Capitolo 1

Elettrostatica e conduzione

1.1 Richiami di elettrostatica nel vuoto

1.1.1 Il Campo Elettrico

Definiamo il campo elettrico $\mathbf{E}$ a partire dalla forza che subisce una carica elettrica nello spazio, in presenza di un'altra carica. Per una carica di prova unitaria, possiamo scrivere:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{1.1}$$

Analogamente, possiamo scrivere la legge (di Coulumb) per due cariche q_1 e q_2. La forza esercitata dalla carica 1 sulla 2 sarà:'

$$\mathbf{F_{12}} = kq_1q_1\frac{\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}}{|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}|^3} \tag{1.2}$$

Dal confronto fra le (1.1) e (1.2) si ricava che il campo elettrico generato dalla carica q_1 nel punto x è:

$$\mathbf{E}(x) = kq_1\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x_1}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_1}|^3} \tag{1.3}$$

in cui la costante di proporzionalità k vale:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2\ (SI)$$

avendo introdotto la *permittività* o *costante dielettrica* del vuoto che vale $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}Fm^{-1} = 8.854 \times 10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}$. Le dimensioni del campo elettrico saranno:$[E] = Vm^{-1}$.

Per avere un'idea della forza del campo elettrico rispetto a quello gravitazionale, consideriamo il rapporto tra la forza elettrica e gravitazionale esercitata da un elettrone su un'altro elettrone:

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$F_g = G\frac{m_e^2}{r^2}$$

ove $G = 6.67\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$, $e = 1.602\times10^{-19}C$, $e/m_e = 1.759\times10^{11}\,Ckg^{-1}$. Dunque:

$$\frac{F_E}{F_g} = \frac{1}{4\pi G\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e^2} = 4.17\times10^{42} \tag{1.4}$$

1.1.2 Teorema di Gauss

Consideriamo una superficie chiusa S ed una carica ad una distanza r da un punto della superficie. Il flusso del campo attraverso la superficie è:

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dS &= \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\frac{r\,\cos(\theta)}{r^3}dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\int r\frac{1}{r^3}r^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned} \tag{1.5}$$

dunque, per una densità di carica $\rho(x)$:

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x})\,d^3x = \int_V \nabla\cdot\mathbf{E}d^3x \tag{1.6}$$

da cui si ricava la formula differenziale del *Teorema di Gauss*:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.7}$$

1.1.3 Potenziale scalare

La legge di Coulumb (1.3),per una densità di carica $\rho(\mathbf{x})$, la possiamo scrivere:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\mathbf{x}')\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,d^3x' \tag{1.8}$$

La funzione integranda può essere scritta come il gradiente rispetto a x di $-1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$. Infatti:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{x}'^2-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}}\right) &= \\ &= -\frac{(2\mathbf{x}'-2\mathbf{x})}{2\left(\mathbf{x}^2+\mathbf{x}'^2-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'\right)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|^3}\end{aligned}$$

Dunque la (1.8) diventa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' = -\nabla V \tag{1.9}$$

ove si è definito il potenziale elettrico:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{1.10}$$

Se il campo è il gradiente di un potenziale scalare V, allora il rotore del campo è nullo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1.11}$$

e di conseguenza è nulla la circuitazione del campo lungo una linea chiusa:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = 0 \tag{1.12}$$

1.1.4 Distribuzione superficiale di carica e doppio strato

Il teorema di Gauss applicato ad una superficie carica con una densità superficiale σ si può scrivere come:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \sigma\, dS \tag{1.13}$$

Se consideriamo i campi dai due lati della superficie E_1 ed E_2, risulta $(\mathbf{E_1} - \mathbf{E_2}) \cdot \mathbf{n} = \sigma/\epsilon_0$, che ci dice solo che c'è una discontinuità nelle componenti normali del campo dai due lati della superficie. D'altra parte, la (1.12) applicata ad un circuito che attraversi la superficie e abbia due lati uguali e paralleli alla superficie ℓ_1 ed ℓ_2, e gli altri due ortogonali, implica che:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = \mathbf{E_1} \cdot \ell_1 - \mathbf{E_2} \cdot \ell_2 = 0 \tag{1.14}$$

essendo i due lati paralleli percorsi in senso opposto.

In definitiva, mentre le componente normale alla superficie subisce un salto σ/ϵ_0, la componente tangenziale si conserva nel passaggio attraverso la superficie.

Consideriamo ora due superfici cariche con carica opposta, poste a distanza $d(x)$ fra loro (Fig.1.1 - strato di dipolo). Il potenziale elettrico in un punto $O(\mathbf{x})$ è dato dalla somma dei potenziali elettrici dei due strati calcolati in quel punto.

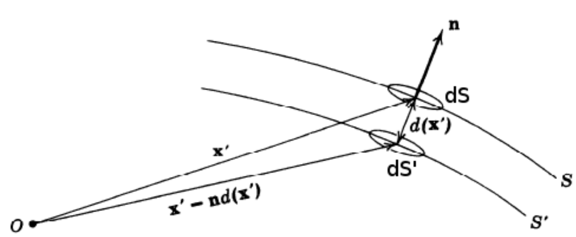

Figura 1.1: Definizione delle variabili per il calcolo del potenziale elettrico dello strato di dipolo

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS + \int_{S'} \frac{-\sigma(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + d\,\mathbf{n}|} dS' \right] \tag{1.15}$$

Siccome $d << |\mathbf{x}'|$, possiamo sviluppare il secondo termine in serie di Taylor:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + d\mathbf{n}|} \simeq \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + d\mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

Dunque, sostituendo in (1.15), otteniamo:

$$V(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\mathbf{x}')d\,\mathbf{n} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dS' \tag{1.16}$$

avendo tenuto conto che $\nabla = -\nabla'$. Definendo il *dipolo elettrico* come

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sigma(x)d\,\mathbf{n}dS \tag{1.17}$$

risulta che il potenziale di doppio strato, o di dipolo, è:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \tag{1.18}$$