza fondamentale  $f$  e le armoniche  $2f$ ,  $3f$  ecc., di intensità via via decrescente. Nel caso limite di un impulso infinitamente stretto, cioè di una  $\delta$  di Dirac, tutte le frequenze armoniche hanno la stessa ampiezza. Riducendo via via la frequenza  $f$  le componenti armoniche dello spettro diventano sempre più fitte e nel caso limite di una singola  $\delta$  di Dirac, corrispondente a  $f = 0$ , si ha uno spettro continuo che contiene tutte le frequenze, tutte con la stessa ampiezza.

Supponendo che la linea sia ideale o almeno soddisfi alle condizioni di Heaviside, la propagazione avverrà senza dispersione e quindi tutte le componenti armoniche si propagheranno con la stessa velocità  $v$ ; anche l'impulso quindi si propagherà lungo la linea con velocità  $v$  senza deformarsi.

Al termine della linea ognuna delle componenti armoniche subirà una riflessione, come previsto dall'equazione (1.31). Se la resistenza  $R_L$  di terminazione della linea è una resistenza pura, cioè non contiene reattanza induttiva o capacitiva, allora il coefficiente di riflessione  $\rho_v$  non dipenderà dalla frequenza: tutte le armoniche verranno riflesse nella stessa misura e la loro combinazione nell'onda riflessa darà un impulso di forma eguale a quello originario, ma scalato in ampiezza per il coefficiente  $\rho_v$ .

Negli esempi che seguono si considerano alcuni casi di riflessione di impulsi in una linea che abbia perdite trascurabili e sia terminata su una resistenza pura. Si suppone anche che gli impulsi si susseguano con una cadenza lenta abbastanza perchè tutti i fenomeni prodotti da un impulso lungo la linea siano scomparsi prima dell'inizio dell'impulso successivo.

1)  $R_L = R_0$  ;  $\rho_v = 0$ : non si ha onda riflessa. L'impulso viene emesso dal generatore al tempo  $t = 0$ ; viaggia lungo la linea da sinistra verso destra e dopo un tempo  $t = l/v$  raggiunge la resistenza di terminazione  $R_L$  dove la sua energia viene interamente assorbita. (fig. 1.9).

2)  $R_L > R_0$  ;  $\rho_v > 0$ : quando l'impulso arriva alla resistenza di terminazione viene in parte assorbito ed in parte riflesso, generando un impulso che torna indietro verso il generatore. L'impulso riflesso ha la stessa forma ed una ampiezza pari alla frazione  $\rho_v$  dell'impulso originale. Nel caso limite  $R_L = \infty$ , si ha  $\rho_v = 1$  e l'impulso

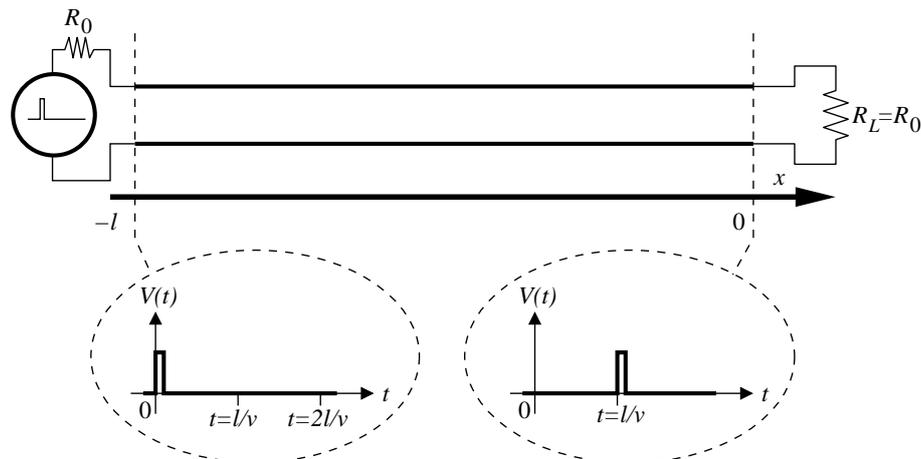


Figura 1.9: Propagazione di un impulso in una linea terminata sulla sua resistenza caratteristica. L'impulso parte dall'estremità sinistra al tempo  $t = 0$  e raggiunge l'estremità destra dopo un tempo  $t = l/v$ .

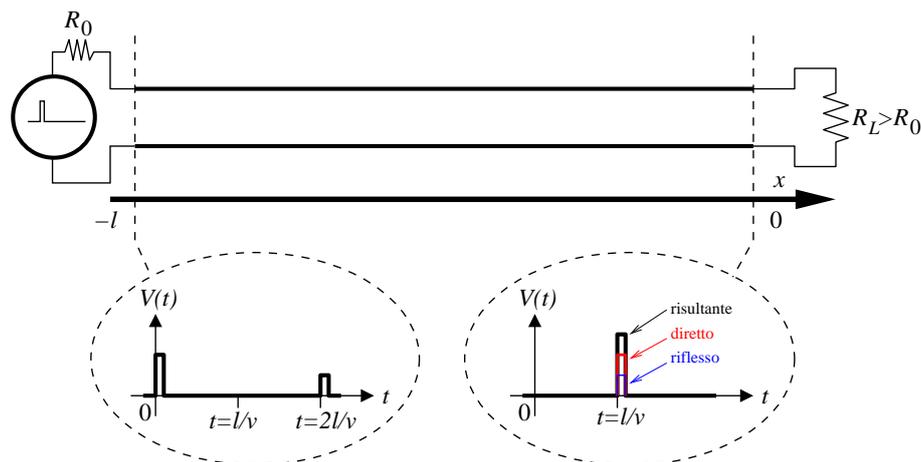


Figura 1.10: Propagazione di un impulso in una linea terminata su una resistenza  $R_L > R_0$ .

viene interamente riflesso, riportando indietro tutta l'energia verso il generatore (una resistenza di valore infinito non può assorbire alcuna energia dalla linea) (fig. 1.10).

3)  $R_L < R_0$  ;  $\rho_v < 0$ : valgono le stesse considerazioni del punto 2, con la sola differenza che l'impulso riflesso ha polarità opposta a quella dell'impulso originale. Nel caso limite  $R_L = 0$ , si ha  $\rho_v = -1$  e quindi ancora riflessione totale, ma con l'inversione della polarità dell'impulso (anche una resistenza di valore zero non può assorbire alcuna energia) (fig. 1.11).

## 1.16 Resistenza interna del generatore

Nelle figure (1.9–1.11) è stato indicato un generatore di tensione ideale, con in serie una resistenza interna pari alla resistenza caratteristica della linea; questo accorgi-

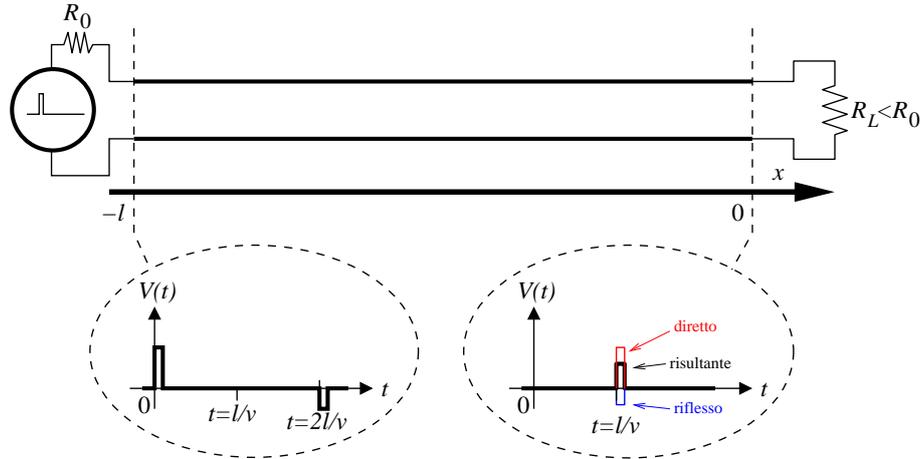


Figura 1.11: Propagazione di un impulso in una linea terminata su una resistenza  $R_L < R_0$ .

mento è importante, anche nella pratica di laboratorio, se si vuole evitare che un impulso riflesso, una volta tornato all'inizio della linea di trasmissione, venga riflesso nuovamente, dando luogo al fenomeno delle riflessioni multiple.

In tutti e tre i casi se il generatore invia un impulso di ampiezza  $V_G$ , si ha una ampiezza  $V_i = V_G/2$  all'estremità sinistra della linea. Infatti in presenza della sola onda diretta la linea si presenta come una resistenza di valore  $R_0$ , che forma un partitore con rapporto 1/2 con la resistenza  $R_0$  del generatore. All'estremità destra, al termine della linea, il segnale ha ampiezza

$$V_e = V_i \cdot (1 + \rho_v) = \frac{V_G}{2} \cdot \left(1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}\right) = V_G \cdot \frac{R_L}{R_L + R_0} \quad (1.50)$$

secondo la legge del normale partitore resistivo. Quindi *un generatore con impedenza interna  $R_0$  collegato ad una linea di trasmissione con impedenza caratteristica  $R_0$  appare al suo carico come se la linea non ci fosse*, a parte il ritardo nella propagazione del segnale ed eventuali attenuazioni nel caso di linea con perdite.

Questa è la ragione per cui nella strumentazione di laboratorio le impedenze interne degli apparecchi sono per lo più normalizzate al valore  $50 \Omega$  e si usano per i collegamenti cavi coassiali con impedenze caratteristiche di  $50 \Omega$ .

## 1.17 Riflessione di un segnale a gradino

È interessante riesaminare le situazioni descritte nel paragrafo (1.15) nel caso che il generatore invii un segnale "a gradino":  $V = 0$  per  $t < 0$ ,  $V = V^+$  per  $t \geq 0$  (Fig. 1.12). All'istante  $t = 0$  e negli istanti immediatamente successivi il rapporto tra tensione e corrente all'inizio della linea è  $V/I = R_0$  e sulla linea è presente la sola onda diretta. La corrente erogata dal generatore non può dipendere da quello che è collegato all'altra estremità della linea prima che sia trascorso un tempo  $t = 2l/v$ .

Il fronte del segnale a gradino viaggia lungo la linea per il tempo  $l/v$ , giunge all'altra estremità, viene riflesso a seconda delle condizioni della terminazione e dopo un altro tempo  $l/v$  ritorna al generatore.

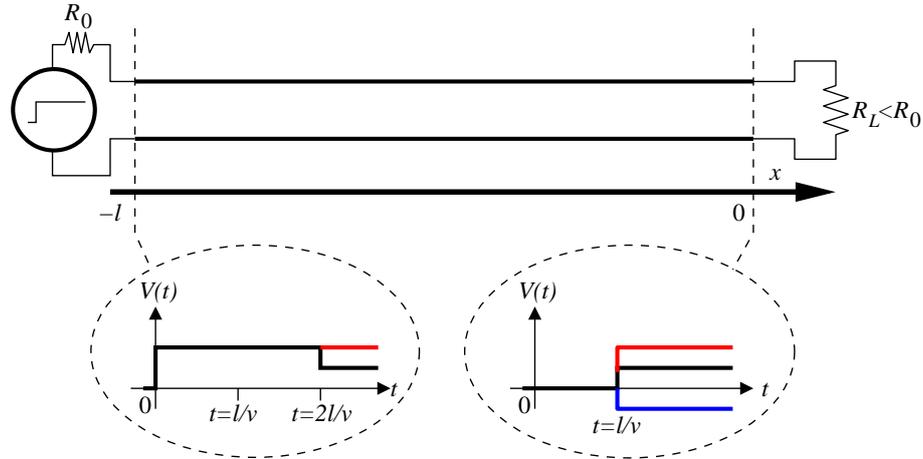


Figura 1.12: Riflessione di un segnale a gradino. I due grafici in tratto nero continuo indicano  $V(t)$  all’inizio e alla fine della linea. I grafici in rosso rappresentano l’andamento di  $V(t)$  se non ci fosse riflessione; il grafico in blu rappresenta il segnale riflesso.

A questo punto all’inizio della linea si ha la sovrapposizione dei due segnali diretto e riflesso:

$$\frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V^+ + \rho_v V^+}{V^+/R_0 - \rho_v V^+/R_0} = R_0 \frac{1 + \rho_v}{1 - \rho_v} = R_L . \quad (1.51)$$

Quindi una resistenza  $R_L$  collegata alla fine di un tratto di linea di trasmissione ideale viene vista (ovviamente) come una resistenza di valore  $R_L$  dal generatore collegato all’inizio della linea, ma solo dopo il tempo  $t = 2l/v$ . Prima di questo tempo il generatore “vede” la resistenza  $R_0$ .

In questo esempio l’analisi della sovrapposizione dei segnali diretto e riflesso risulta particolarmente semplice perchè i segnali sono costanti nel tempo, a parte la variazione all’istante  $t = 0$  da  $0$  a  $V^+$ ; in pratica, per  $t \geq 0$  si tratta di una corrente continua.

