

Capitolo 1

Fluidi

1.1 Fluidi ideali

1.1.1 Equazione di Continuità

[...]

1.1.2 Punti di vista Lagrangiano ed Euleriano

In un dato sistema di riferimento, l'insieme di tutte le posizioni occupate dagli elementi di un sistema continuo ad un determinato istante t , è la *configurazione* C del sistema all'istante considerato. Assieme alla configurazione C , variabile nel tempo, possiamo considerare una configurazione *di riferimento* C^* . Ad ogni punto di C^* , corrisponde una particella del sistema, per cui è possibile esprimere le posizioni della particelle di C in funzione della configurazione di riferimento. Se OP è il raggio vettore di una qualsiasi particella P nel sistema C , allora sarà:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OP}(t, P^*) \quad (1.1)$$

in cui P^* è il punto corrispondente a P nella configurazione C^* .

Se indichiamo con x_i le coordinate nel sistema di riferimento solidale a C^* e con ξ_i quelle del sistema C le (1.1) equivalgono alle equazioni nelle coordinate:

$$x_i = x_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (1.2)$$

Se il moto è regolare, allora per qualunque istante t , le funzioni al secondo membro della (1.2) dovranno soddisfare le seguenti condizioni:

1. Dovranno essere continue con le derivate prime e seconde continue;
2. Biunivoche nella corrispondenza tra P e P^*
3. Dovrà essere positivo il determinante dello Jacobiano:

$$D = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right)$$

La prima condizione ci dice che non ci sono lacerazioni o compressioni; la terza ci dice che si passa con continuità da C^* a C . Infatti se i sistemi coincidono, lo Jacobiano sarà: $D = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) = \det(\delta_{ij}) = 1$. Se è vera la seconda condizione, allora questo sarà sempre vero.

Le coordinate ξ_i sono coordinate che, istante per istante, etichettano la singola particella di C e sono dette *coordinate Lagrangiane* e la configurazione C è detta la *configurazione istantanea* del sistema.

La terza condizione, assicura che le (1.2) siano invertibili, e dunque ci sarà una corrispondenza biunivoca fra le particelle in C e in C^* . Questo non vuol dire che le traiettorie non si possano intersecare, ma solo che due particelle non possano occupare contemporaneamente la stessa posizione. Dunque, potremo scrivere anche:

$$\xi_i = x_i(t, x_1, x_2, x_3) \quad (1.3)$$

L'equazione (1.2) definisce, istante per istante, la posizione di ciascuna particella etichettata dalle coordinate ξ_i e quindi descrive il moto dell'intero sistema particella per particella (punto di vista Lagrangiano). L'equazione (1.3), invece, definiscono quale particella passa per il punto di coordinate x_i nell'istante t (punto di vista *Euleriano*). Si noti che, mentre le ξ_i sono definite in un insieme C^* fisso, le x_i sono definite in un campo dello spazio variabile con il tempo.

1.1.3 Derivata locale e sostanziale

Le derivate temporali:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial t}; \quad \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{OP}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (1.4)$$

rappresentano la velocità e l'accelerazione di una generica particella del continuo rispetto al sistema di riferimento dal punto di vista Lagrangiano e dunque saranno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\xi_i, t) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\xi_i, t)$$

Le corrispondenti grandezze Euleriane si ottengono sostituendo le ξ_i tramite le (1.3) e eseguendo le differenziazioni. Dunque possiamo definire la velocità Euleriana:

$$\mathbf{e} \equiv [\mathbf{v}(\xi_i, t)]_{\xi_i = \xi_i(x_i, t)} \equiv \mathbf{e}(x_i, t)$$

$$e_i(x_i, t) \equiv \left[\frac{\partial x_i}{\partial t} \right]_{\xi_i = \xi_i(x_i, t)} \quad (1.5)$$

che definisce la distribuzione istantanea delle velocità in C all'istante t .

Una qualsiasi quantità Q scalare o vettoriale deve poter essere espressa in entrambe le forme a seconda che si mettano in evidenza la dipendenza dalle variabili Euleriane o Lagrangiane:

$$\bar{q}(\xi, t) = [q(x, t)]_{x_i = x_i(\xi, t)}; \quad q(x, t) = [\bar{q}(\xi, t)]_{\xi_i = \xi_i(x_i, t)} \quad (1.6)$$

Della grandezza Q si possono considerare due tipi di derivata temporale, e di ciascuno di essi le forme Lagrangiane ed Euleriane. A partire dalla derivata parziale:

$$q_t \equiv \frac{\partial q}{\partial t} \equiv \partial_t q \quad (1.7)$$

possiamo considerare la derivata totale:

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{\xi_i = \xi_i(x_i, t)} = \partial_t q + \frac{\partial q}{\partial x_i} e_i \quad (1.8)$$

Le (1.7) e (1.8) rappresentano, in forma Euleriana, la *derivata temporale locale* e la *derivata sostanziale* della grandezza Q . Le analoghe derivate, costruite a partire dalla espressione Lagrangiana $\bar{q}(\xi, t)$ sono:

$$\dot{\bar{q}} \equiv \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi_i} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)_{x_i = x_i(\xi_i, t)} = \partial_t \bar{q} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi_i} v_i \quad (1.9)$$

avendo definito:

$$v_i \equiv - \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)_{x_i = x_i(\xi_i, t)} \quad (1.10)$$

Applicando la (1.8) alla velocità Euleriana $\mathbf{e}(x, t)$, troviamo l'accelerazione Euleriana $\mathbf{a}(x, t)$:

$$\begin{aligned} a_k \equiv \dot{e}_k &= \frac{\partial e_k}{\partial t} + \frac{\partial e_k}{\partial x_i} e_i \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + (\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{e} \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.1.4 Equazione di Eulero

Consideriamo un volume V nel fluido soggetto alle forze di pressione. La forza che agisce sulla superficie S che circonda il volume considerato sarà:

$$\mathbf{F} = - \int_S P \mathbf{n} dS \quad (1.12)$$

Possiamo trasformare l'integrale (1.12) in un integrale di volume usando il teorema del gradiente e uguagliare la forza alla massa per l'accelerazione locale (Euleriana):

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla P \quad (1.13)$$

Applicando la (1.11) otteniamo:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{e} = -\frac{\nabla P}{\rho} \quad (1.14)$$

Se il fluido è in un campo di forze di volume, per es. il campo gravitazionale, alle forze di pressione si aggiungeranno le forze di volume $\rho \mathbf{g} dV$, dunque l'equazione (1.14) di Eulero (1755), diventa:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{e} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} \quad (1.15)$$

In queste espressioni non si è tenuto conto delle eventuali forze di attrito né della conducibilità termica del fluido. Una tale descrizione, in cui l'attrito e la dissipazione termica sono ininfluenti, definisce un *fluido ideale*.

1.1.5 Moto adiabatico

in un fluido ideale, la conduzione del calore e dunque gli scambi di energia termica fra le parti di fluido sono ininfluenti. Il moto, pertanto, sarà adiabatico e le variazioni di entropia saranno nulle. Considerando le grandezze specifiche (per unità di massa):

$$\frac{ds}{dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \quad (1.16)$$

che è una equazione di continuità per l'entropia. Usando la relazione che lega l'entropia all'entalpia: $dh = Tds + Vdp = Tds + dp/\rho$ e considerando che $ds = 0$ otteniamo

$$\nabla h = \nabla P/\rho$$

che, sostituito nell'equazione di Eulero dà:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla h \quad (1.17)$$

Applicando la formula vettoriale:

$$\frac{1}{2} \nabla(v^2) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.18)$$

otteniamo:

$$-\nabla \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.19)$$

che è una relazione che lega il gradiente dell'energia alla forza e alla vorticità. Se prendiamo il rotore di entrambi i membri, si ottiene un'espressione dell'equazione di Eulero che dipende solo dalla velocità; sarà:

$$\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.20)$$

1.1.6 L'equazione di Bernoulli

Oltre al metodo tradizionale per ricavare l'equazione di Bernoulli a partire dalla conservazione dell'energia in un condotto, possiamo ricavarla dall'equazione di Eulero (1.19). Infatti, se ricordiamo che:

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \vec{\nabla} U(M) \cdot \vec{\ell}$$

La proiezione lungo la direzione delle linee di flusso ℓ della (1.19), siccome ℓ è parallelo a v , sarà, tenuto conto anche dell'accelerazione di gravità:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left[\frac{1}{2} v^2 + h + gz \right] = 0 \quad (1.21)$$

da cui:

$$\frac{1}{2} v^2 + h + gz = cost \quad (1.22)$$

Tenuto conto che $dh = dp/\rho$, sarà:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gz = cost \quad (1.23)$$

che è l'equazione di Bernoulli.

Vederemo, in seguito, che l'equazione di Bernoulli, è un caso particolare di una intera classe di equazioni più generali.

1.2 Introduzione alla viscosità

Consideriamo un fluido che scorra in un canale di altezza h e trascuriamo l'effetto dalle pareti verticali. Consideriamo una lastra di questo fluido di superficie ΔS , a distanza x dal fondo del canale. La sua velocità crescerà con la distanza dal fondo, considerato che il liquido a contatto con il fondo è fermo e che in superficie c'è la massima velocità:

$$v = v_1 \frac{x}{h}$$

in cui v_1 è la velocità che si raggiunge in superficie (cioè quando $x = h$). A regime, non ci saranno accelerazioni nei vari strati di fluido, e pertanto le forze che agiranno su ciascuno strato dovranno equilibrarsi. Si trova sperimentalmente che per molti liquidi semplici (liquidi Newtoniani) il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come:

$$F = \mu \Delta S \frac{v}{h} \quad (1.24)$$

in cui μ è una costante caratteristica del fluido considerato che ha le dimensioni di

$$[\mu] = [F l l^{-2} v^{-1}] = [m l t^{-2} l l^{-2} l^{-1} t] = m l^{-1} t^{-1}$$

ed è la viscosità.

Passando al differenziale:

$$dF = \mu \frac{\partial v}{\partial x} dS \quad (1.25)$$

da cui deriva che la pressione nel fluido varia con la legge:

$$P = \frac{\partial F}{\partial S} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.26)$$

1.2.1 Legge di Poiseuille

Consideriamo un fluido che scorra in un condotto cilindrico di raggio a .

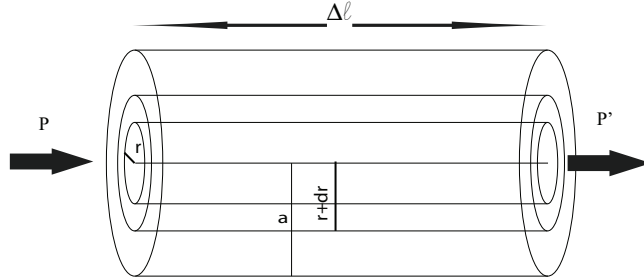


Figura 1.1: Flusso laminare in un cilindro di raggio a e lunghezza $\Delta \ell$ con una differenza di pressione fra le facce $\Delta P = P' - P$

Il flusso sia laminare e completamente governato dalla viscosità (cioè le differenti velocità all'interno del fluido siano dovute solo all'effetto della viscosità). Il fluido scorrerà nel cilindro in corone cilindriche coassiali, di raggio generico r e spessore dr . Su ciascuna corona agiranno 3 forze:

1. La risultante delle forze di pressione applicate agli estremi del cilindro;
2. la forza tangenziale derivante dalla viscosità sul mantello interno
3. la forza tangenziale derivante dalla viscosità sul mantello esterno

la prima componente sarà:

$$dF_p = 2\pi r \, dr \Delta p \quad (1.27)$$

la seconda sarà:

$$dF_{int} = \mu \frac{\partial v}{\partial r} (2\pi r \Delta l) \quad (1.28)$$

la terza, si oppone alla precedente e sarà:

$$\begin{aligned} dF_{ext} &= -\mu \Delta l [2\pi(r + dr)] \frac{\partial}{\partial r} [v(r + dr)] = \\ &= -2\pi\mu\Delta l (r + dr) \frac{\partial}{\partial r} \left[v(r) + \frac{\partial v}{\partial r} dr \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

e dunque considerando solo i termini del primo ordine in dr

$$dF_{ext} = -2\pi\mu\Delta l \left[r \frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} dr + \frac{\partial v}{\partial r} dr \right] \quad (1.30)$$

la somma delle tre deve essere nulla allo stato stazionario, dunque:

$$2\pi r \, dr \Delta p = -2\pi\mu\Delta l \left(r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr \quad (1.31)$$

e dunque:

$$-\Delta p = \mu \frac{\Delta l}{r} \left(r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \mu \frac{\Delta l}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (1.32)$$

Moltiplicando per r ambo i membri della (1.32) e integrando si ottiene:

$$-\frac{r^2}{2} \Delta P = \mu \Delta l r \frac{\partial v}{\partial r} + C \quad (1.33)$$

che ci fornisce una equazione per la velocità:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{r \Delta P}{2\mu \Delta l} + \frac{C}{r} \quad (1.34)$$

La costante C può essere determinata dalla condizione al contorno che il gradiente di velocità sia finito anche per $r = 0$, e dunque deve essere $C = 0$.

Siccome per $r = 0$ la (1.34) vale $\frac{\partial v}{\partial r} = 0$, al centro la velocità avrà un estremo, che, visto che sulle pareti $v = 0$, sarà un massimo.

Integrando la (1.34), otteniamo:

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{2\mu \Delta l} \frac{r^2}{2} + D$$

ove la costante D può essere ricavata dalla condizione $v(a) = 0$:

$$-\frac{\Delta P}{2\mu \Delta l} \frac{a^2}{2} + D = 0$$

e dunque

$$D = \frac{a^2}{4\mu\Delta l} \Delta P$$

in definitiva, il profilo di velocità all'interno del condotto sarà:

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\mu\Delta l} (a^2 - r^2) \quad (1.35)$$

Dunque il profilo di velocità all'interno di un condotto cilindrico è parabolico.

La portata Q del condotto è la quantità di fluido che passa attraverso una sezione nell'unità di tempo:

$$Q = \int_0^a v(r) 2\pi r dr \quad (1.36)$$

sostituendo a $v(r)$ la (1.35), otteniamo:

$$Q = \frac{2\pi\Delta P}{4\mu\Delta l} \left[a^2 \int_0^a r dr + \int_0^a r^3 dr \right] \quad (1.37)$$

che portano alla *legge di Poiseuille*

$$Q = \frac{\pi\Delta P}{8\mu\Delta l} a^4 \quad (1.38)$$

In onore di Poiseuille, l'unità di misura della viscosità prende il nome di Poise e vale $0.1 Pa \cdot s$.

1.3 Equazioni costitutive di un fluido Newtoniano

I fluidi Newtoniani sono quelli in cui la viscosità non dipende dalla velocità del fluido. Consideriamo un fluido a riposo: in tal caso, le componenti degli sforzi saranno dovute solo alla pressione e dunque saranno solo le componenti diagonali:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (1.39)$$

ove il segno viene dal fatto che la pressione è orientata verso l'interno, mentre le tensioni normali sono verso l'esterno. In un fluido in movimento, si sviluppano delle tensioni di taglio, dovute alla viscosità. Dunque la (1.39) diventa:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (1.40)$$

La parte non isotropa è nota come sforzo deviatorio e dipende dai gradienti di velocità. Infatti se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è la velocità del fluido in un punto O , in un punto P a distanza $d\mathbf{x}$, sarà

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \alpha_{ij} dx_j \quad (1.41)$$

Se scomponiamo il tensore α_{ij} nelle sue parti simmetrica e antisimmetrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k \quad (1.42)$$

riconosciamo il tensore di deformazione e la rotazione. Se vale la legge di Hooke, c'è una proporzionalità tra il tensore degli sforzi e le deformazioni:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (1.43)$$

Se siamo in un mezzo isotropo, allora il tensore C_{ijkl} dovrà essere una combinazione lineare di prodotti di δ_{ij} :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} + \gamma \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (1.44)$$

Siccome le σ_{ij} sono simmetriche per lo scambio di i e j , altrettanto sarà per la C_{ijkl} , e dunque il secondo e terzo termine saranno uguali. Dunque:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.45)$$

e dunque

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \quad (1.46)$$

Pertanto, la (1.40) diventa:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.47)$$

Per calcolare la pressione in funzione dei parametri in gioco possiamo calcolare la traccia della (1.47):

$$\tau_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) e_{ii} \quad (1.48)$$

da cui:

$$p = -\frac{1}{3} \tau_{ii} + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.49)$$

La pressione media del fluido in condizioni statiche sarà:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \tau_{ii} \quad (1.50)$$

dunque sarà:

$$p - \bar{p} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.51)$$

Per un fluido incompressibile, non ci saranno variazioni di volume, dunque $e_{kk} = 0$, e la (1.47) diventa:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.52)$$

dove p è la pressione media. Se il fluido è comprimibile, allora esisterà una pressione termodinamica, tale che valga la (1.51) che lega la differenza di pressione all'espansione tramite il fattore $k = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)$ che prende il nome di coefficiente di viscosità di volume.

Per avere un'idea della distinzione fra pressione media e pressione termodinamica, consideriamo un fluido in un cilindro con un pistone. Il primo principio della termodinamica ci dice:

$$dU = dL + dQ = -\bar{p} dV + dQ = -p dV + T dS \Rightarrow (p - \bar{p}) dV = T dS - dQ$$

avendo scritto la prima uguaglianza considerando solo il lavoro meccanico e la seconda in termini delle variabili di stato. Il secondo principio ci dice che

$TdS - dQ \geq 0$, dunque $p - \bar{p} \geq 0$. Dall'equazione di continuità, possiamo ricavare un'espressione per $\nabla \cdot \mathbf{u}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.53)$$

Dalla (1.51), allora:

$$\begin{aligned} p - \bar{p} &= -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \\ &= \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.54)$$

dunque c'è differenza di pressione se il fluido è comprimibile e $k = (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \geq 0$. Il coefficiente di viscosità di volume k è una misura della dissipazione per compressione o espansione e, per molti fluidi, è molto piccolo e dunque vale l'approssimazione di Stokes $k = (\lambda + \frac{2}{3}\mu) = 0$. In questa approssimazione sarà:

$$\tau_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.55)$$

La (1.55) mostra che in un fluido in approssimazione di Stokes, c'è una relazione lineare tra la trazione τ e la deformazione e tramite la viscosità dinamica μ come nella definizione Newtoniana di viscosità.

I termini non diagonali della (1.55), sono di facile interpretazione. Infatti, per es.:

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (1.56)$$

collega lo sforzo di taglio alla velocità di deformazione. Un po' più complicato il caso degli sforzi normali:

$$\tau_{11} = -p + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (1.57)$$

Il secondo termine è la velocità di espansione media, mentre il primo è la velocità di espansione nella direzione 1. Dunque la parte viscosa dello sforzo sul piano normale all'asse 1 è proporzionale alla differenza tra la velocità di espansione in direzione 1 e la velocità di espansione media nel punto considerato.

1.3.1 Equazioni di Navier-Stokes

Consideriamo l'applicazione della legge di Newton ad un fluido viscoso in un campo gravitazionale:

$$F = ma \Rightarrow \int_V \rho g_i dV + \int_S \tau_{ij} n_j dS = \int_V \rho \frac{d}{dt} u_i dV \quad (1.58)$$

Applicando all'integrale di superficie il teorema della divergenza e uguagliando gli argomenti degli integrali di volume:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.59)$$

e, sostituendo l'espressione di τ_{ij} , eq.(1.55), otteniamo le *Equazioni di Navier-Stokes*

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \right] \quad (1.60)$$

La viscosità μ , in genere, dipende dalla temperatura. Quando all'interno dello stesso fluido, le differenze di temperatura sono trascurabili, allora possiamo tirarlo fuori dalla derivazione, dunque:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_i}{dt} &= \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ &= \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \end{aligned} \quad (1.61)$$

che può essere scritta, in forma vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{3}\mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \quad (1.62)$$

che per un fluido incomprimibile, dove $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ si rifuce a:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \quad (1.63)$$

che si riduce alla equazione di Eulero quando sono trascurabili gli effetti viscosi.

1.3.2 Lavoro di deformazione e dissipazione viscosa

Vediamo come si può ottenere una variazione dell'energia interna di un fluido per effetto della deformazione. Partiamo dall'equazione di Eulero

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

moltiplicando ambo i membri per u_i si ottiene:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \rho u_i g_i + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

riconosciamo a primo membro la derivata totale della densità di energia cinetica:

$$w = \frac{1}{2} \rho u^2$$

Espandendo la derivata totale ed esprimendo il tutto in forma vettoriale:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u})w = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (1.64)$$

il secondo termine a secondo membro lo possiamo scrivere come:

$$u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.65)$$

che ci dice che il tasso di aumento dell'energia cinetica (primo membro) è pari alla differenza tra i tassi di variazione del lavoro totale e del lavoro delle forze di deformazione.

Il secondo termine a II membro (il lavoro delle forze di deformazione) lo possiamo scrivere come:

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} e_{ij}$$

e a τ_{ij} possiamo sostituire la sua espressione (1.55) per ottenere un'espressione per il lavoro di deformazione:

$$\mathcal{L}_{def} = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \quad (1.66)$$

che è formato da un termine di pressione e un termine viscoso $\phi = 2\mu(e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2)$.

Il termine viscoso può essere riscritto come¹ :

$$\phi = 2\mu \left[e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \right]^2 \quad (1.67)$$

che come si vede è proporzionale alla viscosità e al quadrato della divergenza della velocità e dunque è importante soprattutto nelle regioni con alti sforzi di taglio.

1.3.3 Equazione di Bernoulli generalizzata

Consideriamo l'equazione di eulero in un campo gravitazionale:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (1.68)$$

In un campo gravitazionale con un potenziale $U = \frac{Gm}{r}$, $g_i = -(\nabla U)_i$; se consideriamo l'asse z lungo il raggio della terra, sarà: $g_i = -\frac{\partial gz}{\partial x_i}$. D'altra parte il secondo termine a primo membro della (1.68) si può scrivere come:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \omega_k \quad (1.69)$$

Dunque la (1.68) diventa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial gz}{\partial x_i} = u_i \epsilon_{ijk} \omega_k \quad (1.70)$$

in cui, al secondo membro riconosciamo la componente i -esima del prodotto vettoriale: $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$. Se assumiamo che la densità sia una funzione della sola

1

$$\begin{aligned} & \left(e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \right) \left(e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} \right) = \\ & = e_{ij}e_{ij} - 2\frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}e_{ij} + \frac{1}{9}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \cdot 3 = \\ & = e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \end{aligned}$$

essendo: $\delta_{ij}e_{ij} = e_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = \nabla \cdot \mathbf{u}$

pressione (flusso *bariotropico*), come per esempio nel caso di un flusso adiabatico, dove $PV^\gamma \equiv P\rho^{-\gamma} = \text{cost}$, $\rho = CP^\gamma = \rho(P)$, allora:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{dP}{\rho} \quad (1.71)$$

Infatti:

$$\int_{x_0}^x \frac{dP}{\rho} = \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} d\rho = \int_{x_0}^x \frac{d\Pi}{d\rho} d\rho = \Pi(x) - \Pi(x_0) \quad (1.72)$$

avendo definito la funzione $\Pi(\rho)$ in modo tale che $\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} = \frac{d\Pi}{d\rho}$. La derivata della (1.72) rispetto alle coordinate, sarà:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

ma

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{1}{\rho}$$

e dunque è dimostrata la (1.71). Nel caso di un flusso barotropico, dunque, la (1.70), diventa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} u^2 + \int \frac{dP}{\rho} + gz \right] = (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_i \quad (1.73)$$

La (1.73) è una classe di equazioni integrali delle leggi di conservazione e il termine fra parentesi quadre definisce una *fuzione di Bernoulli B*. Dunque l'equazione generalizzata di Bernoulli (1.73) si può scrivere in forma vettoriale come:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla B = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.74)$$

Possiamo considerare il caso di un flusso stazionario, in cui $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$, allora la (1.74) si riduce a :

$$\nabla B = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$$

Il primo membro sarà ortogonale alle superfici per cui B è costante, il secondo è ortogonale sia alla velocità sia alla rotazione. Dunque B sarà costante lungo le linee di flusso e lungo le linee di vortice, ovvero le linee di flusso e le linee di vortice definiscono le superfici di B costante (vedi Fig.1.3.3). Se anche $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, allora risulta che la funzione di Bernoulli è costante ovunque, e dunque diventa l'equazione di Bernoulli classica.

Se consideriamo un flusso non stazionario ma irrotazionale, la condizione di irrotazionalità si può porre dicendo che il vettore velocità $\mathbf{u}$ è il gradiente di un potenziale scalare: $\mathbf{u} = \nabla \phi$. Infatti, siccome $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, allora $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$. In tal caso, la (1.73) diventa:

$$\nabla \left[\frac{1}{2} u^2 + \int \frac{dP}{\rho} + gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.75)$$

che ci dice che l'argomento del gradiente sarà costante rispetto alle coordinate, ma, in generale potrà essere una funzione del tempo:

$$\frac{1}{2} u^2 + \int \frac{dP}{\rho} + gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(t)$$

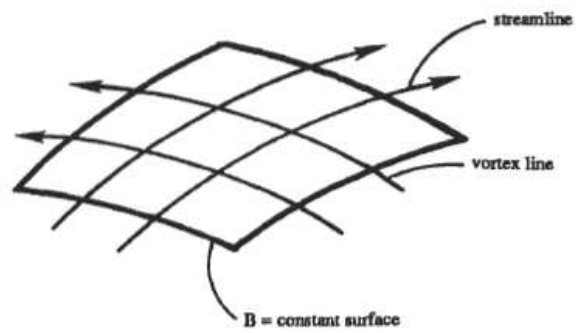


Figura 1.2: Superfici su cui la funzione di Bernoulli è costante