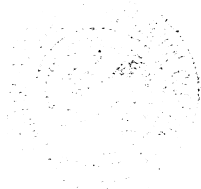
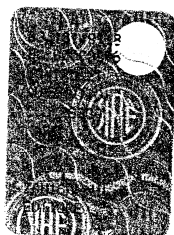


GIOVANNI MARRO

CONTROLLI AUTOMATICI

quinta edizione



INVENTARIO N. 19288
INGRESSO N.
COLLOCAZIONE N. AI 1342
VIA 109963

ZANICHELLI

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale, su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), sono riservati per tutti i paesi.

Fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale) nei limiti del 15% di ciascun volume possono essere effettuate negli esercizi che aderiscono all'accordo S.I.A.E. - A.I.E. - S.N.S. e C.N.A. Confartigianato, C.A.S.A., Confindustria del 18 dicembre 2000, dietro pagamento del compenso previsto in tale accordo.

Per riproduzioni ad uso non personale l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume.

Le richieste per tale tipo di riproduzione vanno inoltrate a:

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione
delle Opere dell'ingegno (AIDRO)
Via delle Erbe, 2
20121 Milano
tel. e fax: 02809506
e-mail: segreteria@aidro.org

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale.

La ristampa degli esemplari esistenti nelle biblioteche di tali opere è consentita, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.

Nel contratto di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei ed archivi, la facoltà di cui all'art. 71-ter legge diritto d'autore.

Maggiori informazioni sul nostro sito: www.zanichelli.it/f_info_fotocopie.html

Redazione: Sergio Rossi

Impaginazione e disegni: CompoMat s.a.s., Configni (Rieti)

Copertina: Anna Maria Zamboni

In copertina: Hans Hartung, *Applicazioni della sezione aurea*, 1930

Prima edizione: luglio 2004

Ristampa

5	4	3	2	1	2008	2007	2006	2005	2004
---	---	---	---	---	------	------	------	------	------

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.

L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro l'indirizzo a cui rivolgersi è:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: linea_universitaria@zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Per comunicazioni di tipo commerciale: universita@zanichelli.it

Indice

PREMESSA	vii
Capitolo 1. Concetti fondamentali	1
1.1. Sistemi e modelli matematici	1
1.2. Riduzione degli schemi a blocchi	7
1.3. Controlli ad azione diretta e in retroazione	9
1.4. Modelli matematici di alcuni sistemi dinamici	16
1.5. Esercizi	23
COMPLEMENTI	
C1.1. I grafi di flusso di segnale	25
C1.2. Esempi di sistemi di controllo in retroazione	30
C1.3. Esercizi	35
Capitolo 2. Introduzione all'analisi dei sistemi dinamici lineari	37
2.1. Equazioni differenziali lineari e trasformazione di Laplace	37
2.2. Antitrasformazione delle funzioni razionali	49
2.3. Risposta all'impulso e integrali di convoluzione	56
2.4. Sistemi elementari del primo e del secondo ordine	63
2.5. Esercizi	68
COMPLEMENTI	
C2.1. Funzioni analitiche	71
C2.2. La trasformazione di Laplace	74
C2.3. Un procedimento per il calcolo dei coefficienti degli sviluppi in somme di fratti semplici	78
C2.4. La massima sovraelongazione in casi più generali	80
C2.5. Esercizi	82
Capitolo 3. Analisi armonica	87
3.1. La funzione di risposta armonica	87

3.2. Deduzione della risposta armonica dalla risposta all'impulso e viceversa	89
3.3. Diagrammi di Bode	91
3.4. La formula di Bode	103
3.5. Diagrammi polari	108
3.6. Diagrammi di Nichols	112
3.7. Esercizi	114
COMPLEMENTI	
C3.1. Sviluppo in serie di Fourier e integrale di Fourier	115
C3.2. Sviluppi relativi alla formula di Bode	118
C3.3. Rilevazione della funzione di risposta armonica	118
Capitolo 4. Stabilità e sistemi in retroazione	121
4.1. Definizioni e teoremi relativi alla stabilità	121
4.2. Il criterio di Routh	126
4.3. Proprietà generali dei sistemi in retroazione	132
4.4. Errori a regime e tipo di sistema	139
4.5. Il criterio di Nyquist	143
4.6. Margini di ampiezza e di fase	147
4.7. Sistemi con ritardi finiti	149
4.8. Luoghi a M costante e a N costante	153
4.9. Pulsazione di risonanza, picco di risonanza e banda passante	157
4.10. Esercizi	161
COMPLEMENTI	
C4.1. Controllo in tempo minimo in presenza di saturazione dell'ingresso	163
C4.2. Dimostrazioni di alcuni teoremi relativi alla stabilità	165
C4.3. Dimostrazione del criterio di Nyquist	167
Capitolo 5. Il metodo del luogo delle radici	173
5.1. Definizione del luogo delle radici	173
5.2. Proprietà del luogo delle radici	176
5.3. Alcuni esempi di luoghi delle radici	179
5.4. Esercizi	184
COMPLEMENTI	
C5.1. Dimostrazione delle proprietà 5.2.6 e 5.2.7	186
C5.2. Il contorno delle radici	187
C5.3. Costruzione grafica di alcuni luoghi delle radici	192
C5.4. Esercizi	195
Capitolo 6. Le reti corretttrici e i regolatori standard	197
6.1. Dati di specifica e loro compatibilità	197
6.2. Le principali reti corretttrici a resistenze e capacità	200
6.3. La compensazione mediante reti ritardatrici	208
6.4. La compensazione mediante reti anticipatrici	213
6.5. Il progetto della rete ritardatrice ed anticipatrice con le formule di inversione	218

6.6. La compensazione mediante reti a ritardo e anticipo e reti a T	221
6.7. La retroazione tachimetrica	225
6.8. I regolatori standard	227
6.9. Funzioni di sensibilità sui diagrammi di Bode	235
6.10. Esercizi	236
COMPLEMENTI	
C6.1. Diagrammi polari a forma di circonferenza	240
C6.2. Dimostrazione delle formule di inversione	241
C6.3. Impiego del luogo e del contorno delle radici nel progetto delle reti correttrici	242
C6.4. Esercizi	248
Capitolo 7. Il progetto analitico dei regolatori	251
7.1. La sintesi diretta	251
7.2. I filtri di Butterworth e di Bessel come modelli di riferimento	259
7.3. Estensioni della sintesi diretta: sistemi a fase non minima, instabili e con ritardi finiti	266
7.4. Esercizi	271
COMPLEMENTI	
C7.1. Progetto per allocazione dei poli	273
C7.2. Regolatori a due gradi di libertà	282
Capitolo 8. Sistemi in retroazione non lineari	289
8.1. Stati di equilibrio e stabilità	289
8.2. Il metodo della funzione descrittiva	292
8.3. Estensioni del metodo della funzione descrittiva	308
8.4. I criteri del cerchio e di Popov	309
8.5. Metodo grafico per l'analisi dei sistemi a relè	314
8.6. Linearizzazione dei sistemi a relè mediante vibrazione imposta (parzializzazione)	321
8.7. Esercizi	324
COMPLEMENTI	
C8.1. Deduzione di alcune funzioni descrittive	330
C8.2. Forma estesa del criterio del cerchio	333
Capitolo 9. Sistemi di controllo digitali	335
9.1. Generalità sul controllo digitale	335
9.2. La trasformata Z	339
9.3. Antitrasformazione delle funzioni razionali	343
9.4. Corrispondenza fra il piano s e il piano z - aliasing	347
9.5. La funzione di trasferimento discreta G(z)	353
9.6. Conversione dal tempo continuo al tempo discreto	358
9.7. La funzione di risposta armonica discreta	364
9.8. Progetto dei regolatori digitali	366
9.9. La sintesi diretta	376
9.10. Frequenza di campionamento e filtro antialiasing	382
9.11. Esercizi	383

COMPLEMENTI

C9.1. I principali teoremi sulla trasformata Z	387
C9.2. Approssimazioni discrete di derivate ed integrali	389
C9.3. La trasformata Z modificata	390
C9.4. Esercizi	392

Capitolo 10. Alcuni componenti

10.1. Elaborazione analogica dei segnali	395
10.2. Trasduttori di posizione e velocità	407
10.3. Misure di deformazione, temperatura, campo magnetico, pressione, accelerazione	422
10.4. I motori elettrici per azionamenti	430
10.5. Esercizi	448

COMPLEMENTI

C10.1. L'amplificatore operativo reale e l'amplificatore a chopper	450
C10.2. Realizzazione di funzioni di trasferimento generiche	454
C10.3. Sistemi fluidodinamici	455
C10.4. Esercizi	462

Appendice A. Tabella di trasformate di Laplace

464

Appendice B. Tabella di trasformate Z

471

**Appendice C. Tabella per la trasformata e antitrasformata Z
nel caso di poli multipli**

473

Appendice D. Le unità di misura

475

D.1. Unità meccaniche	475
D.2. Unità termiche	476
D.3. Unità elettriche	477
D.4. Altre unità elettriche	477

BIBLIOGRAFIA

479

INDICE ANALITICO

481

Premessa

Questa nuova edizione del volume "Controlli Automatici" si presenta molto rinnovata nella forma, alquanto ampliata nel contenuto e con un CD-ROM opzionale allegato. In essa è compreso anche il mio precedente volumetto "Complementi di Controlli Automatici", da qualche tempo non più disponibile. La struttura di base ricalca perfettamente quella della vecchia edizione e i primi sei capitoli, quelli fondamentali, hanno subito solo qualche lieve ritocco.

Il Capitolo 1 riporta un'introduzione allo studio dei controlli automatici, la terminologia e le definizioni di base, un confronto in termini intuitivi fra i controlli ad azione diretta e quelli in retroazione, le rappresentazioni grafiche dei sistemi complessi (schemi a blocchi e grafi di flusso di segnale) e numerosi esempi di controlli in retroazione.

Il Capitolo 2 è dedicato all'analisi nel dominio dei tempi: trasformazione di Laplace, risposta all'impulso, teoremi di convoluzione e proprietà dei sistemi elementari del primo e del secondo ordine.

Il Capitolo 3 presenta l'analisi nel dominio delle frequenze: si definisce la funzione di risposta armonica e si descrivono le sue rappresentazioni grafiche (diagrammi di Bode, di Nyquist e di Nichols), con il proposito di porre in evidenza le proprietà che stanno alla base dei procedimenti di sintesi per tentativi.

Il Capitolo 4 si occupa delle principali proprietà dei sistemi in retroazione viste in un contesto dinamico: robustezza rispetto alle variazioni parametriche, insensibilità ai disturbi, banda passante e regolazione asintotica; in relazione alla stabilità vengono presentati in dettaglio i criteri di Routh e di Nyquist e vengono introdotti i margini di stabilità.

Il Capitolo 5 è dedicato ai metodi del luogo e del contorno delle radici.

Il Capitolo 6 presenta i principali procedimenti di sintesi nel dominio delle frequenze: dopo una rassegna delle principali reti correttrici, vengono illustrate in modo comparativo le loro caratteristiche in rapporto alla correzione della risposta dei sistemi utilizzando i mezzi precedentemente descritti.

Il Capitolo 7 presenta i metodi di sintesi diretta e di allocazione dei poli. Per ciò che riguarda la sintesi diretta, vengono analizzati i criteri di scelta del modello di riferimento, con una breve trattazione delle proprietà dei filtri di Butterworth e Bessel, e viene delineata l'estensione del procedimento anche ai casi in cui il sistema controllato sia instabile o a fase non minima. Inoltre vengono presentati alcuni moderni procedimenti di sintesi per regolatori a due gradi di libertà.

Il Capitolo 8, che si riferisce allo studio dei sistemi in retroazione non lineari, presenta il metodo della funzione descrittiva, i criteri di stabilità del cerchio e di Popov, i metodi analitici e grafici per lo studio dei sistemi a relè e il procedimento di linearizzazione di tali sistemi per trascinamento di frequenza (parzializzazione).

Il Capitolo 9 è dedicato allo studio dei sistemi a dati campionati: rappresentazione dei sistemi a dati campionati, proprietà dei modelli per sistemi a tempo discreto e realizzazione delle funzioni di trasferimento discrete, progetto dei sistemi digitali in retroazione, sia nel dominio delle frequenze sia per sintesi diretta.

Il Capitolo 10 presenta una breve rassegna dei più importanti componenti elettrici e fluidici dei sistemi di controllo: amplificatori operazionali, sincro, resolver, inductosyn, tachimetri, motori elettrici in corrente continua con e senza spazzole e relativi azionamenti, attuatori pneumatici ed idraulici. Scopo del capitolo, completamente rinnovato, è di fornire una certa quantità di materiale di base per i moduli di Esercitazioni di Automatica o per la legittima curiosità dei lettori che desiderino aver ben chiara la connessione fra teoria e applicazioni pratiche.

Il CD-ROM contiene ulteriore materiale inerente allo studio della disciplina: un volumetto completo sulla modellistica e controllo dei sistemi lineari nello spazio degli stati, una raccolta di compiti di esame svolti e un ciclo di dieci esercitazioni con TFI da svolgere in laboratorio informatico. Ricordo che TFI (Transfer Function Interpreter) è un pacchetto software per l'ambiente Matlab[®] orientato all'uso del calcolatore con un'interfaccia più razionale e diretta (la scrittura diretta da tastiera delle funzioni di trasferimento in s o z) degli LTI systems della Control System Toolbox di Matlab[®], ma limitato ai sistemi monovariabili, sia a tempo continuo che a tempo discreto. Esso è caratterizzato dalla presenza di alcune efficienti procedure di sintesi dei regolatori e si può pertanto ritenere complementare a Simulink, che invece è un mezzo per la simulazione dei sistemi, quindi per la verifica dei risultati della sintesi. Nel CD-ROM sono contenuti anche alcuni programmi in Matlab[®] per la realizzazione di carte semilogaritmiche, logaritmiche e grafici di uso corrente e, come ausilio alla lettura del Capitolo 10, un file di links ai siti web dei principali costruttori di componenti per sistemi di controllo.

Qualcuno si domanderà perché, invece di semplificare il volume e tradurlo in un semplice elenco di concetti elementari, come si richiede ormai per molti moduli del nuovo ordinamento, si è deciso di renderlo più completo ed esauriente. Le ragioni sono:

1. Dato che almeno un modulo di Controlli Automatici (o Elementi di Automatica o Fondamenti di Automatica) è presente in diversi corsi di laurea, la sua interpretazione può essere variata in funzione dei requisiti posti dal corso di laurea stesso: alcuni argomenti, come ad esempio il controllo dei sistemi a dati campionati e la modellistica nello spazio degli stati, una volta assenti dai corsi di Controlli Automatici di base, sono ora presenti e molto diffusi.
2. Uno stesso corso di laurea può contenere due moduli dedicati ai Controlli Automatici, o addirittura tre, due nella laurea triennale e uno nella laurea specialistica, per cui una presentazione raccordata delle diverse parti in cui si articola la disciplina può essere utile.
3. Fortunatamente ci sono sempre stati e ci sono tuttora numerosi studenti intellettualmente vivaci e desiderosi di apprendere qualcosa di più di quanto è strettamente indispensabile per superare l'esame nell'ambito del nuovo ordinamento.

Desidero esprimere la mia gratitudine ai numerosi amici e colleghi che mi hanno aiutato con suggerimenti e consigli, in particolare il prof. Aurelio Piazzi per la messa a punto della struttura dei corsi di Controlli Automatici a Bologna e a Parma, la dott. Elena Zattoni per aver curato gran parte del contenuto del CD-ROM e il prof. Roberto Zanasì per aver collaborato allo sviluppo del software di TFI e alle formule di inversione delle reti correttrici e dei regolatori standard.

Infine, un sentito ringraziamento alle preziose collaboratrici Pina Losito e Tiziana Muratori, che ancora una volta hanno dato un contributo essenziale alla pubblicazione.

Giovanni Marro

Bologna, giugno 2004

Capitolo 1

Concetti fondamentali

Oggetto di questo primo capitolo è la presentazione delle definizioni, dei simboli e delle notazioni che costituiscono le basi per lo studio dei sistemi di controllo. In particolare, si illustrano i concetti di linearità e di stazionarietà e si confrontano, con riferimento ad alcuni esempi, le caratteristiche essenziali dei sistemi di controllo in retroazione in rapporto a quelle dei sistemi ad azione diretta. La rassegna di tali concetti è completata con l'illustrazione dei più comuni metodi per la rappresentazione grafica della struttura dei sistemi complessi e con una serie di esempi relativi alla deduzione di modelli matematici di sistemi dinamici.

1.1. Sistemi e modelli matematici

L'automazione è un complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e impianti.

Il notevole impulso che l'automazione ha ricevuto in tempi recenti è legato agli enormi progressi attuatisi nel campo degli elaboratori elettronici, che attualmente sono largamente impiegati in molti settori in cui è necessario raccogliere, conservare, elaborare e utilizzare grandi quantità di dati (impianti petrolchimici, cartiere, sistemi di distribuzione di energia elettrica, gas, acqua, controllo automatico delle macchine utensili), l'esercizio di sistemi amministrativi (banche, archivi), la guida di aeromobili, ecc.

Un importante capitolo della scienza dell'automazione o *automatica* è costituito dalla disciplina denominata *controlli automatici*. Esso si riferisce allo studio dei dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*) in modo che subisca nel tempo l'evoluzione migliore possibile: la maggiore o minore "bontà" dell'evoluzione del sistema nel tempo viene valutata con criteri che sono di volta in volta specificati e sui quali si basa il progetto dei dispositivi di controllo medesimi.

Un *sistema* è un complesso, normalmente costituito di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (indicate semplicemente con il nome di *variabili*). Le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo si dicono *segnali*. Di regola nei sistemi l'evoluzione di alcune variabili è conseguenza di quella di

Automazione

Automatica
Regolatore
Controllore
Dispositivo di controllo

Sistema controllato

Sistema

Variabile
Segnale

Variabile:
 di ingresso
 indipendente
 di uscita
 dipendente
 Causa
 Effetto
 Sistema orientato
 Variabile
 manipolabile
 non manipolabile
 Disturbo

altre: si distinguono pertanto variabili di ingresso o variabili indipendenti o cause e variabili di uscita o variabili dipendenti o effetti. Un sistema le cui variabili siano state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita viene detto orientato.

Nei sistemi soggetti a controllo le variabili di ingresso si suddividono a loro volta in variabili manipolabili, cioè variabili di ingresso il cui andamento nel tempo può essere arbitrariamente imposto e variabili non manipolabili o disturbi, cioè variabili sul cui andamento nel tempo non si può influire, in quanto casuale o assegnabile ad arbitrio solo da parte di altro operatore.

ESEMPIO 1.1.1 Il motore elettrico in corrente continua schematizzato in Fig. 1.1 è un sistema, in cui si individuano diverse variabili, come la tensione e la corrente di armatura v_a e i_a , la tensione e la corrente di campo v_e e i_e , la coppia resistente all'albero c_r , la velocità angolare e la posizione angolare del rotore ω e ϑ . Di queste, v_a , v_e e c_r si possono considerare cause, i_a , i_e , ω e ϑ effetti: in particolare generalmente v_a e v_e sono variabili manipolabili, mentre c_r è non manipolabile. Si noti che l'orientamento di un sistema in generale non è univoco e dipende dal contesto in cui il sistema è inserito: la suddivisione delle variabili in cause ed effetti nel caso del motore di Fig. 1.1 è legata al fatto che i circuiti di armatura e campo dei motori elettrici normalmente sono alimentati da generatori di tensione, eventualmente con f.e.m. manipolabile.

Nel caso che tali circuiti fossero alimentati da generatori di corrente converrebbe considerare cause i_a , i_e e c_r , effetti v_a , v_e , ω e ϑ .

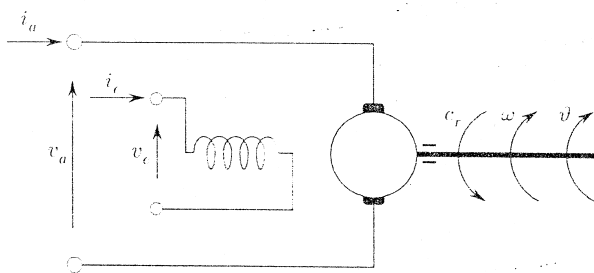
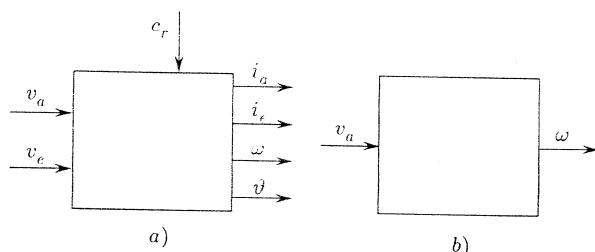


Figura 1.1 Schema di motore elettrico in corrente continua.

È molto utile rappresentare i sistemi come blocchi e le loro variabili come collegamenti dei blocchi con l'ambiente esterno o con altri sistemi: i collegamenti sono in genere contraddistinti con frecce orientate verso il sistema (ingressi) o verso l'esterno (uscite). Gli schemi a blocchi, cioè gli schemi in cui un sistema complesso, costituito da più sottosistemi interconnessi, è rappresentato come un insieme di blocchi collegati fra loro, presentano il vantaggio di dare risalto alle relazioni causa-effetto che più interessano e di fornire una rappresentazione immediata e sinottica dei collegamenti di segnale che definiscono la struttura del sistema, per cui vengono largamente impiegati nell'ambito dei controlli automatici.

ESEMPIO 1.1.2 In Fig. 1.2a è riportato il blocco con cui si può rappresentare il motore elettrico in corrente continua di Fig. 1.1. Nel caso in cui v_e e c_r siano mantenute costanti e non interessino i valori di i_a , i_e e ϑ , come accade quando si voglia regolare la velocità angolare ω sotto un carico costante agendo sulla tensione di armatura v_a , il motore si può rappresentare con il blocco di Fig. 1.2b, ad un solo ingresso e una sola uscita, che pone in rilievo solo il legame causa-effetto che più interessa.

Figura 1.2 Schemi a blocchi.



Il blocco di Fig. 1.2b, corrispondente ad un'unica relazione causa-effetto, rappresenta un *sistema ad una sola variabile*, mentre quello di Fig. 1.2a, corrispondente a più relazioni causa-effetto, rappresenta un *sistema a molte variabili*.

Si dice che si conosce un *modello matematico* di un sistema quando si dispone di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite, noti quelli degli ingressi. Nei modelli matematici le variabili corrispondono in genere a numeri reali, che ne costituiscono le misure in prefissate unità, mentre i segnali corrispondono a funzioni che legano tali numeri reali alla variabile reale tempo.

Il modello matematico di un sistema può essere più o meno accurato. Molto spesso nei modelli dei sistemi utilizzati nei controlli automatici si sacrifica la precisione a favore della semplicità: è inutile infatti ricorrere a modelli sofisticati quando i valori dei parametri che in essi compaiono si conoscono solo approssimativamente. Inoltre i modelli matematici possono essere di diversi tipi, per uno stesso sistema, a seconda dell'utilizzazione cui sono destinati: tipico è il caso della trave, per lo studio della cui deformata si impiega un modello matematico diverso da quello che si impiega per lo studio delle oscillazioni: il primo, nella terminologia dei controlli, è un modello matematico statico, il secondo un modello matematico dinamico.

Qualora gli ingressi risultino costanti per lunghi periodi di tempo è sufficiente un *modello matematico statico* o *puramente algebrico*, che descrive il legame fra i valori degli ingressi, supposti costanti, e i valori delle uscite che ad essi vengono a corrispondere una volta che il sistema abbia raggiunto una condizione o posizione o stato di equilibrio o stato di regime stazionario, cioè una condizione di funzionamento in cui tutti i segnali siano costanti. Un modello statico in genere è accettabile anche quando la variazione nel tempo degli ingressi è sufficientemente lenta in rapporto ai tempi di risposta propri del sistema ed è costituito da una o più funzioni date graficamente o analiticamente.

Modello matematico statico puramente algebrico

Condizione di equilibrio
Posizione di equilibrio
Stato di equilibrio
di regime stazionario

ESEMPIO 1.1.3 Il motore elettrico in corrente continua rappresentato in Fig. 1.1, considerato come un sistema a una sola variabile (blocco di Fig. 1.2b), può essere descritto da un modello statico del tipo

$$\omega = f(v_a), \quad (1.1)$$

esprimibile in forma grafica mediante la *caratteristica statica ingresso-uscita* rappresentata in Fig. 1.3. Nell'ipotesi che v_a vari in un campo limitato si può usare un'approssimazione lineare locale, molto vantaggiosa per le semplificazioni computazionali che introduce, cioè assumere il modello matematico

$$\omega = K v_a, \quad (1.2)$$

in cui K è il valore della derivata prima della $f(v_a)$ per $v_a = 0$. Nel caso che il funzionamento nominale del motore corrisponda ai valori V_1 dell'ingresso e $\Omega_1 = f(V_1)$ dell'uscita, conviene operare la linearizzazione nell'intorno di tali valori, cioè scrivere

$$\Delta\omega = K_1 \Delta v_a, \quad (1.3)$$

in cui è $\Delta\omega := \omega - \Omega_1$, $\Delta v_a := v_a - V_1$; K_1 rappresenta il valore della derivata prima della funzione $f(v_a)$ in V_1 . Il simbolo $:=$ sta per "uguale per definizione".

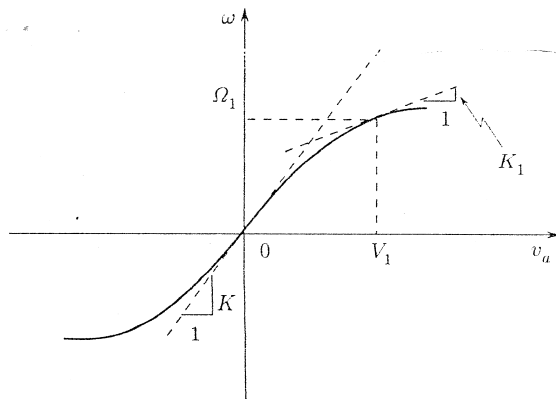


Figura 1.3 Caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua.

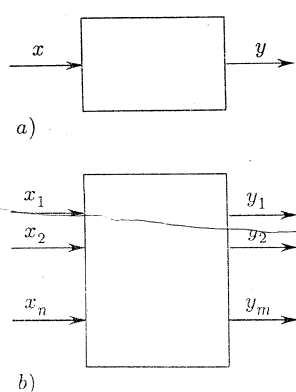


Figura 1.4

Sistema a una variabile e sistema a più variabili.

Mentre il modello statico di un sistema ad una sola variabile (Fig. 1.4a) è dato dall'unica funzione di una variabile $y = f(x)$, nel caso di un sistema a molte variabili (Fig. 1.4b) esso consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi), cioè $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$.

Anche in questo caso peraltro, qualora i requisiti di precisione lo consentano, si può eseguire una linearizzazione locale per i valori nominali degli ingressi $X_1, \dots, X_n$, ottenendo le equazioni lineari nelle variazioni

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= a_{11} \Delta x_1 + \dots + a_{1n} \Delta x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta y_m &= a_{m1} \Delta x_1 + \dots + a_{mn} \Delta x_n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

in cui è

$$a_{ij} := \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_k = X_k \quad (k=1, \dots, n)} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

$$\Delta y_i := y_i - Y_i = y_i - f_i(X_1, \dots, X_n) \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\Delta x_j := x_j - X_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

I modelli matematici statici sono usati di rado nello studio dei sistemi di controllo: infatti essi non danno alcuna informazione sul *regime transitorio*, cioè sull'andamento nel tempo delle uscite durante il passaggio da uno stato di regime stazionario a un altro. In generale il progetto dei dispositivi di controllo è basato invece su specifiche riguardanti appunto anche il comportamento del sistema in regime transitorio. Per descrivere il comportamento di un sistema in regime transitorio bisogna ricorrere a un modello matematico più generale, un *modello matematico dinamico*, costituito da una o più equazioni differenziali, esprimenti legami non solo fra le variabili di ingresso e di uscita, ma anche fra le loro derivate rispetto al tempo. Più avanti verranno presentati numerosi esempi di modelli dinamici; si può anzi affermare che nello studio dei controlli automatici si impiegano quasi esclusivamente modelli dinamici.

In generale quando si studia il comportamento di un sistema in regime transitorio determinando l'andamento del segnale di uscita (o dei segnali di uscita) corrispondente a un dato segnale di ingresso (o a dati segnali di ingresso), cioè determinandone la *risposta* a una data *eccitazione*, si suppone che il sistema sia *inizialmente in quiete*, cioè che le variabili di ingresso e uscita siano inizialmente tutte nulle e che l'uscita (o le uscite) rimarrebbe nulla se l'ingresso (o gli ingressi) non subisse variazioni: quando tale ipotesi non è soddisfatta l'uscita non dipende infatti dal solo ingresso, ma anche dalla *condizione iniziale* o *stato iniziale* del sistema. Il valore zero di una variabile può essere un opportuno valore di riferimento, rispetto al quale essa viene misurata, per cui la "condizione di quiete" è in pratica un qualunque stato di equilibrio.

Risposta
Eccitazione
Sistema inizialmente
in quiete

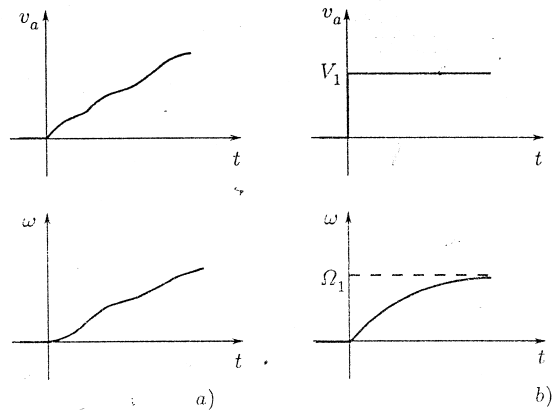
Condizione iniziale
Stato iniziale
Condizione di quiete

ESEMPIO 1.1.4 Nel caso del motore di Fig. 1.1 il modello statico non può ovviamente tener conto dei fenomeni dinamici elettrici e meccanici, come l'induttanza e l'inerzia, a causa dei quali quando l'in-

gresso subisce variazioni relativamente rapide l'uscita non è più legata ad esso istante per istante per istante dalla caratteristica statica di Fig. 1.3.

In Fig. 1.5a è rappresentato un possibile andamento della risposta $\omega(t)$ a una generica eccitazione $v_a(t)$, in Fig. 1.5b è rappresentata la risposta ad una particolare eccitazione, il *gradino*: di tale risposta solo il valore asintotico corrisponde staticamente all'ampiezza del gradino V_1 . Il sistema è stato supposto inizialmente in quiete; in caso contrario il segnale di uscita dipenderebbe non solo dall'eccitazione, ma anche dalla condizione iniziale, che nel caso in esame è data dai valori iniziali della corrente di armatura e della velocità angolare del rotore. Un modello dinamico del motore elettrico in corrente continua verrà ricavato più avanti, precisamente al Paragrafo 1.4.

Figura 1.5 Due diverse coppie di eccitazioni e risposte relative al motore elettrico in corrente continua.



1) - CONDIZIONE DI LINEARITÀ.

Un modello matematico o un sistema⁽¹⁾ si dice *lineare* quando soddisfa la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*, cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete⁽²⁾ ed essendo

Sistema lineare
Linearità
Modello lineare
Sovrapposizione degli effetti

$$x'_1(t), \dots, x'_n(t), \quad (1.5)$$

$$x''_1(t), \dots, x''_n(t),$$

due qualunque insiemi di segnali di ingresso,

$$y'_1(t), \dots, y'_m(t), \quad (1.6)$$

$$y''_1(t), \dots, y''_m(t),$$

le risposte ad essi relative, per ogni coppia di costanti reali k_1, k_2 , ai segnali di ingresso

$$(k_1 x'_1(t) + k_2 x''_1(t), \dots, k_1 x'_n(t) + k_2 x''_n(t)) \quad (1.7)$$

corrispondono le risposte

$$(k_1 y'_1(t) + k_2 y''_1(t), \dots, k_1 y'_m(t) + k_2 y''_m(t)) \quad (1.8)$$

Un modello o un sistema che non soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti si dice *non lineare*. È importante notare che molti sistemi ammettono modelli matematici lineari purché i valori delle variabili non escano da determinati campi.

Modello non lineare
Sistema non lineare

ESEMPIO 1.1.5 Si consideri il sistema di Fig. 1.6, costituito da un serbatoio: la portata entrante q_1 è funzione lineare della posizione x dello stelo di una

valvola ($q_1 = Kx$); si suppone che la portata uscente q_2 sia indipendente dal livello z . Il modello matematico del sistema è espresso dall'equazione integrale

⁽¹⁾ Spesso si impiega la parola "sistema" per indicare in effetti il modello matematico: "sistema puramente algebrico", "sistema dinamico", "sistema lineare", "sistema stazionario" sono locuzioni di uso frequente in luogo di "modello puramente algebrico", "modello dinamico", "modello lineare", "modello stazionario".

⁽²⁾ Qualora non si parta da una condizione iniziale di quiete la definizione resta valida purché si convenga di sottrarre da ogni segnale di uscita l'andamento che esso avrebbe per ingressi nulli.

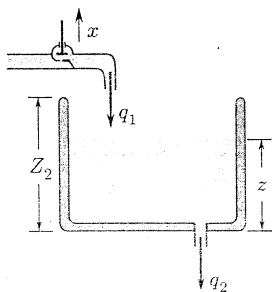


Figura 1.6 Sistema idraulico.

lineare

$$\begin{aligned} z(t) &= Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau)) d\tau = \\ &= Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (Kx(\tau) - q_2(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (1.9)$$

o, in maniera equivalente, dall'equazione differenziale, che si ottiene derivando rispetto al tempo ambo i membri della (1.9),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A} (q_1(t) - q_2(t)), \quad z(0) = Z_0, \quad (1.10)$$

in cui z si indica il livello dell'acqua nel serbatoio (in m), con Z_0 il livello iniziale, con q_1 e q_2 le portate entrante e uscente (in mc/sec(*)), con A l'area della sezione orizzontale del serbatoio (in mq). Tale modello è evidentemente valido entro i limiti

$$X_1 \leq x(t) \leq X_2, \quad Z_1 \leq z(t) \leq Z_2, \quad (1.11)$$

in cui X_1 , X_2 , Z_1 ($=0$) e Z_2 rappresentano rispettivamente i valori minimo e massimo della posizione dello stelo della valvola e del livello nel serbatoio.

• 2) CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ •

(*) In questo libro l'unità di misura del tempo viene indicata con "sec" invece di "s" per non confonderla con la variabile della trasformazione di Laplace.

Un modello matematico o un sistema, lineare o non lineare, si dice *stazionario* quando soddisfa la *proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti*, cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete ed essendo

$$x_1(t) \dots, x_n(t), \quad (1.12)$$

un qualunque insieme di segnali di ingresso e

$$y_1(t) \dots, y_m(t), \quad (1.13)$$

le risposte ad essi corrispondenti, per ogni costante reale positiva T ai segnali traslati nel tempo

$$x_1(t-T) \dots, x_n(t-T), \quad (1.14)$$

corrispondono le risposte, egualmente traslate nel tempo

$$y_1(t-T) \dots, y_m(t-T). \quad (1.15)$$

Modello non stazionario
Sistema non stazionario

Un modello o un sistema che non soddisfa la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti si dice *non stazionario*.

ESEMPIO 1.1.6 Nell'ipotesi che il valore della resistenza R nel circuito di Fig. 1.7 venga variato nel tempo con legge qualunque, purché assegnata a priori, cioè indipendente dall'evoluzione del sistema, il sistema è lineare non stazionario.

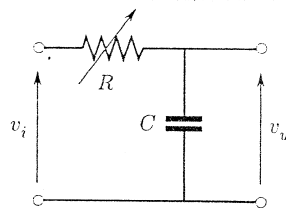


Figura 1.7 Sistema non stazionario.

In molti casi modelli dinamici lineari si possono utilizzare per lo studio di sistemi non perfettamente lineari eseguendo una linearizzazione locale analoga a quella precedentemente esaminata per il caso dei modelli statici.

1.2. Riduzione degli schemi a blocchi

Spesso i sistemi complessi vengono rappresentati con *schemi a blocchi*, i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.

Blocchi elementari per la rappresentazione di sistemi puramente algebrici sono riportati in Fig. 1.8: più precisamente, in Fig. 1.8a è riportato un elemento non lineare, la cui caratteristica ingresso-uscita è tracciata schematicamente entro il blocco stesso. in Fig. 1.8b è riportato un elemento lineare, caratterizzato dalla costante di proporzionalità K che lega l'uscita all'ingresso ($y(t) = K x(t)$), specificata di regola entro il blocco stesso. Tale seconda rappresentazione verrà più avanti estesa anche ai sistemi dinamici lineari stazionari, introducendo, in luogo della costante di proporzionalità, la cosiddetta "funzione di trasferimento", che compendia ogni informazione relativa al comportamento dinamico ingresso-uscita (a partire da una condizione iniziale di quiete).

Negli schemi a blocchi i diversi elementi sono collegati fra loro mediante i *punti di diramazione* e le *giunzioni sommant*, rappresentati come è indicato in Fig. 1.9 e caratterizzati rispettivamente dalle relazioni

$$y(t) = x(t), \quad z(t) = x(t), \quad (1.16)$$

e

$$z(t) = x(t) + y(t). \quad (1.17)$$

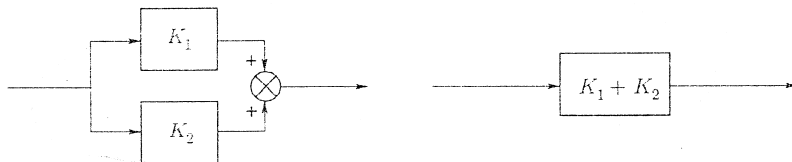
Si prenderanno in esame per il momento unicamente gli schemi relativi a sistemi lineari puramente algebrici: le regole di semplificazione che si dedurranno potranno essere peraltro immediatamente estese agli schemi a blocchi relativi a sistemi dinamici.

Le principali regole per la riduzione degli schemi a blocchi lineari sono:

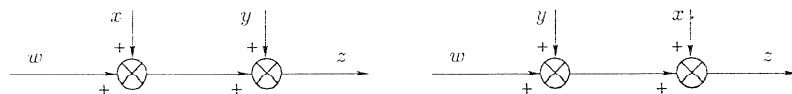
1. Riduzione di blocchi in cascata: ~~VEDERE FIG. 1.9a~~



2. Riduzione di blocchi in parallelo:



3. Scambio di giunzioni sommant:



4. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a monte di un blocco:

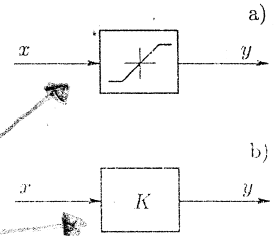
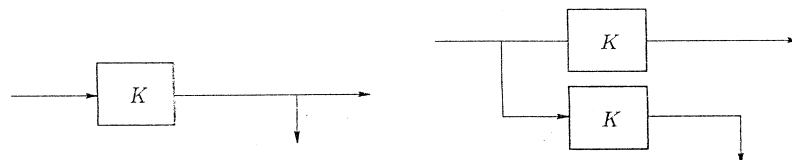


Figura 1.8
Blocchi elementari.

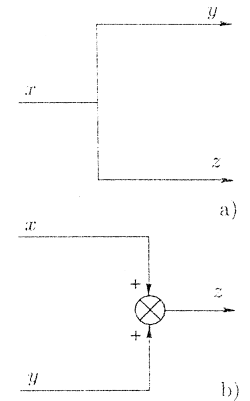


Figura 1.9
Punto di diramazione e
giunzione sommannte.

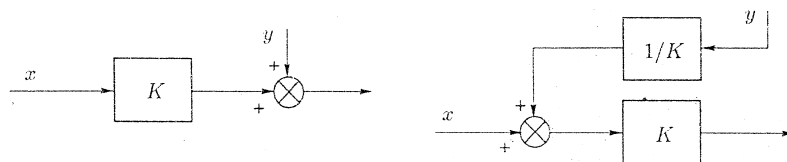
Blocchi in cascata

Blocchi in parallelo

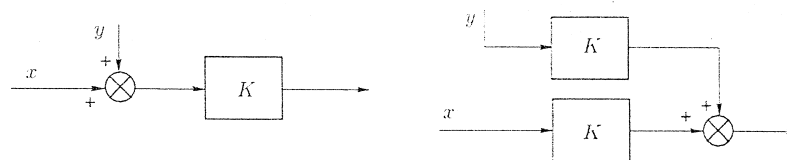
5. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a valle di un blocco:



6. Spostamento di una giunzione sommande a monte di un blocco:



7. Spostamento di una giunzione sommande a valle di un blocco:

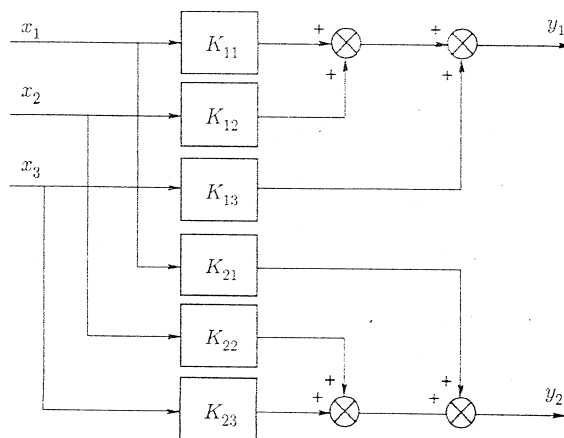


8. Eliminazione di un anello:



Le regole sopra elencate corrispondono tutte a semplici operazioni sulle equazioni algebriche rappresentate dallo schema a blocchi: per la verifica della loro validità basta scrivere tali equazioni.

Figura 1.10
Schema a blocchi in
forma minima.



Tenendo presenti le otto regole fondamentali, si possono ridurre schemi a blocchi comunque complessi, fino a giungere ad una *forma minima*, che consiste in un solo blocco per i sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita, mentre per i sistemi con più ingressi e più uscite comprende un numero di blocchi pari al prodotto del numero degli ingressi per il numero delle uscite,

ciascuno dei quali rappresenta l'influenza di un particolare ingresso su una particolare uscita, scindibile dall'influenza degli altri ingressi in virtù della proprietà di sovrapposizione degli effetti (Fig. 1.10).

ESEMPIO 1.2.1

In Fig. 1.11 è riportato un esempio di riduzione di uno schema a blocchi alla forma minima: a partire dallo schema di Fig. 1.11a, si ottiene quello di Fig. 1.11b spostando la giunzione sommande da valle a monte del blocco G_2 (regola 6), scambiando due giunzioni (regola 3) ed eliminando un anello (regola 8). Procedendo in maniera analoga, si ottiene lo schema di Fig. 1.11c, e quindi, applicando la regola 7, quello di Fig. 1.11d, che rappresenta la forma minima cui si può ricondurre lo schema di partenza. Nella figura sono indicate anche le espressioni delle costanti relative ai blocchi degli schemi ridotti, in funzione di quelle dei blocchi dello schema di partenza.

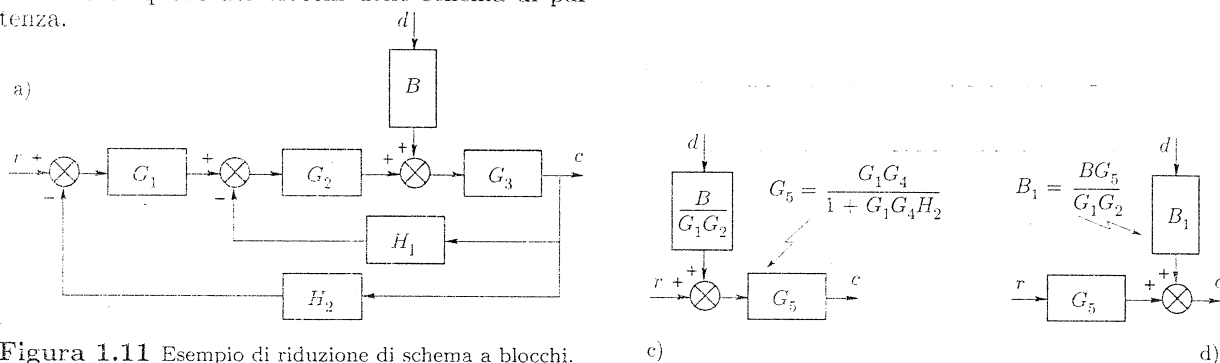


Figura 1.11 Esempio di riduzione di schema a blocchi.

1.3. Controlli ad azione diretta e in retroazione

Si considera un sistema ad una sola *variabile controllata*, cioè nel quale è individuata una variabile di uscita sul cui andamento nel tempo si vuole influire mediante il regolatore: ciò si ottiene operando il collegamento mostrato in Fig. 1.12, cioè connettendo il regolatore in modo che agisca su una variabile manipolabile m . L'azione del regolatore si esplica mediante un *attuatore*, cioè un dispositivo che provvede a modificare la variabile manipolabile proporzionalmente ad un segnale fornito dal regolatore, dato dalla variazione di una grandezza fisica adatta per la trasmissione a distanza dell'informazione (ad esempio una tensione o una corrente elettrica o una pressione pneumatica), operando nel contempo un'adeguata amplificazione di potenza. Al regolatore in generale giungono informazioni sui valori di altre variabili di ingresso del sistema controllato (d_1 e d_2 in Fig. 1.12), sulla variabile controllata c e su altre variabili di uscita del sistema controllato (y_1 ed y_2 in Fig. 1.12). Tali informazioni vengono rese disponibili mediante *trasduttori*, dispositivi che misurano una grandezza e la convertono in un'altra di diversa natura fisica, adatta per la trasmissione a distanza dell'informazione (ad esempio ancora una tensione o una corrente elettrica o una pressione pneumatica).

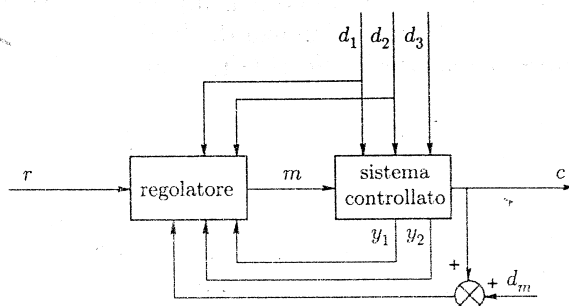
Variabile controllata

Attuatore

Trasduttore

Figura 1.12

Connessione di un regolatore e di un sistema a una sola variabile controllata.



Non sempre gli ingressi non manipolabili del sistema controllato, detti generalmente *disturbi*, possono essere direttamente misurati e convertiti in un segnale da inviare al regolatore (d_3 in Fig. 1.12). Fra questi i *disturbi di misura*, che non agiscono sul sistema controllato, ma sono generati dai trasduttori (schematizzabili come d_m in Fig. 1.12). Inoltre fra gli ingressi non manipolabili si possono includere anche le *variazioni parametriche*, cioè le variazioni, a qualunque causa dovute, dei legami ingresso-uscita del sistema controllato, che non possono essere direttamente misurate mediante trasduttori, ma eventualmente dedotte con metodi indiretti, cioè dall'elaborazione di altre misure: in questi casi il trasduttore è sostituito dall'elaboratore, ma lo schema di Fig. 1.12 e le considerazioni che ad esso si riferiscono conservano la loro validità.

Un'altra informazione che giunge al regolatore è data dalla *variabile di riferimento* o *segnale di riferimento* r , che ne condiziona l'influenza sulla variabile controllata c . Negli apparati di controllo più semplici e diffusi l'obiettivo della regolazione è l'*inseguimento*, cioè l'ottenimento della proporzionalità, istante per istante, di c ad r : un apparato ideale soddisfa pertanto una relazione del tipo

$$c(t) = K_c r(t), \quad (1.18)$$

in cui K_c è una costante caratteristica dell'apparato di controllo, detta *costante di regolazione* o *di controllo*.

La (1.18) implica che la variabile controllata dipenda unicamente da r e non dagli altri ingressi del sistema complessivo (d_1 , d_2 , d_3 e d_m in Fig. 1.12). In pratica, per la presenza di tali ingressi e per l'inevitabile ritardo nella risposta del sistema controllato, che non può evidentemente seguire un segnale di riferimento troppo rapidamente variabile o addirittura discontinuo, la (1.18) è soddisfatta a meno di un *errore*, che può essere riferito all'ingresso o all'uscita⁽³⁾ ed è, nei due casi, definito da

$$e_i(t) := r(t) - \frac{1}{K_c} c(t) \quad \text{oppure} \quad e_u(t) := K_c r(t) - c(t).$$

Le specifiche che delineano la qualità di un apparato di controllo si riferiscono spesso all'andamento nel tempo dell'errore e al suo valore in condizioni di regime stazionario. Se il regolatore opera utilizzando, oltre al segnale di riferimento r , solo informazioni che riguardano ingressi del sistema controllato, il controllo si dice *ad azione diretta* o *in catena aperta*; se invece esso opera utilizzando, oltre ad r , solo informazioni che riguardano la variabile

⁽³⁾Spesso l'errore si misura in percento di un valore nominale; in tal caso il fatto che esso sia riferito all'ingresso anziché all'uscita è irrilevante.

controllata c ed altre uscite del sistema, il controllo si dice *in retroazione* o *in catena chiusa*.

Un controllo ad azione diretta è caratterizzato dal fatto che il valore della variabile manipolabile non dipende da quello della variabile controllata né da quelli di altre variabili dipendenti del sistema controllato, cioè che non vi sono percorsi di segnale chiusi, mentre in un controllo in retroazione il valore della variabile manipolabile dipende da quello della variabile controllata e da quelli di altre variabili dipendenti del sistema controllato, per cui è sempre presente almeno un percorso di segnale chiuso (*anello di retroazione*).

La retroazione si dice *negativa* quando, immaginando di sezionare in un punto l'anello, una perturbazione del segnale a valle viene riportata sul segnale a monte del sezionamento con segno opposto, *positiva* nel caso contrario. La retroazione positiva non presenta interesse nell'ambito dei controlli perché di regola corrisponde ad un comportamento instabile.

Nei sistemi di controllo ad azione diretta il valore della variabile manipolabile viene determinato entro il regolatore in base a un modello matematico del sistema controllato, senza operare alcuna verifica sulla rispondenza del valore della variabile controllata, cioè sul fatto che la relazione (1.18) sia in effetti soddisfatta, mentre nei sistemi di controllo in retroazione il valore della variabile manipolabile viene determinato in base alla misura della variabile controllata e alla verifica della sua rispondenza alla (1.18).

Nella pratica l'azione diretta e la retroazione si presentano generalmente insieme. Infatti, poiché le due soluzioni tecniche hanno pregi e difetti complementari, nel progetto degli apparati di controllo più raffinati è opportuno utilizzarle entrambe, impiegando per esempio la metodologia tipica dei controlli ad azione diretta per migliorare la qualità di un sistema fondamentalmente in retroazione e viceversa.

ESEMPIO 1.3.1 Si considera il motore elettrico in corrente continua con eccitazione costante rappresentato in Fig. 1.13 e ci si propone di controllarne automaticamente la velocità, cioè di costruire un dispositivo che, agendo sulla tensione di armatura v_a , renda soddisfatta, istante per istante, la relazione

$$\omega(t) = K_c v_r(t), \quad (1.19)$$

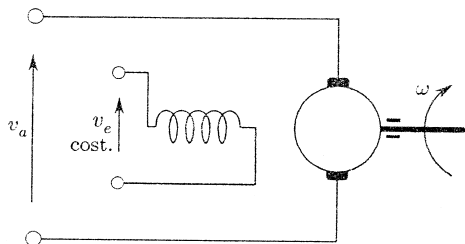


Figura 1.13 Motore elettrico in corrente continua con eccitazione costante.

in cui v_r è una variabile di riferimento che consiste in una tensione e K_c è un parametro assegnato (costante di regolazione). La tensione di riferimento v_r si suppone variabile molto lentamente o, al limite,

costante, cosicché si possa fare riferimento ad un modello statico. Evidentemente il motore costituisce il sistema controllato, la velocità angolare del rotore la variabile controllata, la tensione d'armatura la variabile manipolabile.

Nell'ipotesi che la caratteristica statica del motore sia sufficientemente stabile e possa essere descritta dalla relazione lineare

$$\omega(t) = K v_a(t), \quad (1.20)$$

in cui K è una costante nota, si può pensare di impiegare il controllo ad azione diretta il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 1.14, che si ottiene collegando in cascata al motore un amplificatore di guadagno in tensione $A = K_c/K$, con stadio d'uscita sufficientemente potente per pilotare il circuito d'armatura⁽⁴⁾; si rende così soddisfatta la relazione di proporzionalità (1.19).

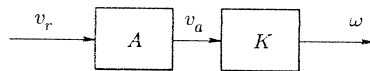


Figura 1.14 Semplice controllo ad azione diretta.

⁽⁴⁾ Lo stadio d'uscita dell'amplificatore costituisce l'attuatore del sistema di controllo.

**Controllo
in retroazione
in catena chiusa**

Anello di retroazione

Retroazione negativa

Retroazione positiva

Tale modo di procedere è però criticabile per diverse ragioni. Anzitutto, nel caso in cui la caratteristica statica del motore sia non lineare occorre costruire un amplificatore con caratteristica ingresso-uscita non lineare, per far sì che la caratteristica complessiva sia lineare, come richiesto dalla (1.19). In secondo luogo in genere la velocità angolare ω è funzione, oltre che della tensione di armatura v_a , anche di altre variabili (disturbi), cosicché un controllo che si basi unicamente sulla validità della relazione (1.20) non può fornire risultati soddisfacenti: se infatti all'albero motore è collegato un dispositivo utilizzatore che sviluppi una coppia resistente c_r variabile nel tempo, si verificheranno variazioni della velocità angolare dovute alle variazioni di tale coppia. Supponendo ancora valido un modello lineare, si può allora scrivere, in luogo della (1.20),

$$\omega(t) = K v_a(t) - Z c_r(t). \quad (1.21)$$

Avendosi due ingressi, il comportamento statico del sistema può essere rappresentato con una famiglia di caratteristiche ingresso-uscita, che, nel caso in cui si consideri valido il modello lineare (1.21), assume la configurazione rappresentata in Fig. 1.15.

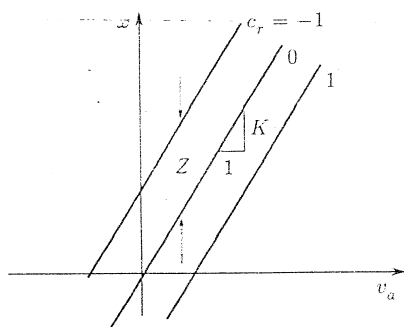


Figura 1.15 Caratteristiche statiche linearizzate del motore elettrico in corrente continua di Fig. 1.13.

Il controllo ad azione diretta di Fig. 1.14 non fornisce più i risultati desiderati, in quanto la (1.19) non viene più soddisfatta per la presenza, nel modello matematico del sistema controllato, del termine che mette in conto la dipendenza di ω da c_r . Se il disturbo è misurabile facilmente (il che non è nel caso di una coppia), usando un trasduttore che fornisca, istante per istante, una tensione elettrica ad esso proporzionale, si può pensare di neutralizzarne o compensarne l'azione: si giunge così al regolatore, sempre ad azione diretta, il cui schema a blocchi è

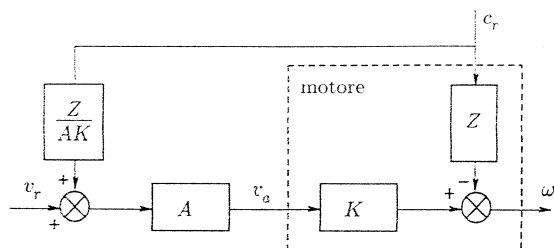


Figura 1.16 Controllo ad azione diretta con compensazione di un disturbo.

rappresentato in Fig. 1.16, che comprende un secondo amplificatore e un sommatore.

È ovvio però che un regolatore così concepito si complica eccessivamente quando si debba tener conto di tutti i numerosi disturbi che possono infirmare la validità della relazione (1.20): variazioni della tensione di campo, variazioni della temperatura, ecc.

Convienne allora ricorrere ad un controllo in retroazione negativa, realizzabile secondo lo schema a blocchi rappresentato in Fig. 1.17: in esso la variabile controllata (cioè la velocità angolare del motore) viene misurata mediante una dinamo tachimetrica (trasduttore che consiste in una dinamo di piccola potenza, con eccitazione a magneti permanente, calettata sull'albero motore). Il segnale $v_t(t)$ da essa generato viene sottratto al segnale di riferimento $v_r(t)$, ottenendo così un segnale errore $e(t)$, che viene inviato all'ingresso di un amplificatore a grande guadagno A_1 , con stadio d'uscita sufficientemente potente, sì da poter pilotare direttamente il circuito d'armatura del motore.

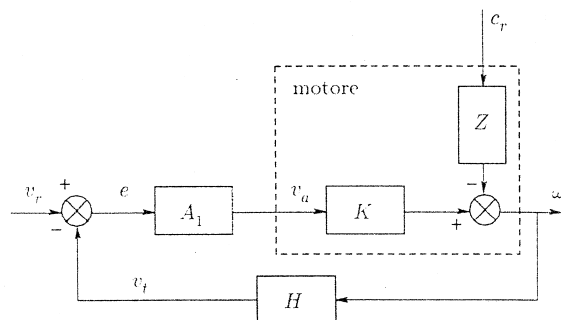


Figura 1.17 Sistema di controllo in retroazione.

In condizioni di regime stazionario sono soddisfatte le relazioni

$$\omega(t) = G e(t) - Z c_r(t), \quad (1.22)$$

$$e(t) = v_r(t) - H \omega(t), \quad (1.23)$$

in cui si è posto $G = A_1 K$ e si è indicata con H la costante di trasduzione della dinamo tachimetrica. Da esse si ricava immediatamente

$$\omega(t) = \frac{G}{1 + GH} v_r(t) - \frac{Z}{1 + GH} c_r(t), \quad (1.24)$$

che, se vale la condizione $GH \gg 1$, si può scrivere

$$\omega(t) \simeq \frac{1}{H} v_r(t) - Z_0 c_r(t), \quad (1.25)$$

in cui è $Z_0 := Z/(1 + GH)$; in virtù dell'elevato guadagno dell'amplificatore, risulta $Z_0 \ll Z$.

Dalle caratteristiche statiche del sistema complessivo, mostrate in Fig. 1.18, risulta evidente che esso è molto meno sensibile al disturbo. Dalla (1.25) risulta inoltre che il legame fra v_r ed ω tende ad essere indipendente da eventuali variazioni che subiscano A_1 e K , in quanto dipende principalmente dalla costante H della dinamo tachimetrica, che è un componente lineare e molto stabile.

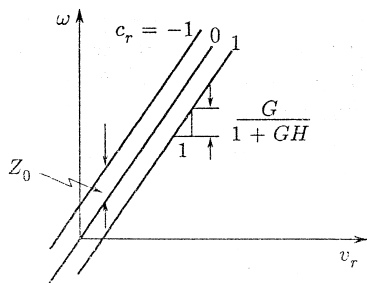


Figura 1.18 Caratteristiche statiche del sistema di controllo in retroazione di Fig. 1.17.

Un ragionamento analogo permette di verificare che un sistema di controllo in retroazione tende ad eliminare anche altre cause di errore. Si supponga infatti che il legame espresso dalla (1.20) non sia soddisfatto che approssimativamente, per le numerose cause di errore che infirmiano la validità di questo semplice modello lineare. Per tener conto di tali cause di errore si può scrivere

$$\omega(t) = K v_a(t) \pm \Delta\omega(t), \quad (1.26)$$

in cui $\Delta\omega$ rappresenta l'errore dovuto a disturbi, non linearità e variazioni del parametro K . Se tale errore, come di regola avviene, è limitato, per cui si

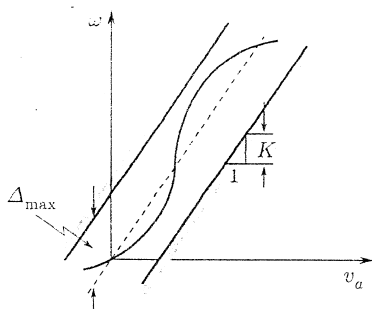


Figura 1.19 Caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua e relativo intervallo di incertezza.

può scrivere $|\Delta\omega(t)| < \Delta_{\max}$, risulta che la velocità angolare effettiva, in funzione di v_a è sempre compresa nella fascia indicata in Fig. 1.19.

Assumendo la (1.26) come modello matematico del motore in luogo della (1.21), con passaggi analoghi a quelli che hanno condotto alla (1.24) si deduce che il sistema in retroazione è retto dalla relazione

$$\omega(t) = \frac{G}{1+GH} v_r(t) \pm \frac{1}{1+GH} \Delta\omega(t), \quad (1.27)$$

da cui risulta che, se è $GH \gg 1$, l'influenza dei disturbi, delle non linearità e delle variazioni dei parametri viene notevolmente ridotta, come si deduce dalla caratteristica di Fig. 1.20.

Ciò è dovuto alla retroazione, che produce un segnale che, amplificato, dà luogo a una variazione della tensione di armatura che si oppone a qualunque causa che tenda a provocare una variazione della velocità angolare del rotore rispetto al valore imposto agendo su v_r . Il termine $1/(1+GH)$ a secondo membro della (1.27) rappresenta la riduzione, operata dalla retroazione, della sensibilità del sistema ai disturbi e alle variazioni parametriche. In questo esempio esso coincide con il valore statico della *funzione di sensibilità*, che verrà definita in termini più precisi al Paragrafo 4.3.

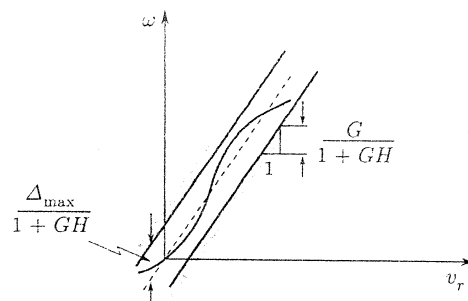


Figura 1.20 Caratteristica statica del sistema in retroazione di Fig. 1.17 e relativo intervallo di incertezza.

Robustezza

L'esempio, appena presentato, del controllo di velocità di un motore elettrico in corrente continua ha posto in evidenza il più significativo vantaggio dei controlli in retroazione in rapporto ai controlli ad azione diretta: l'intrinseca robustezza dell'azione di regolazione in rapporto al fatto che il sistema controllato sia incerto, cioè con parametri non noti e/o soggetti a variare nel tempo. Il termine $1/(1+GH)$ a secondo membro della (1.27) rappresenta la riduzione, operata dalla retroazione, della sensibilità del sistema ai disturbi e alle variazioni parametriche.

ESEMPIO 1.3.2 Si considera il sistema idraulico rappresentato in Fig. 1.6 e si pone il problema di controllare il livello nel serbatoio in modo che ri-

manga costante e prossimo ad un valore di riferimento assegnato z_r . In questo caso un controllo ad azione diretta, in cui l'azione sulla variabile manipo-

labile x dovrebbe essere legata al segnale proveniente da un trasduttore che misura la portata q_2 , che costituisce un disturbo, in modo da rendere in ogni istante la portata q_1 ad essa uguale e quindi il livello z costante, non è applicabile: basterebbe infatti un lieve errore per avere una *deriva* del livello, che porterebbe, prima o poi, al totale riempimento o svuotamento del serbatoio. Tale inconveniente invece non si presenta se si effettua il controllo in retroazione indicato in Fig. 1.21: il motore provoca la graduale chiusura della valvola quando il galleggiante chiude il contatto superiore, la graduale apertura quando il galleggiante chiude il contatto inferiore.

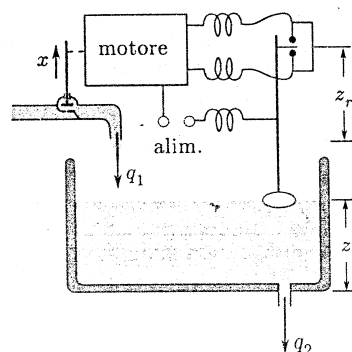


Figura 1.21 Controllo di livello.

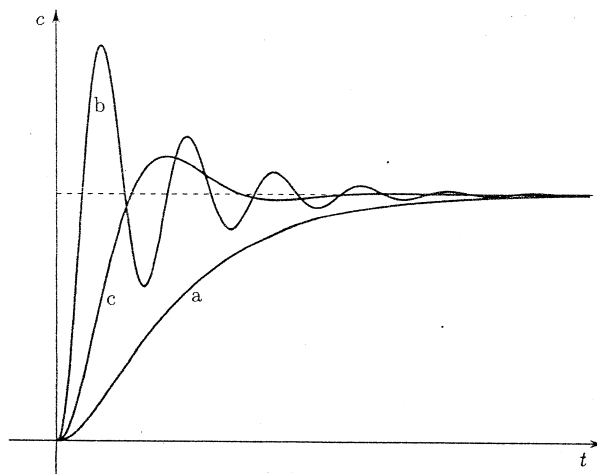
Gli esempi fin qui presentati hanno tutti portato a conclusioni favorevoli al controllo in retroazione. In realtà il controllo in retroazione ha un punto debole, che finora non è stato possibile mettere in luce perché ci si è limitati a considerare modelli matematici statici: il fatto che le condizioni che assicurano un buon comportamento in regime stazionario (relativa insensibilità ai disturbi, alle nonlinearità e alle variazioni dei parametri) normalmente sono in contrasto con il requisito di un soddisfacente comportamento in regime transitorio. In particolare, dall'esempio del controllo di velocità del motore elettrico in corrente continua è risultato che la retroazione è tanto più efficace quanto più elevato è il *guadagno di anello*, cioè la costante che caratterizza il trasferimento di segnale, in condizioni di regime stazionario, lungo l'anello di retroazione, supposto aperto in un qualunque suo punto. Se si tiene elevato il guadagno di anello, il che, come si è visto, è consigliabile per ridurre l'influenza dei disturbi, delle nonlinearità e delle variazioni dei parametri, può accadere che il comportamento dinamico del sistema non sia soddisfacente. Per esempio, la risposta al gradino indicata con (b) in Fig. 1.22 che potrebbe riferirsi all'apparato di controllo di velocità in retroazione rappresentato in Fig. 1.17, non è soddisfacente in rapporto alla risposta del corrispondente apparato ad azione diretta, indicata con (a) nella stessa figura. Aumentando ulteriormente il guadagno di anello si può giungere all'*instabilità*: il transitorio non conduce alla condizione di regime stazionario voluta, ma anzi porta il sistema lontano da essa.

Guadagno di anello

Instabilità

Figura 1.22

Tipiche risposte al gradino di sistemi di controllo.



Il progettista in molti casi deve migliorare la risposta del sistema o addirittura stabilizzare un sistema instabile senza ridurre il guadagno di anello, che si vuole elevato per avere la massima prontezza, precisione e insensibilità ai disturbi: ciò è possibile inserendo nel dispositivo di controllo opportuni sistemi di correzione del comportamento dinamico (*reti correttrici*), che, entro certi limiti, possono migliorare il comportamento in regime transitorio, a parità di guadagno di anello. Per esempio, con tali sistemi si può passare, a parità di guadagno a regime, dal transitorio indicato con (b) di Fig. 1.22 a quello indicato con (c), indubbiamente molto migliore e decisamente preferibile al transitorio (a).

Può accadere tuttavia che, anche ricorrendo a reti correttrici, non si riesca a rendere compatibile l'esigenza di un comportamento soddisfacente in regime transitorio con quella di un'elevata insensibilità alle varie cause di perturbazione. In questi casi si ricorre a schemi misti, cioè un'azione diretta, in genere grossolana, che tende a ridurre la sensibilità ai disturbi più importanti, e una retroazione più precisa e raffinata, che peraltro, essendo già neutralizzate le maggiori cause d'errore, non richiede un guadagno di anello eccessivamente elevato. Nei sistemi in retroazione l'instabilità si genera a causa dell'inerzia e dei ritardi propri del sistema controllato, che in genere implicano che l'azione corretttrice sulla variabile manipolabile si manifesti per un tempo eccessivo rispetto a quello strettamente necessario per l'annullamento dell'errore, il che porta ad una sovracorrezione, cioè ad un errore in senso opposto, che può essere anche superiore all'errore originario: in questo caso si innesca un regime di oscillazioni di ampiezza elevata.

Rete corretttrice

ESEMPIO 1.3.3 Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 1.23. Il sistema controllato è un miscelatore: agendo sulla posizione x dello stelo della valvola (variabile manipolabile) si vuole dosare la portata di acqua calda in modo da regolare la temperatura dell'acqua all'uscita del miscelatore (variabile controllata) utilizzando, per la retroazione, il segnale fornito da un opportuno trasduttore di temperatura.

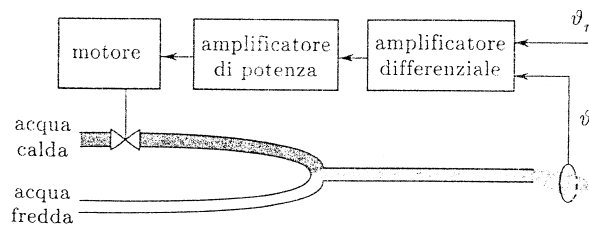


Figura 1.23 Controllo di temperatura per miscelazione.

La risposta al gradino del sistema controllato è riportata in Fig. 1.24: essa consiste praticamente in un ritardo puro. Si suppone di partire da una condizione iniziale in cui la valvola sia chiusa: essendo la temperatura ϑ lontana da quella di riferimento ϑ_r , si ha un errore notevole.

Se il guadagno di anello è elevato, si genera pertanto una forte azione corretttrice tendente ad aprire completamente la valvola; però la temperatura all'uscita del miscelatore non varia che dopo il tempo t_0 , assumendo il valore massimo Θ_M , per cui si genera una

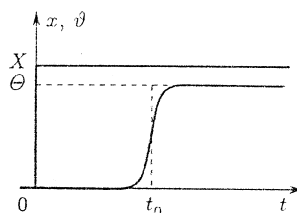


Figura 1.24 Risposta al gradino del miscelatore.

forte azione corretttrice tendente ora a chiudere completamente la valvola, che viene pure rilevata dopo un tempo finito, e così via, con oscillazioni persistenti del tipo rappresentato in Fig. 1.25. Risulta evidente che un controllo ad azione diretta, pur impreciso, non avrebbe presentato tale inconveniente, per cui in questo caso esso è più consigliabile. Per avere una maggiore precisione, unita ad una prontezza accettabile, si può ricorrere ad un controllo misto, del tipo ad azione diretta con correzione molto lenta in retroazione.

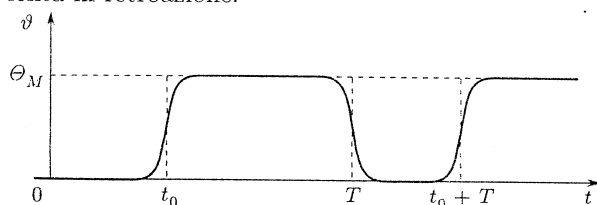


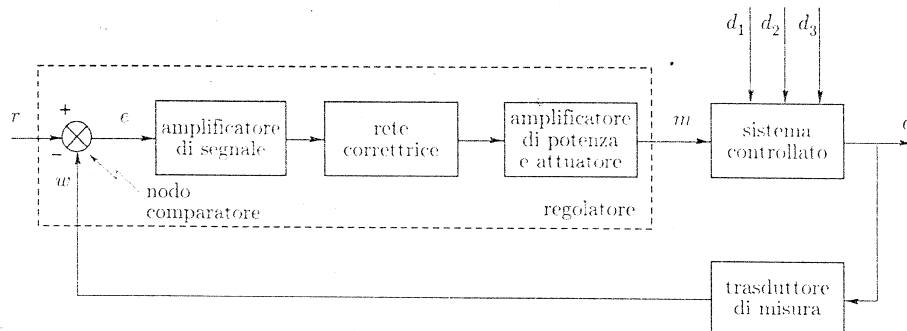
Figura 1.25 Possibili oscillazioni nell'apparato di controllo di Fig. 1.23.

La trattazione delle tecniche che permettono di prevedere e di migliorare il comportamento dinamico dei sistemi di controllo è, in sostanza, il nucleo fondamentale della teoria dei controlli automatici.

Per concludere, si richiamano brevemente i termini e i simboli introdotti: un sistema di controllo totalmente in retroazione corrisponde allo schema a blocchi tipico rappresentato in Fig. 1.26, in cui r è la variabile di riferimento (o "set point"), m la variabile manipolabile, c la variabile controllata, d_1 , d_2 , d_3 i disturbi, w la variabile di retroazione. Lo scopo del dispositivo è di rendere la variabile controllata c istante per istante proporzionale alla variabile di riferimento r .

Figura 1.26

Schema a blocchi di un apparato di controllo in retroazione.



Nodo comparatore

Segnale

di riferimento

di retroazione

errore

Amplificatore di segnale

Rete correttiva

Amplificatore di potenza

Attuatore

Entro il regolatore si distinguono in genere un *nodo comparatore*, che esegue la differenza fra il *segnale di riferimento* r e quello di *retroazione* w , generando il *segnale errore* e , un *amplificatore di segnale*, una *rete correttiva*, avente la funzione di migliorare il comportamento dinamico del sistema complessivo, un *amplificatore di potenza* e un *attuatore*, cioè un dispositivo in grado di agire sulla variabile manipolabile del sistema controllato, variandola proporzionalmente al segnale elaborato ed amplificato.

Come si è precedentemente accennato, in molti casi le grandezze variabili cui è affidata la trasmissione a distanza dei segnali non sono elettriche (tensioni e correnti), ma meccaniche (traslazioni e rotazioni di organi meccanici e forze) o idrauliche (pressione di aria o olio in condutture). Numerosi trasduttori, specie i più semplici, forniscono infatti segnali non elettrici. Si costruiscono inoltre amplificatori di segnale e potenza e attuatori pneumatici e idraulici, che in passato erano preferiti a quelli elettrici per ragioni di affidabilità e semplicità, ma che ora vengono gradualmente abbandonati, in quanto i sistemi elettrici ed elettronici hanno raggiunto un'ottima affidabilità e risultano i più adatti per elaborazioni di segnale particolarmente accurate.

1.4. Modelli matematici di alcuni sistemi dinamici

Per lo studio dei sistemi di controllo in retroazione, non potendosi prescindere dal problema della stabilità, occorrono modelli matematici dinamici, espressi da equazioni differenziali. In molti casi si possono impiegare modelli dinamici lineari stazionari, consistenti in equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, la cui soluzione è relativamente semplice.

Nel presente paragrafo si prenderanno in esame alcuni esempi tipici di modelli matematici dinamici con il proposito di illustrare i procedimenti generali che usualmente si impiegano per la loro deduzione e di chiarire le interessanti analogie esistenti fra modelli di sistemi fisici di diversa natura.

La soluzione delle relative equazioni differenziali verrà presa in esame nel prossimo capitolo.

Per semplificare la scrittura delle equazioni differenziali si userà il simbolo (*operatore*) D per indicare l'operazione di derivazione rispetto al tempo, scrivendo $Dx(t)$ in luogo di dx/dt , $D^2x(t)$ in luogo di d^2x/dt^2 , ecc. Tale notazione è vantaggiosa, oltre che per la sua concisione, anche perché l'operatore D nell'elaborazione delle espressioni si può trattare come se fosse una costante: gode infatti della proprietà distributiva rispetto alla somma e della proprietà commutativa con le costanti (non con le funzioni del tempo). Ad esempio, se $x_1(t)$, $x_2(t)$ sono funzioni derivabili, a_1 , a_2 costanti, si può affermare che la relazione

$$y(t) = a_1 x_1(t) + a_2 D x_2(t)$$

implica

$$D y(t) = D (a_1 x_1(t) + a_2 D x_2(t)) = a_1 D x_1(t) + a_2 D^2 x_2(t) .$$

Si può dare un significato anche al simbolo $1/D$ o D^{-1} , ponendo

$$\frac{1}{D} x(t) := \int_0^t x(\tau) d\tau + K, \quad (1.28)$$

in cui con K si indica un'opportuna costante. La (1.28) costituisce una notazione convenzionale, in quanto in realtà l'operatore D non è invertibile, rappresentando una corrispondenza che non è uno a uno, ma molti a uno: tutte le funzioni che differiscono per una costante presentano infatti la stessa derivata.

Per tale ragione $1/D$ non si può applicare ai due membri di una relazione esprimente l'uguaglianza di due funzioni: se è $y(t) = x(t)$, non è detto che sia $D^{-1}y(t) = D^{-1}x(t)$. Si può peraltro scrivere

$$D \frac{1}{D} = 1 ,$$

cioè dalla

$$y(t) = \frac{1}{D} x(t)$$

segue

$$D y(t) = D \frac{1}{D} x(t) = x(t) .$$

La semplificazione degli operatori in ordine inverso, cioè la posizione $D^{-1}D y(t) = y(t)$, si può eseguire solamente se la classe delle funzioni $y(t)$ viene opportunamente ristretta, per esempio limitandola alle funzioni continue inizialmente nulle, classe entro la quale l'operatore D è invertibile. Tale restrizione si può ammettere ad esempio se si considerano sistemi dinamici inizialmente in quiete.

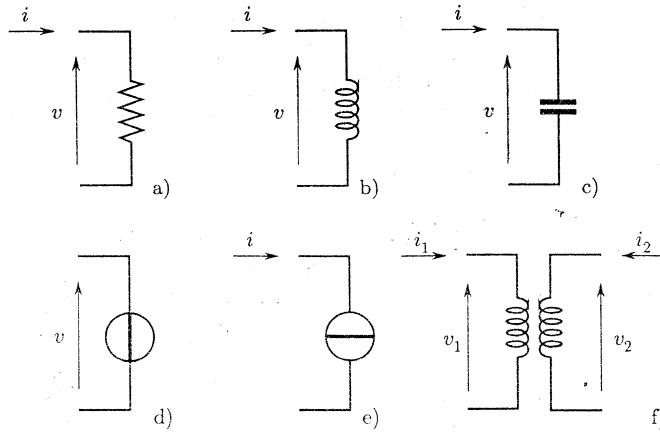
❖ Circuiti elettrici

I circuiti elettrici lineari sono sistemi complessi rappresentabili come interconnessioni dei sistemi elementari o *componenti* rappresentati in Fig. 1.27 (resistenza, induttanza, capacità, generatore di tensione, generatore di corrente, trasformatore ideale).

Operatore D

Circuiti elettrici lineari

Figura 1.27
Componenti elettrici.



Le equazioni che rappresentano il comportamento di tali componenti elettriche sono rispettivamente

$$v(t) = R i(t) , \quad (1.29)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = L D i(t) , \quad (1.30)$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{Q_0}{C} = \frac{1}{C} \frac{1}{D} i(t) , \quad (1.31)$$

$$v(t) = V_0 \quad (= \text{cost.}) , \quad (1.32)$$

$$i(t) = I_0 \quad (= \text{cost.}) , \quad (1.33)$$

$$v_1(t) = \frac{N_1}{N_2} v_2(t) , \quad i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_2(t) ; \quad (1.34)$$

nella (1.31) Q_0 indica la carica iniziale della capacità, nelle (1.34) N_1 e N_2 indicano i numeri delle spire al primario e al secondario.

I modelli matematici dei circuiti elettrici si ottengono in genere applicando le leggi di Kirchhoff, cioè esprimendo il bilancio delle cadute di potenziale lungo le maglie o delle correnti ai nodi.

ESEMPIO 1.4.1 Con riferimento al semplice circuito di Fig. 1.28, si può scrivere

$$\begin{aligned} v_i(t) &= v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) \\ &= L D i(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \frac{1}{D} i(t) , \end{aligned} \quad (1.35)$$

da cui

$$D v_i(t) = \left(L D^2 + R D + \frac{1}{C} \right) i(t) . \quad (1.36)$$

Volendo ricavare, anziché la corrente i , la tensione d'uscita v_u , si può operare la sostituzione $i(t) = C D v_u(t)$, mediante la quale si ottiene dalla (1.35),

in cui evidentemente è $v_C(t) = v_u(t)$, l'equazione differenziale

$$v_i(t) = (L C D^2 + R C D + 1) v_u(t) . \quad (1.37)$$

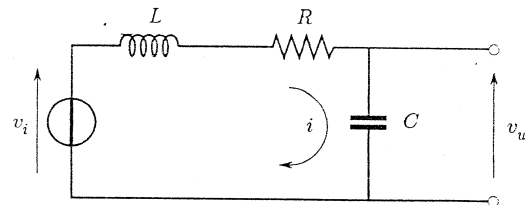


Figura 1.28 Schema di circuito RLC .

ESEMPIO 1.4.2 L'equazione differenziale che descrive il comportamento del circuito elettrico a più maglie il cui schema è rappresentato in Fig. 1.29a si può ricavare scrivendo le equazioni delle maglie:

$$v_i(t) = \left(R_1 + \frac{1}{C_2 D} \right) i_1(t) - R_1 i_2(t) - \frac{1}{C_2 D} i_3(t), \quad (1.38)$$

$$0 = -R_1 i_1(t) + \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1 D} \right) i_2(t) - R_2 i_3(t), \quad (1.39)$$

$$0 = -\frac{1}{C_2 D} i_1(t) - R_2 i_2(t) + \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{C_2 D} \right) i_3(t), \quad (1.40)$$

unitamente all'equazione

$$v_u(t) = R_3 i_3(t). \quad (1.41)$$

Da tale sistema, per ottenere un'unica equazione differenziale che rappresenti il legame fra il segnale di ingresso $v_i(t)$ e quello di uscita incognito $v_u(t)$, si possono eliminare⁽⁵⁾ le variabili $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

Un approccio alternativo per la deduzione di un modello matematico della stessa rete elettrica è offerto dalle equazioni di bilancio delle correnti ai nodi, che, impiegando i simboli indicati in Fig. 1.29b, si scrivono:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0, \quad (1.42)$$

$$-i_3(t) + i_4(t) + i_5(t) = 0, \quad (1.43)$$

o anche

$$\frac{v_B(t) - v_A(t)}{R_1} + C_2 D v_B(t) + \frac{v_B(t) - v_C(t)}{R_2} = 0, \quad (1.44)$$

$$\frac{v_C(t) - v_B(t)}{R_2} + C_1 D (v_C(t) - v_A(t)) + \frac{v_C(t)}{R_3} = 0. \quad (1.45)$$

Posto in tali equazioni $v_A(t) = v_i(t)$ e $v_C(t) = v_u(t)$, eliminando $v_B(t)$ si ricava ancora un'equazione differenziale che rappresenta il legame fra $v_i(t)$ e $v_u(t)$, che, naturalmente, è identica a quella dedotta mediante l'analisi per maglie.

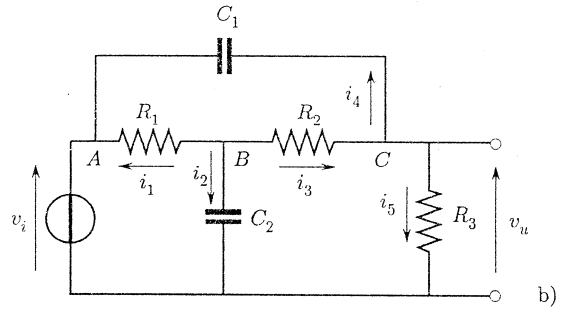
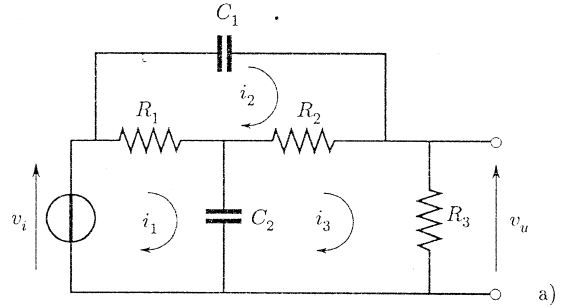


Figura 1.29 Schema di rete elettrica in cui sono individuati due diversi insiemi di variabili.

⁽⁵⁾Dato un sistema di equazioni differenziali lineari, come ad esempio il sistema (1.38)–(1.41), in genere si può “eliminare” una variabile, ma non “esplicitare” una variabile. Infatti, con riferimento alle due equazioni generiche

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 D + a_3 D^2) x_1(t) &= f_1(x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)), \\ (a_4 + a_5 D^2) x_1(t) &= f_2(x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned}$$

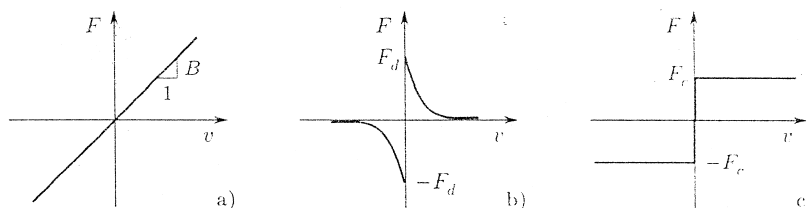
in cui f_1 e f_2 rappresentano combinazioni lineari delle funzioni $x_2(t), \dots, x_n(t)$ e delle loro derivate, si può eliminare la variabile $x_1(t)$ anche senza dividere le equazioni per gli operatori differenziali $(a_1 + a_2 D + a_3 D^2)$ e $(a_4 + a_5 D^2)$: tale operazione non ha infatti significato. Basta moltiplicare la prima equazione per il secondo operatore, la seconda per il primo operatore ed eguagliare i due secondi membri.

◆ Sistemi meccanici

Le equazioni differenziali che descrivono il moto dei sistemi meccanici si ricavano di regola esprimendo l'equilibrio delle forze e delle coppie applicate a ciascuna delle parti in movimento. In generale si cerca di adottare modelli a costanti concentrate, perché di più facile impiego, anche se spesso alquanto approssimativi e meno aderenti alla realtà di quanto non lo siano nel caso dei circuiti elettrici visti in precedenza. Ad esempio, in un modello a costanti concentrate la massa di una molla, che risulta ovviamente distribuita, si dovrà supporre trascurabile o concentrata agli estremi della molla. Inoltre si cerca di adottare modelli lineari, anche se ciò implica la limitazione dello studio a variazioni relativamente piccole delle grandezze in gioco.

Figura 1.30

Attrito viscoso, attrito secco e attrito coulombiano.



Attrito viscoso

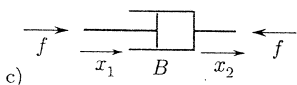
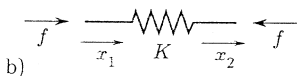
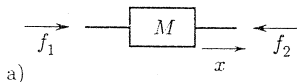
Attrito
secco
al distacco

Attrito coulombiano

Nei sistemi meccanici esistono peraltro fenomeni non lineari che, per la discontinuità delle caratteristiche, non sono suscettibili neppure di una linearizzazione locale: il più importante di questi è l'attrito. Per rimanere nel campo dei modelli lineari si dovrebbe considerare il solo *attrito viscoso*, consistente in una forza o in una coppia che si oppone al moto e proporzionale alla velocità, secondo una caratteristica del tipo di Fig. 1.30a.

In realtà è presente anche l'*attrito secco* o *attrito al distacco*, consistente in una forza che equilibra la forza applicata, impedendo l'inizio del moto, finché questa non supera una soglia F_d , oltre la quale inizia il movimento e la forza si annulla: una rappresentazione approssimativa della caratteristica corrispondente è riportata in Fig. 1.30b. Inoltre può essere presente l'*attrito coulombiano*, caratterizzato da una forza nulla quando il corpo è immobile, costante quando esso è in movimento e tale da opporsi al moto: la caratteristica corrispondente è rappresentata in Fig. 1.30c. L'attrito al distacco e l'attrito coulombiano sono fenomeni tipicamente non lineari, per cui, finché l'approssimazione risulta accettabile, nei modelli matematici si considera il solo attrito viscoso.

I sistemi meccanici in moto traslatorio si possono, in tale ottica, considerare costituiti di componenti elementari dei tipi rappresentati in Fig. 1.31a-c: la *massa*, in cui si concentrano le forze di inerzia, la *molla*, in cui si concentrano le forze di richiamo elastico, e l'*ammortizzatore*, in cui si concentrano le forze di attrito viscoso. Si suppone che gli estremi di tali componenti meccanici siano sottoposti a moto traslatorio orizzontale. Le equazioni che ne descrivono il comportamento rappresentano le condizioni di equilibrio delle forze applicate e si scrivono rispettivamente:



$$\Delta f(t) = f_1(t) - f_2(t) = M \frac{D^2 x}{dt^2} = M D^2 x(t), \quad (1.46)$$

$$f(t) = K (x_1(t) - x_2(t)), \quad (1.47)$$

$$f(t) = B \frac{d}{dt} (x_1(t) - x_2(t)) = B D (x_1(t) - x_2(t)). \quad (1.48)$$

Figura 1.31

Componenti meccanici.

In relazione all'equazione (1.47), per semplicità si è introdotta l'ipotesi che la distanza fra i punti $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ sia uguale alla lunghezza della molla non caricata.

ESEMPIO 1.4.3 Si considera il sistema meccanico in moto traslatorio rappresentato in Fig. 1.32. Le equazioni di equilibrio delle forze agenti sui due corpi sono:

$$f(t) = M_1 D^2 x_1(t) + K_1 x_1(t) + B_1 D(x_1(t) - x_2(t)) , \quad (1.49)$$

$$0 = B_1 D(x_2(t) - x_1(t)) + M_2 D^2 x_2(t) + K_2 x_2(t) + B_2 D x_2(t) . \quad (1.50)$$

Da esse, eliminando la variabile $x_1(t)$, si può facilmente ricavare un'unica equazione differenziale che

rappresenta il legame tra $f(t)$ e $x_2(t)$ o anche, eliminando $x_2(t)$, un'equazione differenziale che rappresenta il legame fra $f(t)$ e $x_1(t)$.

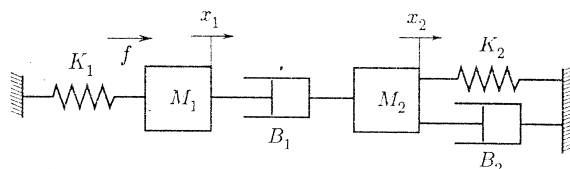


Figura 1.32 Schema di sistema meccanico in moto traslatorio.

Si noti l'analogia fra le equazioni che descrivono il moto dei sistemi meccanici e quelle che descrivono l'evoluzione nel tempo delle variabili delle reti elettriche. Tale analogia consente di costruire *modelli analogici* elettrici dei sistemi meccanici, cioè reti elettriche in cui l'evoluzione nel tempo delle varie grandezze è identica, a meno di opportune costanti di proporzionalità, a quella delle grandezze meccaniche corrispondenti. L'utilizzazione dell'analogia consente lo studio sperimentale del comportamento di sistemi dinamici complessi ricorrendo a modelli di diversa natura fisica e di realizzazione più semplice. Si possono costruire modelli analogici elettrici anche di sistemi termici, idraulici, chimici, ecc.

Modello analogico

ESEMPIO 1.4.4

Un modello analogico elettrico del sistema meccanico di Fig. 1.32 è rappresentato in Fig. 1.33: i diversi punti in movimento del sistema meccanico corrispondono a nodi della rete elettrica. Le masse, molle e ammortizzatori corrispondono rispettivamente a capacità verso massa e a induttanze e resistenze fra i diversi nodi. Le velocità corrispondono alle tensioni, le forze alle correnti. La forza impressa f viene riprodotta pertanto nel modello con un generatore di corrente. Se, in luogo della forza f , si assegnasse lo spostamento x , basterebbe sostituire nel modello il generatore di corrente con un generatore di tensione di valore pari alla derivata dello spostamento: è ovvio che la corrente o la tensione

del generatore deve avere un andamento nel tempo corrispondente a quello della forza applicata o della derivata dello spostamento imposto.

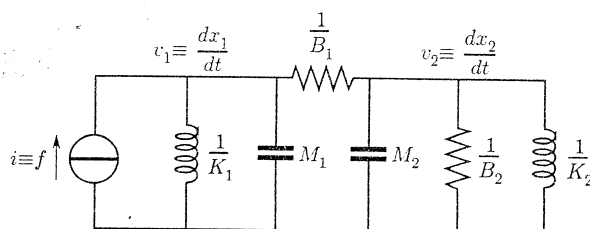


Figura 1.33 Modello analogico elettrico del sistema meccanico di Fig. 1.32.

Nella costruzione dei modelli analogici si possono imporre *fattori di scala* arbitrari fra le varie grandezze, cioè scegliere ad arbitrio le costanti di proporzionalità che le legano nell'analogia, cosicché venga utilizzato completamente il campo di variabilità delle grandezze del modello, operando in modo da facilitare al massimo la misura di tali grandezze.

Fattore di scala

Calcolatore analogico

I *calcolatori analogici*, introdotti negli anni '40 e ampiamente utilizzati negli anni '50 e '60, sono dispositivi per la costruzione di modelli analogici elettrici, caratterizzati dalla massima flessibilità nella riproduzione, mediante circuiti elettrici, delle equazioni algebriche e differenziali proprie dei modelli matematici di sistemi di diversa natura fisica. Poiché con opportuni circuiti elettrici si possono riprodurre anche fenomeni non lineari, i calcolatori analogici costituiscono un interessante mezzo per studiare il comportamento di sistemi dinamici complessi le cui equazioni differenziali non ammettano una soluzione esprimibile analiticamente.

Considerazioni del tutto analoghe a quelle suesposte con riferimento ai sistemi meccanici in moto traslatorio possono ripetersi per i sistemi meccanici in moto rotatorio: in luogo delle forze si considerano le coppie, in luogo delle masse i momenti di inerzia.

ESEMPIO 1.4.5 Il motore elettrico in corrente continua controllato in armatura rappresentato in Fig. 1.34 costituisce un esempio di sistema elettromeccanico particolarmente interessante per le sue frequenti applicazioni nei servomeccanismi. Il motore si suppone collegato, mediante un riduttore ad ingranaggi con rapporto di riduzione $K_r = \omega_1/\omega$, ad un carico caratterizzato da un coefficiente di attrito viscoso B_c e da un momento di inerzia J_c .

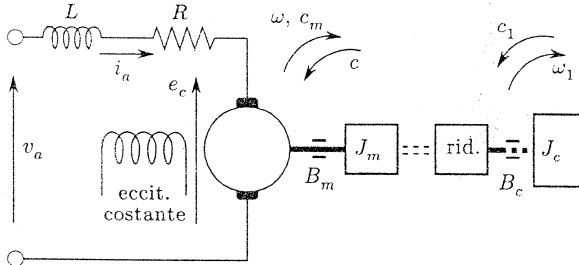


Figura 1.34 Motore elettrico in corrente continua controllato in armatura.

Si considera dapprima il comportamento del motore in assenza di carico: detta i_a la corrente di armatura, Φ il flusso al traferro, la coppia motrice c_m è data dalla relazione

$$c_m(t) = K_1 \Phi(t) i_a(t), \quad (1.51)$$

in cui K_1 indica un'opportuna costante. Essendo la corrente di eccitazione costante, quindi il flusso diretto costante, si può scrivere anche

$$c_m(t) = K_m i_a(t), \quad (1.52)$$

in cui K_m indica una costante caratteristica del motore.

La potenza elettrica trasformata in potenza meccanica è data dalla relazione $p(t) = e_c(t) i_a(t) = c_m(t) \omega(t)$, in cui con e_c si indica la forza controelettromotrice di armatura. Si ha pertanto $e_c(t) = K_m \omega(t)$: la costante che lega la forza controelettromotrice alla velocità angolare è identica a quella che

lega la coppia alla corrente di armatura, sempreché si scelgano per c_m e ω unità di misura il cui prodotto corrisponda al watt (newton metro e radianti/sec). Ciò premesso, si possono scrivere le due seguenti equazioni, la prima delle quali esprime il bilancio delle forze elettromotrici nel circuito di armatura, la seconda l'equilibrio delle coppie applicate all'albero motore:

$$v_a(t) = L D i_a(t) + R i_a(t) + K_m \omega(t), \quad (1.53)$$

$$K_m i_a(t) = B_m \omega(t) + J_m D \omega(t). \quad (1.54)$$

Nella (1.53) L , R indicano l'induttanza e la resistenza del circuito di armatura, nella (1.54) B_m , J_m il coefficiente di attrito viscoso e il momento di inerzia del rotore.

Eliminando $i_a(t)$ dalle (1.53), (1.54) si ottiene l'equazione differenziale che lega $\omega(t)$ a $v_a(t)$ e che descrive il comportamento del motore a vuoto.

Si immagina ora di collegare il motore al carico. Uguagliando le potenze a monte e a valle del riduttore, che si suppone privo di attrito e inerzia, si ricava l'equazione

$$c(t) \omega(t) = c_1(t) \omega_1(t), \quad (1.55)$$

da cui

$$c(t) = K_r c_1(t). \quad (1.56)$$

Nelle (1.55) e (1.56) c_1 e c indicano rispettivamente le coppie resistenti sviluppate dal carico a valle e a monte del riduttore.

Per effetto delle coppie di attrito e di inerzia del carico, a monte del riduttore si sviluppa pertanto la coppia

$$c(t) = K_r (B_c + J_c D) \omega_1(t) = K_r^2 (B_c + J_c D) \omega(t). \quad (1.57)$$

Ciò significa che il coefficiente di attrito e il momento di inerzia del carico possono essere riferiti all'albero motore moltiplicandoli per K_r^2 . I valori così ottenuti si sommano a quelli, relativi al motore, che compaiono a secondo membro della (1.54).

Sistemi termici

L'equazione differenziale che descrive l'evoluzione della temperatura di un corpo si deduce in genere dal bilancio termico relativo ai flussi di calore interessanti il corpo in esame. Al fine di dedurre modelli a costanti concentrate si introduce spesso l'ipotesi che la temperatura del corpo sia uniforme, prescindendo così dai fenomeni propagatori.

ESEMPIO 1.4.6 Si consideri il boiler rappresentato schematicamente in Fig. 1.35, consistente in un serbatoio provvisto di un serpentino riscaldatore. L'acqua entra a temperatura ϑ_i ed esce a temperatura ϑ . Si suppone che la miscelazione sia istantanea e perfetta, cioè che la temperatura all'interno del boiler sia uniforme. L'equazione di bilancio dei flussi di calore è

$$McD\vartheta(t) = q(t) - K(\vartheta(t) - \vartheta_a) - g(t)c(\vartheta(t) - \vartheta_i) \quad (1.58)$$

Il significato dei simboli è:

- M massa dell'acqua contenuta nel serbatoio;
- c calore specifico dell'acqua;
- ϑ temperatura dell'acqua all'interno del boiler;
- ϑ_i temperatura dell'acqua affluente;
- ϑ_a temperatura ambiente;
- q calore per unità di tempo sviluppato dal riscaldatore;

K coefficiente di resistenza termica globale delle pareti;
 g portata entrante e uscente.

Il sistema di Fig. 1.35 può costituire un sistema controllato in cui q rappresenta la variabile manipolabile, ϑ la variabile controllata, g un disturbo.

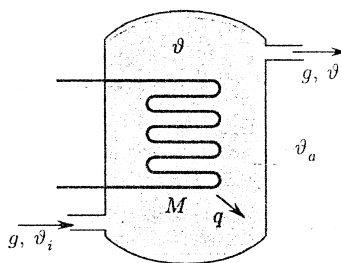


Figura 1.35 Boiler.

1.5. Esercizi

1.5.1 Dato lo schema a blocchi di Fig. 1.36, determinare l'espressione della costante di proporzionalità fra ingresso e uscita.

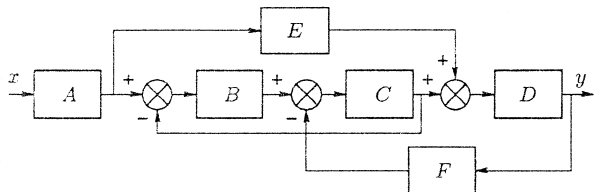


Figura 1.36 Schema a blocchi da ridurre.

Soluzione Si può impiegare il seguente procedimento:

- spostamento della seconda giunzione sommatrice a monte del blocco B e scambio fra la prima e la seconda giunzione sommatrice (Fig. 1.37a);
- eliminazione dell'anello più interno (Fig. 1.37b);
- spostamento della prima giunzione sommatrice a valle del blocco $BC/(1+BC)$ e scambio delle due giunzioni sommantanti (Fig. 1.37c);
- riduzione di blocchi in parallelo, eliminazione dell'anello e riduzione di blocchi in cascata.

Si deduce

$$\frac{y}{x} = AD \frac{BC + E(1+BC)}{1+BC+CDF}$$

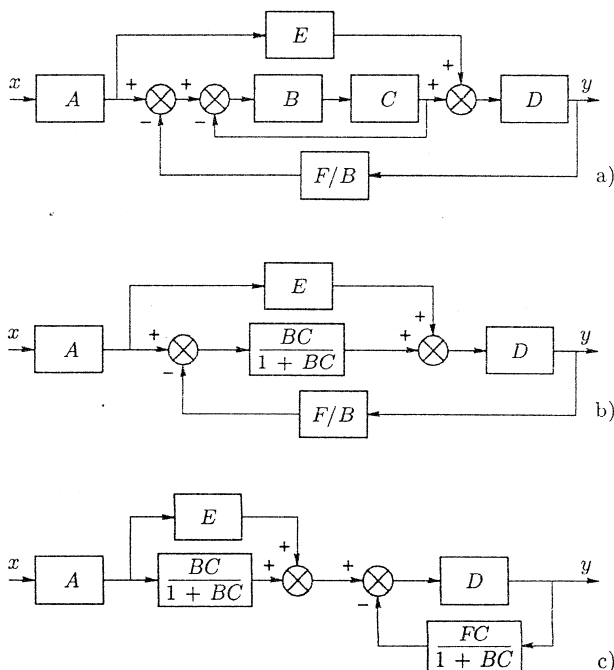


Figura 1.37 Riduzione dello schema a blocchi di Fig. 1.36.

1.5.2 Dimostrare che il sistema di Fig. 1.38, in cui avviene una commutazione esattamente ogni secondo, è lineare non stazionario.

Soluzione Il sistema è descritto dall'equazione differenziale

$$R(t)CDv_u(t) = v_i(t) - v_u(t), \quad (1.59)$$

in cui è

$$R(t) := \begin{cases} R_1 & \text{per } 2\nu \leq t < 2\nu + 1 \\ R_2 & \text{per } 2\nu + 1 \leq t < 2\nu + 2 \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, \dots).$$

La condizione iniziale è $v_u(0) = 0$, dovendosi supporre il sistema inizialmente in quiete.

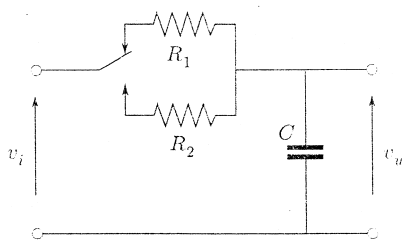


Figura 1.38 Rete elettrica commutata dall'esterno.

Siano $v_i'(t)$, $v_u'(t)$ e $v_i''(t)$, $v_u''(t)$ due coppie eccitazione-risposta, con $v_u'(0) = v_u''(0) = 0$. Dovendo esse soddisfare l'equazione differenziale (1.59), si può scrivere

$$R(t)CDv_u'(t) = v_i'(t) - v_u'(t),$$

$$R(t)CDv_u''(t) = v_i''(t) - v_u''(t).$$

Moltiplicando la prima di tali relazioni per la costante arbitraria k_1 , la seconda per k_2 e sommando,

si ottiene

$$R(t)CD(k_1v_u'(t) + k_2v_u''(t)) = (k_1v_i'(t) + k_2v_i''(t)) + \\ - (k_1v_u'(t) + k_2v_u''(t)),$$

da cui risulta che $k_1v_i'(t) + k_2v_i''(t)$ e $k_1v_u'(t) + k_2v_u''(t)$ costituiscono una coppia eccitazione-risposta. Essendo k_1 e k_2 arbitrarie, il sistema è lineare. Con ragionamento del tutto analogo si può dimostrare, più in generale, che qualunque sistema descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i(t)D^i \right) y(t) = \left(\sum_{i=0}^m b_i(t)D^i \right) x(t), \quad (1.60)$$

in cui $a_i(t)$ e $b_i(t)$ sono funzioni del tempo continue a tratti, è un sistema lineare.

Per dimostrare che il sistema di Fig. 1.38 è non stazionario, si consideri la coppia eccitazione-risposta $v_i(t)$, $v_u(t)$, che soddisfa l'equazione differenziale (1.59). Nell'ipotesi che il sistema sia stazionario, anche la coppia $v_i(t-T)$, $v_u(t-T)$ soddisfa l'equazione (1.59), cioè vale la relazione

$$R(t)CDv_u(t-T) = v_i(t-T) - v_u(t-T).$$

Sottraendo da tale equazione la (1.59) scritta con riferimento all'istante $t-T$, si ricava

$$(R(t) - R(t-T))CDv_u(t-T) = 0 \quad \text{per ogni } t, T \geq 0,$$

relazione che è soddisfatta solo se $R(t)$ è costante, il che non è nel caso in esame. Con ragionamento analogo si dimostra che il sistema a coefficienti funzioni del tempo descritto dalla (1.60) è, in generale, non stazionario, mentre il sistema a coefficienti costanti descritto dalla

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i D^i \right) y(t) = \left(\sum_{i=0}^m b_i D^i \right) x(t), \quad (1.61)$$

è stazionario.

1.5.3 Dimostrare che il sistema di Fig. 1.39, in cui viene inserita R_1 quando è $v_i(t) < 2$ volt e $R_2 (\neq R_1)$ quando è $v_i(t) \geq 2$ volt, è non lineare.

Sol. Siano $v_i(t)$, $v_u(t)$ una coppia eccitazione-risposta con $v_i(t) < 2$ per ogni t . È soddisfatta l'equazione differenziale

$$R_1 CDv_u(t) = v_i(t) - v_u(t). \quad (1.62)$$

Siano k un'opportuna costante e t_1 un opportuno valore del tempo tali che $k v_i(t_1) > 2$. Nell'ipotesi che il sistema sia lineare, vale la relazione

$$R_2 CDk v_u(t_1) = k v_i(t_1) - k v_u(t_1). \quad (1.63)$$

Sottraendo dalla (1.63) la (1.62) scritta per $t = t_1$ e moltiplicata per k , si deduce

$$R_2 = R_1,$$

che pertanto costituisce una condizione necessaria perché il sistema sia lineare. Poiché nel caso in esame è $R_1 \neq R_2$, il sistema è non lineare.

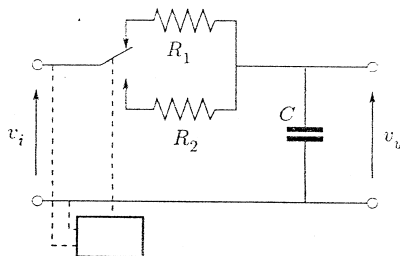


Figura 1.39 Rete elettrica commutata dall'interno.

1.5.4 Dimostrare che interconnettendo (con le regole degli schemi a blocchi) più sistemi lineari si ottiene un sistema lineare.

Soluzione Si noti anzitutto che le giunzioni sommananti sono particolari sistemi lineari puramente algebrici. L'interconnessione rappresenta un sistema di vincoli sulle coppie eccitazione-risposta di ogni singolo sottosistema, che pertanto vengono, in generale, ad appartenere ad un insieme più ristretto di

quello cui appartenevano in assenza di interconnessione: di conseguenza per ogni singolo sottosistema due coppie eccitazione-risposta ammissibili in presenza di interconnessione sono ammissibili anche in assenza di interconnessione e soddisfano la definizione di linearità. Assumendo in tale definizione gli stessi valori dei coefficienti k_1 e k_2 per ogni sottosistema, si conclude che il sistema complessivo, i cui segnali coincidono ciascuno con un segnale individuabile in almeno un sottosistema, è lineare.

Complementi al Capitolo 1

C1.1. I grafi di flusso di segnale

I *grafi di flusso di segnale* sono un mezzo, alternativo agli schemi a blocchi, per la rappresentazione grafica dei sistemi complessi, cioè composti di numerose parti fra loro collegate. Rispetto agli schemi a blocchi, essi risultano vantaggiosi per la più semplice grafia e manipolazione. Ad esempio, un semplice sistema in retroazione può essere rappresentato, in modo del tutto equivalente, con lo schema a blocchi di Fig. 1.40a o con il grafo di flusso di segnale di Fig. 1.40b.

Grafi di flusso di segnale

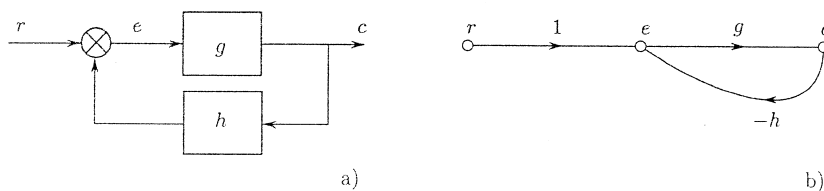


Figura 1.40
Schema a blocchi e grafo di flusso di segnale di un sistema in retroazione.

Un grafo di flusso di segnale è una rete composta di *nodi* e di *rami orientati* (cioè di rami per i quali è fissato un verso di percorrenza, indicato graficamente con una freccia). Si hanno *nodi indipendenti* o *nodi sorgente*, cioè nodi cui non giunge alcun ramo (es. r in Fig. 1.40b) e *nodi dipendenti*, cioè nodi ai quali giunge almeno un ramo (es. e , c in Fig. 1.40b); ogni ramo è caratterizzato da un *coefficiente* o *trasmissione* (es. 1 , g , h in Fig. 1.40b).

Il grafo rappresenta un sistema di equazioni algebriche lineari: in particolare i nodi sorgente rappresentano i termini noti, i nodi dipendenti le incognite e i rami i coefficienti: il passaggio dal grafo alle equazioni si ottiene esprimendo la variabile corrispondente a ciascun nodo dipendente come combinazione lineare di quelle corrispondenti ai nodi da cui partono rami diretti verso il nodo considerato, con coefficienti dati dai rispettivi coefficienti di ramo. Al grafo di flusso di segnale di Fig. 1.40b corrisponde così il sistema

$$\begin{aligned} e &= r - hc, \\ c &= ge. \end{aligned}$$

Il problema fondamentale che si presenta quando si studia un sistema mediante un grafo di flusso di segnale è quello della *riduzione* del grafo: si consideri un grafo comunque complesso, rappresentato schematicamente in Fig. 1.41a, con due nodi sorgente, x_{01} e x_{02} , e si supponga di aver individuato tre nodi dipendenti, x_1 , x_2 e x_3 , corrispondenti ai segnali che

Ramo orientato
Nodo indipendente sorgente
Nodo dipendente
Coefficiente di ramo
Trasmissione di ramo

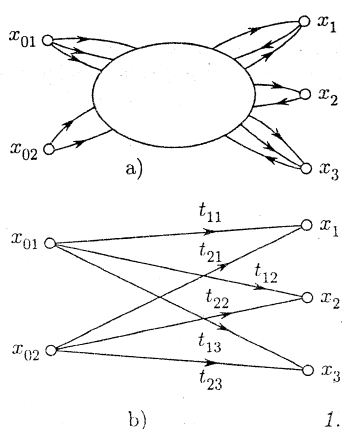


Figura 1.41
Grafo di flusso di segnale
e grafo ridotto.

si vuole esprimere in funzione dei segnali sorgente. Se i segnali corrispondenti agli altri nodi dipendenti non interessano, si può ridurre il grafo alla *forma minima* di Fig. 1.41b, in cui dai nodi dipendenti non partono rami: ciò equivale ad esprimere, nel sistema di equazioni algebriche lineari equivalente al grafo, tutte le incognite che interessano come funzioni lineari dei termini noti, risolvendo così il sistema, senza considerare quelle variabili incognite che, pur essendo state utili nella costruzione del grafo, non interessano come risultato.

La riduzione dei grafi di flusso di segnale si può effettuare con due diversi procedimenti, che verranno entrambi presi in esame nel seguito: la *riduzione per semplificazioni successive*, che si effettua applicando alcune semplici regole che consentono di eliminare i nodi e i rami che non interessano, e la *riduzione diretta*, che si effettua applicando un particolare algoritmo (formula di Mason) che richiede un'analisi degli elementi topologici caratterizzanti il grafo (percorsi ed anelli).

La riduzione per semplificazioni successive si basa sull'applicazione delle seguenti cinque regole:

1. *Riduzione dei rami in parallelo*: due rami che partono dal medesimo nodo e confluiscono nel medesimo nodo sono equivalenti ad un unico ramo diretto dal primo al secondo nodo, cui è associato un coefficiente pari alla somma dei coefficienti dei due rami considerati (Fig. 1.42a).

2. *Riduzione dei rami in cascata* (eliminazione di un nodo): due rami, uno entrante e l'altro uscente da uno stesso nodo al quale non giungano e dal quale non partano altri rami sono equivalenti ad un unico ramo diretto dal nodo di partenza del primo ramo al nodo in cui termina il secondo e il cui coefficiente è uguale al prodotto dei coefficienti dei rami considerati (Fig. 1.42b).

3. *Eliminazione di un autoanello* (cioè di un ramo che si origina e termina nello stesso nodo): un autoanello di coefficiente t equivale all'applicazione del fattore $1/(1-t)$ ai coefficienti di tutti i rami che terminano nel nodo considerato (Fig. 1.42c). Infatti, con riferimento all'esempio di Fig. 1.42c, vale la relazione

$$x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + tx, \text{ e quindi } x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{1-t}.$$

4. *Duplicazione di un nodo con duplicazione dei rami entranti*: a ciascuno dei due nodi, x' e x'' , che sostituiscono il nodo x , si fanno terminare tutti i rami che terminavano in x (e che pertanto vengono anch'essi duplicati); i rami che uscivano da x vengono invece distribuiti in modo arbitrario fra x' e x'' , eccettuato un eventuale autoanello, che si conserva per ciascuno dei due nodi sostituenti (Fig. 1.42d).

5. *Duplicazione di un nodo con duplicazione dei rami uscenti*: da ciascuno dei due nodi, x' e x'' , che sostituiscono il nodo x , si fanno originare tutti i rami che si originavano da x (e che pertanto vengono anch'essi duplicati); i rami che terminavano in x vengono invece distribuiti in maniera arbitraria fra x' e x'' , eccettuato un eventuale autoanello, che si conserva per ciascuno dei due nodi sostituenti (Fig. 1.42e).

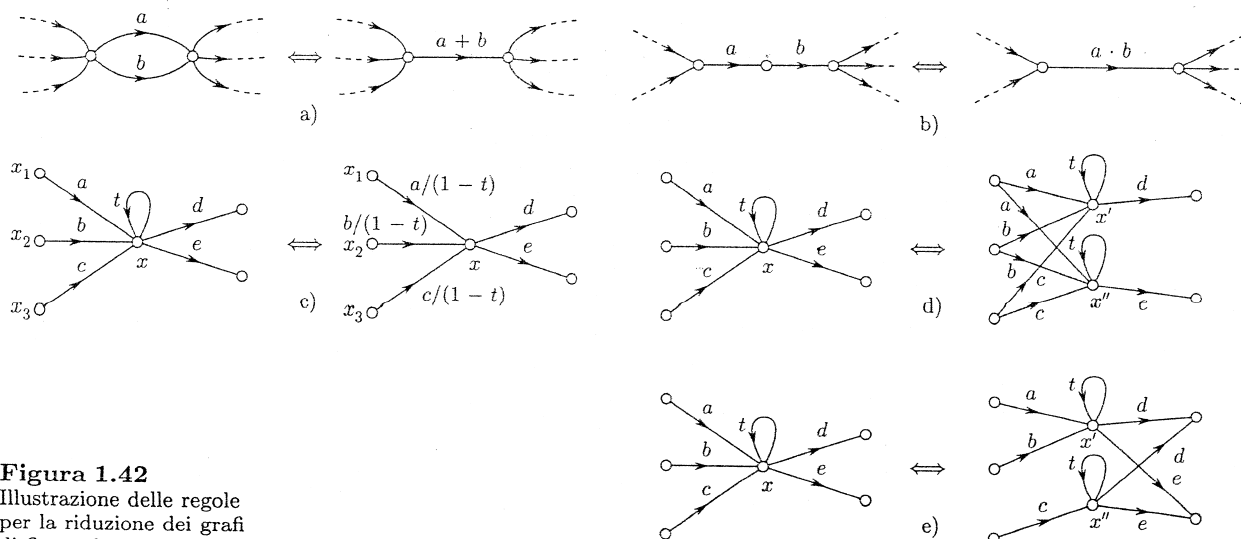


Figura 1.42
Illustrazione delle regole
per la riduzione dei grafi
di flusso di segnale.

ESEMPIO C1.1.1 La riduzione alla forma minima del grafo di flusso di segnale di Fig. 1.40b si può effettuare

con i passaggi indicati in Fig. 1.43.

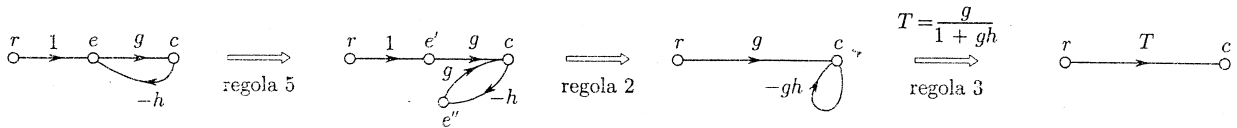


Figura 1.43 Riduzione alla forma minima del grafo di Fig. 1.40b.

ESEMPIO C1.1.2 La riduzione alla forma minima del grafo di flusso di segnale di Fig. 1.44a può avvenire con i passaggi che lo trasformano nei grafi rappresentati in Fig. 1.44b-f.

La riduzione diretta si basa, come si è anticipato, sull'applicazione della *formula di Mason*. Si supponga di voler ridurre un grafo di flusso di segnale ad una determinata forma minima: per la sovrapposibilità degli effetti, conseguente alla linearità del sistema, si può considerare separatamente l'effetto di ciascun nodo sorgente su ogni nodo dipendente che si vuole conservare nella forma minima e limitarsi pertanto, senza ledere la generalità, a prendere in esame solo forme minime comprendenti un solo nodo sorgente e un solo nodo dipendente.

Prima di illustrare la formula di Mason, che appunto a tale caso si riferisce, occorre premettere le seguenti definizioni.

Un *percorso di segnale fra due nodi dati* è una successione di rami adiacenti, cioè di rami che terminano ciascuno nel nodo da cui si origina il ramo successivo, tale che il primo ramo si origina nel primo dei due nodi considerati e l'ultimo termina nel secondo e che non tocca uno stesso nodo del grafo più di una volta. Il *coefficiente o trasmittanza di percorso* P_i è il prodotto dei coefficienti dei rami che compongono il percorso i -esimo.

Un *anello* è un percorso di segnale chiuso. Il *coefficiente o trasmittanza di anello* A_i è il prodotto dei coefficienti dei rami che compongono l'anello i -esimo.

Si dice che due percorsi o due anelli o un percorso e un anello *non si toccano* quando non hanno alcun nodo in comune.

Per applicare la formula di Mason occorre anzitutto individuare tutti i possibili percorsi fra il nodo sorgente e il nodo dipendente che interessa mantenere nella forma minima e tutti gli anelli del grafo.

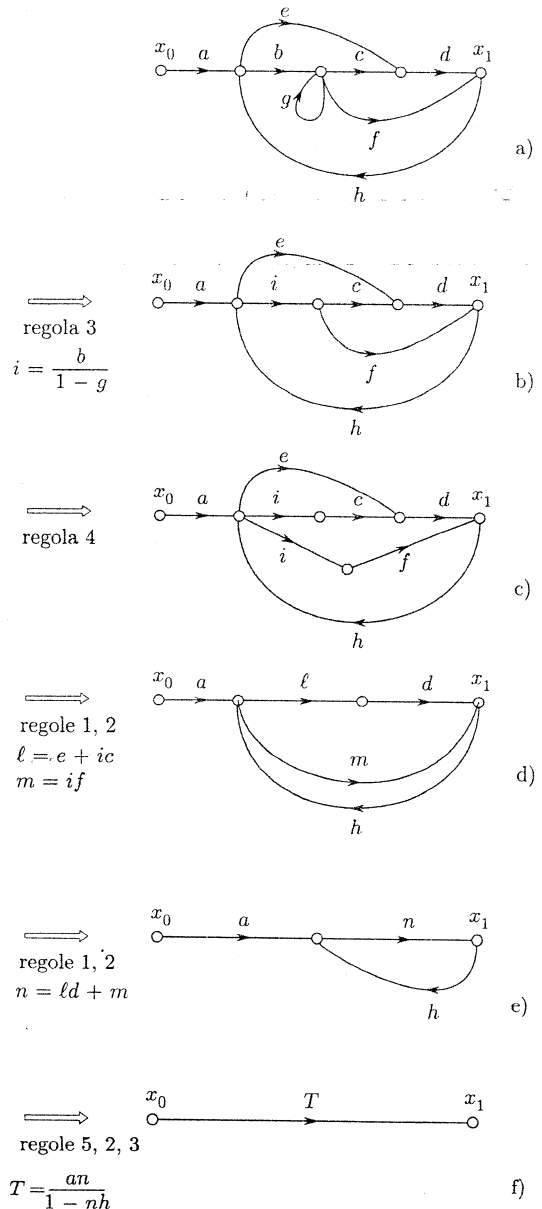


Figura 1.44 Esempio di riduzione per semplificazioni successive.

ESEMPIO C1.1.3 Nel grafo di Fig. 1.44a si individuano tre percorsi e quattro anelli, e precisamente:

$$P_1 = abcd, \quad P_2 = aed, \quad P_3 = abf,$$

$$A_1 = edh, \quad A_2 = bcdh, \quad A_3 = bfh, \quad A_4 = g.$$

Si conviene di indicare con $\mathcal{J}_1$ l'insieme degli indici dei coefficienti di tutti gli anelli del grafo, con $\mathcal{J}_2$ l'insieme delle coppie di indici dei coefficienti degli anelli che non si toccano a due a due, con $\mathcal{J}_3$ l'insieme delle terne di indici dei coefficienti degli anelli che non si toccano a tre a tre e così via; con $\mathcal{P}$ l'insieme degli indici dei coefficienti di tutti i percorsi individuati fra i due nodi considerati, con $\mathcal{J}_1^i$ l'insieme dei coefficienti degli anelli che non toccano il percorso i -esimo, con $\mathcal{J}_2^i$ l'insieme delle coppie di indici dei coefficienti degli anelli che non si toccano a due a due e che non toccano il percorso i -esimo e così via.

Ciò posto, la formula di Mason, che fornisce il coefficiente T dell'unico ramo della forma minima (detto an-

che *coefficiente o trasmittanza del grafo*) si scrive

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i. \quad (1.64)$$

In essa Δ rappresenta il *determinante del grafo*, definito mediante la relazione

$$\Delta := 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{J}_3} A_i A_j A_k + \dots, \quad (1.65)$$

mentre Δ_i rappresenta il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando dal grafo in esame il percorso di coefficiente P_i , cioè cancellando tutti i rami e i nodi del percorso di coefficiente P_i . Esso è dato dalla relazione

$$\Delta_i := 1 - \sum_{h \in \mathcal{J}_1^i} A_h + \sum_{(h,j) \in \mathcal{J}_2^i} A_h A_j - \sum_{(h,j,k) \in \mathcal{J}_3^i} A_h A_j A_k + \dots$$

Le sommatorie nelle precedenti relazioni sono in genere in numero non elevato: quando una di esse non è presente essendo vuoto l'insieme di definizione degli indici, non sono presenti neppure tutte le successive.

ESEMPIO C1.1.4 Nel caso del grafo di Fig. 1.44a gli insiemi di indici non vuoti sono:

$$\mathcal{J}_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{J}_2 = \{(1, 4)\},$$

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{J}_1^2 = \{4\};$$

la formula di Mason fornisce pertanto l'espressione

$$T = \frac{abcd + aed(1-g) + abf}{1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg}.$$

◆ Sensibilità del coefficiente del grafo alle variazioni di un parametro

Si consideri il grafo di flusso di segnale rappresentato in Fig. 1.45, in cui si è posto in evidenza un ramo, di coefficiente k . È chiaro che, in generale, se il coefficiente k subisce una variazione, varia di conseguenza il coefficiente del grafo T : si definisce *sensibilità di T rispetto a k* il rapporto fra la variazione relativa di T e la variazione relativa di k , cioè il rapporto

$$S_k^T := \frac{dT/T}{dk/k}.$$

Siano N il numeratore e Δ il denominatore della formula di Mason, in generale entrambi funzioni di k .

Facendo riferimento in primo luogo all'espressione del denominatore, si nota che esso è dato dalla somma dell'unità e di monomi, ciascuno dei quali è un prodotto di coefficienti di anelli: in alcuni dei monomi può essere presente il coefficiente k (precisamente in quelli relativi ad anelli passanti per i nodi x_r e x_s), ma non si possono avere in alcun monomio potenze di k , perché, se un dato anello passa per i due nodi cui si appoggia il ramo di coefficiente k , gli altri anelli del prodotto, che non lo toccano, non possono passare per gli stessi nodi.

Si può pertanto scrivere la relazione

$$\Delta = \Delta_0 + kR,$$

dove con Δ_0 si indica il determinante del grafo in cui si è cancellato il ramo di coefficiente k , determinante che si può ottenere ponendo $k = 0$ nell'espressione del determinante del grafo

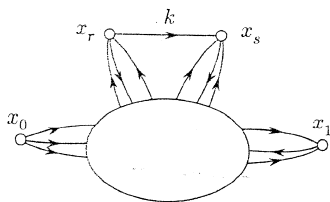


Figura 1.45
Grafo di flusso di segnale
con un ramo in evidenza.

completo, con R una funzione dei coefficienti di ramo, che non dipende dal coefficiente k . Con riferimento al numeratore della formula di Mason, in base ad analoghe considerazioni si può scrivere

$$N = N_0 + kS,$$

dove con N_0 si indica il numeratore della formula di Mason relativa al grafo in cui si è cancellato il nodo di coefficiente k , che si può ottenere ponendo $k = 0$ nell'espressione del numeratore N della formula di Mason relativa al grafo completo, con S una funzione dei coefficienti di ramo, che non dipende dal coefficiente k .

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} S_k^T &= \frac{\Delta dN - N d\Delta}{\Delta^2} \frac{\Delta}{N} \bigg/ \frac{dk}{k} = k \frac{dN}{dk} \frac{1}{N} - k \frac{d\Delta}{dk} \frac{1}{\Delta} \\ &= \frac{N - N_0}{N} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\Delta} = \frac{\Delta_0}{\Delta} - \frac{N_0}{N} = \frac{\Delta_0}{\Delta} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right), \end{aligned} \quad (1.66)$$

in cui con T_0 si indica il coefficiente del grafo mancante del ramo di coefficiente k .

ESEMPIO C1.1.5 Nel caso del grafo di Fig. 1.40b, relativo ad un sistema in retroazione ad un solo anello, le sensibilità del coefficiente T rispetto a g e ad h sono rispettivamente

$$\begin{aligned} S_g^T &= \frac{1}{1+gh} \left(1 - \frac{0}{1+gh}\right) = \frac{1}{1+gh}, \\ S_h^T &= \frac{1}{1+gh} \left(1 - \frac{g}{1+gh}\right) = \frac{-gh}{1+gh}. \end{aligned}$$

◆ Inversione di un percorso in un grafo di flusso di segnale

L'operazione di inversione di percorso ha lo scopo di capovolgere il legame causa-effetto fra un segnale sorgente e un segnale dipendente. Essa equivale allo scambio di un'incognita con un termine noto nel sistema di equazioni algebriche lineari equivalente al grafo.

ESEMPIO C1.1.6 Si consideri il grafo di flusso rappresentato in Fig. 1.46a, in cui x_0 è causa e x_1 è effetto: si supponga di voler invertire tale relazione, cioè di voler trovare il valore di x_0 cui corrisponde un dato valore di x_1 .

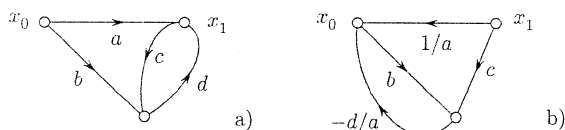


Figura 1.46 Inversione di un percorso costituito da un solo ramo.

Se i due nodi che interessano sono congiunti direttamente da un ramo, come avviene nel caso del grafo di Fig. 1.46a, si può applicare la regola per l'inversione di un percorso costituito da un solo ramo, che consiste nei seguenti punti:

- i) si inverte il senso della freccia del ramo e si sostituisce il coefficiente con il suo reciproco;
- ii) i rami che giungono al nodo cui perveniva il ramo che si considera vengono fatti giungere invece al nodo

da cui partiva e i loro coefficienti vengono moltiplicati per il reciproco del coefficiente del ramo che si considera e cambiati di segno.

In Fig. 1.46b è rappresentato il grafo di flusso di segnale che si ottiene da quello di Fig. 1.46a invertendo il percorso costituito dal ramo a .

Nel caso che i due nodi di cui interessa scambiare il legame causa-effetto non siano congiunti direttamente da alcun ramo, ma solo da uno o più percorsi passanti per altri nodi, si sceglie un qualunque percorso, per esempio quello che comprende il minor numero di rami. L'inversione del percorso si esegue invertendo successivamente, mediante la regola sopra enunciata, tutti i rami che ne fanno parte. Un esempio è illustrato in Fig. 1.47a-c.

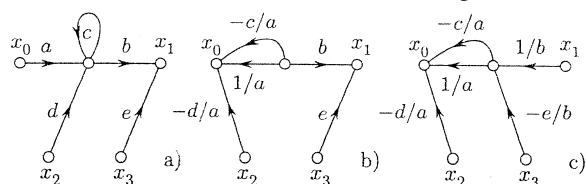


Figura 1.47 Inversione di un percorso costituito da più rami.

◆ Regole per l'interconnessione di grafi di flusso di segnale

Qualora si debba studiare un sistema fisico costituito di due o più parti interconnesse, si può ottenere il grafo del sistema complessivo dall'interconnessione dei grafi delle singole parti purché ogni segnale comune corrisponda in uno dei grafi ad un nodo dipendente, negli altri a nodi sorgente: l'interconnessione si può eseguire semplicemente congiungendo i nodi con rami di coefficiente unitario, orientati dal nodo dipendente ai nodi sorgente. In alcuni casi affinché la regola di interconnessione sopra enunciata venga soddisfatta occorre eseguire preventivamente su uno o più dei grafi l'operazione di inversione di percorso.

ESEMPIO C1.1.7 Si consideri il sistema costituito da due semplici reti elettriche fra loro collegate rappresentato in Fig. 1.48a: per ottenere il grafo del si-

stema complessivo si possono interconnettere i grafi dei due sottosistemi come è indicato in Fig. 1.48b.

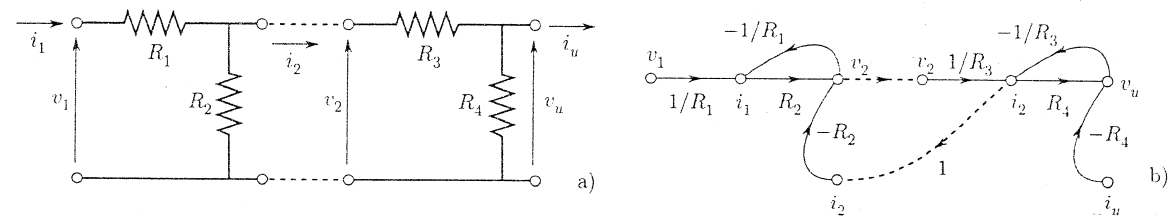


Figura 1.48 Interconnessione di due reti elettriche e dei grafi corrispondenti.

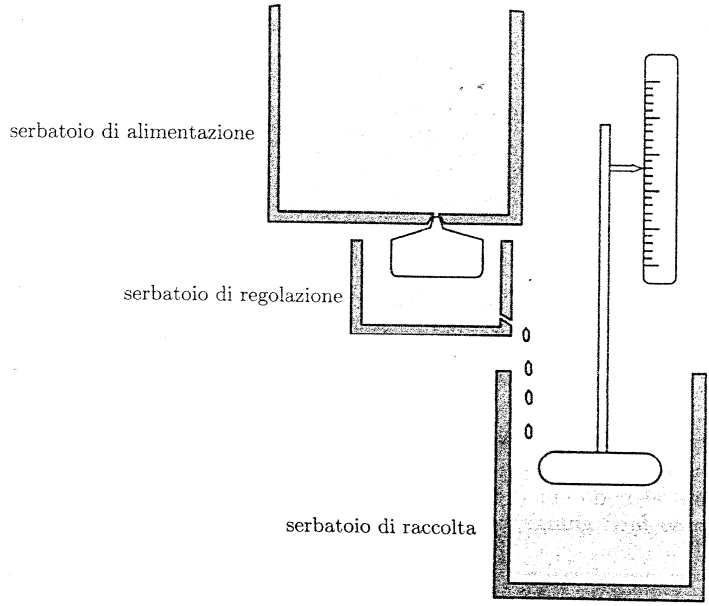
C1.2. Esempi di sistemi di controllo in retroazione

Si riportano alcuni esempi di sistemi di controllo in retroazione per mostrare come apparecchiature realizzate in tempi diversi e con tecniche anche molto diverse si possano ricondurre allo schema generale di Fig. 1.26.

◆ L'orologio ad acqua

In fig 1.49 è rappresentato quello che viene generalmente riconosciuto come il primo esempio di sistema in retroazione, l'orologio ad acqua, di cui si ha traccia nella letteratura

Figura 1.49
L'orologio ad acqua.



greca fino dal terzo secolo a.C. La portata di acqua che esce dal foro del serbatoio di regolazione è costante in quanto il livello in tale serbatoio viene mantenuto costante, contrariamente a quello nel serbatoio di alimentazione, che scende lentamente. A ciò provvede un galleggiante, che agisce direttamente su una valvola, in modo che la portata entrante aumenti se il livello tende a scendere e diminuisca se il livello tende a salire. La quantità di acqua (e quindi il livello) nel serbatoio di raccolta risulta pertanto proporzionale al tempo che intercorre dall'istante in cui esso è stato vuotato, ad esempio all'inizio della giornata, e il serbatoio di alimentazione contemporaneamente riempito. Un indice mosso da un secondo galleggiante posto nel serbatoio di raccolta segna direttamente il tempo su una scala graduata.

◆ Il regolatore di Watt

Il regolatore di Watt, rappresentato schematicamente in Fig. 1.50, fu impiegato nel motore a vapore di Watt intorno al 1785, per regolarne la velocità al variare della coppia di carico. Una diminuzione della velocità porta all'abbassamento delle due sfere del regolatore che vengono mantenute divaricate dalla forza centrifuga. Questo abbassamento, per effetto di un sistema di leve produce una maggiore apertura della valvola a farfalla che regola la portata del vapore, quindi allo sviluppo di una coppia maggiore da parte del motore. Il sistema è in retroazione perché la velocità di rotazione del motore viene ad agire sulla portata di vapore, che a sua volta influenza la velocità.

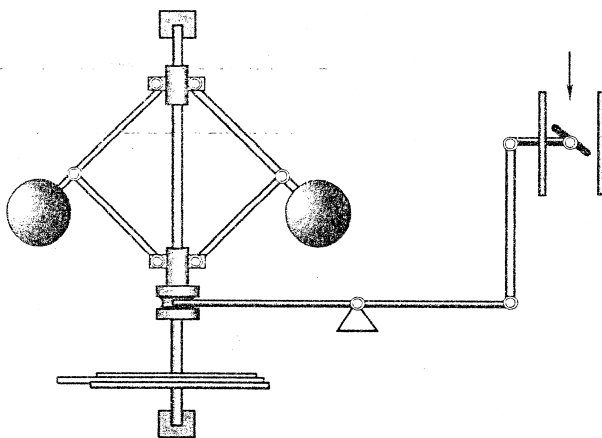


Figura 1.50
Il regolatore di Watt.

Nei casi dell'orologio ad acqua e del regolatore di Watt l'energia richiesta per l'attuatore (una valvola) viene prelevata dallo stesso sistema. In altri casi l'energia per l'attuatore viene fornita da un generatore esterno. Gli esempi che seguono hanno lo scopo di illustrare diversi modi di amplificare, elaborare e trasmettere i segnali nei sistemi in retroazione.

◆ Amplificazione pneumatica: controllo di livello

In Fig. 1.51a è rappresentato lo schema di principio di un dispositivo pneumatico per la regolazione del livello dell'acqua in un serbatoio. Il cuore del dispositivo, l'amplificatore pneumatico, è costituito dal sistema "lamina mobile-ugello" (flapper-nozzle) rappresentato in Fig. 1.51b: aria compressa a pressione p_s viene inviata all'ugello u attraverso la strozzatura s . Spostando la lamina ℓ si varia la portata di aria effluente, e quindi la pressione p_u , che è data dalla pressione p_s meno la caduta di pressione nella strozzatura, dipendente da tale portata.

Nel dispositivo di Fig. 1.51a lo spostamento della lamina è proporzionale alla differenza di due pressioni, che vengono convertite in spostamenti lineari mediante due soffiotti: la pressione di riferimento p_1 e la pressione p_2 , proporzionale al livello dell'acqua nel serbatoio. Il trasduttore livello-pressione è ottenuto molto semplicemente rilevando il carico piezometrico alla base del serbatoio.

La pressione p_u all'uscita dell'ugello viene utilizzata per variare, mediante un attuatore a membrana, la posizione dello stelo di una valvola che regola l'afflusso di liquido nel serbatoio. Poiché la completa escursione di pressione si ottiene con piccoli spostamenti della lamina, se l'ugello è in posizione centrale rispetto alla lamina all'equilibrio sarà in pratica $p_1 = p_2$: si ottiene così la regolazione del livello ad un valore proporzionale alla pressione p_1 .

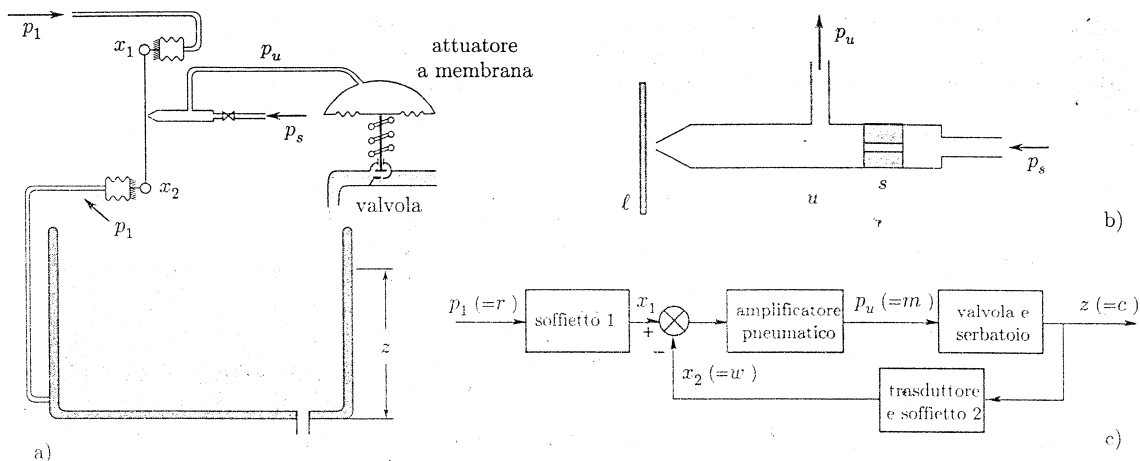


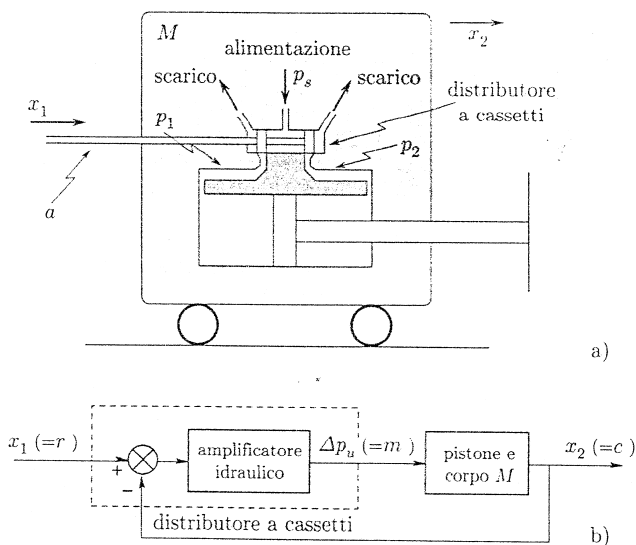
Figura 1.51
Dispositivo pneumatico
per il controllo di livello.

In Fig. 1.51c è rappresentato lo schema a blocchi del regolatore. Qualche decennio fa, quando l'amplificazione elettronica con dispositivi a semiconduttore integrati non era ancora diffusa, negli stabilimenti chimici e petrolchimici, in cui le variabili manipolabili sono principalmente posizioni di steli di valvole che regolano portate di fluidi, gli amplificatori, le reti correttici e gli attuatori erano di tipo pneumatico. Ora si tende a restringere l'impiego dell'energia pneumatica allo stadio finale della regolazione (amplificatori di potenza e attuatori).

Amplificazione idraulica: inseguitore di posizione idraulico

Il corpo indicato con M in Fig. 1.52a, ad esempio la slitta portautensili di un tornio a copiare, deve essere spostato, senza esercitare sforzo apprezzabile, agendo sull'asta a .

Figura 1.52
Inseguitore di posizione
idraulico.



Un distributore a cassette e il cilindro di un attuttore oleodinamico sono solidali con il corpo M . Al distributore perviene olio ad elevata pressione p_s .

Uno spostamento relativo verso destra dell'asta a rispetto al corpo M provoca un aumento della pressione p_2 rispetto alla pressione p_1 e quindi un'azione sul pistone che porta allo spostamento di M nello stesso senso, fino a riottenere l'equilibrio con l'annullamento di $\Delta p_u = p_2 - p_1$.

Un possibile schema a blocchi del dispositivo di Fig. 1.52a è rappresentato nella Fig. 1.52b. Sistemi idraulici (oleodinamici) del tipo descritto sono largamente impiegati per la loro grande potenza in relazione alle dimensioni, la loro semplicità, robustezza, affidabilità, insensibilità alle forze perturbatrici esterne. Anch'essi, come i sistemi pneumatici, sono ora utilizzati esclusivamente per l'amplificazione di potenza e l'attuazione, funzioni nelle quali risultano spesso preferibili ai motori elettrici. L'amplificazione e l'elaborazione

di segnale vengono in genere ottenute con dispositivi elettronici, ai quali gli attuatori pneumatici vengono collegati attraverso speciali elettrovalvole, consistenti sostanzialmente in un distributore a cassette il cui spostamento viene comandato elettricamente.

Amplificazione elettronica: servomeccanismo di posizione

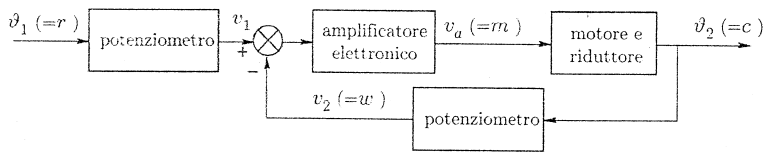
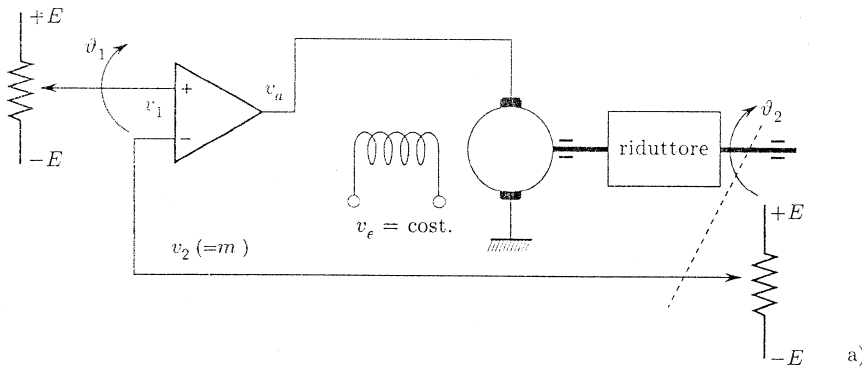
Lo schema di un servomeccanismo di posizione con motore elettrico in corrente continua è riportato in Fig. 1.53a, mentre in Fig. 1.53b è rappresentato il corrispondente diagramma a blocchi. L'ingresso e l'uscita sono posizioni angolari, indicate con ϑ_1 e ϑ_2 : mediante potenziometri, tali posizioni angolari vengono convertite nei segnali elettrici v_1 e v_2 , che vengono fra loro sottratti e amplificati utilizzando un amplificatore elettronico con ingresso differenziale avente uno stadio di uscita di potenza adeguata. Amplificatori di tale tipo per piccole potenze, dell'ordine della decina di watt, sono reperibili in commercio come circuiti integrati monolitici, mentre per potenze maggiori si possono adottare circuiti integrati come amplificatori di segnale, collegandoli ad uno stadio di potenza appositamente costruito.

L'uscita dell'amplificatore alimenta direttamente il circuito di armatura di un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente, che, attraverso un riduttore ad ingranaggi, provvede a variare la posizione angolare ϑ_2 in direzione tale da diminuire il segnale errore $v_1 - v_2$. All'equilibrio (motore fermo) tale segnale è nullo, il che comporta che sia $\vartheta_2 = \vartheta_1$.

Usualmente i sistemi di controllo realizzati secondo lo schema di Fig. 1.53a comprendono anche una rete correttiva, costituita da un opportuno circuito a resistenza e capacità compreso entro l'amplificatore elettronico, il quale realizza pertanto, oltre all'amplificazione, anche un'opportuna elaborazione del segnale errore.

Figura 1.53

Schema e diagramma a blocchi di un servomeccanismo di posizione elettrico.



Sistemi a segnali campionati

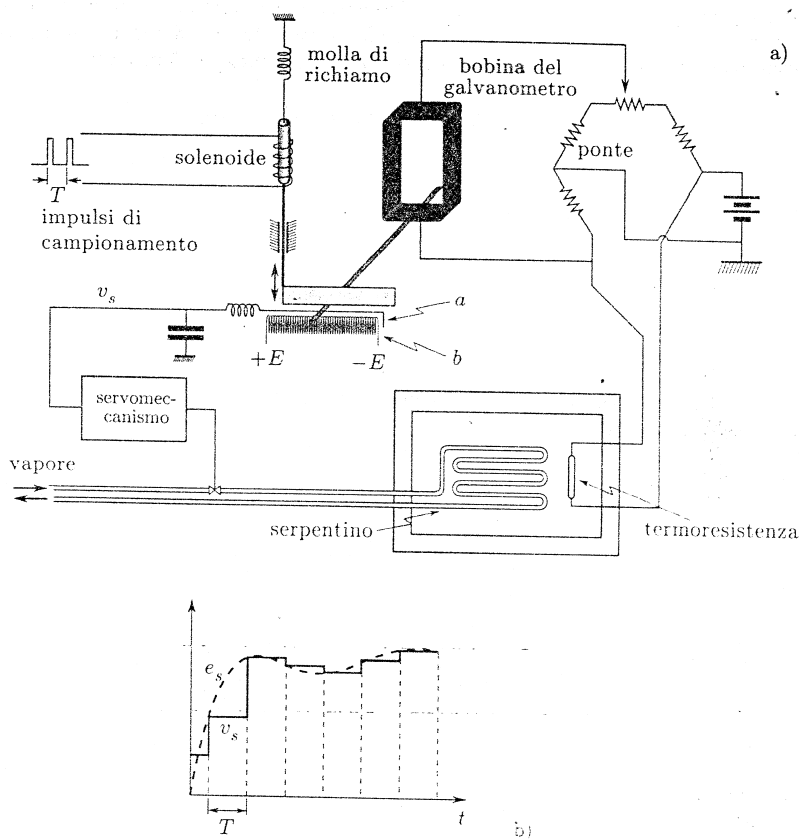
In taluni casi la trasmissione del segnale in uno o più punti dell'anello di retroazione non avviene con continuità nel tempo, ma per campioni trasmessi in istanti discreti. Il campionamento viene effettuato nelle seguenti circostanze:

i) quando la misura della variabile controllata non può avvenire con continuità per la scarsa potenza del trasduttore;

ii) quando i segnali vengono codificati, per avere trasmissioni sicure a distanze elevate o per eseguire l'elaborazione mediante un calcolatore numerico: corrispondendo ogni livello di segnale ad un'opportuna sequenza di impulsi in codice, è evidente che la trasmissione non può essere continua.

Figura 1.54

Esempio di sistema a segnali campionati.



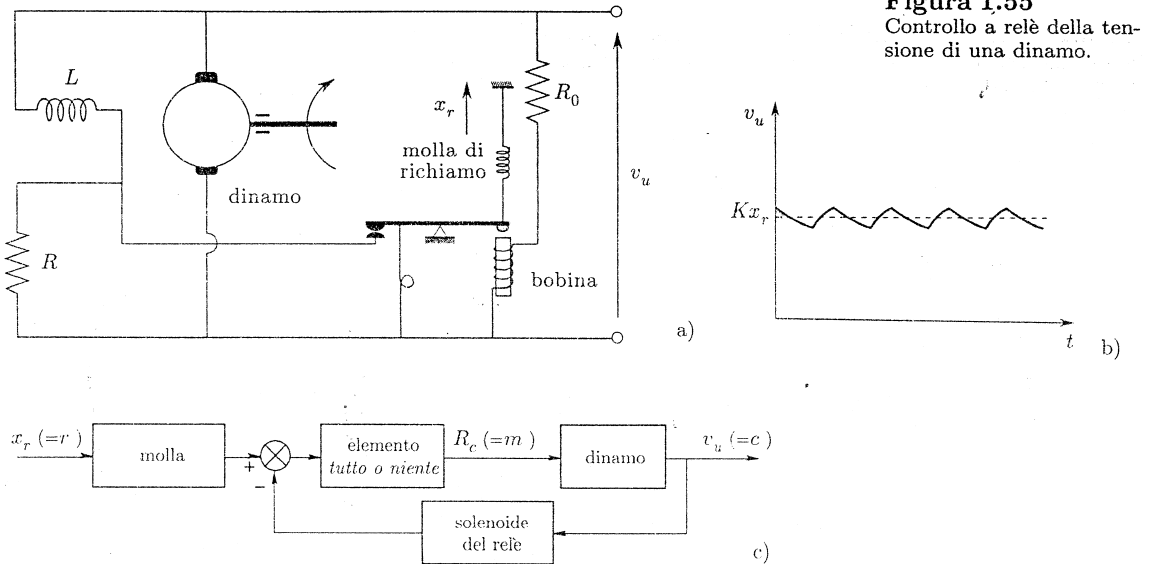
Un esempio di sistema di controllo a segnali campionati, in cui il campionamento viene effettuato per non caricare il trasduttore di misura, è riportato in Fig. 1.54a. Esso si riferisce ad un controllo di temperatura ottenuto agendo, mediante una valvola, sulla portata di un fluido riscaldante.

La misura viene eseguita con una termoresistenza, inserita in un ponte il cui sbilanciamento viene rivelato da un galvanometro. Periodicamente, mediante un opportuno segnale inviato ad un elettromagnete, l'indice del galvanometro viene abbassato e bloccato, fino a stabilire il contatto elettrico fra la barra conduttrice *a* e l'avvolgimento resistivo *b*, cosicché la barra *a* si porta ad una tensione v_s , dipendente dalla posizione dell'indice all'istante in cui viene inviato l'impulso di campionamento. Tale tensione viene "memorizzata" in un condensatore fra un istante di campionamento e il successivo ed inviata, come segnale di retroazione, ad un servomeccanismo, che muove lo stelo della valvola.

L'andamento nel tempo del segnale v_s è riportato in Fig. 1.54b, insieme all'andamento del corrispondente segnale non campionato e_s (cioè del segnale che si otterrebbe qualora il galvanometro potesse muovere direttamente il cursore di un potenziometro). Il dispositivo descritto è ora superato, in quanto può essere realizzato sostituendo il galvanometro con un amplificatore elettronico, essendo disponibili amplificatori con correnti di ingresso trascurabili. L'impiego dei segnali campionati si è peraltro molto diffuso in quanto i regolatori elettronici vengono realizzati sempre più spesso con dispositivi digitali.

◆ Sistemi a relè o "tutto o niente"

I sistemi a relè sono sistemi di controllo in cui l'amplificazione, per ragioni di semplicità costruttiva o di economia o di rendimento, avviene mediante un dispositivo ad azione discontinua, normalmente a due soli livelli, quale il relè. Essi sono tipicamente nonlineari e, a causa della discontinuità della caratteristica del relè, hanno in genere un comportamento oscillatorio, con oscillazioni di ampiezza contenuta. Tale comportamento non può essere in alcun modo approssimato con quello di un sistema lineare, per cui per i sistemi a relè non può applicarsi la linearizzazione locale per piccoli segnali.



Un esempio tipico di sistema di controllo a relè è il controllo della tensione di una dinamo, il cui schema è riportato in Fig. 1.55a: se la tensione di uscita v_u cresce oltre un certo limite, l'ancora del relè viene attratta, e per il conseguente inserimento della resistenza R in serie al circuito di campo, il flusso di eccitazione della dinamo diminuisce; ciò provoca una diminuzione della tensione v_u fino al valore in corrispondenza al quale il relè si diseccita, provocando nuovamente un aumento della tensione v_u .

La tensione v_u viene pertanto ad assumere l'andamento rappresentato in Fig. 1.55b, cioè viene ad oscillare intorno al valore Kx_r , dipendente dalla forza esercitata dalla molla di richiamo del relè, forza che può essere variata modificando la posizione x_r dell'estremo fisso della molla stessa.

Uno schema a blocchi del dispositivo è riportato in Fig. 1.55c: la variabile errore è data dalla forza complessiva della leva sul contatto mobile, mentre la variabile manipolabile (che può assumere due soli valori) è la resistenza R_c del circuito di campo della dinamo.

C1.3. Esercizi

C1.3.1 Dato lo schema a blocchi di Fig. 1.56, tracciare un grafo di flusso di segnale equivalente e determinare l'espressione del suo coefficiente.

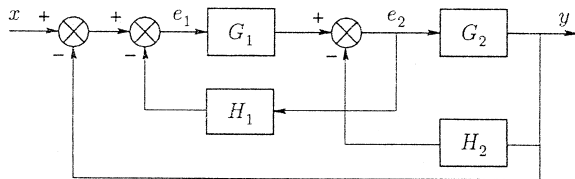


Figura 1.56 Schema a blocchi.

Soluzione Un grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.56 è riportato in Fig. 1.57. In

esso si possono individuare i seguenti percorsi ed anelli:

$$P_1 = G_1 G_2, \quad A_1 = -G_1 H_1, \\ A_2 = -G_2 H_2, \quad A_3 = -G_1 G_2.$$

Applicando la formula di Mason, si ottiene

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2}.$$

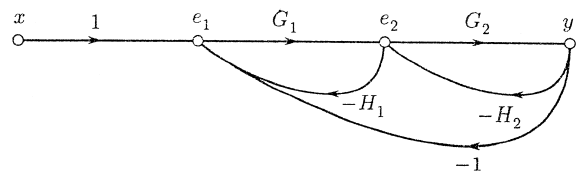


Figura 1.57 Grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.56.

C1.3.2 Tracciare un grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.36 e determinare l'espressione del suo coefficiente.

Sol. Un grafo equivalente è riportato in Fig. 1.58. I percorsi e gli anelli sono:

$$P_1 = ABCD, \quad P_2 = AED,$$

$$A_1 = -BC, \quad A_2 = -CDF.$$

Si noti che l'anello A_1 non tocca il percorso P_2 . Applicando la formula di Mason, per il coefficiente del grafo si ottiene l'espressione

$$\frac{y}{x} = \frac{ABCD + AED(1 + BC)}{1 + BC + CDF}.$$

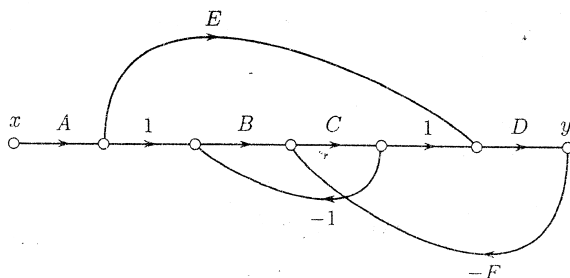


Figura 1.58 Grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.36.

Capitolo 2

Introduzione all'analisi dei sistemi dinamici lineari

Per lo studio dei sistemi di controllo si impiegano modelli matematici dinamici e, finché l'approssimazione è accettabile, lineari. Risulta pertanto indispensabile la conoscenza delle proprietà e dei procedimenti di soluzione delle equazioni differenziali lineari, in particolare delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti. Si fa riferimento, a tal fine, alla trasformazione di Laplace, procedimento estesamente adottato nella tecnica per i suoi numerosi vantaggi, non ultimo quello di porre in stretta connessione la soluzione delle equazioni differenziali con un altro metodo di analisi, interessante per la sua immediata traduzione nella pratica delle rilevazioni sperimentali, cioè l'analisi armonica. In questo capitolo, oltre a presentare la soluzione delle equazioni differenziali lineari mediante la trasformazione di Laplace, si introducono e si illustrano i concetti di funzione di trasferimento e di risposta all'impulso e al gradino unitario, accennando alla possibilità di rappresentare, attraverso tali risposte, il comportamento dinamico dei sistemi lineari anche non stazionari. Si definiscono infine i più importanti parametri che caratterizzano le risposte al gradino dei sistemi dinamici elementari del primo e del secondo ordine.

2.1. Equazioni differenziali lineari e trasformazione di Laplace

Gli esempi presentati al Paragrafo 1.3 hanno mostrato come l'evoluzione nel tempo di molti sistemi fisici possa essere rappresentata da modelli matematici lineari stazionari.

I metodi di analisi dei sistemi lineari che verranno presentati in questo e nei prossimi capitoli, cioè i metodi basati sulla trasformazione di Laplace e sullo studio della funzione di risposta armonica, richiedono un esteso impiego dei numeri complessi e delle funzioni di variabile complessa.

Si ricorda che un numero complesso s si può esprimere nelle due forme

$$s = \sigma + j\omega \quad s = \rho e^{j\varphi} \quad (2.1)$$

dette rispettivamente *forma cartesiana* e *forma polare*.

Nella (2.1) σ è la *parte reale*, ω la *parte immaginaria*, ρ il *modulo* e φ l'*argomento* del numero complesso s .

Affinché la corrispondenza fra le due espressioni dei numeri complessi sia biunivoca, occorre che per l'argomento, che è determinato a meno di

Forma cartesiana
Forma polare

Parte reale
Parte immaginaria
Modulo
Argomento

Piano di Gauss
Asse reale
Asse immaginario

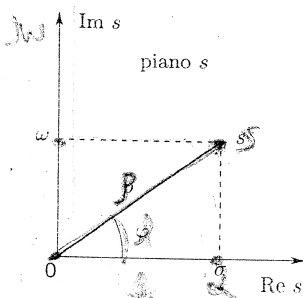


Figura 2.1

Rappresentazione di un numero complesso come punto di un piano.

Funzione di variabile complessa

multipli di 2π , venga convenzionalmente scelto un unico valore, ad esempio imponendo che sia $-\pi < \varphi \leq \pi$ (valore principale dell'argomento).

Come risulta dalla Fig. 2.1, i numeri complessi si possono rappresentare come punti di un piano (*piano di Gauss*), i cui assi coordinati si dicono *asse reale* ed *asse immaginario*.

Dalla relazione

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

si deducono le seguenti formule per il passaggio dalla forma polare alla forma cartesiana e viceversa⁽¹⁾:

$$\sigma = \rho \cos \varphi, \quad \omega = \rho \sin \varphi, \quad (2.2)$$

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega}{\sigma} = \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}. \quad (2.3)$$

Una funzione di variabile complessa

$$w = f(s) = u(\sigma, \omega) + j v(\sigma, \omega) \quad (2.4)$$

viene assegnata specificando le due funzioni di due variabili reali $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$, che ne rappresentano la parte reale e la parte immaginaria, e stabilisce una corrispondenza fra i punti di due piani: il piano di Gauss della variabile indipendente s e quello della variabile dipendente w (Fig. 2.2).

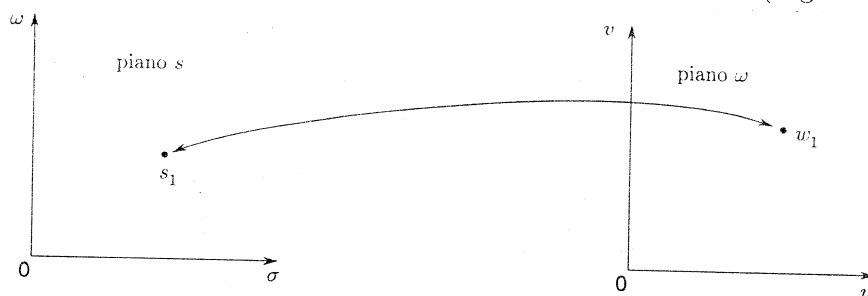


Figura 2.2

Corrispondenza stabilita da una funzione di variabile complessa.

⁽¹⁾ Delle due espressioni presentate per la funzione che lega l'argomento alle parti reale e immaginaria, la seconda è la più conveniente quando σ assume valori tendenti a zero, che corrispondono a valori di $\tan \varphi$ tendenti all'infinito.

Comunque, pur essendo tali espressioni di frequente impiego (e alla prima di esse si farà riferimento più volte nel seguito della presente trattazione, per aderire ad un uso ormai universale in trattazioni analoghe), esse sono entrambe inesatte perché le funzioni trigonometriche sono biunivoche (invertibili) solo in opportuni intervalli di misura π , mentre la conoscenza di σ e ω consente di determinare univocamente il valore di φ nell'intero intervallo, lungo 2π , corrispondente al valore principale: di conseguenza l'uso della prima espressione proposta nelle (2.3) per il calcolo dell'argomento non consente di distinguere, nella forma polare, fra un numero complesso e il suo opposto di segno, mentre l'uso della seconda non consente di distinguere fra un numero complesso e il suo simmetrico rispetto all'asse immaginario.

Si indichi con $\text{sign } x$ la funzione *segno*, definita come la funzione di argomento reale il cui valore è 1 per $x \geq 0$, -1 per $x < 0$: nell'ipotesi che i valori principali convenzionalmente fissati per le funzioni $\arctan$ e $\arcsin$ siano compresi fra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (come di regola accade quando si impiega un elaboratore elettronico per il calcolo di tali funzioni), le relazioni che, per maggior esattezza, occorre impiegare per il calcolo di φ in funzione di σ e ω sono

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\sigma + j\omega) = \arctan \frac{\omega}{\sigma} + \frac{\pi}{2} (1 - \text{sign } \sigma) \text{sign } \sigma \\ &= \left(\arcsin \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \right) \text{sign } \sigma + \frac{\pi}{2} (1 - \text{sign } \sigma) \text{sign } \sigma. \end{aligned}$$

Nei casi di sistemi lineari stazionari esaminati nel precedente capitolo si è pervenuti ad equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x, \quad (2.5)$$

o, con notazione più compatta,

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t), \quad (2.6)$$

in cui con $y(t)$ si indica la funzione incognita (*effetto o uscita*), con $x(t)$ la funzione nota (*causa o ingresso*), con a_i ($i=0, \dots, n$), b_i ($i=0, \dots, m$) i coefficienti, di cui a_n si suppone non nullo. L'intero n rappresenta l'ordine dell'equazione differenziale (ordine massimo delle derivate della funzione incognita in essa presenti).

Effetto
Uscita
Causa
Ingresso

Ordine di un'equazione differenziale

Si suppone che sia $n \geq m$. Tale condizione non è in pratica restrittiva perché corrisponde alla *realizzabilità fisica* o *causalità* del modello matematico adottato: se essa non fosse soddisfatta, il modello presenterebbe infatti una risposta di ampiezza infinita ad un segnale di ingresso sinusoidale di frequenza infinita, il che non può corrispondere alla realtà fisica: ciò risulterà evidente quando verrà introdotto il concetto di funzione di risposta armonica (Capitolo 3).

Realizzabilità fisica
Causalità

Per la soluzione o *integrazione* dell'equazione differenziale (2.5), cioè per la determinazione di una funzione $y(t)$, $0 \leq t \leq T$, che la soddisfi, occorre conoscere⁽²⁾:

i) le condizioni iniziali

Condizione iniziale

$$y(0-), \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0-}, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0-}; \quad (2.7)$$

ii) il segnale di ingresso o termine noto o azione forzante

Segnale di ingresso
Termine noto
Azione forzante

$$x(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.8)$$

Spesso l'estremo destro dell'intervallo di definizione delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ non viene specificato: in tali casi si sottintende che esso sia infinito.

Per ciò che riguarda la funzione $x(t)$, si suppone che essa sia *limitata per ogni t finito e continua a tratti*, cioè che presenti un numero finito di eventuali punti di discontinuità in ogni intervallo di tempo di lunghezza finita; sotto tali ipotesi la (2.5), in cui le derivate si intendono nel senso generalizzato che sarà più avanti specificato, ammette un'unica soluzione $y(t)$, continua se è $m < n$, continua a tratti se è $m = n$.

Funzione continua a tratti

Nella soluzione della (2.5) i contributi delle condizioni iniziali e del segnale di ingresso si possono considerare separatamente, cioè si può ottenere la soluzione dell'equazione differenziale come somma di due funzioni ricavate separatamente, in base al seguente procedimento.

► Si suppone identicamente nullo il segnale di ingresso e si determina la funzione $y_0(t)$, $0 \leq t \leq T$, che soddisfa le condizioni iniziali (2.7) e l'equazione differenziale omogenea associata alla (2.5), cioè l'equazione differenziale che

⁽²⁾ All'istante $t=0$ la funzione $y(t)$ e le sue derivate possono essere discontinue, ammettendosi in tale istante una discontinuità del segnale di ingresso e delle sue derivate.

Evoluzione libera

Stato iniziale

Evoluzione forzata

si ottiene ponendo uguale a zero il secondo membro della (2.5). Tale soluzione si dirà *evoluzione libera* del sistema: l'evoluzione libera è in genere l'effetto di segnali di ingresso applicati in tempi precedenti l'istante $t=0$. Si noti che, qualunque sia stato l'andamento del segnale di ingresso, una volta che esso si sia annullato, la sua influenza sull'evoluzione futura del sistema è determinata unicamente dai valori delle condizioni iniziali, cioè di n parametri, che rappresentano lo *stato iniziale* del sistema.

► Si suppongono nulle le condizioni iniziali e si determina la funzione $y_1(t)$, $0 \leq t \leq T$, che per $t=0-$ sia nulla insieme alle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima e che soddisfi l'equazione differenziale (2.5). Tale soluzione si dirà *evoluzione forzata* del sistema.

La soluzione effettiva dell'equazione differenziale si può ottenere sommando l'evoluzione libera e l'evoluzione forzata, cioè è data dalla relazione

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) \quad (2.9)$$

come si può verificare sommando membro a membro le

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y_0(t) = 0, \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y_1(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t), \quad (2.11)$$

e notando che i valori iniziali della funzione (2.9) e delle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima coincidono con quelli della funzione $y_0(t)$.

Con un ragionamento simile si può verificare che il modello (2.5) è in effetti un modello lineare, nel senso della definizione data al Paragrafo 1.1, cioè che, se $x_1(t)$, $x_2(t)$ sono due azioni forzanti cui corrispondono le evoluzioni forzate $y_1(t)$, $y_2(t)$, per ogni coppia di costanti reali k_1 , k_2 all'azione forzante $k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ corrisponde l'evoluzione forzata $k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$.

L'equazione differenziale (2.5) non costituisce peraltro il modello matematico lineare più generale: in alcuni casi ad esempio non è possibile prescindere da fenomeni propagatori, descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali, che pure possono essere lineari, nel senso della definizione di linearità a suo tempo data, ma non rientrano nella classe delle equazioni del tipo (2.5).

In altri casi uno o più dei coefficienti dell'equazione (2.5), anziché costante, risulta funzione del tempo: il sistema non è stazionario e, in generale, non si possono applicare i procedimenti di soluzione delineati nel presente paragrafo.

Nel caso dei sistemi a più ingressi e più uscite, se fra ciascuna coppia ingresso-uscita è individuabile un legame del tipo (2.5), l'evoluzione di ciascuna delle uscite si può dedurre facilmente applicando la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, cioè le trasformazioni che associano funzioni a funzioni, in particolare la *trasformazione di Laplace*.

Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine* di diversa natura, cosicché operazioni eseguite sulle funzioni oggetto, come per esempio la derivazione, corrispondono ad operazioni più semplici sulle funzioni immagine e al *problema oggetto* viene ad essere associato un *problema immagine* di più facile soluzione. Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di

Trasformazione
funzionale
Trasformazione
di Laplace

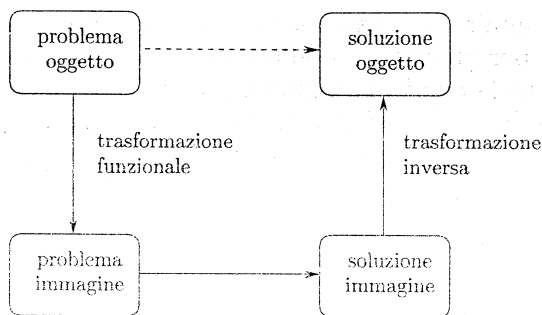


Figura 2.3

Schema di impiego delle trasformazioni funzionali.

antitrasformazione o *trasformazione inversa*. L'essenza del procedimento è indicata nello schema di Fig. 2.3.

Antitrasformazione
Trasformazione inversa

Ad esempio, mediante la trasformazione di Laplace un'equazione differenziale o integro-differenziale nelle funzioni oggetto si trasforma in un'equazione algebrica, di più semplice soluzione, nelle funzioni immagine. Il modo di operare è sostanzialmente analogo all'uso dei logaritmi: con i logaritmi anziché su funzioni si opera su numeri e il passaggio ai logaritmi ha il vantaggio di ricondurre le operazioni di moltiplicazione e divisione alle più semplici operazioni di somma e sottrazione.

La trasformazione di Laplace associa in modo biunivoco a una generica funzione del tempo $f(t)$ a valori reali o complessi⁽³⁾ una funzione $F(s)$ a valori in genere complessi e definita per valori di s pure complessi. La corrispondenza viene indicata con la notazione

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)],$$

Trasformata di Laplace

che ha il significato: " $F(s)$ è la *trasformata di Laplace* di $f(t)$ ". Per la biunivocità della corrispondenza, si può scrivere

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)],$$

Antitrasformata di
Laplace

con il significato: " $f(t)$ è l'*antitrasformata di Laplace* di $F(s)$ ".

La trasformata e l'antitrasformata di Laplace sono date dalle relazioni

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (2.12)$$

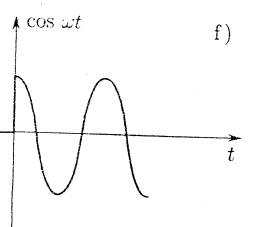
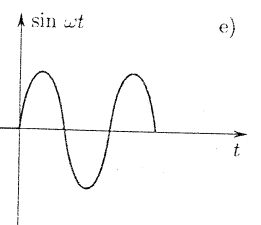
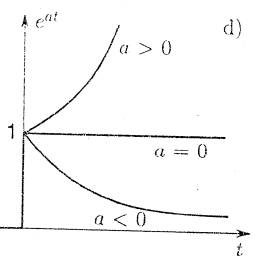
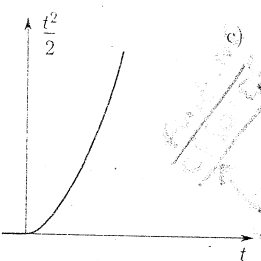
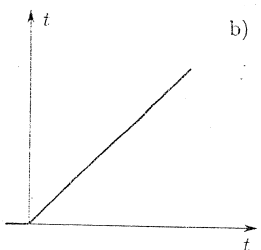
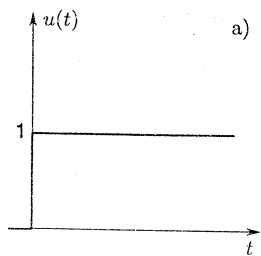
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (2.13)$$

Le (2.12) e (2.13), pur essendo ovviamente basilari per lo sviluppo della teoria generale della trasformazione di Laplace e la dimostrazione di numerosi teoremi che saranno più avanti richiamati, non verranno direttamente utilizzate nella presente trattazione, in cui, per semplicità, si farà riferimento solo ad alcune trasformate particolari, senza riportare gli sviluppi matematici relativi alla loro deduzione.

La funzione definita dalla (2.12) è una funzione di variabile complessa definita in un dominio (detto *dominio di convergenza*), che consiste in un semipiano del piano s posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario, la cui posizione dipende dalla funzione $f(t)$, mentre l'integrale (2.13) si intende eseguito lungo una qualsiasi retta parallela all'asse immaginario

Dominio di convergenza

⁽³⁾La possibilità che i valori di $f(t)$ siano complessi viene talvolta utilizzata nelle applicazioni. Un esempio tipico è dato dalla scomposizione delle funzioni trigonometriche in somme di esponenziali complesse.



e appartenente al dominio di convergenza della funzione $F(s)$ (dov'è la particolare notazione per gli estremi dell'intervallo di integrazione).

Le condizioni sotto le quali una data funzione $f(t)$ è trasformabile secondo Laplace sono abbastanza estensive, cosicché in pratica risultano soddisfatte da qualunque funzione del tempo che rivesta interesse nell'ambito dell'analisi dei sistemi. La condizione più importante è che $f(t)$ sia nulla per $t < 0$ e può essere in genere soddisfatta mediante una scelta opportuna dell'origine dei tempi.

Una proprietà fondamentale della trasformazione di Laplace è la linearità: dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s). \quad (2.14)$$

Un'altra importante proprietà, che verrà spesso utilizzata nel seguito, è che in corrispondenza di valori coniugati della variabile complessa s una generica trasformata di Laplace $F(s)$ assume valori coniugati, cioè vale la relazione

$$F(s^*) = F^*(s). \quad (2.15)$$

La quasi totalità delle trasformate di Laplace di uso più corrente nell'analisi dei sistemi lineari si può dedurre dalla relazione fondamentale

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \quad (2.16)$$

Nella (2.16) n rappresenta un generico numero intero positivo, a una costante reale o complessa. Viene sottinteso che l'espressione della funzione di cui si considera la trasformata sia relativa a valori del tempo non negativi e che per valori del tempo negativi la funzione stessa sia identicamente nulla: di conseguenza nel caso della (2.16) può essere presente una discontinuità nell'istante $t=0$.

Dalla (2.16) si possono ricavare, in particolare, le trasformate di Laplace dei cosiddetti segnali tipici o segnali di saggio, cioè dei segnali che più comunemente vengono impiegati per saggiare il comportamento dei sistemi dinamici attraverso l'individuazione di caratteristiche qualitative e quantitative delle corrispondenti risposte. I più importanti segnali tipici sono qui di seguito elencati insieme alle loro trasformate di Laplace.

1. Gradino unitario (Fig. 2.4a):

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}; \quad (2.17)$$

2. Rampa unitaria (Fig. 2.4b):

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}; \quad (2.18)$$

3. Parabola unitaria (Fig. 2.4c):

$$\mathcal{L}[t^2/2] = \frac{1}{s^3}; \quad (2.19)$$

4. Esponenziale (Fig. 2.4d):

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}; \quad (2.20)$$

Figura 2.4
Forme d'onda di segnali tipici.

5. Sinusoide (Fig. 2.4e):

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}; \quad (2.21)$$

6. Cosinusoide (Fig. 2.4f):

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.22)$$

La (2.17) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=0$, $a=0$; la (2.18) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=1$, $a=0$; la (2.19) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=2$, $a=0$ e dividendo ambo i membri per 2; la (2.20) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=0$; la (2.21) si ricava dalla (2.20) utilizzando la proprietà di linearità e la formula di Eulero:

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{e^{j\omega t}}{2j} - \frac{e^{-j\omega t}}{2j}; \quad (2.23)$$

la (2.22) si ricava in modo analogo dalla (2.20) utilizzando la proprietà di linearità e la formula di Eulero:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2}. \quad (2.24)$$

Fra i vari teoremi riguardanti le trasformate di Laplace (le cui dimostrazioni sono riportate al Paragrafo C2.2), uno dei più importanti, che trova frequente applicazione per la determinazione delle trasformate di funzioni continue a tratti, è il seguente.

✕ **TEOREMA DELLA TRASLAZIONE NEL TEMPO.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s). \quad (2.25)$$

Il significato dell'operazione di traslazione di una funzione di un'entità t_0 , detta anche *ritardo finito di lunghezza t_0* , è illustrato in Fig. 2.5, con riferimento a un generico segnale trasformabile secondo Laplace.

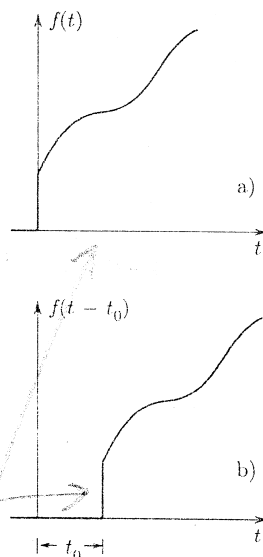


Figura 2.5
Generico segnale e lo stesso traslato in ritardo di t_0 .

ESEMPIO 2.1.1 Per determinare la trasformata di Laplace dell'impulso⁽⁴⁾ rappresentato in Fig. 2.6, si osserva che esso è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze K/τ , $-2K/\tau$ e K/τ , applicate rispettivamente agli istanti $t=0$, $t=\tau$ e $t=2\tau$: utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$F(s) = \frac{K}{\tau s^2} (1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}).$$

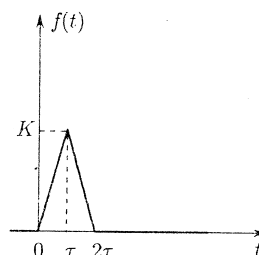


Figura 2.6
Impulso scomponibile nella somma di tre rampe.

Per la soluzione delle equazioni differenziali e integro-differenziali con l'applicazione della trasformazione di Laplace sono basilari i due seguenti teoremi.

⁽⁴⁾ Si dà il nome di *impulso* a qualunque segnale che sia non nullo in un unico intervallo di lunghezza finita.

★ **TEOREMA DELLA TRASFORMATA DELL'INTEGRALE.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s). \quad (2.26)$$

➤ **TEOREMA DELLA TRASFORMATA DELLA DERIVATA.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, continua per $t \geq 0$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0+). \quad (2.27)$$

Quest'ultimo teorema, date alcune apparenti incongruenze che possono essere rilevate nella sua applicazione alla soluzione delle equazioni differenziali, richiede una breve illustrazione.

Una delle condizioni perché una data funzione $f(t)$ sia trasformabile secondo Laplace è che essa sia nulla per $t < 0$. In realtà tale condizione non è strettamente necessaria per la trasformabilità della funzione (i cui valori per $t < 0$ vengono comunque ignorati nell'operazione di trasformazione), ma per la biunivocità della trasformazione, in quanto, quando si esegue l'anti-trasformazione, si ottiene comunque una funzione nulla per $t < 0$.

Il teorema della derivata nella forma (2.27) fornisce semplicemente la trasformata della funzione nulla per $t < 0$ e uguale alla derivata di $f(t)$ per $t \geq 0+$: la presenza di un'eventuale discontinuità in $t = 0$, cioè di un punto in cui la funzione non è derivabile, viene pertanto ignorata.

Per la soluzione delle equazioni differenziali del tipo (2.5) occorre invece tener conto delle discontinuità delle funzioni in $t = 0$, in quanto le condizioni iniziali vengono specificate per $t = 0-$, cioè precedentemente al presentarsi di tali discontinuità. Affinché l'equazione differenziale abbia significato anche in presenza di segnali discontinui (quindi non derivabili) in $t = 0$ occorre introdurre il concetto di *derivata generalizzata*⁽⁵⁾.

Si consideri la funzione $f_1(t)$, rappresentata in Fig. 2.7a, la cui derivata $f(t)$ è l'impulso rappresentato in Fig. 2.7b. Si immagini di far tendere a zero il valore del parametro τ : mentre la funzione di Fig. 2.7a tende al gradino unitario $u(t)$, la funzione di Fig. 2.7b, pur rimanendo un impulso di area unitaria, tende ad avere ampiezza infinita e durata nulla.

Il limite di tale funzione per t tendente a zero non è una funzione, ma un'entità che generalizza il concetto di funzione, detta *distribuzione*: nel caso in esame la distribuzione che si ottiene si dice *impulso di Dirac*, viene indicata con il simbolo $\delta(t)$ e rappresentata graficamente come è indicato in Fig. 2.8.

La trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac si calcola come limite per τ tendente a zero della trasformata di Laplace del segnale rappresentato in Fig. 2.7b: poiché questo può considerarsi dato dalla differenza di due gradini, ambedue di ampiezza $1/\tau$, applicati il primo in $t = 0$, il secondo in

⁽⁵⁾Se si considera che i problemi matematici che interessano ai fini della presente trattazione nascono dalla descrizione di fenomeni fisici, l'estensione del concetto di derivata appare alquanto artificiosa ed è implicata semplicemente dal fatto che equazioni dello stesso tipo della (2.5) vengono usualmente dedotte, a partire da equazioni le cui variabili sono grandezze fisiche (quindi corrispondenti a funzioni del tempo continue o, al più, continue a tratti), applicando più volte l'operazione di derivazione: tale procedimento, nel caso di equazioni lineari, consente di ottenere, per il legame ingresso-uscita, un'unica equazione differenziale di ordine elevato in luogo di un sistema di equazioni differenziali o integro-differenziali, ma implica l'introduzione delle derivate generalizzate.

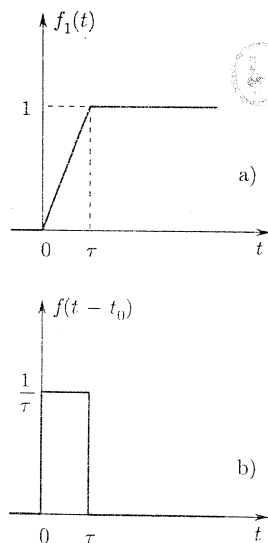


Figura 2.7
Determinazione della derivata prima del gradino unitario.

Derivata generalizzata

*Distribuzione
Impulso di Dirac*

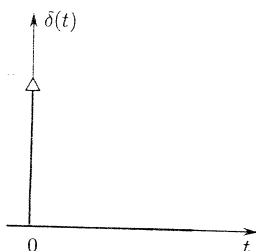


Figura 2.8
Rappresentazione grafica dell'impulso di Dirac.

$t = \tau$, in virtù del teorema della traslazione nel tempo si può scrivere

$$F(s, \tau) = \frac{1}{\tau s} (1 - e^{-\tau s}) ,$$

e, applicando la regola di De l'Hospital, si ottiene

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(-e^{-\tau s})}{\frac{d}{d\tau}(\tau s)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s e^{-\tau s}}{s} = 1 .$$

Tale risultato si sarebbe potuto ricavare anche direttamente, estendendo però il teorema della derivata. Si noti che ciascuno dei primi due segnali tipici di Fig. 2.4 è la derivata del successivo, cioè il gradino è la derivata della rampa e questa della parabola, e che le loro trasformate di Laplace si ottengono moltiplicando per s quelle dei segnali successivi: per estensione, la trasformazione dell'impulso di Dirac, che è la derivata generalizzata del gradino unitario, si sarebbe potuta calcolare mediante la stessa regola, ottenendo appunto l'unità. La relazione (2.27) d'altronde non è applicabile per la deduzione della trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac da quella del gradino unitario perché prescinde dalla discontinuità in $t = 0$. Si noti peraltro che ogni funzione $f(t)$ discontinua in $t = 0$ si può scomporre nella somma di una funzione continua in $t = 0$ e nulla per $t < 0$, definita come $f(t) - f(0+)$ per $t \geq 0$, e di un gradino di ampiezza $f(0+) - f(0-)$ applicato in $t = 0$. In base alle proprietà di linearità si deduce il seguente teorema, che nelle applicazioni alla soluzione delle equazioni differenziali risulta di maggiore utilità di quello espresso dalla (2.27), perché consente di mettere in conto le condizioni iniziali, date all'istante $t = 0-$.

5 **TEOREMA DELLA TRASFORMATTA DELLA DERIVATA GENERALIZZATA.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0-) . \quad (2.28)$$

I teoremi espressi dalle (2.27) e (2.28) corrispondono a due diverse definizioni della funzione derivata, in particolare per ciò che riguarda l'istante $t = 0$. Ad esempio, nel caso della funzione coseno rappresentata in Fig. 2.9a, la prima definizione corrisponde alla forma d'onda di Fig. 2.9b, la cui trasformata si ottiene applicando la (2.27) alla (2.22), mentre la seconda corrisponde alla forma d'onda di Fig. 2.9c, la cui trasformata si ottiene applicando la (2.28) alla (2.22).

Ritornando per un momento all'impulso di Dirac, detto $\delta(t - t_0)$ l'impulso di Dirac applicato al generico istante t_0 , posto che sia $t_a < t_0 < t_b$, valgono le relazioni

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - t_0) dt = 1 , \quad (2.29)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) . \quad (2.30)$$

La relazione (2.30) è utile per rappresentare matematicamente l'operazione di *campionamento* di una funzione, cioè di deduzione del valore che essa assume in un dato istante t_0 . Il campionamento è un'operazione lineare.

Con procedimento del tutto analogo a quello seguito per la definizione dell'impulso di Dirac come derivata prima generalizzata del gradino unitario, si possono introdurre le derivate generalizzate di ordine superiore al primo:

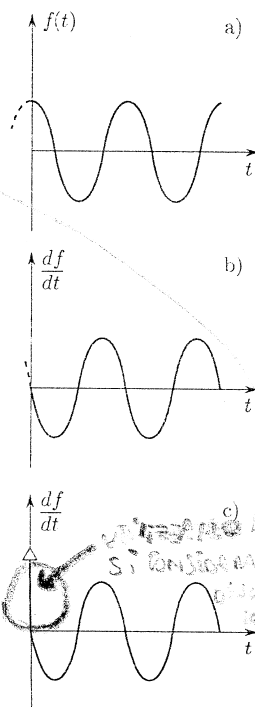


Figura 2.9
Funzione del tempo, sua derivata e sua derivata generalizzata.

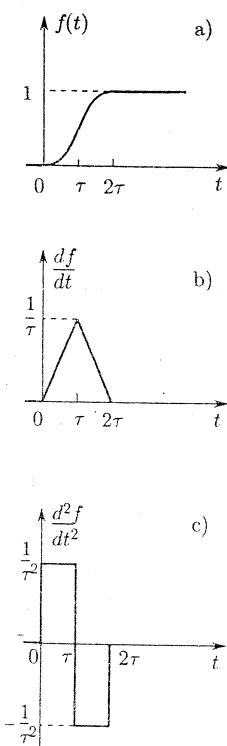


Figura 2.10

Determinazione della derivata seconda del gradino unitario.

per definire la derivata dell'impulso di Dirac, cioè la derivata seconda del gradino unitario, si può far riferimento alla Fig. 2.10: al limite per τ tendente a zero la funzione di Fig. 2.10a (in cui i due tratti orizzontali sono raccordati da due archi di parabola) tende al gradino unitario $u(t)$, quella di Fig. 2.10b all'impulso di Dirac $\delta(t)$, quella di Fig. 2.10c alla derivata generalizzata di questo, che consiste in una doppietta di impulsi. Il procedimento si può facilmente estendere per la definizione delle derivate generalizzate di ordine superiore al secondo.

Il teorema della derivata in entrambe le forme (2.27) e (2.28) si può estendere al caso di derivate di ordine superiore al primo. Nel caso della formulazione (2.28), applicando una seconda volta il teorema, si ottiene l'espressione

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - s f(0-) - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0-}, \quad (2.31)$$

che, impiegando l'operatore D , si può scrivere anche

$$\mathcal{L}[D^2 f(t)] = s^2 F(s) - s f(0-) - D f(t)|_{t=0-}. \quad (2.32)$$

Procedendo iterativamente, si deduce la seguente espressione per la trasformata della generica derivata i -esima.

$$\mathcal{L}[D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(t) \Big|_{t=0-}. \quad (2.33)$$

Ciò posto, si prende in esame la trasformazione dell'equazione (2.5). Con riferimento alla forma (2.6), sostituendo alle funzioni e alle loro derivate le rispettive trasformate, si ottiene la relazione

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i X(s) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0-}. \quad (2.34)$$

in cui con $X(s)$ e $Y(s)$ si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita $x(t)$ e $y(t)$.

Dalla (2.34) risulta che la trasformata di Laplace $Y(s)$ della soluzione dell'equazione differenziale (2.5) è data dalla somma delle due funzioni

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0-} / \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad (2.35)$$

$$Y_1(s) = \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i / \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) X(s), \quad (2.36)$$

che si possono immediatamente riconoscere come le trasformate dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata.

Spesso nell'ambito dei controlli automatici si fa riferimento a sistemi inizialmente in quiete, cioè con tutte le condizioni iniziali nulle. In tale circostanza la funzione (2.35) risulta identicamente nulla e la trasformata di Laplace del segnale di uscita si ottiene semplicemente moltiplicando quella del segnale di ingresso per la seguente "funzione di trasferimento" del sistema

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \sum_{i=0}^m b_i s^i / \sum_{i=0}^n a_i s^i. \quad (2.37)$$

La *funzione di trasferimento* di un sistema è una funzione della variabile s moltiplicando la quale per la trasformata di Laplace della funzione di ingresso si ottiene la trasformata di Laplace dell'evoluzione forzata.

Funzione di trasferimento

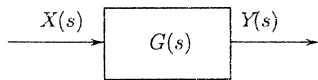


Figura 2.11

Rappresentazione di un sistema dinamico.

I sistemi dinamici lineari stazionari a una sola variabile sono spesso rappresentati come in Fig. 2.11, cioè con un blocco entro il quale ne è specificata la funzione di trasferimento, così come i sistemi lineari stazionari puramente algebrici a una sola variabile sono rappresentati come in Fig. 1.8b, cioè con un blocco entro il quale è specificata la costante di proporzionalità fra ingresso e uscita.

Se si hanno più sistemi dinamici collegati fra loro, ciascuno caratterizzato da una propria funzione di trasferimento, si possono applicare le regole di riduzione degli schemi a blocchi presentate al Paragrafo 1.2, sostituendovi le funzioni di trasferimento alle costanti di proporzionalità: è facile verificare che, se le funzioni di trasferimento dei vari blocchi sono *razionali fratte*, cioè date dal rapporto di due polinomi, anche la funzione di trasferimento del sistema complessivo è dello stesso tipo.

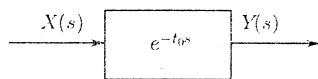


Figura 2.12

Rappresentazione del ritardo finito.

Si noti peraltro che non tutti i sistemi dinamici, anche se lineari e stazionari, sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali fratte: un esempio tipico di sistema avente una funzione di trasferimento trascendente è il *ritardo finito*, schematizzabile con il blocco rappresentato in Fig. 2.12, che esprime in sostanza il teorema della traslazione nel tempo.

Ritardo finito

Il ritardo finito è spesso impiegato nella rappresentazione a blocchi dei sistemi dinamici per la descrizione di fenomeni collegati al trasporto di materia, come ad esempio la miscelazione di Fig. 1.23, o per la descrizione approssimata dei fenomeni propagatori spesso presenti nei sistemi termici, chimici ed elettrici.

Al fine di meglio chiarire la trasformazione di Laplace delle equazioni differenziali, si presentano due esempi.

ESEMPIO 2.1.2 Si consideri il circuito elettrico rappresentato in Fig. 1.29. Sono assegnate le condizioni iniziali

$$i(0-) = i_0, \quad v_u(0-) = e_0, \quad (2.38)$$

e si suppone di applicare all'ingresso un gradino di tensione di ampiezza V_0 . L'equazione differenziale del circuito è la (1.37), che viene riscritta per comodità di riferimento:

$$v_i(t) = LC D^2 v_u(t) + RC D v_u(t) + v_u(t).$$

Trasformandone ambo i membri, si ottiene

$$V_i(s) = LC (s^2 V_u(s) - s v_u(0-) - v'_u(0-)) + RC (s V_u(s) - v_u(0-)) + V_u(s).$$

Notando che è

$$v_u(0-) = e_0, \quad v'_u(0-) = \frac{1}{C} i_0,$$

si deduce poi

$$V_u(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s) + \frac{Li_0 + LCs e_0 + RCe_0}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (2.39)$$

La (2.39) fornisce la trasformata di Laplace del segnale di uscita come funzione di quella del segnale di ingresso e delle condizioni iniziali. Nel caso in esame occorre sostituire a $V_i(s)$ l'espressione della trasformata del gradino di ampiezza V_0 , data dalla relazione

$$V_i(s) = \frac{V_0}{s}$$

ESEMPIO 2.1.3 Si vuole ricavare una rappresentazione a blocchi del gruppo Ward-Leonard, il cui schema è riportato in Fig. 2.13: tale gruppo è un particolare amplificatore elettromeccanico, composto da una dinamo, che viene trascinata a velocità costante da un opportuno motore, e che alimenta sul circuito di armatura un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente. Agendo sulla tensione v_i applicata al circuito di campo della dinamo, si può variare la velocità angolare ω di rotazione del motore in corrente continua.

In Fig. 2.13 L_a ed R_a rappresentano l'induttanza e la resistenza del circuito di armatura del motore e della dinamo, che per comodità vengono conglobate entrambe nel modello del motore.

Spesso nei gruppi Ward-Leonard la dinamo è azionata da motori in alternata asincroni e quindi non ruota a velocità costante al variare del carico: normalmente però lo scorrimento è piccolo, per cui l'ipotesi di considerare costante la velocità angolare è accettabile.

La f.e.m. della dinamo v_a è data, in funzione della tensione di eccitazione v_i , dalle relazioni

$$v_i(t) = L D i(t) + R i(t),$$

$$v_a(t) = K_g i(t).$$

Poiché si considera il sistema inizialmente in quiete, si può ricavare la funzione di trasferimento ponendo semplicemente $s = D$. Si deduce così l'espressione

$$\frac{V_a(s)}{V_i(s)} = \frac{K_g}{R + Ls} \quad (2.41)$$

Per la soluzione completa dell'equazione differenziale (1.37) occorre naturalmente antitrasformare l'espressione ottenuta. Nel caso in esame l'antitrasformazione non presenta alcuna difficoltà: infatti ciascuno dei due termini a secondo membro della (2.39) è un rapporto di polinomi in s , facilmente antitrasformabile coll'impiego del procedimento sistematico che verrà descritto al prossimo paragrafo. La funzione di trasferimento nel caso in esame è data dalla relazione

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (2.40)$$

Le equazioni differenziali del motore sono già state ricavate nelle (1.53) e (1.54): aggiungendo nel bilancio delle coppie applicate all'albero motore espresso dalla seconda di esse anche la coppia resistente c_r , si ottiene

$$v_a(t) = L_a D i_a(t) + R_a i_a(t) + K_m \omega(t),$$

$$K_m i_a(t) = B_m \omega(t) + J_m D \omega(t) + c_r(t).$$

Considerando separatamente gli effetti di v_a e di c_r (il che è lecito perché, essendo il modello lineare, vale la proprietà di sovrapposizione degli effetti), si ricavano le due funzioni di trasferimento

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{(B_m + J_m s)(R_a + L_a s) + K_m^2} \quad (2.42)$$

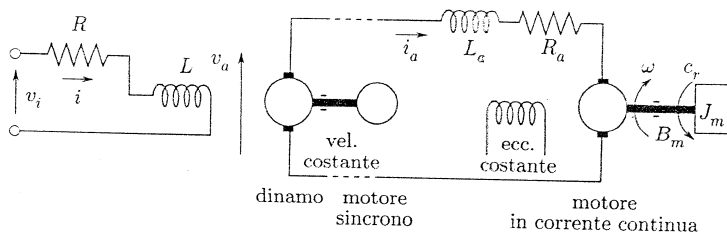
$$\frac{\Omega(s)}{C_r(s)} = -\frac{R_a + L_a s}{(B_m + J_m s)(R_a + L_a s) + K_m^2} \quad (2.43)$$

La funzione di trasferimento complessiva fra la tensione di eccitazione della dinamo e la velocità angolare del motore è data dal prodotto della (2.41) per la (2.42).

Il comportamento dinamico del sistema, nell'ipotesi che esso sia inizialmente in quiete, è completamente definito dagli elementi specificati nello schema a blocchi di Fig. 2.14, che fornisce un quadro sinottico dei legami funzionali fra le sue variabili più significative.

Figura 2.13

Gruppo Ward-Leonard.



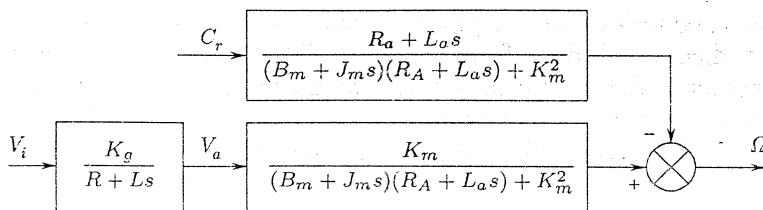


Figura 2.14
Schema a blocchi del
gruppo Ward-Leonard.

2.2. Antitrasformazione delle funzioni razionali

Come è stato posto in evidenza dalle considerazioni e dagli esempi riportati al paragrafo precedente, la determinazione dell'evoluzione libera e, in molti casi, dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario si riportano all'antitrasformazione di un rapporto di polinomi in s , cioè di una funzione del tipo⁽⁶⁾

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.44)$$

La differenza $n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore si dice grado relativo della funzione razionale $F(s)$. Quando la frazione è strettamente propria, cioè presenta grado relativo almeno pari ad uno, si può scomporre il rapporto dei due polinomi $P(s)$ e $Q(s)$ in una somma di termini facilmente antitrasformabili, detta somma di fratti semplici. Quando la frazione è propria, ma non strettamente, cioè presenta grado relativo nullo, operando la divisione dei polinomi ci si riporta alla somma di una costante e di una frazione strettamente propria, che si possono antitrasformare indipendentemente: l'antitrasformata della costante è la stessa moltiplicata per un impulso di Dirac.

Per chiarire come venga effettuata in pratica tale scomposizione, occorre premettere alcuni richiami sulle basi matematiche. È noto dall'algebra che un polinomio di grado n a coefficienti reali ammette n zeri reali o complessi, cioè l'equazione algebrica ottenuta imponendo l'annullarsi di un polinomio

$$\Phi(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.45)$$

ammette n radici reali o complesse. Se fra tali radici ve n'è una complessa, vi è pure la sua coniugata. Siano $p_1, \dots, p_n$ le radici dell'equazione (2.45), che si dice equazione caratteristica relativa alla funzione di trasferimento (2.44); il polinomio a primo membro si può scrivere nella forma fattorizzata

$$\Phi(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n). \quad (2.46)$$

In particolare, se $z_1, \dots, z_m$ e $p_1, \dots, p_n$ sono rispettivamente gli zeri del polinomio a numeratore e del polinomio a denominatore della (2.44), la (2.44) medesima si può scrivere nella forma fattorizzata

$$F(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (2.47)$$

in cui con $K (=b_m)$ si è indicato un opportuno coefficiente reale.

⁽⁶⁾Nella (2.44) si è posto uguale all'unità il coefficiente della maggior potenza di s a denominatore, cioè si è supposto che il polinomio a denominatore sia *monico*. Ciò non lede la generalità perché in ogni caso si possono dividere numeratore e denominatore per tale coefficiente.

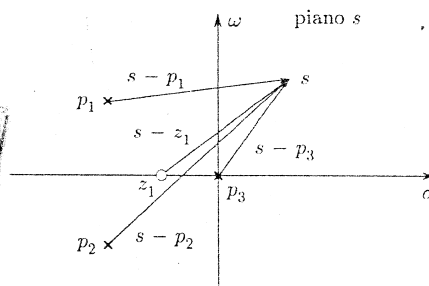
Zeri
Poli

Le costanti complesse $z_1, \dots, z_m$ si dicono *zeri*, le costanti complesse $p_1, \dots, p_n$ si dicono *poli* della funzione $F(s)$. Una funzione razionale è pertanto completamente determinata, a meno di un fattore costante K , una volta assegnati i suoi zeri e i suoi poli.

Spesso si ricorrerà alla rappresentazione grafica delle funzioni razionali fratte attraverso l'indicazione dei loro zeri e poli nel piano complesso della variabile s . In Fig. 2.15 è riportato un esempio relativo ad una funzione con tre poli e uno zero: si noti che, per un dato valore di s , i fattori a numeratore e a denominatore della (2.47), che sono in generale numeri complessi, sono rappresentati dai vettori indicati in figura.

Figura 2.15

Rappresentazione grafica degli zeri e dei poli nel piano complesso.



In relazione all'antitrasformazione della funzione (2.44) si distinguono due casi:

- Poli semplici i) tutti i poli sono *semplici*, ossia è $p_i \neq p_j$ per ogni coppia di indici diversi i, j ;
- Poli multipli ii) si hanno poli *multipli*, cioè esiste almeno una coppia di indici diversi i, j per cui è $p_i = p_j$.

Si prenderà dapprima in esame il caso in cui tutti i poli siano semplici, di minore complessità e, fortunatamente, più frequente nella pratica.

Lo sviluppo della funzione (2.44) in somma di fratti semplici corrisponde all'espressione

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \quad (2.48)$$

- Residui in cui le costanti K_i (dette *residui* relativi ai vari poli) sono reali in corrispondenza dei poli reali, complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Esse si possono ricavare facilmente utilizzando l'identità

$$K_i = (s-p_i) \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=p_i} = \frac{P(p_i)}{(p_i-p_1)\dots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})\dots(p_i-p_n)} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.49)$$

Una volta che la si sia posta nella forma (2.48), l'antitrasformata della funzione (2.44) si ricava immediatamente, in base alla proprietà di linearità e utilizzando la (2.20). Essa è data dall'espressione

$$f(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (2.50)$$

ESEMPIO 2.2.1 Sia

$$F(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}.$$

Applicando la (2.49) si deduce

$$K_1 = \frac{5(-1)+3}{(-1+2)(-1+3)} = -1$$

$$K_2 = \frac{5(-2)+3}{(-2+1)(-2+3)} = 7,$$

$$K_3 = \frac{5(-3)+3}{(-3+1)(-3+2)} = -6,$$

per cui si può scrivere

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3},$$

e quindi

$$f(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}.$$

Quando si hanno coppie di poli complessi coniugati, nella (2.50) sono presenti delle esponenziali complesse moltiplicate per coefficienti complessi: esse si possono però facilmente ricondurre a prodotti di esponenziali reali per funzioni trigonometriche applicando le formule di Eulero.

Si abbiano infatti i poli complessi coniugati

$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \quad p_2 = \sigma_1 - j\omega_1,$$

con i residui

$$K_1 = u_1 + jv_1, \quad K_2 = u_1 - jv_1.$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa

$$\frac{u_1 + jv_1}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s - \sigma_1 + j\omega_1}, \quad (2.51)$$

posto

$$M_1 = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad \varphi_1 = \arg(u_1 + jv_1), \rightarrow \text{MODULO DEL POLI COMPLESSI}$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\omega_1} \right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2} (e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}),$$

funzione che, infine, si può porre nella forma

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = M_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)$$

ESEMPIO 2.2.2 Sia

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j2} + \frac{K_3}{s+1+j2}.$$

Applicando la (2.49), si deduce

$$K_1 = \frac{7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5}{(0+1-j2)(0+1+j2)} = 1,$$

$$K_2 = \frac{7(-1+j2)^2 - 8(-1+j2) + 5}{(-1+j2)(-1+j2+1+j2)} = 3 + j4,$$

$$K_2 = \frac{7(-1+j2)^2 - 8(-1+j2) + 5}{(-1+j2)(-1+j2+1+j2)} = 3+j4,$$

$$K_3 = \frac{7(-1-j2)^2 - 8(-1-j2) + 5}{(-1-j2)(-1-j2+1-j2)} = 3-j4,$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3+j4}{s+1-j2} + \frac{3-j4}{s+1+j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$f(t) = 1 + 10e^{-t} \cos(2t + \varphi),$$

in cui è $\varphi = \arctan(4/3) = 0,9273 \text{ rad} = 53,13^\circ$.

FASE DEL
MEMBRO COMPASSO

Per evitare di ripetere ogni volta i medesimi passaggi matematici, si può eseguire l'antitrasformazione con l'impiego di tabelle, che riportano le antitrasformate di alcuni fratti elementari, in un'opportuna forma, in cui sono posti in evidenza i parametri più significativi.

Per usare tali tabelle, anzitutto si pone lo sviluppo in fratti che compare a secondo membro della (2.48) nella forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K'_0}{s} + \sum_{i=1}^h \frac{K'_i}{1 + \tau_i s} + \sum_{i=1}^k \frac{K''_i (\sigma_i^2 + \omega_i^2) (1 + T_i s)}{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2} \\ &= \frac{K'_0}{s} + \sum_{i=1}^h \frac{K'_i}{1 + \tau_i s} + \sum_{i=1}^k \frac{-K''_i \omega_{ni}^2 (1 + T_i s)}{s^2 + 2\delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Termini del primo ordine

Termini del
secondo ordine

in cui il primo termine a secondo membro si riferisce ad un eventuale polo nella origine, la prima sommatoria ai cosiddetti *termini del primo ordine*, relativi ai poli reali non nulli, supposti in numero di h , la seconda sommatoria ai cosiddetti *termini del secondo ordine*, relativi alle coppie di poli complessi coniugati, supposte in numero di k .

Per ottenere i termini del primo ordine dai corrispondenti termini della (2.48) basta eseguire opportune posizioni.

Infatti il termine

$$\frac{K_i}{s - p_i} = \frac{K_i}{s - \sigma_i}$$

equivale al termine

$$\frac{K'_i}{1 + \tau_i s}, \quad (2.53)$$

qualora si ponga $K'_i = -K_i/\sigma_i$, $\tau_i = -1/\sigma_i$.

Il parametro τ_i è detto *costante di tempo* e caratterizza, come si vedrà nel seguito, la risposta al gradino unitario del sistema elementare del primo ordine.

Il significato del parametro in relazione ad un polo negativo σ_i è illustrato nella Fig. 2.16, che si riferisce alla rappresentazione del polo nel piano della variabile complessa s .

Per ottenere i termini relativi ai poli complessi coniugati, si consideri la (2.51). Eseguendo la somma, si ottiene il fratto elementare

$$2 \frac{u_i (s - \sigma_i) - v_i \omega_i}{s^2 - 2\sigma_i s + \sigma_i^2 + \omega_i^2},$$

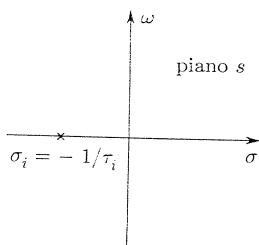


Figura 2.16
Rappresentazione dei
parametri caratteristici
di un termine del primo
ordine.

che equivale ad un termine del tipo

$$\frac{K_i'' (\sigma_i^2 + \omega_i^2) (1 + T_i s)}{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2} = \frac{K_i'' \omega_{ni}^2 (1 + T_i s)}{s^2 + 2\delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}, \quad (2.54)$$

in cui si è posto

$$\omega_{ni} = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}, \quad \delta_i = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}},$$

$$K_i'' = -2 \frac{u_i \sigma_i + v_i \omega_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2}, \quad T_i = -\frac{u_i}{u_i \sigma_i + v_i \omega_i}.$$

I parametri δ_i e ω_{ni} si dicono *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione naturale* e caratterizzano, come si vedrà, la risposta al gradino unitario del sistema elementare del secondo ordine.

Il significato dei vari parametri in relazione ad una coppia di poli complessi coniugati con parte reale negativa è rappresentato in Fig. 2.17.

Coefficiente di smorzamento
Pulsazione naturale

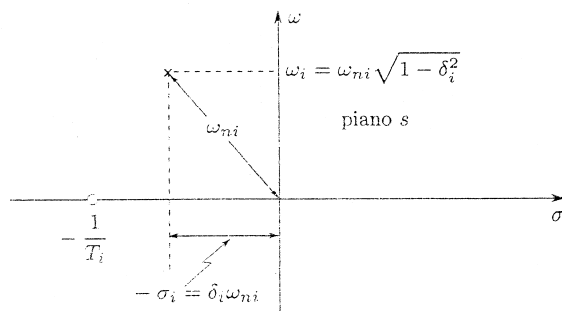


Figura 2.17

Rappresentazione dei parametri caratteristici di un termine del secondo ordine.

Si noti che il valore del coefficiente δ è compreso fra 0 e 1: se infatti fosse $\delta \geq 1$, le radici del denominatore sarebbero reali e si ricadrebbe pertanto nel caso della somma di due termini del tipo (2.53).

Avendo posto lo sviluppo in fratti nella forma (2.52), si può eseguire la antitrasformazione impiegando la precedente tabella.

trasformata di Laplace $F(s)$	funzione del tempo $f(t)$
$\frac{1}{s}$	$1 \ (u(t))$
$\frac{1}{1 + \tau s}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n t \sqrt{1 - \delta^2}$
$\frac{\omega_n^2 (1 + T s)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1 - 2T\delta\omega_n + T^2\omega_n^2}{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \left(\omega_n t \sqrt{1 - \delta^2} + \varphi \right)$ $\varphi := \arg \left(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1 - \delta^2} \right)$

Tabella delle antitrasformate dei termini del primo e del secondo ordine.

Rimanendo sempre al caso dei poli semplici, la valutazione dei residui si può anche eseguire graficamente, con il vantaggio di ricavare direttamente il corrispondente numero complesso in forma polare.

ESEMPIO 2.2.3 Si faccia riferimento alla funzione

$$F(s) = K \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \frac{K_3}{s - p_3},$$

la cui configurazione poli-zeri è riportata in Fig. 2.18.

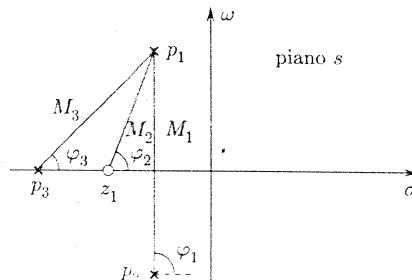
Il residuo K_1 si calcola con la formula

$$K_1 = \frac{K(p_1 - z_1)}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} = K \frac{M_2}{M_1 M_3} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)},$$

in cui $M_1, M_2, M_3, \varphi_1, \varphi_2$ e φ_3 sono distanze ed angoli che possono essere direttamente misurati, come è indicato in Fig. 2.18. In modo analogo si possono determinare anche K_2 e K_3 .

Figura 2.18

Determinazione grafica dei residui nel caso di poli semplici.



Si considera ora il caso generale dei poli multipli. Si suppone che gli n poli della funzione razionale $F(s)$ si possano dividere in h gruppi, ciascuno formato da r_i ($i = 1, \dots, h$) poli coincidenti. In altre parole, si suppone che si abbiano h poli diversi p_i ($i = 1, \dots, h$), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$. Naturalmente è

$$\sum_{i=1}^h r_i = n.$$

Lo sviluppo in somma di fratti semplici in questo caso è dato, anziché dalla (2.48), dalla relazione

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - p_1)^{r_1} (s - p_2)^{r_2} \dots (s - p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^{r_i - \ell + 1}} \quad (2.55)$$

in cui le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell - 1)!} \frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}} (s - p_i)^{r_i} \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=p_i} \quad (i = 1, \dots, h; \ell = 1, \dots, r_i), \quad (2.56)$$

che generalizza la (2.49).

Facendo uso della proprietà di linearità e della (2.16), si può ottenere l'antitrasformata della (2.55) nella forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!} t^{r_i - \ell} e^{p_i t}. \quad (2.57)$$

Anche in questo caso i coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati, per cui le esponenziali complesse nella (2.57) possono essere sostituite con prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, con procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

ESEMPIO 2.2.4 Sia

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \\
 &= \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} = \\
 &= \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}.
 \end{aligned}$$

Applicando la (2.56), si deduce

$$K_{11} = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = 1.$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} (s+1)^2 F(s) \Big|_{s=-1} = -1,$$

$$K_{21} = (s+1)^2 F(s) \Big|_{s=-1} = 1,$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2},$$

da cui, antitrasformando

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t e^{-t}.$$

Da quanto esposto discende che l'antitrasformazione delle funzioni razionali fratte si effettua con operazioni completamente di routine: l'unica difficoltà, che si presenta quando la funzione da antitrasformare non sia data in forma fattorizzata, consiste nel calcolo numerico dei poli, che in effetti, quando il polinomio a denominatore sia di grado superiore a due o a tre, non si può effettuare con formule risolutive di struttura non eccessivamente complicata. In questi casi è inevitabile ricorrere a procedimenti iterativi per la determinazione delle radici delle equazioni polinomiali, facilmente programmabili per l'elaborazione automatica e correntemente disponibili nei prodotti software per la progettazione assistita dei sistemi di controllo.

Si noti che il comportamento dell'antitrasformata per t tendente all'infinito è legato alla posizione dei poli in rapporto all'asse immaginario.

Infatti si è mostrato che l'antitrasformata di una funzione razionale nel caso di poli semplici è costituita da una somma di termini dei tipi

$$K, \quad K e^{\sigma t}, \quad K e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.58)$$

in cui σ e ω sono le parti reale e immaginaria dei poli considerati, mentre nel caso di poli multipli si hanno termini dei tipi

$$K t^h, \quad K t^h e^{\sigma t}, \quad K t^h e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.59)$$

in cui h è un intero compreso fra l'unità e $r-1$, essendo r l'ordine di molteplicità dei poli considerati.

I primi termini delle (2.58) e (2.59) corrispondono a poli nell'origine e possono considerarsi un caso particolare dei secondi ($\sigma=0$).

I termini (2.58) per t tendente all'infinito tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa, restano limitati se essa è nulla e divergono se essa è positiva, mentre i termini (2.59) tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa (come si può facilmente verificare applicando la regola di De l'Hospital per il limite del prodotto di una funzione tendente all'infinito per una funzione tendente a zero) e divergono se essa è nulla o positiva.

Per ciò che riguarda l'antitrasformata di una funzione razionale fratta, somma di vari termini dei tipi precedentemente elencati, si conclude che essa rimane limitata se e solo se la funzione da antitrasformare non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici, diverge in caso contrario.

Stabilità

Come risulta dall'esame delle (2.35), (2.36), i poli che caratterizzano la trasformata della risposta del sistema descritto dall'equazione (2.5) a un segnale di ingresso la cui trasformata di Laplace sia una funzione razionale fratta (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento, più quelli relativi al segnale di ingresso. In particolare la posizione dei poli della funzione di trasferimento (detti anche poli del sistema) rispetto all'asse immaginario influisce sulla proprietà del sistema di ritornare in una posizione di quiete dopo una perturbazione, cioè sulla *stabilità* del sistema. Il sistema risulta stabile (asintoticamente) quando tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: infatti in tal caso le sue variabili tendono a riacquistare asintoticamente per t tendente all'infinito i valori che avevano prima della perturbazione. Questo concetto, di fondamentale importanza, sarà più estesamente esaminato nel Capitolo 4.

2.3. Risposta all'impulso e integrali di convoluzione

Il teorema della trasformata dell'integrale (2.26) e quello della trasformata della derivata (2.27), insieme alla relazione (2.36), consentono di stabilire le seguenti importanti proprietà della risposta dei sistemi lineari descritti da equazioni differenziali del tipo (2.5).

- i) se $y(t)$ è la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso $x(t)$, l'integrale

$$\int_0^t y(\tau) d\tau$$

rappresenta la risposta, sempre a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso

$$\int_0^t x(\tau) d\tau ;$$

- ii) se $y(t)$ è la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso $x(t)$, che si suppone derivabile, la derivata

$$\frac{d}{dt} y(t)$$

rappresenta la risposta, sempre a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso

$$\frac{d}{dt} x(t) .$$

Ad esempio, la risposta alla rampa unitaria (la cui trasformata è $1/s^2$) è la derivata della risposta alla parabola unitaria (la cui trasformata è $1/s^3$), la risposta al gradino unitario (la cui trasformata è $1/s$) è la derivata della risposta alla rampa unitaria.

Come si è precedentemente accennato, nell'analisi dei sistemi si fa spesso riferimento alle risposte al gradino, alla rampa e ad altri segnali tipici, in quanto esse caratterizzano qualitativamente e quantitativamente il comportamento dinamico del sistema: si sottolinea ora come tali risposte costituiscano vere e proprie *risposte canoniche*, cioè tali che dalla conoscenza di una di esse si può risalire alla risposta ad un segnale qualsiasi.

Le risposte canoniche più frequentemente utilizzate nella pratica sono la *risposta al gradino* o *risposta indiciale* $g_u(t)$ e la *risposta all'impulso* (di Dirac) o *risposta impulsiva* $g(t)$: quest'ultima si può definire come la derivata della risposta al gradino: ciò consente di porre l'impulso nella famiglia di segnali tipici precedentemente citata al primo posto, cioè prima del gradino.

Affinché la risposta al gradino sia derivabile è sufficiente che la funzione di trasferimento sia data da un rapporto di polinomi in cui il grado del polinomio a numeratore sia inferiore di almeno un'unità rispetto a quello del polinomio a denominatore: in caso contrario la definizione della risposta all'impulso conserva la sua validità purché si faccia riferimento alle derivate generalizzate.

Essendo la trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac semplicemente l'unità, la risposta all'impulso si ottiene antitrasformando la funzione di trasferimento del sistema: nel dominio delle trasformate il sistema è completamente descritto dalla sua funzione di trasferimento, nel dominio del tempo invece esso è completamente descritto dalla risposta all'impulso, di cui la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace.

È facile verificare che la risposta all'impulso, così come la funzione di trasferimento, compendia tutte le informazioni necessarie per determinare la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, a qualunque segnale di ingresso.

A tal fine risulta utile il seguente teorema, relativo ad una proprietà generale delle trasformate di Laplace.

TEOREMA DELLA TRASFORMATA DEL PRODOTTO INTEGRALE. Siano $F_1(s)$ e $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s) . \quad (2.60)$$

L'integrale a primo membro della (2.60) si dice *prodotto integrale* delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Poiché il prodotto a secondo membro gode della proprietà commutativa, deve essere

$$\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau . \quad (2.61)$$

Si consideri il sistema lineare rappresentato con il blocco di Fig. 2.19a e caratterizzato dalla funzione di trasferimento $G(s)$.

Siano $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ la risposta all'impulso, rappresentata nella Fig. 2.19b, $g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]$ la risposta al gradino, rappresentata in Fig. 2.19c.

Si suppone che il sistema sia inizialmente in quiete, per cui si può scrivere

$$Y(s) = G(s) X(s) . \quad (2.62)$$

Le (2.60) e (2.61) comportano le relazioni

$$y(t) = \int_0^\infty x(\tau) g(t-\tau) d\tau , \quad (2.63)$$

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau) x(t-\tau) d\tau . \quad (2.64)$$

Essendo $x(t) = 0$ per $t < 0$ e $g(t) = 0$ per $t < 0$, l'estremo superiore dell'intervallo di integrazione nelle (2.63) e (2.64) si può limitare a t , ottenendo le

Risposta canonica
Risposta al gradino
Risposta indiciale
Risposta all'impulso
Risposta impulsiva

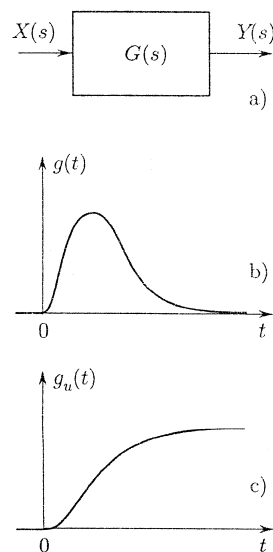


Figura 2.19
 Funzione di trasferimento,
 risposta all'impulso e
 risposta al gradino.

relazioni equivalenti

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad (2.65)$$

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t-\tau) d\tau. \quad (2.66)$$

Integrale di convoluzione
Integrale di Duhamel

Gli integrali a secondo membro delle (2.65) e (2.66) vengono detti *integrali di convoluzione* o *integrali di Duhamel* ed esprimono la risposta forzata del sistema a un qualunque segnale di ingresso $x(t)$ in funzione della sua risposta all'impulso.

Della struttura delle due relazioni si può dare un'interessante ed intuitiva giustificazione applicando la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

Si considera dapprima la (2.65) e si immagina di scomporre l'intervallo di integrazione $0 \leq \tau < t$ negli n intervalli elementari

$$\tau_{i-1} \leq \tau < \tau_i \quad (i = 1, \dots, n; \tau_0 = 0, \tau_n = t).$$

in ciascuno dei quali la funzione $x(\tau)$ si suppone costante, di valore pari a $x(\tau_i)$: ciò equivale ad approssimare il segnale di ingresso $x(\tau)$ con una successione di impulsi di durata finita, come è indicato in Fig. 2.20a.

Si consideri il generico impulso, che in Fig. 2.20a è distinto a tratteggio, di area $x(\tau_i) \Delta\tau$: supponendo $\Delta\tau$ sufficientemente piccolo, la risposta del sistema a tale impulso è prossima alla risposta a un impulso di Dirac di eguale area applicato all'istante τ_i , cioè alla funzione $x(\tau_i) \Delta\tau g(t - \tau_i)$.

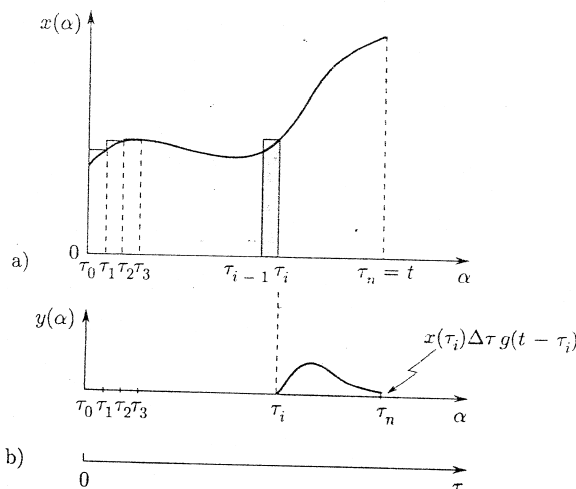
In Fig. 2.20b è rappresentato il contributo alla risposta dovuto all'impulso considerato. Poiché valgono le proprietà di sovrapposizione degli effetti e di traslazione nel tempo, si possono sommare i contributi relativi a tutti gli impulsi e scrivere pertanto

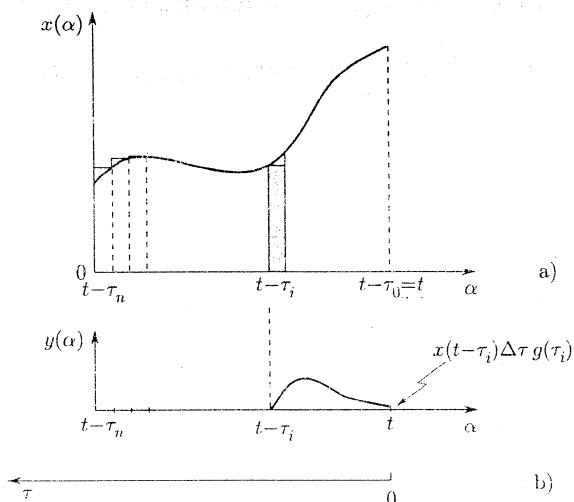
$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^n x(\tau_i) g(t - \tau_i) \Delta\tau.$$

Facendo tendere $\Delta\tau$ a zero, la sommatoria tende all'integrale a secondo membro della (2.65).

Figura 2.20

Interpretazione dell'integrale di convoluzione (2.65).



**Figura 2.21**

Interpretazione dell'integrale di convoluzione (2.66).

Anche per la seconda forma dell'integrale di convoluzione, espressa dalla (2.66), si può dare un'analogia interpretazione, illustrata in Fig. 2.21. L'intervallo di integrazione $0 \leq \tau < t$ è scomposto negli n intervalli elementari

$$\tau_{i-1} \leq \tau < \tau_i \quad (i = 1, \dots, n; \tau_0 = 0, \tau_n = t);$$

il contributo alla risposta del sistema all'istante t , dovuto all'impulso di area $x(t - \tau_i) \Delta\tau$, applicato all'istante $t - \tau_i$, è espresso da $x(t - \tau_i) \Delta\tau g(\tau_i)$, per cui, sommando, si ottiene

$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^n x(t - \tau_i) g(\tau_i) \Delta\tau,$$

che tende evidentemente alla (2.66) per $\Delta\tau$ tendente a zero.

La sommatoria ottenuta ha un significato interessante: un impulso di area $x(t - \tau_i) \Delta\tau$, applicato, rispetto all'istante generico t in cui interessa conoscere la risposta, τ_i secondi prima, produce un effetto pari alla sua area moltiplicata per $g(\tau_i)$: $g(\tau_i)$ rappresenta pertanto un fattore ponderale o *funzione ponderatrice*, che stabilisce l'influenza che ha sul valore dell'uscita all'istante generico t il valore del segnale di ingresso applicato τ_i secondi prima. La funzione ponderatrice $g(t)$ è, in un certo senso, una misura della "memoria" del sistema: una funzione ponderatrice $g(t) = u(t)$ implica una memoria perfetta: tutti gli impulsi in cui risulta scomposto il segnale di ingresso vengono pesati in modo identico e l'uscita è uguale all'integrale dell'ingresso; una funzione ponderatrice $g(t) = \delta(t)$ indica per contro la completa assenza di memoria, cioè la riproduzione perfetta dell'ingresso, propria di un trasduttore ideale.

Funzione ponderatrice

Si è verificato che la risposta all'impulso caratterizza completamente il comportamento dinamico di un sistema, nel senso che dalla conoscenza della risposta all'impulso si può risalire alla risposta a qualunque segnale di ingresso; ciò vale anche per la risposta al gradino, alla rampa, ecc. Ci si limiterà a considerare il caso della risposta al gradino: in luogo della (2.62), si può scrivere

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} s X(s), \quad (2.67)$$

ossia, applicando i teoremi del prodotto integrale e della derivata,

$$y(t) = \int_0^t x'(\tau) g_u(t-\tau) d\tau + x(0+) g_u(t) , \quad (2.68)$$

Formule di Vaschy

$$y(t) = \int_0^t g_u(\tau) x'(t-\tau) d\tau + x(0+) g_u(t) , \quad (2.69)$$

in cui con x' si è indicata la derivata del segnale di ingresso, supposto derivabile, con $g_u(t)$ la risposta al gradino unitario, rappresentata in Fig. 2.19c.

Il primo termine a secondo membro della (2.68) si approssima con la sommatoria

$$\sum_{i=1}^n x'(\tau_i) g_u(t-\tau_i) \Delta\tau ,$$

che, essendo per $\Delta\tau$ sufficientemente piccolo,

$$x'(\tau_i) \simeq \frac{x(\tau_i) - x(\tau_{i-1})}{\Delta\tau} ,$$

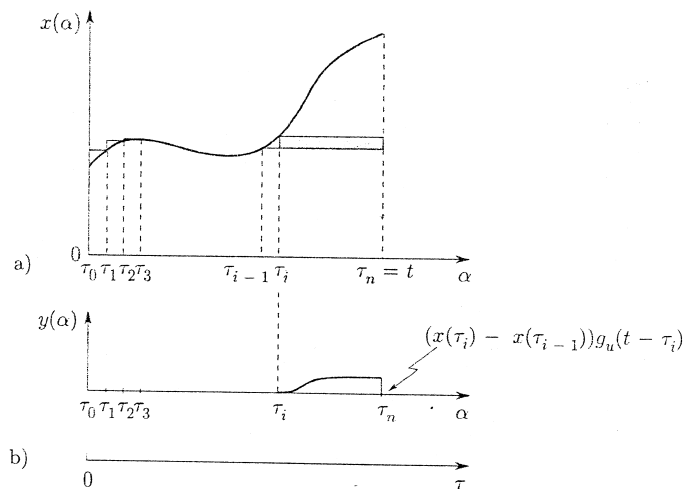
si può scrivere anche

$$\sum_{i=1}^n (x(\tau_i) - x(\tau_{i-1})) g_u(t-\tau_i) .$$

L'interpretazione di tale relazione è fornita dalla Fig. 2.22: il segnale di ingresso viene scomposto in una somma di gradini e la risposta viene ottenuta sommando tutte le risposte che a tali gradini corrispondono; il secondo termine a secondo membro della (2.68) tiene conto di un'eventuale discontinuità in $t=0$.

Figura 2.22

Interpretazione della relazione (2.68).



Considerazioni analoghe si possono effettuare con riferimento alla relazione (2.69), in cui il primo termine a secondo membro si approssima con

$$\sum_{i=1}^n g_u(\tau_i) x'(t-\tau_i) \Delta\tau ,$$

la quale, posto

$$x'(t - \tau_i) \simeq \frac{x(t - \tau_{i-1}) - x(t - \tau_i)}{\Delta\tau},$$

equivale alla

$$\sum_{i=1}^n (x(t - \tau_{i-1}) - x(t - \tau_i)) g_u(\tau_i),$$

che si interpreta come è indicato in Fig. 2.23. Le (2.68), (2.69) si dicono *formule di Vaschy*.

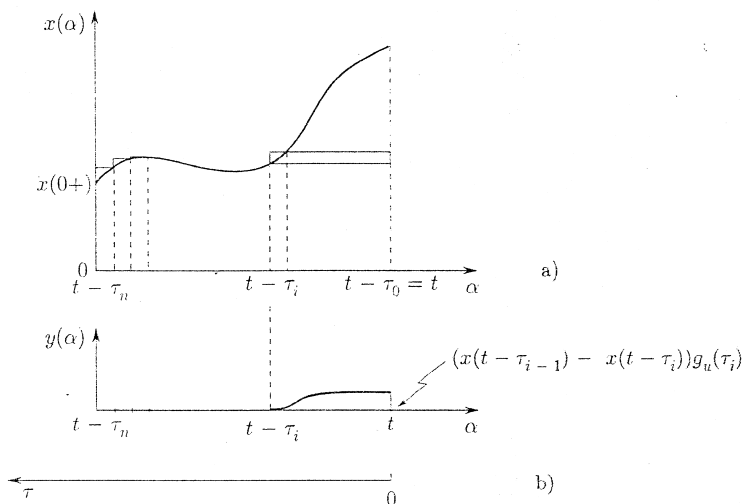


Figura 2.23

Interpretazione della relazione (2.69).

Gli integrali di convoluzione (2.65), (2.66) si possono dedurre sia come applicazione del teorema della trasformata di Laplace del prodotto integrale, sia direttamente, col procedimento di dimostrazione precedentemente illustrato, basato sull'applicazione della proprietà di sovrapposizione degli effetti.

La loro validità non è limitata al caso dei sistemi lineari stazionari a costanti concentrate descritti da equazioni differenziali del tipo (2.5), ma può essere estesa al caso di qualunque sistema lineare, anche a costanti distribuite o non stazionario.

❖ Sistemi lineari a costanti distribuite

Si consideri il sistema a costanti distribuite rappresentato in Fig. 2.24a, consistente in una sbarra metallica sottile (cosicché si possa considerare uniforme la temperatura in ogni sezione trasversale), avente un'estremità a temperatura variabile per l'azione di un opportuno elemento riscaldatore.

Il sistema è descritto dall'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} \vartheta(t, \lambda) = c_1 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \vartheta(t, \lambda) - c_2 (\vartheta(t, \lambda) - \vartheta_a), \quad (2.70)$$

in cui il significato dei simboli è:

$\vartheta(t, \lambda)$ temperatura nella sezione di ascissa λ all'istante t ;

ϑ_a temperatura ambiente;

γ, c_1, c_2 costanti, legate al calore specifico della sbarra e alla conducibilità termica interna e verso l'esterno.

La condizione (o stato) iniziale del sistema è dato dal profilo termico, cioè dalla funzione che rappresenta la distribuzione della temperatura lungo la sbarra, il cui grafico è rappresentato qualitativamente in Fig. 2.24b.

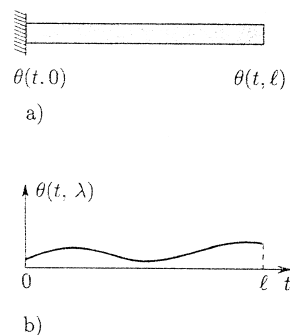
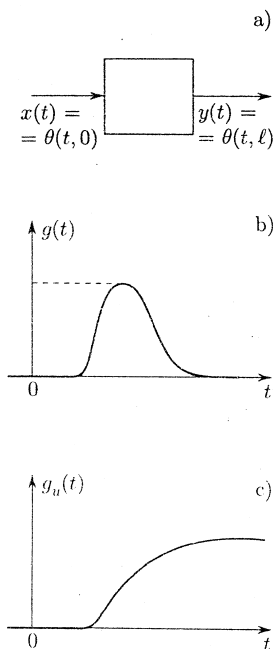


Figura 2.24

Sbarra metallica e suo profilo termico all'istante generico t .

**Figura 2.25**

Schematizzazione della sbarra di Fig. 2.24a come un sistema a una sola variabile di ingresso e di uscita e risposte all'impulso e al gradino.

- a) Un tipico problema di controllo termico è quello di regolare la temperatura all'estremità libera $\vartheta(t, \ell)$ agendo sulla temperatura all'altra estremità $\vartheta(t, 0)$: in tal caso il sistema si può rappresentare con il blocco di Fig. 2.25a, cioè come ad una sola variabile.

Il sistema è lineare in quanto, dette $\vartheta_1(t, \lambda)$ e $\vartheta_2(t, \lambda)$ le soluzioni della equazione differenziale (2.70) a partire dalla condizione iniziale di quiete $\vartheta(0, \lambda) = \vartheta_a = 0$ per ogni λ (non lede la generalità assumere ϑ_a come temperatura di riferimento), corrispondenti alle azioni forzanti $\vartheta_1(t, 0)$, $\vartheta_2(t, 0)$, la funzione $k_1 \vartheta_1(t, \lambda) + k_2 \vartheta_2(t, \lambda)$ ne rappresenta la soluzione corrispondente all'azione forzante $k_1 \vartheta_1(t, 0) + k_2 \vartheta_2(t, 0)$.

In particolare si può determinare, analiticamente o sperimentalmente, la risposta al gradino unitario (Fig. 2.25c) e quindi la risposta all'impulso, che ne è la derivata (Fig. 2.25b).

La risposta $y(t)$ del sistema ad un segnale di ingresso $x(t)$ avente andamento qualunque si può determinare utilizzando gli integrali di convoluzione (2.65), (2.66).

Il comportamento dinamico del sistema, a partire dalla condizione iniziale di quiete, è completamente determinato dalla risposta all'impulso, che nel caso in esame ne costituisce pertanto la caratterizzazione più valida.

❖ Sistemi lineari non stazionari

Nel caso dei sistemi lineari non stazionari in generale non è soddisfatta la proprietà che, dette $x(t)$, $y(t)$ una coppia eccitazione-risposta (a partire dallo stato di quiete), all'eccitazione dx/dt corrisponde la risposta dy/dt .

Si consideri infatti il sistema lineare non stazionario puramente algebrico descritto dall'equazione

$$y(t) = \alpha(t) x(t); \quad (2.71)$$

la derivata della funzione $y(t)$ è data dall'espressione

$$\frac{d}{dt} y(t) = \alpha(t) \frac{d}{dt} x(t) + x(t) \frac{d}{dt} \alpha(t), \quad (2.72)$$

mentre la risposta corrispondente all'ingresso dx/dt è data dal solo primo termine a secondo membro della (2.72).

Le risposte all'impulso e al gradino dei sistemi lineari non stazionari variano al variare dell'istante τ in cui sono applicati l'impulso o il gradino; esse consistono pertanto in funzioni di due variabili $g(t, \tau)$ e $g_u(t, \tau)$ identicamente nulle per $t < \tau$.

Le considerazioni svolte per la deduzione delle (2.65) e (2.68), basate sulla proprietà di sovrapposizione degli effetti, si conservano valide anche per i sistemi lineari non stazionari.

Esse portano ai due integrali di convoluzione

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) g(t, \tau) d\tau, \quad (2.73)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t x'(\tau) g_u(t, \tau) d\tau + x(t_0+) g_u(t, t_0). \quad (2.74)$$

Poiché per i sistemi lineari non stazionari non si possono definire le funzioni di trasferimento, il comportamento dinamico è rappresentato di norma con le risposte all'impulso o al gradino, che in effetti consentono, con l'impiego delle (2.73), (2.74), il calcolo della risposta ad un'eccitazione qualunque.

Posto nella (2.73) $x(\tau) = u(\tau)$, si può scrivere

$$g_u(t, \tau) = \int_{\tau}^t g(t, \sigma) d\sigma, \quad (2.75)$$

relazione che lega la risposta al gradino alla risposta all'impulso. Viceversa si ha⁽⁷⁾

$$g(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} g_u(t, \tau), \quad (2.76)$$

in cui la derivata si intende in senso generalizzato.

⁽⁷⁾ Indicando con simboli diversi le variabili e i limiti dell'intervallo di integrazione, la (2.75)

2.4. Sistemi elementari del primo e del secondo ordine

Il sistema elementare del primo ordine è caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (2.77)$$

in cui la *costante di tempo* τ costituisce il parametro che caratterizza il comportamento dinamico. La risposta al gradino unitario è data dalla relazione

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + \tau s)} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.78)$$

Costante di tempo

ed ha l'andamento rappresentato in Fig. 2.26, con scala dei tempi normalizzata in rapporto alla costante di tempo τ : per $t = \tau$ la risposta assume un valore pari al 63,2 % del valore finale di regime, per $t = 2\tau$ il valore è pari all'86,5 % del valore di regime, mentre per $t = 3\tau$ si raggiunge il 95,0 % del valore di regime. Se si definisce il tempo di assestamento del sistema come il tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il 5 % del valore finale, si conclude che esso è pari a circa tre volte la costante di tempo. Per $t = 5\tau$ si raggiunge il 99,3 % del valore di regime, mentre per $t = 7\tau$ si raggiunge il 99,91 % del valore di regime, cioè l'assestamento residuo rimane inferiore all'un per mille.

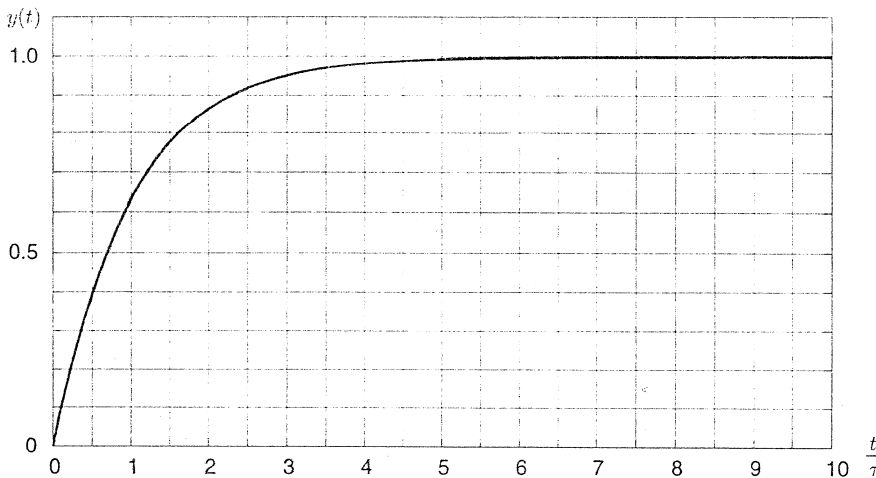


Figura 2.26
Risposta al gradino del sistema elementare del primo ordine.

si scrive

$$g_u(\eta, \sigma) = \int_{\sigma}^{\eta} g(t, \tau) d\tau.$$

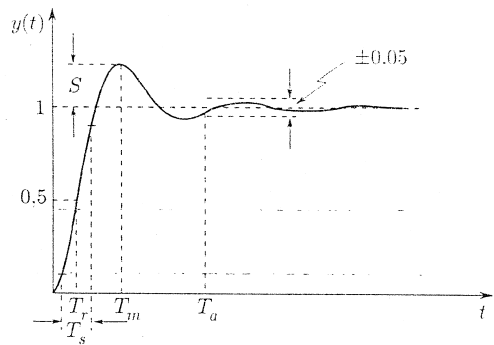
La (2.76) si deduce derivando ambo i membri rispetto a σ . La regola generale di derivazione di un integrale dipendente da un parametro t è espressa dalla relazione

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx.$$

Si considera ora il sistema elementare del secondo ordine, che risulta particolarmente interessante perché spesso i sistemi in retroazione, anche se di ordine elevato, presentano una risposta analoga a quella dei sistemi del secondo ordine: in genere infatti la loro configurazione poli-zero è caratterizzata dalla presenza di una coppia di poli “dominanti” complessi coniugati, cioè una coppia di poli, i più vicini all’asse immaginario, il cui contributo nell’espressione del transitorio è notevolmente più importante di quello degli altri poli.

Per questa ragione, quando si stabiliscono dei dati di specifica riguardanti la risposta al gradino, che è il segnale tipico più frequentemente impiegato, si fa riferimento ad un andamento della risposta del tutto analogo a quello di un sistema del secondo ordine con poli complessi, cioè di tipo oscillatorio smorzato.

Figura 2.27
I più importanti parametri della risposta al gradino di un tipico sistema in retroazione.



In Fig. 2.27 è riportato tale andamento qualitativo della risposta al gradino e sono indicati i parametri più importanti, sui quali si può basare una misura della qualità del transitorio. Essi sono:

- | | |
|--|--|
| Massima sovraelongazione
Massimo sorpasso | 1. <i>Massima sovraelongazione</i> (o <i>massimo sorpasso</i>) S : differenza fra il valore massimo raggiunto dall’uscita e il valore finale; normalmente si dà in % del valore finale. |
| Tempo di ritardo | 2. <i>Tempo di ritardo</i> T_r : tempo per raggiungere il 50 % del valore finale. |
| Tempo di salita | 3. <i>Tempo di salita</i> T_s : tempo occorrente perché l’uscita passi dal 10 al 90 % del valore finale. |
| Tempo di assestamento | 4. <i>Tempo di assestamento</i> T_a : tempo occorrente perché l’uscita rimanga entro il ± 5 % del valore finale. |
| Istante di massima sovraelongazione | 5. <i>Istante di massima sovraelongazione</i> T_m : istante al quale si presenta la massima sovraelongazione. |

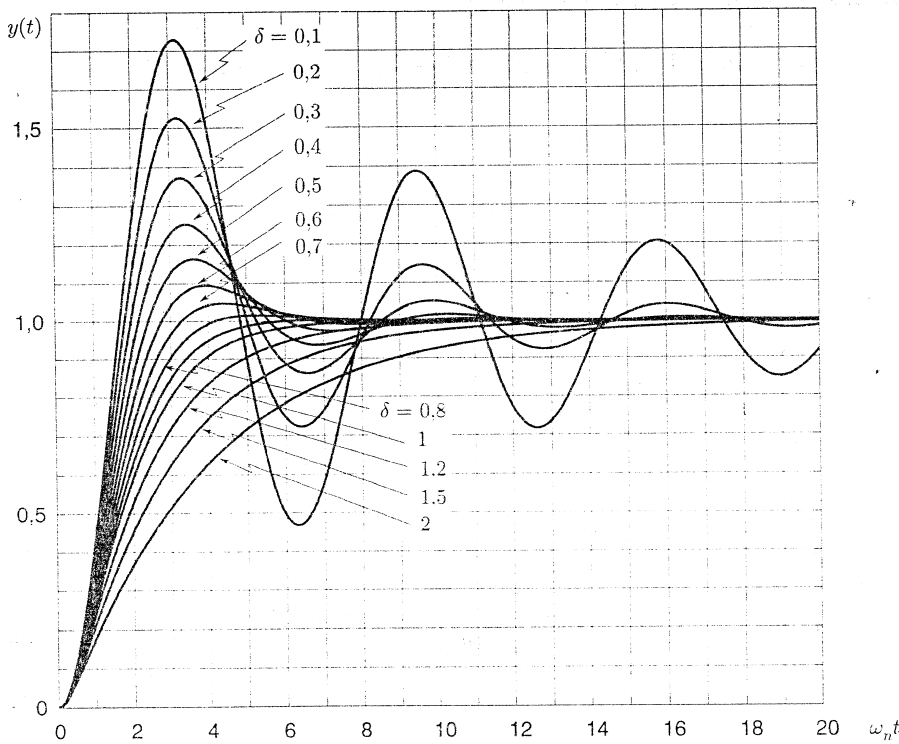
Sistema elementare del secondo ordine Per il tipico sistema del secondo ordine, la cui funzione di trasferimento, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}, \tag{2.79}$$

Pulsazione naturale
Efficiente di smorzamento tali parametri dipendono dalla posizione dei poli nel piano complesso, legata a sua volta ai valori del coefficiente di smorzamento δ e della pulsazione naturale ω_n come è indicato in Fig. 2.17.

La risposta al gradino unitario è data dalla relazione

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi), \tag{2.80}$$

**Figura 2.28**

Risposta al gradino del sistema elementare del secondo ordine.

in cui è:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}, \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2},$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} = \arcsin \sqrt{1 - \delta^2} = \arccos \delta.$$

Tale funzione è riportata in Fig. 2.28 per vari valori del coefficiente di smorzamento δ e con scala dei tempi normalizzata in rapporto all'inverso della pulsazione naturale ω_n . Si noti che per $\delta=1$ non si ha alcuna sovraelongazione: $y(t)$ tende asintoticamente al valore finale senza mai superarlo⁽⁸⁾.

Può interessare la relazione esatta fra il valore del coefficiente di smorzamento e quello della massima sovraelongazione. Per ricavarla, si deriva la (2.80) rispetto al tempo, ottenendo

$$\frac{dy}{dt} = -A e^{-\delta \omega_n t} \omega \cos(\omega t + \varphi) + A \delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.81)$$

⁽⁸⁾La (2.80) fornisce la risposta per $0 \leq \delta < 1$, cioè nel caso in cui il sistema presenti poli complessi coniugati. Per $\delta=1$ (poli reali coincidenti) la risposta al gradino è data dalla relazione

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t},$$

mentre per $\delta > 1$ (poli reali distinti) si ha

$$y(t) = 1 + K_1 e^{at} + K_2 e^{bt},$$

con $a = \omega_n (-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})$, $b = \omega_n (-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})$, $K_1 = b/(a - b)$, $K_2 = a/(b - a)$.

Ponendo la derivata uguale a zero, si ottiene

$$-\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega t + \varphi) + \delta \omega_n \sin(\omega t + \varphi) = 0,$$

da cui

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta},$$

e, ricordando il valore di φ ,

$$\omega t = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots),$$

da cui

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}. \quad (2.82)$$

Sostituendo nella (2.80), si ricavano i valori dell'uscita in corrispondenza dei vari massimi e minimi mediante la relazione

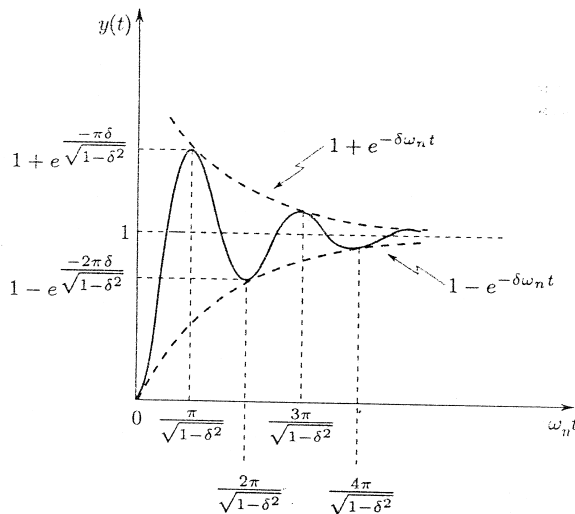
$$y(t) \Big|_{\substack{\text{max} \\ \text{min}}} = 1 - \frac{e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(n\pi + \varphi),$$

da cui infine si ottiene

$$y(t) \Big|_{\substack{\text{max} \\ \text{min}}} = 1 - (-1)^n e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}. \quad (2.83)$$

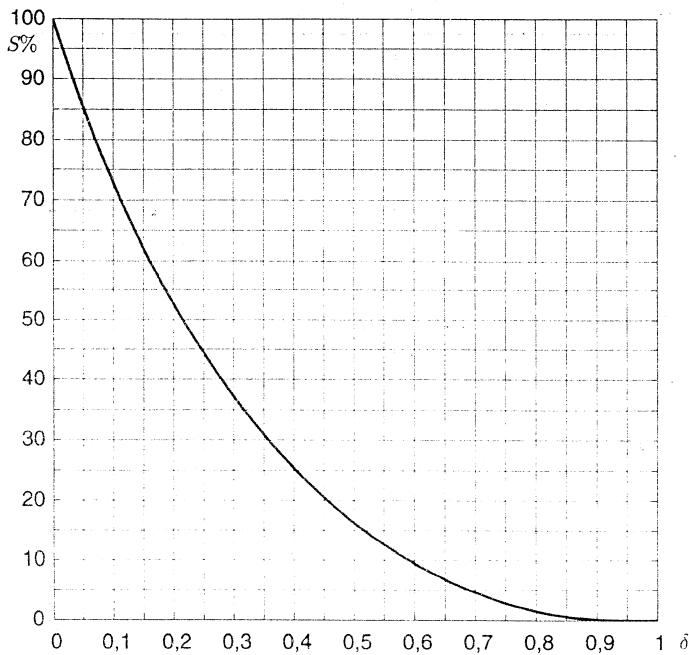
In Fig. 2.29 sono rappresentati, con riferimento alla risposta tipica, gli istanti e i valori dei vari massimi e minimi, forniti dalle (2.82) e (2.83).

Figura 2.29
Massimi e minimi della
risposta al gradino.



La massima sovraelongazione in % si ricava facilmente dalla (2.83). Essa è data dalla relazione

$$S = 100 (y_{\text{max}} - 1) = 100 e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}. \quad (2.84)$$

**Figura 2.30**

Legame fra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione.

Pertanto in un sistema del secondo ordine la massima sovraelongazione è funzione unicamente del coefficiente di smorzamento ed è uguale al 100 % quando tale coefficiente è nullo. La funzione (2.84) è riportata in grafico in Fig. 2.30.

Se il valore della massima sovraelongazione non deve superare un certo massimo assegnato, i poli del sistema devono essere compresi nel settore delimitato dalle rette b e b' di Fig. 2.31, che rappresentano luoghi di poli corrispondenti a un dato valore del coefficiente di smorzamento.

Spesso si specifica anche il valore massimo del tempo di assestamento T_a . Un limite superiore per il tempo di assestamento si può ricavare con la relazione

$$e^{-\delta\omega_n T_a} = 0,05 ,$$

da cui si deduce

$$\delta\omega_n T_a = 3 ,$$

cioè

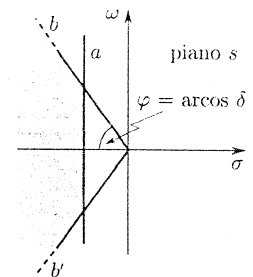
$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} .$$

Perché il tempo di assestamento sia non superiore al valore assegnato T_a , dovrà essere

$$\delta\omega_n \geq \frac{3}{T_a} . \quad (2.85)$$

Il prodotto $\delta\omega_n$ è uguale in modulo, con segno opposto, alla parte reale σ dei poli del sistema: il vincolo (2.85) equivale a limitare la posizione dei poli a sinistra di una retta verticale, indicata con a in Fig. 2.31.

La posizione dei poli deve essere vincolata ad un dominio del tipo contraddistinto a tratteggio in Fig. 2.31 se si intende limitare sia il tempo di assestamento, sia la massima sovraelongazione.

**Figura 2.31**

Limitazioni alle posizioni dei poli derivanti da specifiche relative alla massima sovraelongazione e al tempo di assestamento.

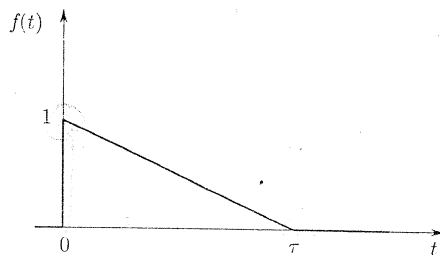
2.5. Esercizi

2.5.1 Calcolare la trasformata di Laplace della funzione il cui grafico è riportato in Fig. 2.32.

Figura 2.32
Funzione del tempo.

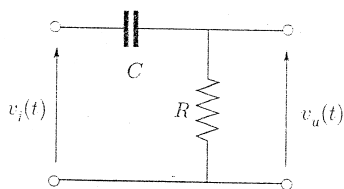
Soluzione La funzione si può scomporre nella somma di un gradino unitario applicato in $t=0$, di una rampa di pendenza $-1/\tau$ applicata in $t=0$ e di una rampa di pendenza $1/\tau$ applicata in $t=\tau$. Per la proprietà di linearità la sua trasformata di Laplace è uguale alla somma delle trasformate dei tre segnali suddetti. Si ha pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s}).$$

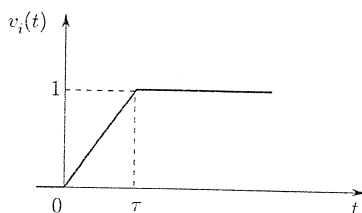


2.5.2 Determinare la risposta della rete elettrica di Fig. 2.33a al segnale di Fig. 2.33b.

Figura 2.33
Rete elettrica e segnale di ingresso.



a)



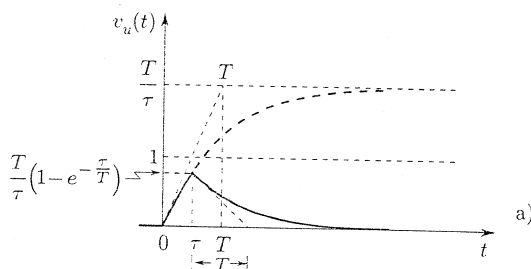
b)

Per $t \geq \tau$ si ha invece

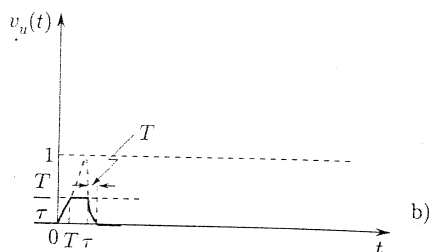
$$\begin{aligned} v_u(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{T s}{\tau s^2 (1 + T s)} (1 - e^{-\tau s}) \right] \\ &= \frac{T}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - 1 + e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right) \\ &= \frac{T}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) e^{-\frac{t-\tau}{T}}. \end{aligned}$$

In Fig. 2.34a e in Fig. 2.34b sono riportati gli andamenti della risposta rispettivamente per $T > \tau$ e per $T < \tau$.

Figura 2.34
Possibili risposte della rete di Fig. 2.33a.



a)



b)

Soluzione La funzione di trasferimento della rete è

$$G(s) = \frac{T s}{1 + T s}, \quad \text{con } T = RC.$$

Il segnale applicato si può scomporre nella somma di due rampe, le cui trasformate sono

$$V_i'(s) = \frac{1}{\tau s^2}, \quad V_i''(s) = -\frac{1}{\tau s^2} e^{-\tau s}.$$

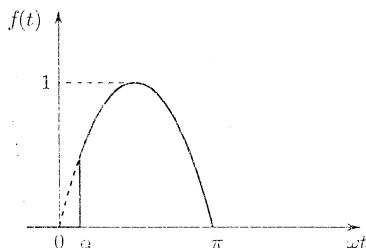
Per $t < \tau$ l'espressione della risposta è

$$v_u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{T s}{\tau s^2 (1 + T s)} \right] = \frac{T}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

2.5.3 Calcolare la trasformata di Laplace del segmento di funzione sinusoidale il cui grafico è rappresentato in Fig. 2.35.

Figura 2.35

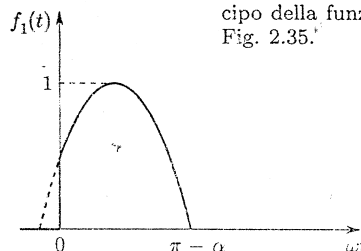
Funzione del tempo.



Soluzione Si fa riferimento alla funzione $f_1(t)$ rappresentata in Fig. 2.36, che si può considerare la differenza fra una sinusoide anticipata di α/ω e resa uguale a zero per $t < 0$ e una sinusoide, nulla per $t < 0$, ritardata di $(\pi - \alpha)/\omega$ (per cui si annullano tutti i semiperiodi tranne il primo).

Figura 2.36

Traslazione in anticipo della funzione di Fig. 2.35.



Dalla relazione

$$\sin(\omega t + \alpha) = \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha$$

si deduce

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{\omega \cos \alpha + s \sin \alpha}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{\pi - \alpha}{\omega} s}.$$

Notando che la funzione $f(t)$ di Fig. 2.35 si ottiene ritardando di α/ω la $f_1(t)$, si ha infine

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[f_1(t)] e^{-\frac{\alpha}{\omega} s} \\ &= \frac{\omega \cos \alpha + s \sin \alpha}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{\alpha}{\omega} s} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{\pi}{\omega} s}. \end{aligned}$$

2.5.4 Calcolare la trasformata di Laplace della funzione del tempo rappresentata in Fig. 2.37.

Soluzione La funzione di Fig. 2.37 si può scomporre nella somma

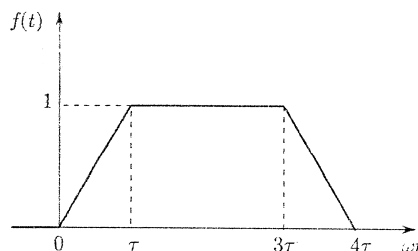
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\tau} (t u(t) - (t - \tau) u(t - \tau) \\ &\quad - (t - 3\tau) u(t - 3\tau) + (t - 4\tau) u(t - 4\tau)), \end{aligned}$$

per cui è

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s} - e^{-3\tau s} + e^{-4\tau s}).$$

Figura 2.37

Funzione del tempo.



2.5.5 Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2 y(t) = (1 + 3t) u(t),$$

con condizioni iniziali

$$y(0-) = 1, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0-} = 0.$$

Soluzione Trasformando secondo Laplace l'equazione data, si ottiene

$$(s^2 + 3s + 2) Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}.$$

L'evoluzione libera è data dalla relazione

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} \right].$$

I poli sono $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, per cui lo sviluppo in somma di fratti semplici risulta

$$\frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2}.$$

Utilizzando la (2.49) si ricava

$$K_1 = \left. \frac{s + 3}{s + 2} \right|_{s=-1} = 2,$$

$$K_2 = \left. \frac{s + 3}{s + 1} \right|_{s=-2} = -1.$$

Si ha pertanto

$$y_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

L'evoluzione forzata è data dalla relazione

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+3}{s^2(s^2+3s+2)} \right].$$

I poli sono $p_1 = 0$ (doppio), $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, da cui risulta lo sviluppo in somma di fratti semplici

$$\frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{s+1} + \frac{K_{31}}{s+2}.$$

Utilizzando la (2.56), si ricava

$$K_{11} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2},$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = -\frac{7}{4},$$

$$K_{21} = \frac{s+3}{s^2(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2,$$

$$K_{31} = \frac{s+3}{s^2(s+1)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}.$$

Si può scrivere pertanto

$$y_1(t) = \frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

La soluzione dell'equazione differenziale assegnata è data dalla somma delle funzioni $y_0(t)$ e $y_1(t)$.

2.5.6 Si consideri un sistema del secondo ordine con funzione di trasferimento del tipo (2.79) e si supponga di applicare al suo ingresso il segnale rappresentato in Fig. 2.38, dato dalla somma di due gradini, il secondo ritardato di τ rispetto al primo. Determinare i valori di β e τ corrispondenti alla minima durata del transitorio.

Soluzione Si dimostra che è possibile ottenere un transitorio di durata τ assumendo come istante τ l'istante di massima sovraelongazione della risposta al gradino del sistema considerato e come ampiezza β del primo gradino applicato quella per cui in corrispondenza della massima sovraelongazione della relativa risposta l'uscita assume valore unitario, cioè, per le (2.82) e (2.83),

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}, \quad \beta = \left(1 + e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \right)^{-1}.$$

Figura 2.38

Segnale di ingresso.

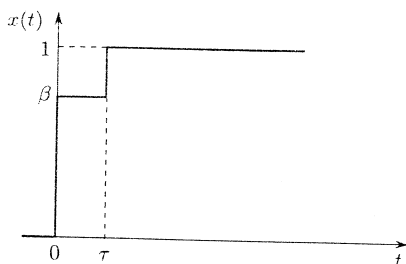
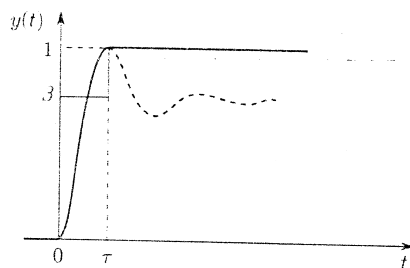


Figura 2.39

Andamento della risposta con minimo tempo di assestamento.



In Fig. 2.39 è riportato a tratto pieno l'andamento della risposta al segnale di ingresso di Fig. 2.38, con i valori sopra specificati di τ e β , a tratteggio l'andamento della risposta al solo primo gradino. L'uscita dopo l'istante τ rimane costante perché, essendo

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=\tau} = 0, \quad y(\tau) = 1,$$

e $x(t) = 1$ per $t \geq \tau$, il sistema viene a trovarsi in uno stato di equilibrio, cioè in uno stato in cui la sua equazione differenziale rimane identicamente soddisfatta con tutte le derivate uguali a zero.

La tecnica di posizionamento con smorzamento rapido del transitorio sopra descritta è nota sotto il nome di "posicast".

Complementi al Capitolo 2

C2.1. Funzioni analitiche

Le funzioni di variabile complessa vengono frequentemente impiegate nello studio dei sistemi dinamici, per cui si ritiene opportuno richiamarne le principali proprietà e, in particolare, esaminare in che modo alcuni importanti concetti relativi alle funzioni di variabile reale si possano estendere al campo complesso.

1. *Limite*: la funzione $f(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$ ammette il limite λ per s tendente a s_0 (cioè è $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lambda$) se ad ogni numero reale positivo ϵ si può associare un numero reale positivo ρ tale che per ogni s soddisfacente l'ineguaglianza $|s - s_0| < \rho$ sia $|f(s) - \lambda| < \epsilon$.

Limite nel campo complesso

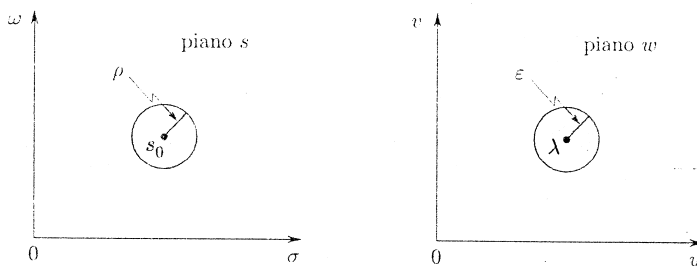


Figura 2.40

Illustrazione del concetto di limite di una funzione di variabile complessa.

Il significato della definizione è illustrato in Fig. 2.40: per ogni ϵ all'intorno circolare di raggio ϵ e di centro λ nel piano w si può associare nel piano s un opportuno intorno circolare di centro s_0 e raggio ρ , che si trasforma tutto entro il precedente.

2. *Continuità*: la funzione $f(s)$ è continua nel punto s_0 quando il $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s)$ esiste ed è uguale ad $f(s_0)$.

Continuità nel campo complesso

3. *Derivata*: la funzione $f(s)$ è derivabile nel punto s_0 se esiste il limite per s tendente ad s_0 del rapporto incrementale

Derivazione nel campo complesso

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s},$$

limite che, come nel caso delle funzioni di variabile reale, è, per definizione, la derivata di $f(s)$ in s_0 .

Poiché nel campo complesso il limite è definito indipendentemente dalla direzione dell'incremento Δs (vedi Fig. 2.41), per la sua esistenza è necessario che i limiti calcolati nelle direzioni degli assi siano identici, cioè che sia

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta \sigma) - f(s_0)}{\Delta \sigma} &= \frac{\partial u}{\partial \sigma} + j \frac{\partial v}{\partial \sigma} \\ &= \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + j \Delta \omega) - f(s_0)}{j \Delta \omega} = \frac{\partial v}{\partial \omega} - j \frac{\partial u}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Devono essere pertanto soddisfatte le *condizioni di analiticità*

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega}, \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}, \quad (2.87)$$

dette anche *relazioni di Cauchy-Riemann*. Si può dimostrare che, oltreché necessarie, esse sono anche sufficienti per la derivabilità di una funzione di variabile complessa. Le funzioni di variabile complessa che le soddisfano si dicono *funzioni analitiche*.

Le condizioni di analiticità comportano alcune interessanti conseguenze: per esempio che una funzione analitica in un punto è localmente invertibile e conforme: a due curve

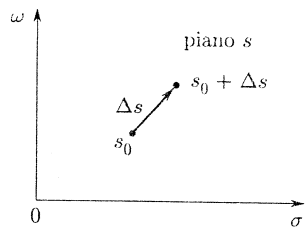


Figura 2.41

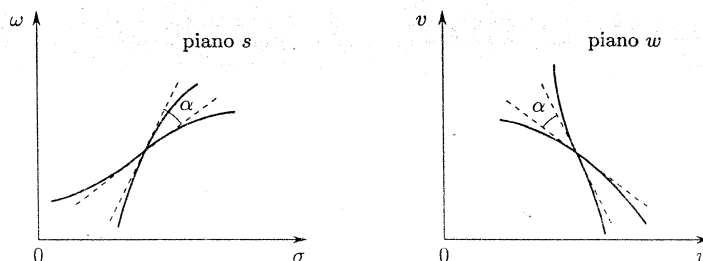
Incremento nel piano complesso.

Condizioni di analiticità o Relazioni di Cauchy-Riemann

Funzioni analitiche

Figura 2.42

Corrispondenza conforme.



del piano s che si intersecano secondo un angolo α corrispondono due curve nel piano w che si intersecano pure secondo l'angolo α (vedi Fig. 2.42).

Anche l'integrale delle funzioni di variabile complessa si può definire come una semplice estensione dell'integrale delle funzioni di variabile reale.

Integrazione nel campo complesso

4. *Integrale*: assegnata nel piano s una curva Γ di estremi s_a e s_b (Fig. 2.43), si definisce l'integrale

$$\int_{\Gamma} f(s) ds$$

come il limite per n tendente a infinito della somma

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta s_i.$$

In generale l'integrale dipende non solo dagli estremi s_a ed s_b , ma anche dal percorso Γ . Peraltro un noto *teorema di Cauchy* asserisce che, se una funzione è analitica in un dominio semplicemente connesso⁽⁹⁾, il suo integrale esteso ad una qualunque curva chiusa contenuta in $\mathcal{D}$ è nullo, cioè, con riferimento alla Fig. 2.44

$$\oint_{\Gamma'} f(s) ds = 0.$$

In conseguenza di ciò, per tutti i percorsi contenuti in un dominio in cui la funzione è analitica, l'integrale dipende solo dagli estremi del percorso di integrazione, per cui può essere indicato con la stessa notazione usata nel caso delle funzioni di variabile reale, cioè

$$\int_{s_a}^{s_b} f(s) ds.$$

Una funzione di variabile complessa $f(s)$ analitica in un dominio $\mathcal{D}$ contenente il punto s_0 è suscettibile di *sviluppo in serie di Taylor* in s_0 . Tale sviluppo è dato dalla relazione:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (s - s_0)^n, \quad (2.88)$$

con

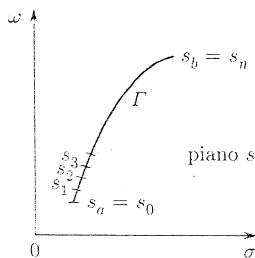
$$c_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds, \quad (2.89)$$

in cui con Γ si indica una qualunque curva chiusa circondante s_0 e contenuta in un dominio in cui la funzione è analitica.

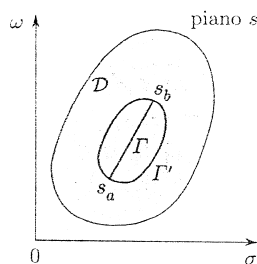
Una funzione di variabile complessa $f(s)$ analitica in un dominio $\mathcal{D}$, eccetto che nel punto s_0 contenuto in $\mathcal{D}$, in cui la funzione non è analitica, è suscettibile di *sviluppo in serie di Laurent* in s_0 . Tale sviluppo è dato dalla relazione:

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (s - s_0)^n, \quad (2.90)$$

⁽⁹⁾Un dominio è semplicemente connesso se si può passare con continuità da una qualunque curva congiungente due punti ed appartenente al dominio ad un'altra qualunque curva congiungente gli stessi due punti ed appartenente al dominio.

**Figura 2.43**

Percorso di integrazione nel campo complesso.

**Figura 2.44**

Curva chiusa in un dominio semplicemente connesso.

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{n+1}} ds, \quad (2.91)$$

in cui con Γ si indica una qualunque curva chiusa circondante s_0 lungo la quale la funzione è analitica. Si noti che lo sviluppo in serie di Laurent presenta, in aggiunta ai termini dello sviluppo in serie di Taylor, termini del tipo

$$\frac{k_i}{(s-s_0)^i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Se i coefficienti k_i relativi a tali termini sono tutti nulli, la funzione è analitica in s_0 ; in caso contrario essa presenta in s_0 un *punto singolare* o *singularità*. La singularità è un *polo* se i suddetti termini sono finiti in numero, una *singularità essenziale* se sono infiniti.

Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{b_1}{s-s_2} + \frac{b_2}{(s-s_2)^2}$$

presenta poli in s_1 e s_2 , mentre la funzione

$$f(s) = e^{\frac{1}{s}} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} + \dots$$

presenta una singularità essenziale nell'origine.

Il valore del coefficiente $k_1 = c_{-1}$ nello sviluppo in serie di Laurent si dice *residuo* della funzione $f(s)$ in s_0 . Esso è dato dalla relazione

$$R_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(s) ds. \quad (2.92)$$

In relazione ai residui vale il seguente *teorema dei residui* di Cauchy: data una funzione $f(s)$, analitica in un dominio $\mathcal{D}$, tranne che nei punti isolati $s_1, \dots, s_n$, si ha

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 2\pi j (R_1 + \dots + R_n), \quad (2.93)$$

in cui Γ è una curva chiusa appartenente a $\mathcal{D}$ e circondante $s_1, \dots, s_n$.

Esempi di funzioni analitiche

1 Potenza:

$$w = s^n = (\sigma + j\omega)^n = \rho^n e^{jn\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi).$$

La funzione è analitica per ogni s finita, come si verifica facilmente applicando le relazioni di Cauchy-Riemann.

2 Radice n -esima:

$$w = \sqrt[n]{s} = \sqrt[n]{\sigma + j\omega} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\nu\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2\nu\pi}{n} \right) \quad (\nu = 0, \dots, n-1).$$

Limitando l'argomento di s al valore principale ($-\pi < \varphi \leq \pi$), la funzione, anziché ad n valori, diviene a un sol valore (*radice principale*) ed è analitica in tutti i punti del dominio di definizione.

3 Esponenziale:

$$w = e^s = e^{(\sigma + j\omega)} = e^\sigma e^{j\omega} = e^\sigma (\cos \omega + j \sin \omega).$$

La funzione è analitica per ogni valore finito di s . Essa è periodica con periodo 2π lungo ogni retta parallela all'asse immaginario.

4 Logaritmo:

$$w = \ln s = \ln (\rho e^{j\varphi}) = \ln \rho + j(\varphi + 2\nu\pi) \quad (\nu \text{ intero}).$$

La funzione ha la parte immaginaria periodica con periodo 2π ed è quindi a più valori. Limitando l'argomento di s al valore principale, essa diviene a un sol valore (*logaritmo principale*) ed è analitica in tutti i punti del dominio di definizione: sulla semiretta $\sigma \leq 0$, che costituisce il contorno del dominio di definizione, la funzione non è analitica.

Punto singolare
Singularità
Polo
Singularità essenziale

Residuo

Logaritmo principale

C2.2. La trasformazione di Laplace

Le relazioni che definiscono la trasformazione e l'antitrasformazione di Laplace sono state introdotte al Paragrafo 2.1 (formule (2.12) e (2.13)).

In relazione alla formula per la trasformazione (2.12), si può dimostrare che se l'integrale a secondo membro esiste per un valore $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ della variabile complessa, esso esiste per ogni valore $s = \sigma + j\omega$ con $\sigma \geq \sigma_0$.

La trasformata è pertanto definita in un dominio del piano s del tipo indicato in Fig. 2.45, avente come contorno una retta parallela all'asse immaginario, che può non appartenere al dominio. Esso si dice *dominio di convergenza* e l'ascissa di tale retta *ascissa di convergenza*.

Domínio di convergenza
Ascissa di convergenza

ESEMPIO C2.2.1 Nel caso della funzione gradino unitario $u(t)$, essendo, per s reale,

si ha convergenza per $\sigma > 0$ e pertanto l'ascissa di convergenza è $\sigma_c = 0$.

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dt = \frac{e^{-\sigma t}}{-\sigma} \Big|_{t=0}^{t=\infty},$$

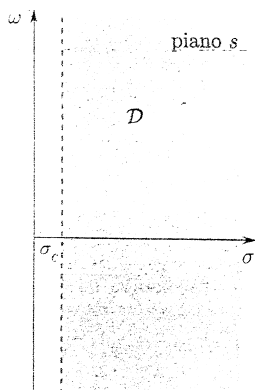


Figura 2.45

Ascissa di convergenza e dominio di convergenza.

Condizioni sufficienti perché una funzione $f(t)$ a valori in generale complessi ammetta trasformata di Laplace sono:

- i) $f(t)$ nulla per $t < 0$;
- ii) $f(t)$ limitata al finito, cioè per ogni valore t_0 finito esiste una costante reale M_1 tale che $|f(t)| < M_1$ per $0 \leq t \leq t_0$;
- iii) $f(t)$ continua a tratti per $t \geq 0$, cioè con un numero finito di punti di discontinuità in ogni intervallo di tempo di lunghezza finita;
- iv) $f(t)$ di ordine esponenziale per t tendente all'infinito, cioè tale che esistano due costanti reali M_2 e σ_0 e un valore t_0 per cui sia $|f(t)| < M_2 e^{\sigma_0 t}$ per $t \geq t_0$.

Infatti, detto M il maggiore fra M_1 ed M_2 e β il maggiore fra σ_0 e 0, si può scrivere

$$|f(t)| < M e^{\beta t} \quad \text{per } t \geq 0,$$

e pertanto

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt \right| < M \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{\beta t} dt = \frac{M}{\sigma - \beta} \quad \text{per } \sigma > \beta,$$

da cui risulta che la funzione è trasformabile e la sua ascissa di convergenza è non superiore a β .

Si è mostrato al Paragrafo 2.1 che le trasformate di Laplace di molti segnali tipici, come il gradino, la rampa, la parabola, il seno, il coseno, si possono dedurre dalla relazione fondamentale (2.16).

Per dimostrare tale relazione, si applica la definizione della trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \int_0^{\infty} t^n e^{(a-s)t} dt.$$

Si integra per parti⁽¹⁰⁾ con le posizioni:

fattore finito $f = t^n$, da cui

$$f' = \begin{cases} 0 & \text{per } n = 0, \\ n t^{n-1} & \text{per } n \geq 1; \end{cases}$$

fattore differenziale $g' dt = e^{(a-s)t} dt$, da cui $g = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}.$

⁽¹⁰⁾ Si ricorda che la regola di integrazione per parti è espressa dalla relazione

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t) g'(t) dt = f(t) g(t) \Big|_{t=t_a}^{t=t_b} - \int_{t_a}^{t_b} f'(t) g(t) dt.$$

Si ottiene

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \begin{cases} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a} & \text{per } n=0, \operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} a, \\ \left. \frac{t^n e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{n}{a-s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{(a-s)t} dt & \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

Per $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} a$ il primo termine a secondo membro nella precedente relazione è nullo e pertanto si può scrivere

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n}{s-a} \mathcal{L}[t^{n-1} e^{at}]; \quad \text{per } n \geq 1.$$

Poiché si è provato che per $n=0$ la trasformata vale $1/(s-a)$, si può impiegare tale relazione ricorrente per dedurre quanto volevasi dimostrare, cioè che è

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \quad (2.94)$$

L'ascissa di convergenza è $\sigma_c = \operatorname{Re} a$.

Si riportano gli enunciati e le dimostrazioni di alcuni teoremi fondamentali sulle trasformate di Laplace. Alcuni di essi sono già stati utilizzati nel corso del presente capitolo.

TEOREMA C2.2.1. (Teorema della trasformata della derivata.) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione⁽¹¹⁾

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0+). \quad (2.95)$$

Dimostrazione È, per definizione,

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Si integra per parti, con le posizioni:

fattore finito $f = f(t)$, quindi $f' = f'(t)$;

fattore differenziale $g dt = e^{-st} dt$, da cui $g = -(1/s)e^{-st}$.

Si ottiene:

$$F(s) = -\frac{1}{s} f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s} \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt.$$

La sostituzione del limite superiore nel primo termine a secondo membro dà luogo a un termine nullo; infatti, dato che si considerano punti s appartenenti al dominio di convergenza di $F(s)$, deve essere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0.$$

Segue quindi la (2.95).

TEOREMA C2.2.2. (Teorema della trasformata dell'integrale.) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s). \quad (2.96)$$

Dimostrazione Si pone

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

⁽¹¹⁾ Naturalmente la validità della relazione (2.95) è limitata ai valori di s per i quali si possono definire entrambe le trasformate, di $f(t)$ e di $f'(t)$. Anche per altri teoremi del presente paragrafo a stretto rigore occorrerebbe specificare limitazioni analoghe. Si ometteranno per non appesantire eccessivamente la trattazione.

per cui risulta

$$g'(t) = f(t), \quad g(0) = 0.$$

Applicando il teorema della derivata alla funzione $g(t)$, si ottiene

$$\mathcal{L}[g'(t)] = s \mathcal{L}[g(t)],$$

da cui segue la (2.96).

TEOREMA C2.2.3. (Teorema del valore finale.) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Nell'ipotesi che $f(t)$, $f'(t)$ presentino ascisse di convergenza non positive e che il $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ esista, vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s). \quad (2.97)$$

Dimostrazione Dal teorema della derivata si ha

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = s F(s) - f(0+),$$

da cui

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0+).$$

Eseguendo il limite sotto il segno di integrale, il che è lecito per l'analiticità della funzione, si ottiene

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0+),$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0+) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0+),$$

da cui segue la (2.97).

TEOREMA C2.2.4. (Teorema del valore iniziale.) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Nell'ipotesi che esista il $\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$, vale la relazione:

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s). \quad (2.98)$$

Dimostrazione La dimostrazione si può condurre analogamente a quella del teorema precedente. Dalla relazione

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) - f(0+),$$

si deduce infatti

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) - f(0+),$$

da cui la (2.98).

TEOREMA C2.2.5. (Teorema della traslazione nel tempo.) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = F(s) e^{-t_0 s}, \quad t_0 \geq 0. \quad (2.99)$$

Dimostrazione Dalla relazione di definizione:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

posto $\tau = t - t_0$, si ha

$$F(s) = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) e^{-s(t - t_0)} dt.$$

Essendo $f(t-t_0)=0$ per $t < t_0$, si può porre uguale a zero il limite inferiore di integrazione. Moltiplicando poi ambo i membri per $e^{-t_0 s}$, si ottiene

$$F(s) e^{-t_0 s} = \int_0^{\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t-t_0)] .$$

TEOREMA C2.2.6. (Teorema della traslazione in s .) Detta $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, a un qualunque numero complesso, vale la relazione:

$$\mathcal{L}[f(t) e^{-at}] = F(s+a) . \quad (2.100)$$

Dimostrazione Dalla relazione di definizione

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt ,$$

in cui z rappresenta una variabile complessa, posto $z = s + a$, si ottiene

$$F(s+a) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt ,$$

che, in virtù della definizione di trasformata di Laplace, equivale alla (2.100).

TEOREMA C2.2.7. (Teorema della trasformata del prodotto integrale.) Dette $F_1(s)$, $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$, $f_2(t)$, entrambe nulle per $t < 0$, vale la relazione:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s) . \quad (2.101)$$

Dimostrazione Indicando con x, y due variabili reali, si ha

$$\begin{aligned} F_1(s) F_2(s) &= \int_0^{\infty} f_1(x) e^{-sx} dx \int_0^{\infty} f_2(y) e^{-sy} dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}_1} e^{-s(x+y)} f_1(x) f_2(y) dx dy , \end{aligned}$$

in cui l'integrale doppio è esteso al dominio $\mathcal{D}_1$ costituito dal primo quadrante del piano x, y (Fig. 2.46a). Si esegue il cambiamento di variabili definito dalla posizione

$$x = \tau , \quad y = t - \tau ,$$

che trasforma il dominio di integrazione in $\mathcal{D}_2$, rappresentato in Fig. 2.46b. Si ha

$$\begin{aligned} F_1(s) F_2(s) &= \iint_{\mathcal{D}_2} e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt . \end{aligned}$$

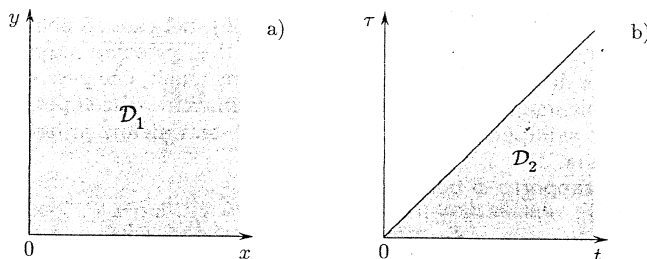


Figura 2.46
Domini di integrazione.

Il limite superiore del secondo integrale si può porre uguale all'infinito, essendo $f_2(t-\tau)=0$ per $\tau > t$. Si è così provata la (2.101).

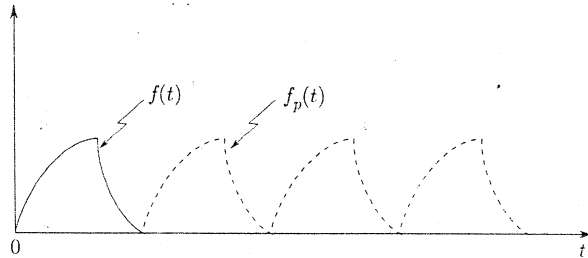
■ **TEOREMA C2.2.8.** (Teorema della trasformata di una funzione periodica.) Sia $f_p(t)$ una funzione periodica di periodo T (cioè tale che sia $f_p(t+nT) = f_p(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $f(t)$ la funzione corrispondente al primo periodo, indicata in Fig. 2.47 e definita dalla relazione:

$$f(t) = \begin{cases} f_p(t) & \text{per } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{per } t > T. \end{cases}$$

Detta $F(s)$ la trasformata di $f(t)$, $F_p(s)$ la trasformata di $f_p(t)$, vale la relazione:

$$F_p(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}. \quad (2.102)$$

Figura 2.47
Funzione periodica.



Dimostrazione Per definizione è

$$F_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f_p(t) e^{-st} dt.$$

Posto $t = nT + \tau$, si deduce

$$F_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} F(s).$$

La serie che moltiplica la trasformata $F(s)$ è, naturalmente, convergente per i valori della variabile complessa compresi entro il semipiano di convergenza della funzione $F_p(s)$. Essa rappresenta una serie geometrica; ricordando che la somma di una serie geometrica è data dalla relazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

si ottiene subito la (2.102).

C2.3. Un procedimento per il calcolo dei coefficienti degli sviluppi in somme di fratti semplici

L'antitrasformazione di una funzione razionale fratta richiede la determinazione dei coefficienti dello sviluppo in somma di fratti semplici, che normalmente si esegue applicando la relazione (2.49), nel caso di poli semplici, o la (2.56), nel caso di poli multipli.

Nel caso di poli multipli, in particolare, il calcolo si presenta alquanto complesso, a causa della necessità di eseguire derivate di funzioni razionali, che possono essere di grado elevato. Una notevole semplificazione si consegue se, durante i calcoli per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo in fratti, si tengono presenti alcune proprietà delle funzioni di variabile complessa.

Si consideri il rapporto di polinomi

$$F(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (2.103)$$

in cui i coefficienti delle potenze più elevate sono unitari. Valgono le seguenti proprietà:

- i) se è $n = m + 1$, la somma dei residui di $F(s)$ è uno;
- ii) se è $n \geq m + 2$, la somma dei residui di $F(s)$ è zero.

Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $F(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

La dimostrazione delle proprietà è immediata, impiegando il noto teorema dei residui, espresso dalla relazione (2.93). La (2.103) si può scrivere

$$F(s) = \frac{s^{n-r} + b_{n-r-1} s^{n-r-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

in cui r è la differenza fra il grado del polinomio a denominatore e quello del polinomio a numeratore. Poiché per $|s|$ tendente all'infinito è $F(s) \simeq s^{-r}$, posto $s = R e^{j\vartheta}$, si ottiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F(R e^{j\vartheta}) = \frac{e^{-jr\vartheta}}{R^r},$$

e quindi l'integrale esteso a una circonferenza con centro nell'origine al tendere del raggio all'infinito vale

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint F(s) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{R^r} \int_0^{2\pi} e^{-jr\vartheta} j e^{j\vartheta} d\vartheta = \begin{cases} 2\pi j & \text{per } r=1, \\ 0 & \text{per } r \geq 2. \end{cases}$$

Applicando il teorema dei residui, si deduce infine

$$\sum_k R_k = 1 \quad \text{per } r=1, \quad \sum_k R_k = 0 \quad \text{per } r \geq 2.$$

Esempi di applicazione

1. Poli semplici:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \frac{C}{s - p_3}.$$

I residui A e B si calcolano applicando la relazione (2.49):

$$A = \frac{p_1 - z_1}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}, \quad B = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)}.$$

Per il calcolo di C non occorre impiegare la (2.49), ma, in base alla proprietà ii, basta porre

$$C = -(A + B).$$

2. Un polo doppio:

$$F(s) = \frac{1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2}.$$

Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}.$$

Applicando la proprietà ii si deduce quindi la relazione $B = -C$.

3. Un polo triplo:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)^3 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^3} + \frac{B}{(s - p_1)^2} + \frac{C}{s - p_1} + \frac{D}{s - p_2}.$$

Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente:

$$A = \frac{p_1 - z_1}{p_1 - p_2}, \quad D = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^3}.$$

Applicando la proprietà ii si deduce che è $C = -D$. Si moltiplicano quindi ambo i membri dello sviluppo per $(s - p_1)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + C + D \frac{s - p_1}{s - p_2} \\ &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{E}{s - p_2}, \end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^2}.$$

Applicando la proprietà ii al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

C2.4. La massima sovraelongazione in casi più generali

Massima sovraelongazione

L'espressione (2.84) della massima sovraelongazione nella risposta al gradino si riferisce al caso di sistemi del secondo ordine privi di zeri. In alcuni casi, ad esempio nel progetto analitico dei regolatori, è necessario riferirsi a sistemi più generali: sistemi del terzo ordine e sistemi del secondo ordine con uno zero. Nel caso di un sistema con due poli complessi, un polo reale e uno zero la risposta al gradino unitario è

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2 (1 + Ts)}{s(1 + \tau s)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) + B e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.104)$$

con

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sqrt{\frac{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}}, \quad B = \frac{\omega_n^2 \tau (T - \tau)}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2},$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2},$$

$$\varphi = \arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2}) + \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}) - \arg(1 - \delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau\sqrt{1 - \delta^2}).$$

La derivata rispetto al tempo è

$$\frac{dy}{dt} = -A e^{-\delta\omega_n t} \omega \cos(\omega t + \varphi) + A \delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) - B \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

e, posta uguale a zero, fornisce l'equazione

$$-\sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \varphi) + \delta \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega_n \tau} \frac{B}{A} e^{(\delta\omega_n - \frac{1}{\tau})t}, \quad (2.105)$$

Istante di massima sovraelongazione

che si può risolvere in t con il metodo di Newton: si ricava così l'istante di massima sovraelongazione T_m che, sostituito nella (2.104), consente la determinazione della corrispondente y_m e quindi di S .

◆ Sistema del secondo ordine con uno zero

Nel caso particolare in cui sia $\tau = 0$ (sistema del secondo ordine con uno zero) dalla (2.105) si ottiene

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta},$$

da cui, ricordando l'espressione di φ , si deduce

$$\omega T_m = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} T_m = \pi - \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}),$$

e quindi

$$y_m = 1 + \sqrt{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2} e^{-\frac{\Phi\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}, \quad (2.106)$$

con

$$\Phi = \pi - \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}). \quad (2.107)$$

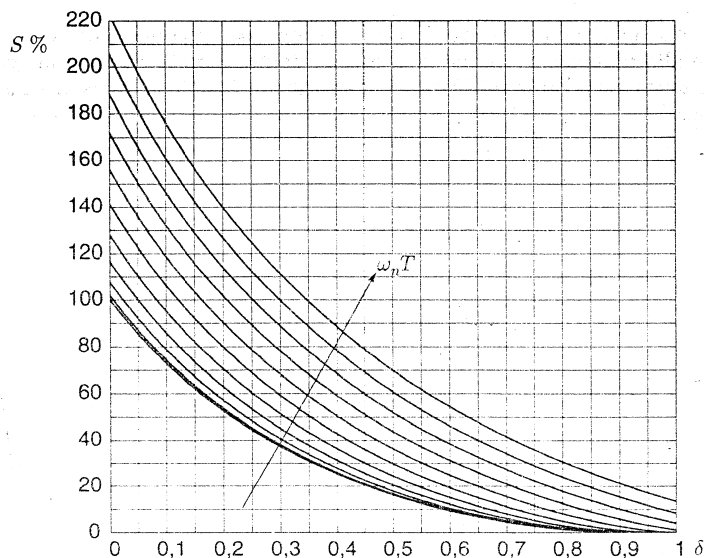
Sottoelongazione

Nel caso in cui sia $T < 0$ nella risposta al gradino è presente una sottoelongazione, dovuta al fatto che essa presenta la derivata negativa all'istante iniziale. Il valore della sottoelongazione è dato dalle relazioni

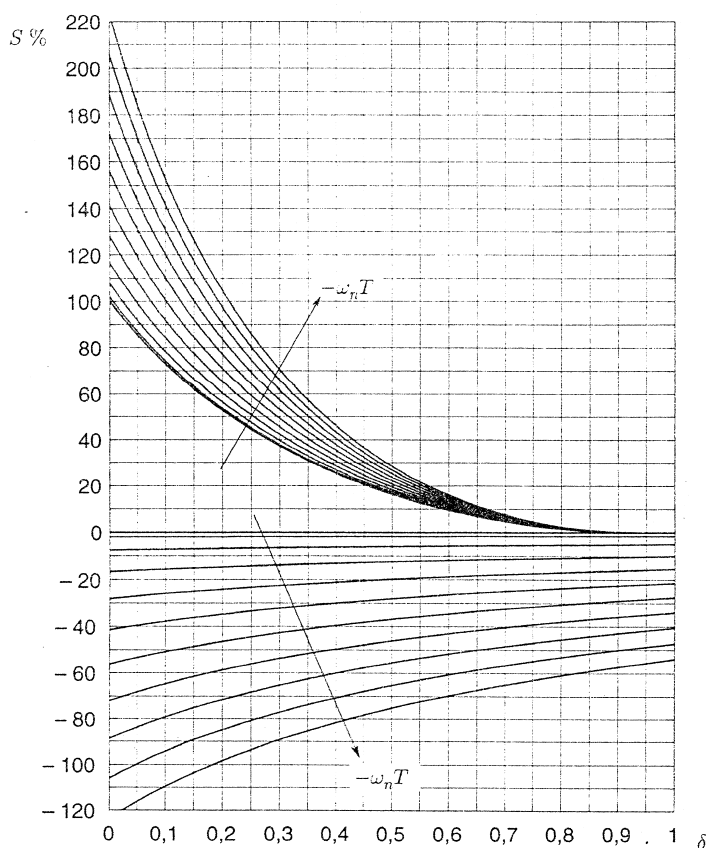
$$y_{min} = 1 - \sqrt{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2} e^{-\frac{\Phi\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}, \quad (2.108)$$

con

$$\Phi = -\arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}). \quad (2.109)$$

**Figura 2.48**

Legami fra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione per un sistema del secondo ordine con uno zero negativo. I grafici si riferiscono a valori $\omega_n T$ compresi fra 0 e 2 con incrementi di 0,2.

**Figura 2.49**

Legami fra il coefficiente di smorzamento, la massima sovraelongazione e la massima sottoelongazione per un sistema del secondo ordine con uno zero positivo. I grafici si riferiscono a valori di $-\omega_n T$ compresi fra 0 e 2 con incrementi di 0,2.

I grafici di Fig. 2.48 e 2.49, ricavati utilizzando le precedenti relazioni, estendono quello di Fig. 2.30 al caso in cui sia presente uno zero negativo e a quello in cui sia presente uno zero positivo. In questo secondo caso, come si vedrà al Paragrafo 3.4, il sistema si dice a *fase non minima*.

È facile rendersi conto della presenza della sottoelongazione per $T < 0$: si può scrivere infatti

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2 (1 + Ts)}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{T\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \right],
 \end{aligned}$$

Sistema a fase non minima

da cui risulta che la risposta al gradino del sistema del secondo ordine con uno zero corrispondente alla costante di tempo T si ottiene sommando la risposta al gradino dello stesso sistema senza zeri con la derivata di quest'ultima (cioè con la risposta all'impulso) moltiplicata per T .

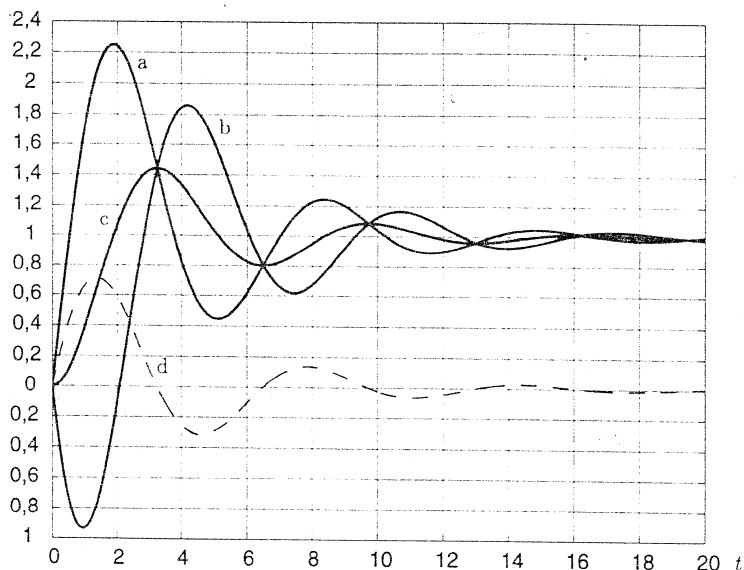
A titolo di esempio, in Fig. 2.50 si mostra che le risposte al gradino dei sistemi del secondo ordine

$$G_1(s) = \frac{1+2s}{s^2+0,5s+1} \quad \text{e} \quad G_2(s) = \frac{1-2s}{s^2+0,5s+1}$$

(grafici a e b) si ottengono sommando il grafico c, relativo alla risposta al gradino del sistema privo di zeri, con il grafico d, relativo alla risposta all'impulso del sistema privo di zeri, moltiplicato per T (e quindi sottratto nel secondo caso).

Figura 2.50

Risposta al gradino del sistema del secondo ordine con uno zero ottenuta sommando la risposta all'impulso moltiplicata per T .



C2.5. Esercizi

C2.5.1 Determinare il grafo di flusso di segnale del motore in c.c. pilotato in armatura e con eccitazione costante rappresentato in Fig. 2.51a, assumendo come segnali sorgente la tensione d'armatura e la coppia resistente, come segnale dipendente la posizione angolare del rotore. Si considerino nulli le condizioni iniziali (velocità e posizione angolare del rotore), l'induttanza d'armatura e l'attrito.

Soluzione Alle note equazioni

$$V_a = R_a I_a + K_a \Omega, \quad K_c I_a = J s \Omega + C_r, \quad \theta = \frac{\Omega}{s},$$

corrisponde il grafo di Fig. 2.51b, che si può ridurre alla forma minima di Fig. 2.51c, in cui è

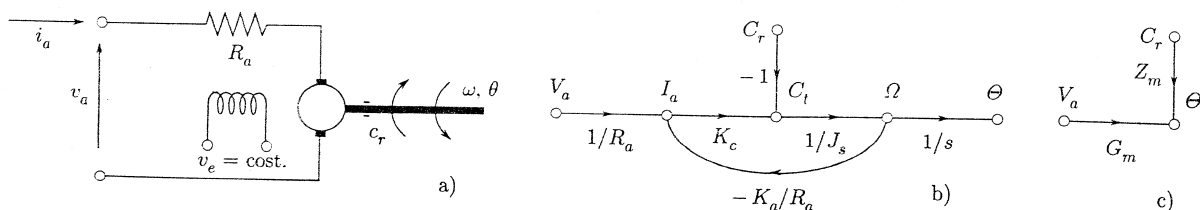
$$G_m = \frac{1/K_a}{s(1+T_m s)},$$

$$Z_m = \frac{-R_a/(K_c K_a)}{s(1+T_m s)},$$

$$T_m = \frac{R_a J}{K_c K_a}.$$

Figura 2.51

Motore in c.c., relativo grafo di flusso di segnale e grafo in forma minima.

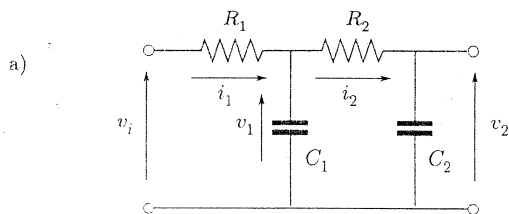


C2.5.2 Determinare un grafo di flusso di segnale che rappresenti la rete di resistenze e capacità di Fig. 2.52a, mostrando come le condizioni iniziali si possano rappresentare con altrettanti nodi sorgente.

Soluzione Le equazioni della rete sono

$$I_1 = \frac{1}{R_1} V_i - \frac{1}{R_1} V_1, \quad V_1 = \frac{V_{01}}{s} + \frac{1}{C_1 s} I_1 - \frac{1}{C_1 s} I_2,$$

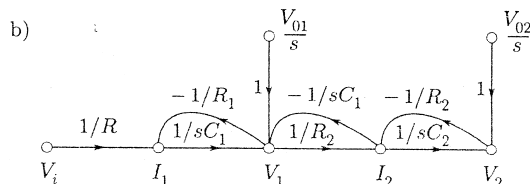
$$I_2 = \frac{1}{R_2} V_1 - \frac{1}{R_2} V_2, \quad V_2 = \frac{V_{02}}{s} + \frac{1}{C_2 s} I_2.$$



Ad esse corrisponde il grafo rappresentato in Fig. 2.52b.

Figura 2.52

Rete elettrica e relativo grafo di flusso di segnale.

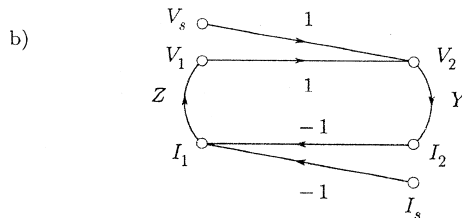
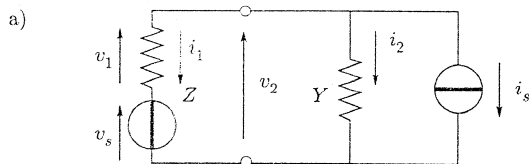


C2.5.3 Determinare un grafo di flusso di segnale che descriva la rete elettrica rappresentata in Fig. 2.53a.

Soluzione Una possibile soluzione è indicata in Fig. 2.53b.

Figura 2.53

Rete elettrica e relativo grafo di flusso di segnale.



C2.5.4 Determinare la trasformata di Laplace della funzione periodica di Fig. 2.54.

Soluzione Si consideri la funzione $f_1(t)$ definita dalla relazione

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{per } 0 \leq t < 4, \\ 0 & \text{per } t \geq 4. \end{cases}$$

Si noti che è

$$f_1(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-4),$$

per cui si ha

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1}{s} (1 - 2e^{-s} + e^{-4s}),$$

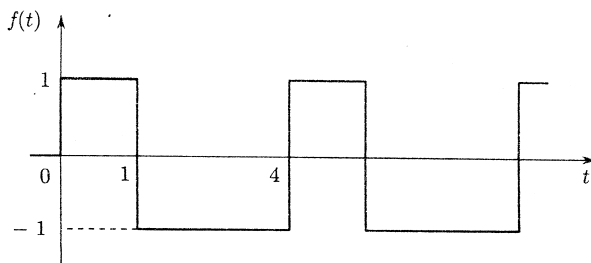
e, applicando il precedente Teorema C2.2.8 sulla trasfor-

mata di una funzione periodica,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{-4s})}.$$

Figura 2.54

Funzione periodica.



C2.5.5 Determinare la trasformata di Laplace della funzione periodica di Fig. 2.55.

Soluzione Si noti che la funzione

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{per } 0 \leq \omega t < \pi, \\ 0 & \text{per } \omega t \geq \pi, \end{cases}$$

che rappresenta un periodo della $f(t)$, può scomporsi nella somma delle due funzioni

$$\sin \omega t \quad \text{e} \quad \sin \omega(t - \pi/\omega),$$

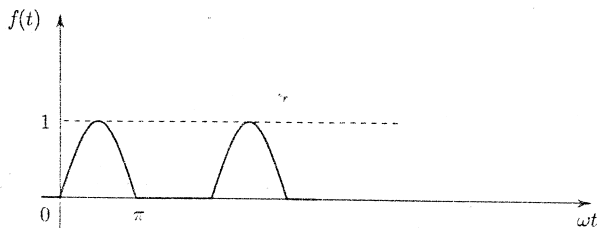
per cui è

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}),$$

e quindi

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s})}.$$

Figura 2.55
Funzione periodica.

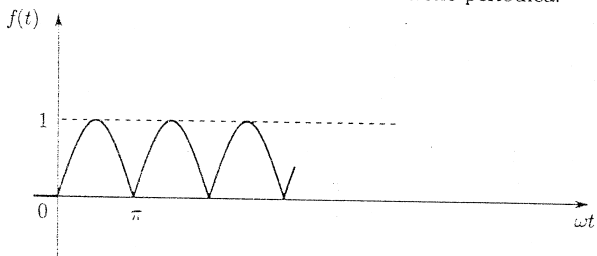


C2.5.6 Determinare la trasformata di Laplace della funzione periodica di Fig. 2.56.

Soluzione Con passaggi analoghi a quelli svolti nel caso dell'esercizio precedente si ottiene

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega}.$$

Figura 2.56
Funzione periodica.



C2.5.7 Mostrare che, data la generica funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

con $m \leq n$, in cui, senza ledere la generalità, si è assunto unitario il coefficiente del termine di grado più elevato a denominatore, si può realizzare un corrispondente sistema interconnettendo, attraverso giunzioni sommanti, blocchi lineari algebrici (caratterizzati da una costante di trasferimento reale positiva o negativa) e integratori (caratterizzati dalla funzione di trasferimento elementare s^{-1}). I sistemi così ottenuti si dicono *realizzazioni*

della $G(s)$.

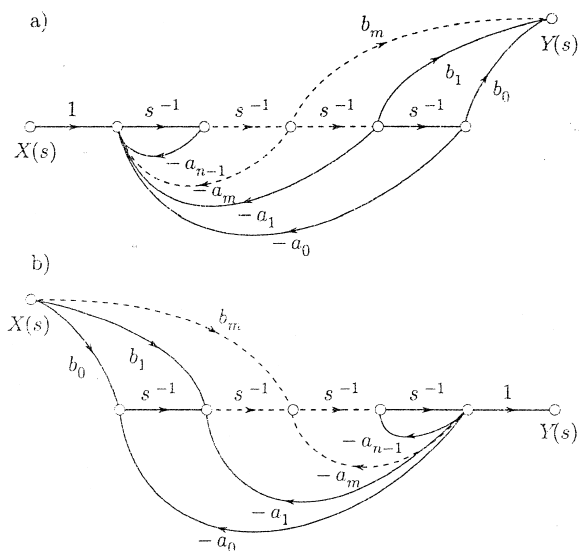
Soluzione Due possibili realizzazioni per il caso $m < n$ sono rappresentate in Fig. 2.57: applicando la formula di Mason si verifica immediatamente che ai due grafi di flusso di segnale corrisponde la funzione di trasferimento data. Dai grafi si possono dedurre schemi a blocchi equivalenti aventi la struttura descritta nell'enunciato⁽¹²⁾.

Un diverso tipo di realizzazione, detta *parallela*, si basa sullo sviluppo della $G(s)$ in somma di fratti semplici. Essa è costituita da blocchi in parallelo, uno per ciascun polo reale o coppia di poli complessi. Ogni blocco consiste in una catena di elementi di lunghezza pari all'ordine di molteplicità del polo reale o della coppia di poli complessi; ogni elemento comprende uno o due integratori.

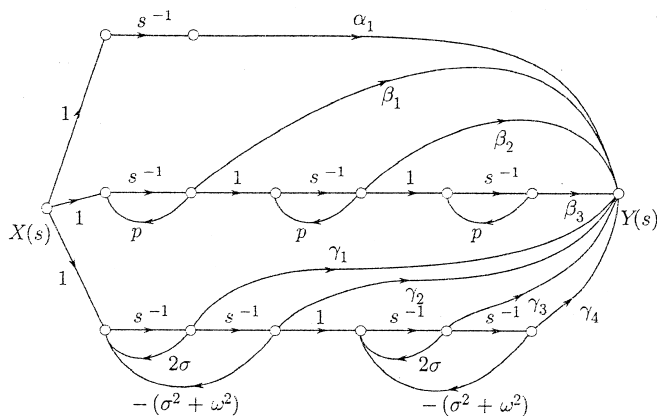
⁽¹²⁾ Nel caso in cui sia $m = n$ (frazione non strettamente propria), $G(s)$ è scomponibile nella somma di un termine costante più una frazione strettamente propria: i grafi di flusso di segnale presentano pertanto un ulteriore ramo che collega direttamente il nodo di ingresso a quello di uscita.

Figura 2.57

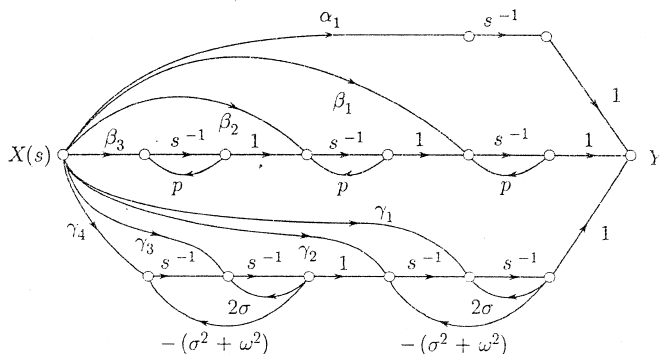
Grafi di flusso di segnale di due possibili realizzazioni della funzione di trasferimento data.

**Figura 2.58**

Grafo di flusso di segnale relativo ad una realizzazione parallela riferita all'ingresso.

**Figura 2.59**

Grafo di flusso di segnale relativo ad una realizzazione parallela riferita all'uscita.



Ad esempio, in Fig. 2.58 è riportata una realizzazione parallela riferita all'ingresso (cioè in cui le varie catene che si riferiscono ai poli multipli si originano nell'ingresso) di una funzione di trasferimento che presenta un polo nell'origine, un polo reale triplo p e una coppia di poli complessi doppi $\sigma \pm j\omega$. I valori dei coefficienti α_i , β_i ($i = 1, \dots, 3$) e γ_i ($i = 1, \dots, 4$) si determinano, a partire dallo sviluppo in somma di fratti semplici, applicando la condizione di identità dei polinomi a numeratore delle funzioni di trasferimento relative ad ogni singola catena. La realizzazione riferita all'uscita (cioè in cui le varie catene che si riferiscono ai poli multipli convergono nell'uscita) della stessa funzione di trasferimento è riportata in Fig. 2.59. È immediato verificare con la formula di Mason che le due realizzazioni sono equivalenti.

I grafi di flusso costituiscono una valida base per la costruzione di circuiti analogici elettrici, in cui gli integratori e i sommatore sono realizzati con amplificatori operazionali, che riproducano funzioni di trasferimento del tutto generiche. In questo contesto la realizzazione parallela risulta in genere preferibile perché più robusta in relazione alla stabilità, essendo i suoi poli più direttamente legati ai valori dei coefficienti.

Capitolo 3

Analisi armonica

Nel capitolo precedente si sono presentati procedimenti per la soluzione delle equazioni differenziali lineari, ponendo in particolare rilievo quelli basati sulla trasformazione di Laplace: obiettivo dello studio era la deduzione della risposta dei sistemi lineari ad eccitazioni tipiche, come il gradino, o, più generalmente, a qualunque segnale di ingresso. Tale procedura di analisi viene comunemente detta analisi nel dominio del tempo. Ad essa nello studio dei sistemi di controllo lineari si affianca l'analisi nel dominio della frequenza o analisi armonica, che si basa su un diverso modello matematico dei sistemi lineari, la funzione di risposta armonica. La funzione di risposta armonica costituisce una rappresentazione dei sistemi lineari stazionari strettamente legata alla funzione di trasferimento e pertanto equivalente alle equazioni differenziali qualora si considerino sistemi inizialmente in quiete, ma spesso più vantaggiosa per alcune sue caratteristiche, principale fra le quali è l'attitudine ad essere rilevata sperimentalmente: in altri termini la funzione di risposta armonica rappresenta, rispetto all'equazione differenziale, un modello matematico di più agevole "identificazione" a partire da dati sperimentali. In questo capitolo verranno analizzate le proprietà delle funzioni di risposta armonica dei sistemi del primo e del secondo ordine e verranno presentati metodi per la deduzione e la rappresentazione delle funzioni di risposta armonica più generali, come i diagrammi di Bode, i diagrammi polari e quelli di Nichols, metodi che rivestono un ruolo fondamentale nella progettazione dei dispositivi per modificare e migliorare il comportamento dinamico dei sistemi in retroazione.

3.1. La funzione di risposta armonica

La definizione della funzione di risposta armonica si fonda su una proprietà caratteristica dei sistemi lineari stazionari: se si applica a un sistema lineare stazionario asintoticamente stabile il segnale di ingresso

$$x(t) = X \sin \omega t, \quad (3.1)$$

esaurito il transitorio, cioè in condizione di regime stazionario periodico, l'uscita varia pure con legge sinusoidale caratterizzata dalla stessa pulsazione ω e può pertanto essere espressa con la relazione

$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)), \quad (3.2)$$

in cui si è posto in rilievo come l'ampiezza dell'uscita e l'angolo di fase

rispetto all'ingresso siano in generale funzioni della pulsazione ω del segnale di ingresso applicato.

Funzione di
risposta armonica

Si definisce *funzione di risposta armonica* la funzione $F(\omega)$, di variabile reale e a valori complessi, avente come modulo il rapporto $Y(\omega)/X$ e come argomento l'angolo $\varphi(\omega)$, cioè

$$F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)) . \quad (3.3)$$

Tale funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente da X ; essa descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio $0 \leq \omega < \infty$.

In relazione alla funzione di risposta armonica vale il seguente teorema, presentato, per semplicità, con riferimento ai sistemi con funzione di trasferimento razionale fratta, ma di validità più generale.

TEOREMA 3.1.1 (regime sinusoidale dei sistemi lineari stazionari). Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente i poli a parte reale negativa soggetto ad eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ dalla relazione $F(\omega) = G(j\omega)$.

Dimostrazione Avendo i poli a parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile, cioè la sua risposta ad ogni perturbazione tende ad annullarsi per t tendente all'infinito. La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $x(t) = X \sin \omega t$ è

$$X(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} , \quad (3.4)$$

mentre quella del segnale di uscita, a partire da una condizione iniziale di quiete, è data dalla relazione

$$Y(s) = G(s) X(s) = G(s) \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{X\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} . \quad (3.5)$$

I poli della funzione a secondo membro della (3.5) sono gli stessi della funzione di trasferimento $G(s)$, più quelli corrispondenti al segnale di ingresso, che sono $p_1 = j\omega$ e $p_2 = -j\omega$. Nell'antitrasformata i primi corrispondono a un termine transitorio $y_0(t)$ e gli altri a un termine permanente $y_p(t)$ che, come si verificherà tra breve, è sinusoidale. Si può scrivere pertanto

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t} , \quad (3.6)$$

in cui K_1 è il residuo corrispondente al polo p_1 precedentemente definito, K_2 quello corrispondente a p_2 . Essi si possono calcolare con la relazione (2.49), ottenendo

$$K_1 = G(s) \frac{X\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = \frac{X}{2j} G(j\omega) ,$$

$$K_2 = G(s) \frac{X\omega}{s - j\omega} \Big|_{s=-j\omega} = \frac{-X}{2j} G(-j\omega) .$$

Poiché una generica trasformata di Laplace soddisfa la relazione $F(s^*) = F^*(s)$, si può scrivere

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} , \quad G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} ,$$

in cui $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$. Data l'ipotesi di stabilità asintotica, per t sufficientemente elevato si può trascurare il termine transitorio nella (3.6) ottenendo

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq y_p(t) = |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} = \\ &= |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi(\omega)) , \end{aligned} \quad (3.7)$$

relazione che, in base alla definizione di funzione di risposta armonica, prova il teorema. 

La funzione di risposta armonica si può definire anche per sistemi instabili: basta prescindere dal termine transitorio nell'espressione dell'uscita (3.6). Essa si può determinare sperimentalmente anche quando il sistema sia instabile utilizzando una retroazione stabilizzante.

Dato che la risposta all'impulso e la funzione di trasferimento si corrispondono biunivocamente attraverso le operazioni di trasformazione e anti-trasformazione secondo Laplace, si conclude che:

La risposta all'impulso di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica.

Inoltre, poiché tutti i poli di un sistema lineare asintoticamente stabile si trovano nel semipiano sinistro del piano complesso, l'ascissa di assoluta convergenza della funzione di trasferimento è non positiva e quindi l'integrale di inversione (2.13), eseguito con $\sigma_0 = 0$, esiste ed è uguale a $g(t)$. Poiché la relazione $G(-j\omega) = G^*(j\omega)$ permette di estendere la definizione della funzione di risposta armonica alle pulsazioni negative, è possibile il calcolo dell'integrale (2.13). Si ha pertanto:

La risposta armonica di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso.

3.2. Deduzione della risposta armonica dalla risposta all'impulso e viceversa

Si è precedentemente notato che in un sistema asintoticamente stabile (in cui l'ascissa di convergenza della funzione di trasferimento è negativa) le relazioni (2.12) e (2.13) si possono applicare rispettivamente alla risposta all'impulso $g(t)$ e alla funzione di trasferimento $G(s)$ ponendo $s = j\omega$. Si ottengono così le relazioni

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.8)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.9)$$

Le (3.8) e (3.9) sono le espressioni che definiscono la *trasformata* e l'*anti-trasformata di Fourier* rispettivamente delle funzioni $g(t)$ e $G(j\omega)$.

La funzione fornita dall'integrale (3.8) è complessa: indicandone con $R(\omega)$ e $I(\omega)$ le parti reale e immaginaria, si può scrivere

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \cos \omega t dt, \quad (3.10)$$

$$I(\omega) = - \int_0^{\infty} g(t) \sin \omega t dt : \quad (3.11)$$

il calcolo dell'integrale (3.8) si può pertanto ricondurre a quello di due integrali reali.

L'integrale (3.9) ha invece come argomento una funzione complessa, ma si può facilmente ricondurre a un integrale di funzione reale usando la

*Trasformata e
antitrasformata
di Fourier*

proprietà $G(-j\omega) = G^*(j\omega)$. Infatti vale la relazione

$$\begin{aligned} G(j\omega) e^{j\omega t} &= (R(\omega) + j I(\omega)) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= R(\omega) \cos \omega t - I(\omega) \sin \omega t + j (R(\omega) \sin \omega t + I(\omega) \cos \omega t) . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si noti che $R(\omega)$ è una funzione pari, cioè che per ogni ω è $R(\omega) = R(-\omega)$, mentre $I(\omega)$ è una funzione dispari, cioè per ogni ω è $I(\omega) = -I(-\omega)$; $\sin \omega t$ è una funzione dispari, $\cos \omega t$ una funzione pari. Si verifica facilmente che il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è una funzione pari, mentre il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è una funzione dispari.

L'integrale esteso da $-\infty$ a $+\infty$ di una funzione pari è uguale al doppio dell'integrale esteso da 0 a $+\infty$ della stessa funzione; l'integrale esteso da $-\infty$ a $+\infty$ di una funzione dispari è nullo.

Sulla scorta di tali osservazioni la (3.9), tenendo conto della (3.12), si può scrivere

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \left(2 \int_0^\infty R(\omega) \cos \omega t d\omega - 2 \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega t d\omega \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (R(\omega) \cos \omega t - I(\omega) \sin \omega t) d\omega . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Essendo $g(\tau)$ una funzione nulla per $\tau < 0$, deve essere

$$\int_0^\infty R(\omega) \cos \omega(-\tau) d\omega = \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega(-\tau) d\omega \quad \text{per ogni } \tau > 0 ,$$

cioè

$$\int_0^\infty R(\omega) \cos \omega \tau d\omega = - \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega \tau d\omega \quad \text{per ogni } \tau > 0 ,$$

e, sostituendo nella (3.13),

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega t d\omega . \quad (3.14)$$

Le relazioni (3.14) mostrano come si possa calcolare la risposta all'impulso $g(t)$ eseguendo integrali di funzioni reali, in cui è coinvolta la sola parte reale o la sola parte immaginaria della funzione $G(j\omega)$.

Se sono disponibili il modulo $M(\omega)$ e l'argomento $\varphi(\omega)$ di $G(j\omega)$, anziché le parti reale e immaginaria, si possono operare negli integrali delle (3.14) le sostituzioni

$$R(\omega) = M(\omega) \cos \varphi(\omega) , \quad I(\omega) = M(\omega) \sin \varphi(\omega) .$$

Il calcolo degli integrali si può effettuare, a partire da tabulazioni delle funzioni, mediante procedimenti di quadratura numerica utilizzando un calcolatore elettronico.

Le relazioni (3.14) rivestono particolare interesse, in quanto la funzione di risposta all'impulso, che costituisce una conveniente caratterizzazione del comportamento dinamico del sistema, vi viene dedotta dalla funzione di risposta armonica, di più agevole rilevazione sperimentale.

3.3. Diagrammi di Bode

La rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica viene effettuata con speciali diagrammi, che costituiscono la base dei procedimenti grafici per la sintesi delle reti correttrici nel dominio delle frequenze.

Fra questi sono di largo impiego i *diagrammi di Bode* o *diagrammi logaritmici di risposta armonica*: essendo la funzione di risposta armonica a valori complessi, si impiegano due diversi diagrammi, uno dei quali (detto *diagramma delle ampiezze* o *dei moduli* o *diagramma α*) riporta il logaritmo del modulo della risposta armonica in funzione del logaritmo della pulsazione ω e l'altro (detto *diagramma delle fasi* o *degli argomenti* o *diagramma β*) riporta l'argomento della risposta armonica, sempre in funzione del logaritmo della pulsazione ω .

I logaritmi normalmente si assumono naturali: com'è noto, un cambiamento di base non equivale che a un cambiamento di scala. Ricordando la definizione del logaritmo naturale di un numero complesso, si può affermare anche che i diagrammi α e β rappresentano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del logaritmo naturale della risposta armonica in funzione del logaritmo naturale della pulsazione ω .

Diagrammi:
delle ampiezze
dei moduli
alfa
delle fasi
degli argomenti
beta

ESEMPIO 3.3.1 Nella Figura 3.1 sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{100 \left(1 + j \frac{\omega}{80}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{10}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{1000}\right)}$$

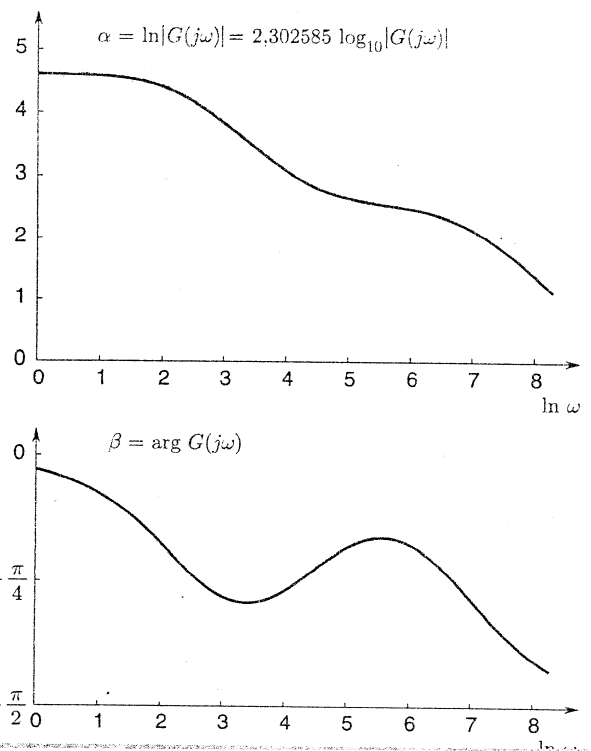


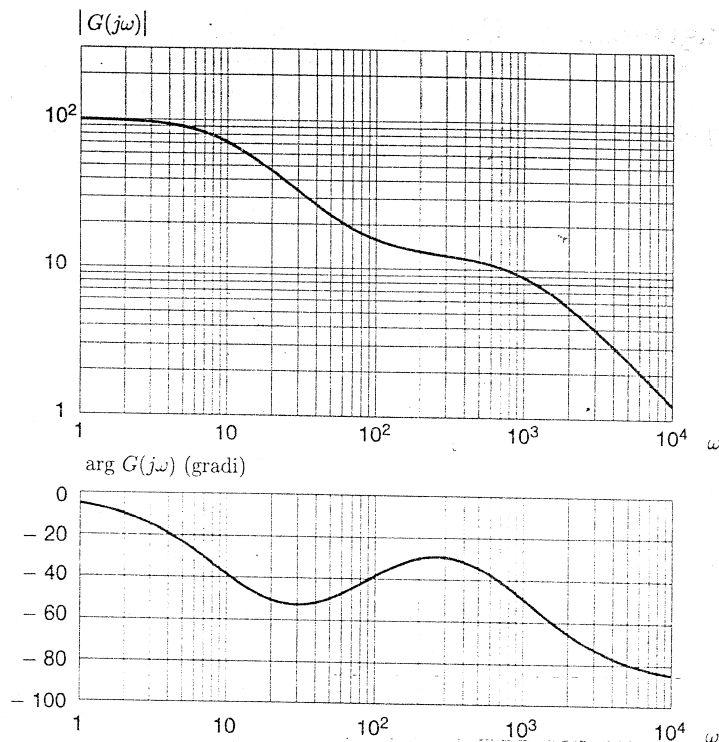
Figura 3.1
Diagrammi di Bode.

Spesso si usa carta con scala logaritmica che, pur fornendo un'identica rappresentazione della risposta armonica, consente un più agevole tracciamento dei diagrammi: in particolare si può usare carta con doppia scala logaritmica per le ampiezze e carta semilogaritmica per le fasi, come è indicato in Fig. 3.2, oppure carta semilogaritmica sia per le ampiezze sia per le fasi, come è indicato in Fig. 3.3: in questo secondo caso la scala delle ampiezze è graduata in decibel. Il *decibel* è un'unità logaritmica convenzionale che

Decibel

Figura 3.2

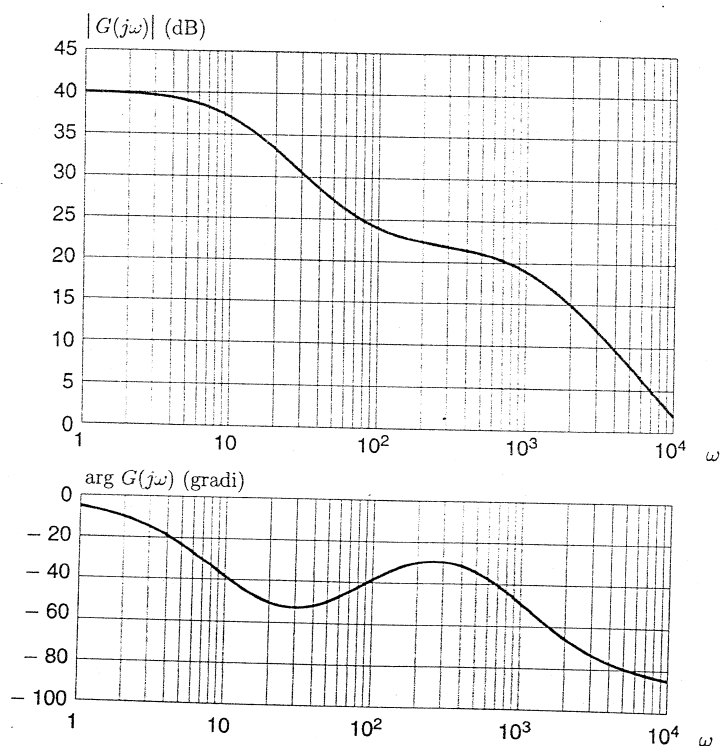
Diagrammi di Bode in scala logaritmica e semi-logaritmica.



normalmente si impiega per esprimere il guadagno di amplificatori (quindi una grandezza adimensionale). Un amplificatore di guadagno A (rapporto fra l'ampiezza del segnale di uscita e l'ampiezza del segnale di ingresso) si dice anche che ha un guadagno di B dB, con $B = 20 \log_{10} A$. La fase si può riportare in gradi o in radianti.

Figura 3.3

Uso di carta semilogaritmica per entrambi i diagrammi di Bode.



Per eseguire la conversione in decibel e viceversa, risulta utile il grafico riportato in Fig. 3.4, che si può rapidamente costruire nelle dimensioni più convenienti utilizzando un foglio di carta semilogaritmica. Esprimendo la quantità A mediante la cosiddetta notazione scientifica, si scrive

$$A = r \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq r < 10 ;$$

la medesima quantità in decibel è espressa dal numero

$$B = 20n + s \text{ dB} \quad \text{con } 0 \leq s < 20 ,$$

in cui s si ricava mediante il diagramma di Fig. 3.4. Il procedimento si può invertire, cosicché lo stesso diagramma si può impiegare per il passaggio inverso.

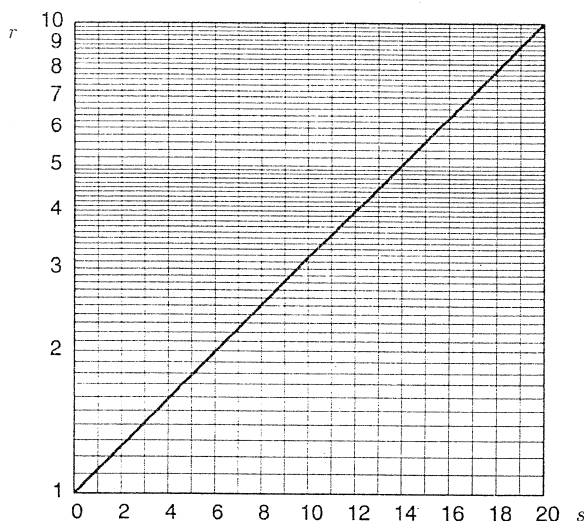


Figura 3.4

Diagramma per la conversione in decibel.

Nello studio dei controlli automatici si impiegano talvolta diagrammi logaritmici graduati in decibel anche per funzioni di risposta armonica relative a grandezze non adimensionali, come il rapporto fra uscita e ingresso di trasduttori o di attuatori: ciò è ovviamente possibile, dato che il termine “decibel” non indica un’unità di misura, ma costituisce semplicemente il riferimento ad una scala logaritmica convenzionale. In questi casi bisognerà specificare l’unità di misura, oltre a rendere noto che la scala è data in decibel.

I vantaggi che si conseguono impiegando la scala logaritmica sono:

- i) possibilità di rappresentare col dovuto dettaglio grandezze che variano in campi notevolmente estesi;
- ii) possibilità di sommare i diagrammi relativi a sistemi in cascata, per ottenere il diagramma del sistema complessivo: infatti la risposta armonica complessiva si ottiene eseguendo il prodotto delle singole risposte armoniche, cioè eseguendo il prodotto delle ampiezze (che, impiegando una scala logaritmica, si riconduce ad una somma) e la somma delle fasi;
- iii) possibilità di costruire i diagrammi relativi ad una funzione di risposta armonica data in forma fattorizzata come somma di diagrammi elementari, di un numero limitato di tipi fondamentali, corrispondente ciascuno ad un singolo fattore.

● Forma polinomiale

Si prenderà in esame ora, in particolare, quest'ultimo punto. Si considera una generica funzione di trasferimento in *forma polinomiale*

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^\gamma (s^{n-\gamma} + a_{n-1}s^{n-\gamma-1} + \dots + a_{\gamma+1}s + a_\gamma)}, \quad (3.15)$$

● Forma fattorizzata

che si può scrivere anche, in *forma fattorizzata*,

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^\gamma (s - p_{\gamma+1})(s - p_{\gamma+2}) \dots (s - p_n)}. \quad (3.16)$$

Nelle (3.15) e (3.16) il fattore s^γ corrisponde ad un eventuale polo nell'origine avente ordine di molteplicità γ : se la funzione di trasferimento non presenta poli nell'origine, è $\gamma = 0$.

Nei casi di interesse nell'ambito dei controlli automatici, in cui le funzioni di risposta armonica si riferiscono a catene chiuse in retroazione, l'amplificazione comprende di regola la frequenza zero, cioè la frequenza zero o componente continua rientra nella banda passante della catena, per cui si esclude la presenza di uno zero nell'origine.

Moltiplicando fra loro i fattori corrispondenti a coppie di zeri e poli complessi coniugati, in modo che i coefficienti risultino tutti reali, e operando opportune posizioni, la (3.16) si può scrivere nella forma

$$G(s) = K_1 \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots \left(s^2 + 2\delta'_1 \omega'_{n1} s + \omega'^2_{n1}\right) \left(s^2 + 2\delta'_2 \omega'_{n2} s + \omega'^2_{n2}\right) \dots}{s^\gamma \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots \left(s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + \omega^2_{n1}\right) \left(s^2 + 2\delta_2 \omega_{n2} s + \omega^2_{n2}\right) \dots}, \quad (3.17)$$

Forma con costanti di tempo

che equivale alla *forma con costanti di tempo*

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta'_2 \frac{s}{\omega'_{n2}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n2}}\right) \dots}{s^\gamma (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n2}}\right) \dots}, \quad (3.18)$$

in cui è

$$K = K_1 \frac{\tau_1 \tau_2 \dots \omega'^2_{n1} \omega'^2_{n2} \dots}{\tau'_1 \tau'_2 \dots \omega^2_{n1} \omega^2_{n2} \dots}. \quad (3.19)$$

Ponendo $s = j\omega$, si ottiene la seguente espressione della funzione di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento (3.15):

$$G(j\omega) = \frac{K (1 + j\omega\tau'_1)(1 + j\omega\tau'_2) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta'_2 \frac{j\omega}{\omega'_{n2}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n2}}\right) \dots}{(j\omega)^\gamma (1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}} - \frac{\omega^2}{\omega^2_{n2}}\right) \dots}. \quad (3.20)$$

Costante di guadagno
Guadagno statico
Costante di velocità
Costante di accelerazione

La costante K è detta *costante di guadagno*; quando è $\gamma = 0$ essa rappresenta il *guadagno statico*, cioè il valore della funzione di risposta armonica per $\omega = 0$. Per $\gamma = 1$ e per $\gamma = 2$ la costante K si dice anche rispettivamente *costante di velocità* e *costante di accelerazione*.

Se si tracciano i diagrammi di Bode, delle ampiezze e delle fasi, corrispondenti a funzioni elementari dei tipi

$$K, \quad (3.21)$$

$$(j\omega)^{-\gamma}, \quad (3.22)$$

$$(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}, \quad (3.23)$$

$$\left(1 + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}, \quad (3.24)$$

è possibile, sommandoli, ottenere il diagramma di Bode della funzione (3.20).

◆ Diagrammi di Bode delle funzioni elementari

Si considereranno ora separatamente i diversi termini tipici.

1. $G(j\omega) = K$

Se la costante K è positiva, i diagrammi di Bode ad essa relativi hanno l'andamento rappresentato in Fig. 3.5 (il diagramma delle fasi è identicamente nullo). Se invece la costante K è negativa, cambia il diagramma delle fasi, che in questo caso è identicamente uguale a $-\pi$.

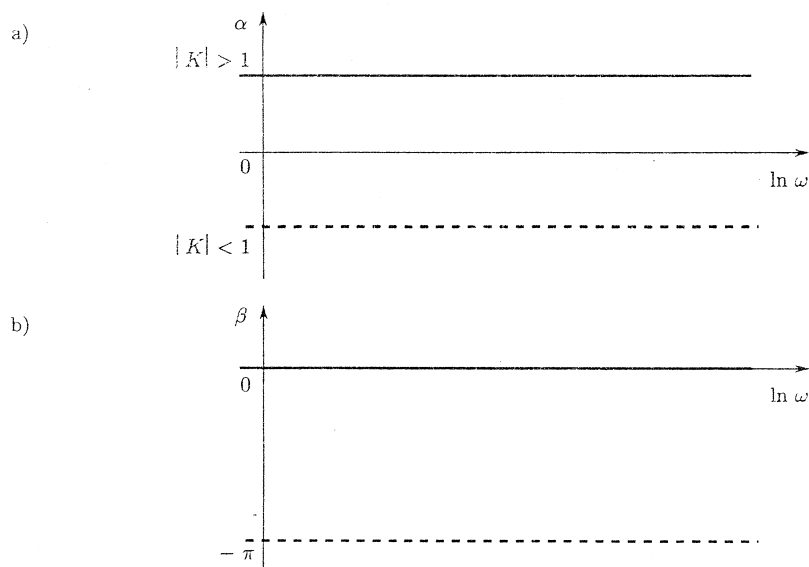


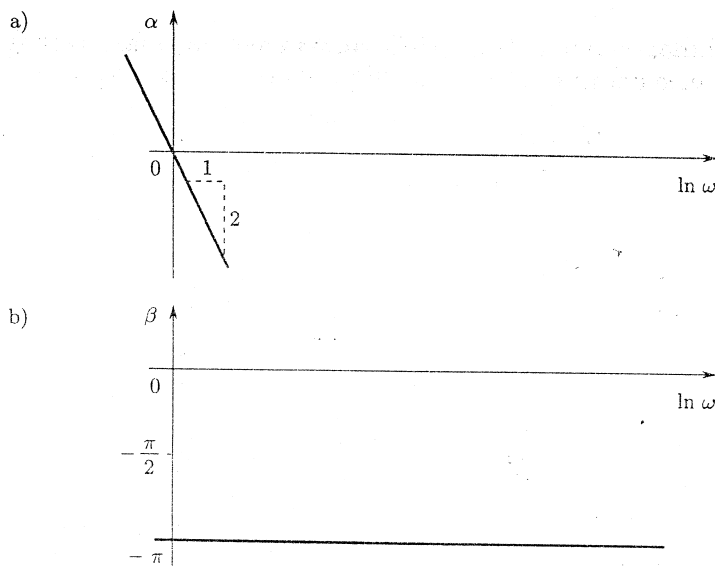
Figura 3.5
Diagrammi di Bode del
termine K .

2. $G(j\omega) = (j\omega)^{-\gamma}$

Essendo

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\omega^\gamma} - j\gamma \frac{\pi}{2} = -\gamma \ln \omega - j\gamma \frac{\pi}{2},$$

i diagrammi di Bode hanno l'andamento rappresentato in Fig. 3.6, che si riferisce al caso particolare di $\gamma=2$. Si noti che, per qualunque generico valore di γ , il diagramma delle ampiezze è dato da una retta passante per l'origine di inclinazione $-\gamma$, mentre il diagramma delle fasi è identicamente uguale a $-\gamma\pi/2$.

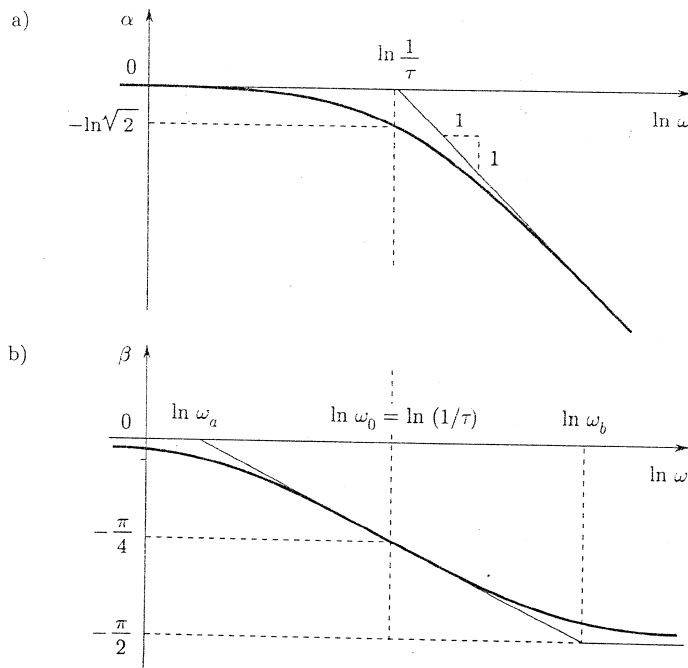
Figura 3.6Diagrammi di Bode del termine $(j\omega)^{-2}$.

$$3. G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$$

Si considera dapprima il caso di $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$. Si ha

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} + j(-\arctan \omega\tau) :$$

i corrispondenti diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 3.7.

Figura 3.7Diagrammi di Bode del termine $(1 + j\omega\tau)^{-1}$.

È molto utile, per le costruzioni grafiche, impiegare diagrammi di Bode approssimati a forma di spezzata. Per il diagramma delle ampiezze, rappresentato in Fig. 3.7a, si impiega correntemente l'approssimazione asintotica (cioè data dalla spezzata costituita dai due asintoti cui tende il diagramma reale per ω tendente a zero e per ω tendente all'infinito), che si giustifica con le seguenti considerazioni.

Per $\omega \ll 1/\tau$, trascurando il termine $\omega^2 \tau^2$ rispetto all'unità, si ottiene $\alpha \simeq 0$, cioè il diagramma viene a coincidere praticamente con l'asse delle ascisse.

Per $\omega \gg 1/\tau$, trascurando l'unità rispetto al termine $\omega^2 \tau^2$, si ottiene

$$\alpha \simeq \ln \frac{1}{\omega \tau} = \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega :$$

il diagramma viene praticamente a coincidere con la retta passante per il punto $\ln \omega = \ln(1/\tau)$ e di inclinazione -1 (oppure, su carta semilogaritmica, -20 dB/decade). L'approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze è pertanto costituita dalle due semirette

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{per } \ln \omega \leq \ln \frac{1}{\tau} , \\ \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega & \text{per } \ln \omega \geq \ln \frac{1}{\tau} , \end{cases}$$

e il massimo errore della rappresentazione asintotica si ha per $\omega = 1/\tau$ e vale $\ln \sqrt{2}$ (circa 3dB).

Anche il diagramma delle fasi, rappresentato in Fig. 3.7b, può essere approssimato con una spezzata, ad esempio con la spezzata che si ottiene collegando i due asintoti $\beta = 0$ e $\beta = -\pi/2$ con la tangente al diagramma effettivo nel punto corrispondente alla pulsazione $\omega_0 = 1/\tau$, punto in cui è $\beta = -\pi/4$. Essendo

$$\beta = -\arctan \omega \tau ,$$

si può scrivere

$$\left. \frac{d\beta}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{d\beta}{d\omega} \frac{d\omega}{d \ln \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\omega_0 \tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} = -\frac{1}{2} ;$$

le pulsazioni ω_a e ω_b si determinano, in funzione della pulsazione corrispondente al punto di rottura del diagramma asintotico delle ampiezze, mediante la relazione

Punto di rottura

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} = \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_0} = \frac{1}{2} ,$$

da cui si ottiene

$$\ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} ,$$

cioè

$$\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81 .$$

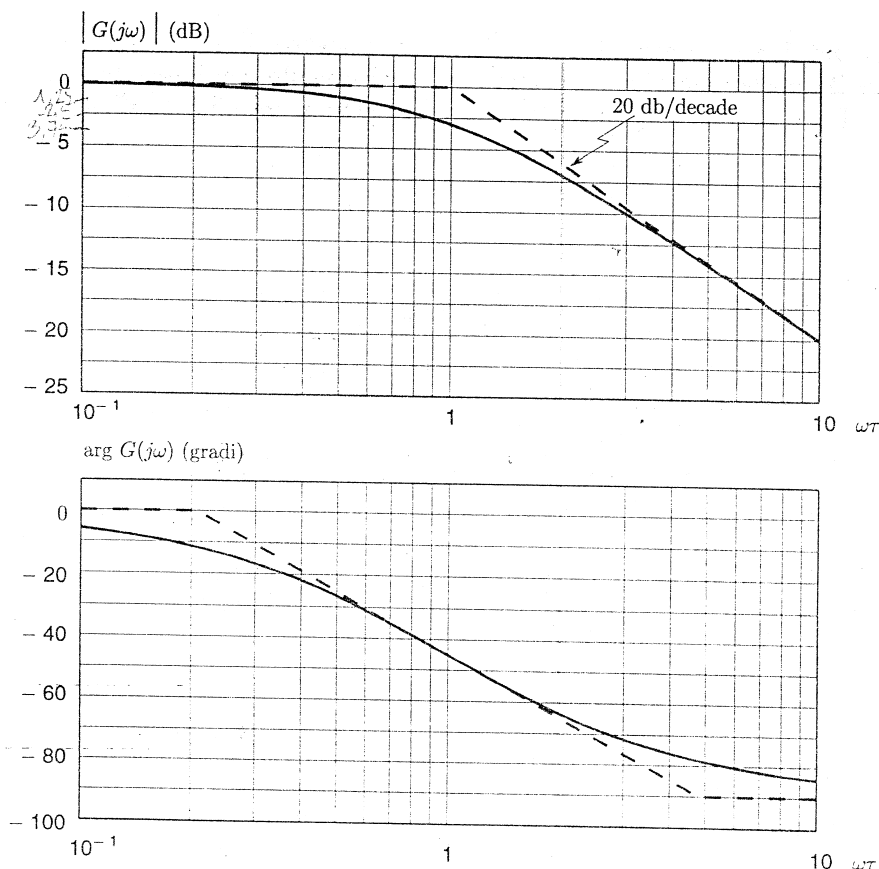
In pratica per determinare, sulla scala logaritmica, la pulsazione ω_a (oppure la ω_b) data la ω_0 , basta servirsi di una striscia di carta sulla quale sia riportata la distanza, presa sulla scala stessa, fra il punto di ascissa 1 e quello di ascissa 4,81.

In Fig. 3.8 sono rappresentati, in scala semilogaritmica, gli stessi diagrammi di Fig. 3.7. Essi sono riferiti al valore unitario del parametro τ : i diagrammi relativi ad un diverso valore di τ si possono peraltro ottenere per semplice traslazione orizzontale. Questo è un notevole vantaggio della rappresentazione logaritmica adottata.

I diagrammi di Bode della funzione $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ si ottengono, come si verifica facilmente, ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli, ora esaminati, della funzione $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$.

Figura 3.8

Diagrammi di Bode del termine del primo ordine tracciati su carta semilogaritmica.



In entrambi i casi quando la costante di tempo τ è negativa il diagramma delle ampiezze risulta immutato, con il punto di rottura per $\omega = 1/|\tau|$, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

L'impiego delle approssimazioni asintotiche è vantaggioso perché, nell'eguire la somma dei diversi diagrammi elementari, basta determinare le ordinate in corrispondenza dei vertici della spezzata, cioè in corrispondenza delle pulsazioni di rottura di ciascuno dei diagrammi elementari.

ESEMPIO 3.3.2 Si consideri la funzione di risposta armonica nella forma con costanti di tempo

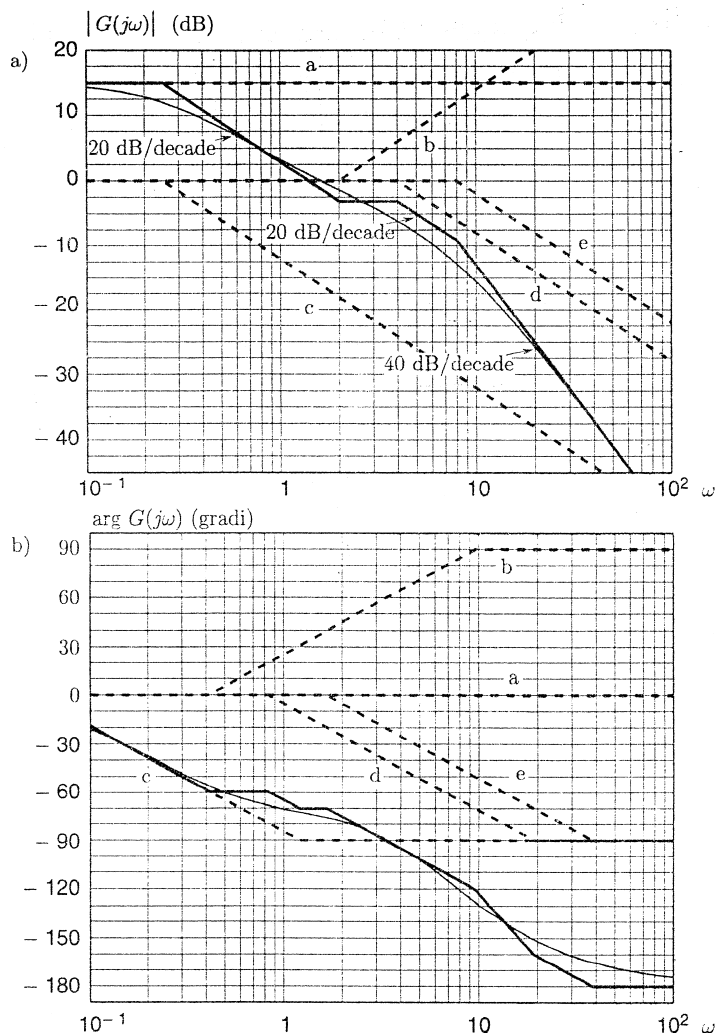
$$G(j\omega) = \frac{5,6(1 + j\omega 0,5)}{(1 + j\omega 4)(1 + j\omega 0,25)(1 + j\omega 0,125)}$$

In Fig. 3.9a sono rappresentate a tratteggio e indicate con a, b, c, d, e le approssimazioni asintotiche dei diagrammi delle ampiezze corrispondenti ai cinque fattori elementari della funzione e, a tratto

pieno, l'approssimazione a spezzata del diagramma complessivo delle ampiezze. È riportato anche, a tratto più sottile, il diagramma non approssimato. In Fig. 3.9b è rappresentata l'analoga costruzione per il diagramma delle fasi. Si noti che le pendenze dei vari tratti dei diagrammi, sia delle ampiezze sia delle fasi, sono tutte multiple di un dato valore: ciò semplifica notevolmente la costruzione del diagramma complessivo mediante riga e squadra.

$$4. G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$$

Si ricorda che ci si limita a considerare l'intervallo $0 \leq \delta < 1$, in quanto, se fosse $\delta \geq 1$, le radici non sarebbero complesse coniugate e si potrebbe scindere il termine di secondo grado nel prodotto di due termini di primo grado. Eventualmente il coefficiente di smorzamento δ può essere negativo, ma questo caso sarà considerato a parte.

**Figura 3.9**

Costruzione di una coppia di diagrammi di Bode approssimati con spezzate.

Analogamente al caso precedentemente trattato del termine del primo ordine, si farà riferimento in un primo tempo all'esponente -1 : data la natura logaritmica dei diagrammi, quando l'esponente valga $+1$ basta ribaltare entrambi i diagrammi di Bode attorno all'asse delle ascisse. Per tale valore dell'esponente si può scrivere

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} + j \left(-\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right).$$

Anzitutto si ricercano gli asintoti del diagramma α : per $\omega/\omega_n \ll 1$, tutti i termini sotto radice quadrata sono trascurabili rispetto all'unità ed è pertanto $\alpha \simeq 0$; per $\omega/\omega_n \gg 1$, ha la prevalenza il termine $(\omega/\omega_n)^4$ e si può scrivere pertanto

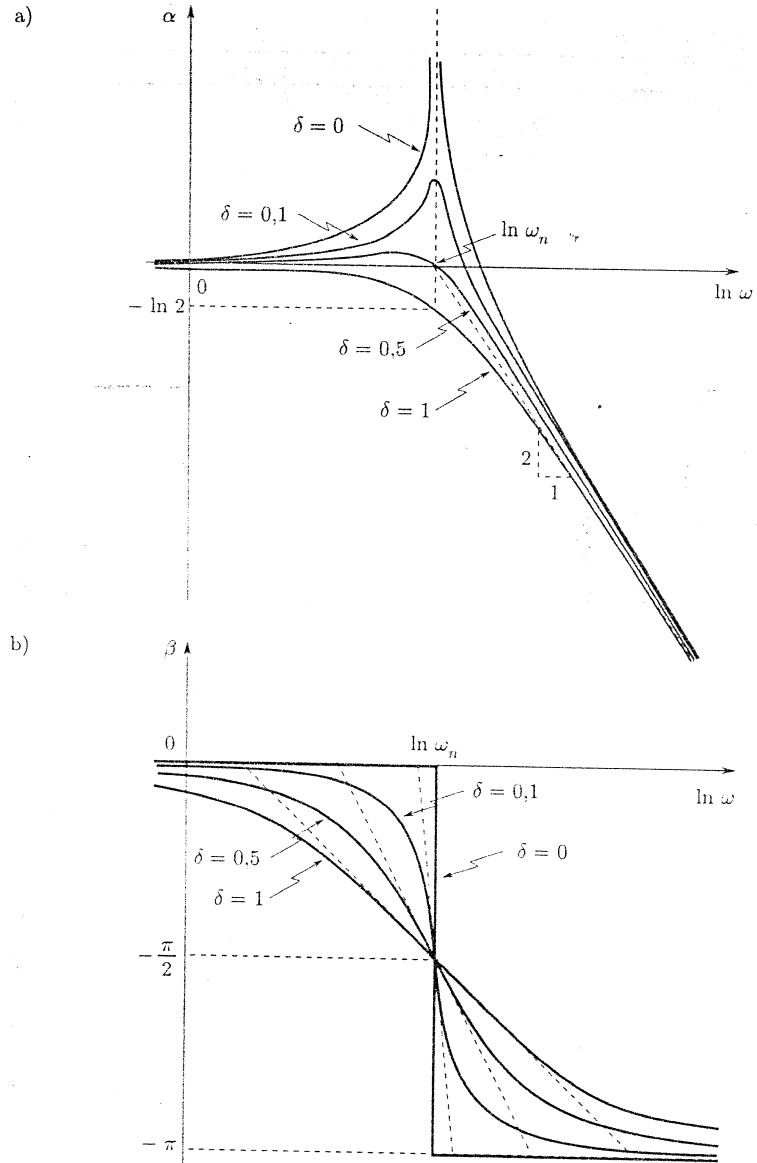
$$\alpha \simeq -\ln \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 2 \ln \omega_n - 2 \ln \omega.$$

In Fig. 3.10a sono riportati il diagramma effettivo delle ampiezze, per vari valori del parametro δ , e l'approssimazione asintotica precedentemente dedotta. Purtroppo in questo caso il diagramma effettivo si può discostare

Figura 3.10

Diagrammi di Bode del termine

$$(1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\delta(\omega/\omega_n))^{-1}.$$



sensibilmente da quello asintotico: in particolare, per $\delta = 0$ e in corrispondenza della pulsazione di rottura ω_n , lo scostamento è infinito. Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:

- per $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$, la curva presenta un massimo; il valore di tale massimo e della pulsazione ad esso corrispondente saranno determinati più avanti;
- per $0 \leq \delta \leq 1/2$, la curva interseca l'asse delle ascisse a destra del punto $\omega = \omega_n$ ed è pertanto tutta al di sopra della sua approssimazione asintotica;
- per $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$, la curva interseca l'asse delle ascisse a sinistra del punto $\omega = \omega_n$;
- per $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$, la curva non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.

Picco di risonanza
Pulsazione di risonanza

Si procede ora al calcolo del massimo (detto *picco di risonanza*) e della pulsazione alla quale esso si verifica (*pulsazione di risonanza*). Per semplicità di notazione conviene porre $u = \omega/\omega_n$.

Il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4\delta^2 u^2 \quad (u = \omega/\omega_n) ;$$

derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4(1 - u^2)u + 8\delta^2 u = 0 .$$

Trascurando la soluzione nulla, che indica un comportamento stazionario del diagramma logaritmico all'infinito, si deduce

$$u_R = \sqrt{1 - 2\delta^2} ,$$

soluzione che corrisponde alla pulsazione di risonanza

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} . \quad (3.25)$$

Il valore dell'ampiezza alla risonanza, cioè del picco di risonanza, si può ora facilmente calcolare come il modulo della funzione di risposta armonica per tale valore della pulsazione. Si ricava

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} . \quad (3.26)$$

L'andamento del picco di risonanza in funzione del coefficiente di smorzamento è riportato in Fig. 3.11.

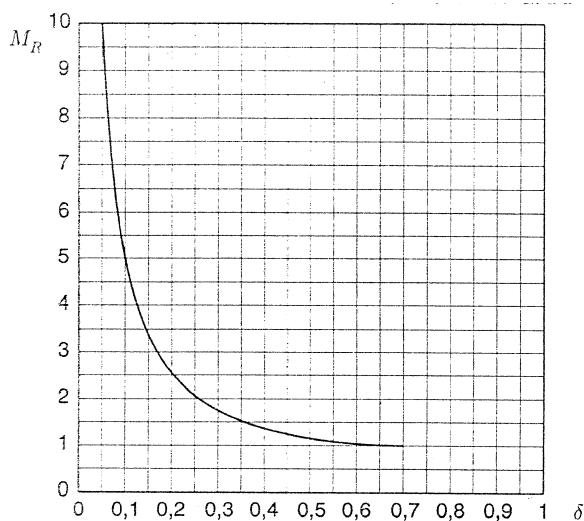


Figura 3.11

Legame fra il coefficiente di smorzamento e il picco di risonanza.

Per quanto riguarda l'approssimazione asintotica dell'argomento, che si può ottenere congiungendo gli asintoti $\beta = 0$ e $\beta = -\pi$ con un segmento inclinato come la tangente al diagramma effettivo in corrispondenza della pulsazione di rottura, in questo caso si ottiene una famiglia di diagrammi, ciascuno per un diverso valore di δ , come è indicato in Fig. 3.12.

Essendo

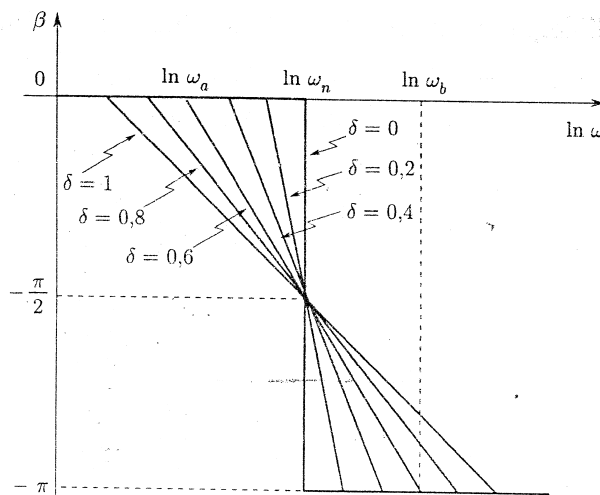
$$\beta = -\arctan \frac{2\delta u}{1 - u^2} ,$$

si deduce

$$\left. \frac{d\beta}{d\ln\omega} \right|_{\omega=\omega_n} = \left. \frac{d\beta}{du} \frac{du}{d\ln\omega} \right|_{u=1} = - \frac{1}{1 + \left(\frac{2\delta u}{1 - u^2} \right)^2} \frac{2\delta(1 + u^2)u}{(1 - u^2)^2} \bigg|_{u=1} = -\frac{1}{\delta} .$$

Figura 3.12

Approssimazione a spezzata del diagramma delle fasi del termine del secondo ordine.



Le pulsazioni ω_a e ω_b , indicate in Fig. 3.12 con riferimento a un particolare valore di δ , sono legate alla pulsazione di rottura ω_n dalla relazione

$$\frac{\pi/2}{\ln \omega_n - \ln \omega_a} = \frac{\pi/2}{\ln \omega_b - \ln \omega_n} = \frac{1}{\delta},$$

dalla quale si ottiene

$$\ln \frac{\omega_n}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{\pi \delta}{2},$$

cioè

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^\delta.$$

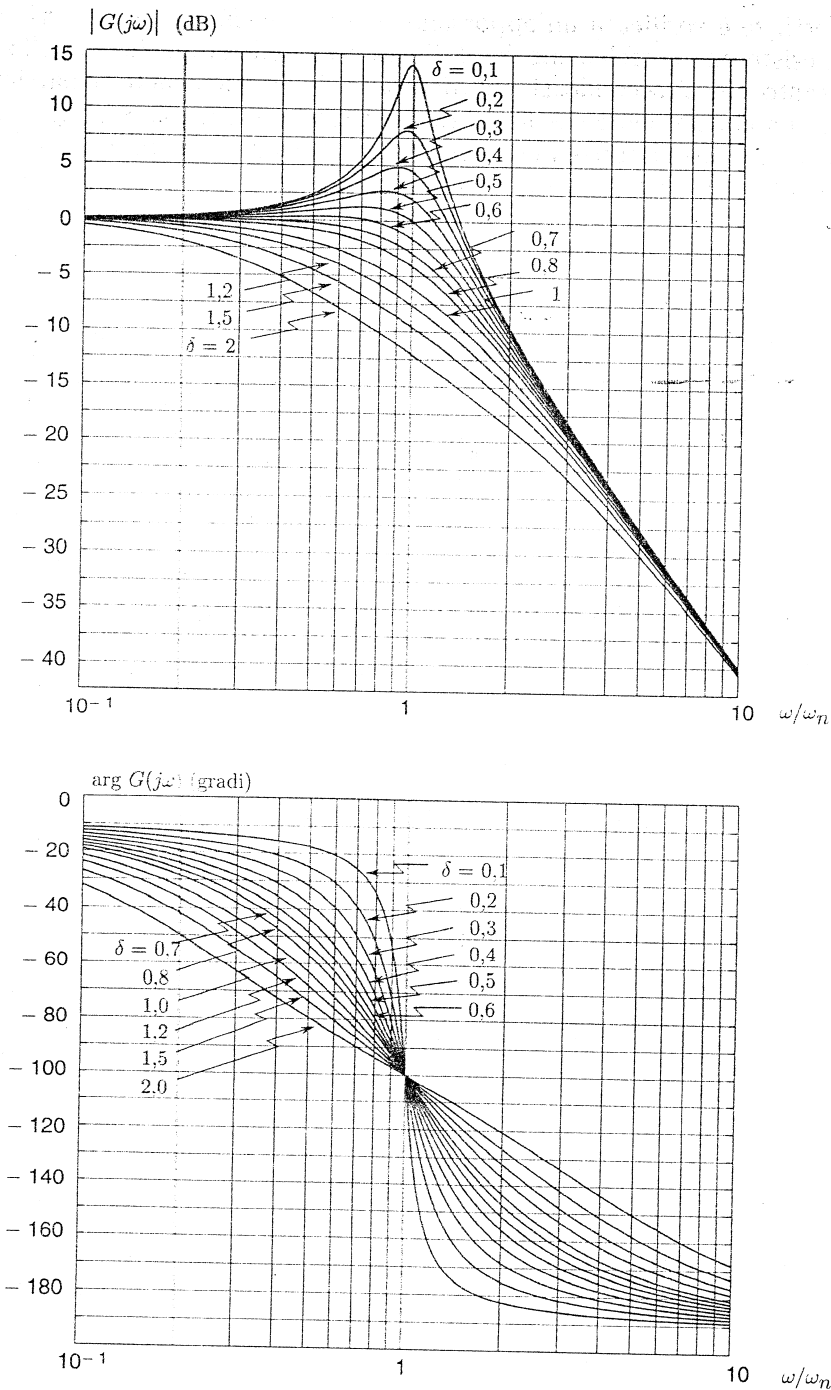
In pratica per determinare, sulla scala logaritmica, la pulsazione ω_a (oppure ω_b) in rapporto alla ω_n , basta riportare su una striscia di carta la distanza, presa sulla scala stessa, fra il punto di ascissa 1 e quello di ascissa 4,81 e moltiplicare la lunghezza del segmento così ottenuto per δ (ad esempio, se è $\delta=0,5$, si assume una distanza pari a metà del segmento ottenuto).

Si noti che la pulsazione naturale ω_n , uguale al modulo delle radici complesse coniugate cui corrisponde il termine del secondo ordine, non è mai negativa; il coefficiente di smorzamento δ può essere invece negativo: in questo caso il diagramma delle ampiezze è uguale a quello che si avrebbe per uno smorzamento pari a $|\delta|$, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

In Fig. 3.13 sono riportati con maggiore completezza e precisione e in scala semilogaritmica i diagrammi delle ampiezze e delle fasi relativi ad un termine del secondo ordine. Anche in questo caso, come già per quelli relativi al termine del primo ordine, si è ricorsi alla "normalizzazione" della scala delle pulsazioni, assumendo $\omega_n = 1$ (o, il che è equivalente, riportandovi ω/ω_n). I diagrammi relativi a valori di ω_n diversi da 1 si possono ottenere per semplice traslazione orizzontale. Si noti che in questo caso l'approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze porta a errori notevoli per piccoli valori di δ , per cui spesso si dovrà considerare, nelle costruzioni grafiche del tipo di Fig. 3.10, il diagramma effettivo, o apportare al diagramma asintotico, dopo la sua costruzione, un'opportuna correzione.

Figura 3.13

Diagrammi di Bode del termine del secondo ordine tracciati su carta semilogaritmica.



3.4. La formula di Bode

Esaminando i diagrammi di Bode precedentemente tracciati, si può osservare come l'andamento del diagramma delle fasi sia, in certo qual modo, legato a quello del diagramma delle ampiezze: si nota infatti che, se in una certa banda di frequenze l'ampiezza è costante, la fase tende ad essere nulla, mentre una inclinazione negativa del diagramma delle ampiezze è associata ad un ritardo di fase, un'inclinazione positiva ad un anticipo di fase.

Fase minima

In effetti, se è verificata un'opportuna condizione che fra poco verrà enunciata, esiste una correlazione fra il diagramma delle ampiezze e quello delle fasi, tanto che il secondo si può determinare univocamente a partire dal primo. La condizione è che la funzione di trasferimento sia stabile e a fase minima: nel caso di funzioni di trasferimento razionali fratte tale condizione equivale al requisito che essa non abbia né poli né zeri nel semipiano destro del piano s . Sotto tale condizione, detta ω_c la pulsazione in corrispondenza della quale si vuole calcolare la fase (β_c), vale la formula di Bode⁽¹⁾:

Formula di Bode

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \coth \left| \frac{u}{2} \right| du, \quad (3.27)$$

in cui si è posto

$$\alpha := \ln |G(j\omega)|,$$

$$u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c.$$

Il significato della variabile di integrazione u è chiarito dalla Fig. 3.14a: se il diagramma α è riferito ai logaritmi naturali, la variabile u non è che l'ascissa $\ln \omega$ con l'origine traslata in $\ln \omega_c$.

La funzione

$$\frac{1}{\pi} \ln \coth \left| \frac{u}{2} \right| \quad (3.28)$$

ha l'andamento rappresentato in Fig. 3.14b. Il significato della relazione (3.27) è il seguente: la fase β_c si ottiene calcolando l'integrale della funzione di u data dal prodotto della funzione di Fig. 3.14b per la derivata della funzione α (che, eseguendo il suaccennato cambiamento di origine delle ascisse, si può pensare funzione della variabile u).

Funzione ponderatrice

Pertanto la fase in corrispondenza di una data pulsazione dipende essenzialmente dalla pendenza del diagramma delle ampiezze nell'intorno di quella pulsazione, in quanto è tale pendenza che viene maggiormente pesata, nel calcolo dell'integrale, per effetto della funzione ponderatrice (3.28).

Quando il diagramma α si possa approssimare con una spezzata, la funzione $d\alpha/du$ è costante a tratti (Fig. 3.14c) e pertanto l'integrale (3.27) è facilmente calcolabile. Nel caso esemplificato in Fig. 3.14, dette A_1, A_2, A_3 le aree sottese dal diagramma della funzione (3.28) negli intervalli fra i punti di rottura, si ottiene

$$\beta_c = 0 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2 - 2 \cdot A_3.$$

Il calcolo delle aree A_1, A_2, A_3 si può eseguire facendo uso di un diagramma, rappresentato in Fig. 3.15b, che riporta l'andamento della funzione

$$\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^u \ln \coth \left| \frac{x}{2} \right| dx. \quad (3.29)$$

Poiché la (3.28) è una funzione pari, tale diagramma è sufficiente per il calcolo dell'integrale fra qualunque coppia di limiti.

⁽¹⁾ Si ricorda che è

$$\coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

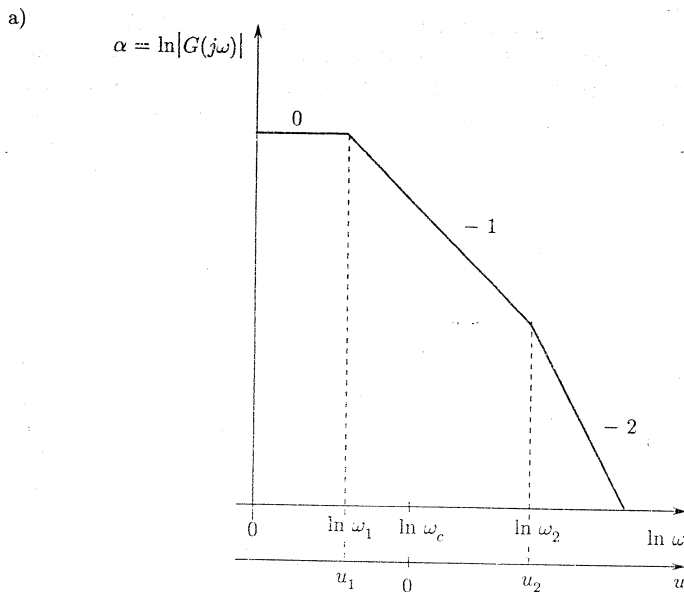
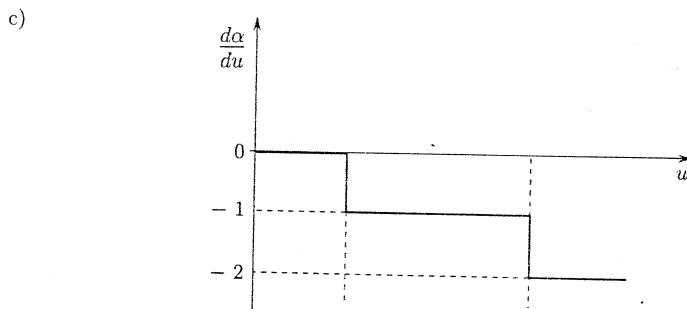
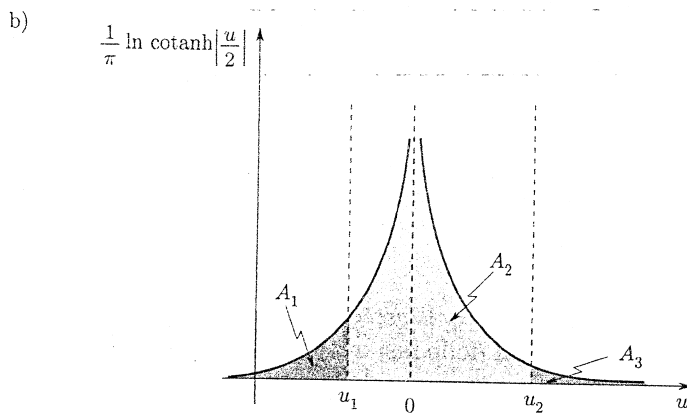
**Figura 3.14**

Illustrazione del significato della formula di Bode.

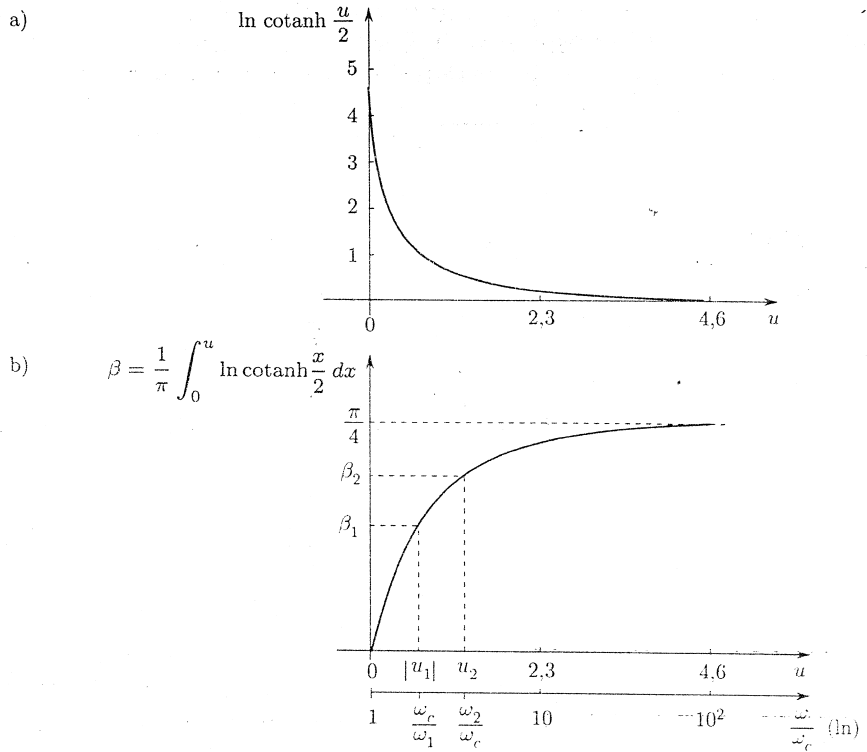


Ad esempio, nel caso di Fig. 3.14, detti u_1 e u_2 i valori di u corrispondenti ai due punti di rottura del diagramma α (il primo valore è negativo), dal diagramma di Fig. 3.15b si ricavano, come indicato, i valori β_1 e β_2 . Si può quindi scrivere

$$A_1 = \frac{\pi}{4} - \beta_1, \quad A_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad A_3 = \frac{\pi}{4} - \beta_2.$$

Figura 3.15

Funzione ponderatrice
della formula di Bode e
suo integrale.

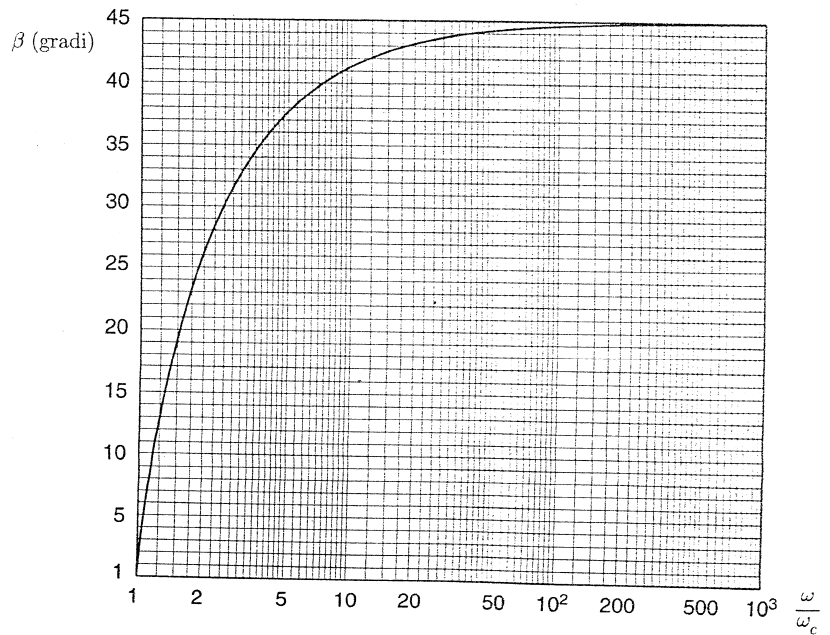


In Fig. 3.16 il diagramma di Fig. 3.15b è riprodotto con maggiore precisione: la scala è direttamente graduata in valori di ω/ω_c ; per punti di rottura corrispondenti a pulsazioni minori di ω_c (per i quali il valore di u è negativo), il diagramma si utilizza come se la scala delle ascisse fosse graduata in valori di ω_c/ω .

Il vantaggio principale dell'uso della formula di Bode è che essa consente di ottenere il diagramma delle fasi anche se non si individuano con esattezza i punti di rottura sul diagramma delle ampiezze (ad esempio perché questo è stato ricavato sperimentalmente). Infatti non è necessario che la spezzata

Figura 3.16

Grafico per l'utilizzazione
della formula di Bode.



approssimante il diagramma delle ampiezze abbia in ogni tratto una pendenza multipla dell'unità, come nel caso precedentemente esaminato. Si può, al contrario, approssimare il diagramma α con una spezzata avente un numero qualunque di lati: al crescere del numero dei lati è evidente che l'approssimazione del calcolo della fase cresce anch'essa.

ESEMPIO 3.4.1 Si consideri il diagramma rappresentato in Fig. 3.17: si suppone che sia

$$\frac{\omega_3}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_2} = 2, \quad \frac{\omega_4}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_1} = 5.$$

I valori corrispondenti a $\omega/\omega_c = 2$ e $\omega/\omega_c = 5$, letti sul diagramma di Fig. 3.16, sono rispettivamente $26,2^\circ$ e $37,7^\circ$. La valutazione approssimata della fase secondo il metodo precedentemente descritto si esegue operando il calcolo

$$\begin{aligned} \beta_c &= -2(0,5(37,7^\circ - 26,2^\circ) + 0,8(26,2^\circ)) \\ &= -53,4^\circ. \end{aligned}$$

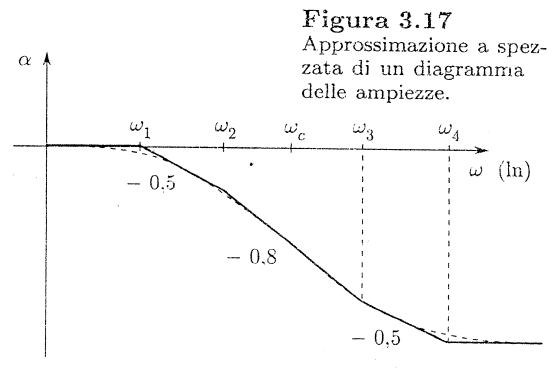


Figura 3.17
Approssimazione a spezzata di un diagramma delle ampiezze.

La condizione necessaria e sufficiente per la validità della formula di Bode, cioè che la funzione di trasferimento sia a fase minima, è soddisfatta per la quasi totalità dei sistemi che normalmente si considerano nel campo dei controlli automatici: fortunatamente i casi in cui la formula non si può applicare risultano un'eccezione anziché una regola.

È comunque utile considerare qualche esempio significativo di sistemi a fase non minima.

ESEMPIO 3.4.2 La rete elettrica di Fig. 3.18a è descritta dall'equazione

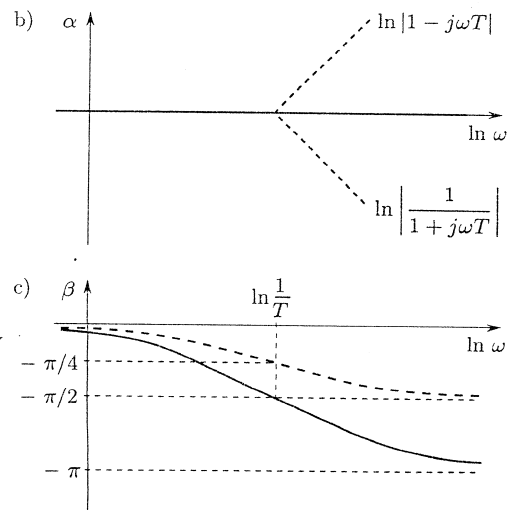
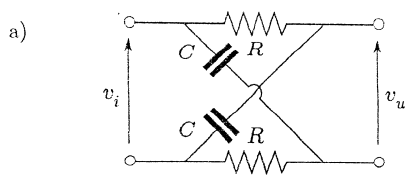
$$V_u(s) = \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} V_i(s) - \frac{R}{R + 1/Cs} V_i(s),$$

che, posto $T := RC$, fornisce la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts},$$

che è a fase non minima, in quanto ha uno zero positivo. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono rappresentati in Fig. 3.18bc: nel diagramma delle ampiezze la somma dei termini che corrispondono al numeratore e al denominatore della funzione di risposta armonica dà luogo alla costante $\alpha=0$ ($|G(j\omega)|=1$), mentre il diagramma delle fasi corrisponde ad un ritardo graduale da 0° a 180° . È chiaro che, applicando la formula di Bode, si sarebbe invece dedotta una fase identicamente nulla.

Figura 3.18
Sistema a fase non minima e relativi diagrammi di Bode.



ESEMPIO 3.4.3 La funzione di trasferimento trascendente

$$G(s) = e^{-t_0 s},$$

che, come è dimostrato dalla relazione (2.25), rappresenta un ritardo finito di valore t_0 , non è a fase minima. Essendo

$$G(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0,$$

la funzione di risposta armonica ha modulo identicamente unitario e fase crescente linearmente con la frequenza. Per ricavare i diagrammi di Bode, si scrive

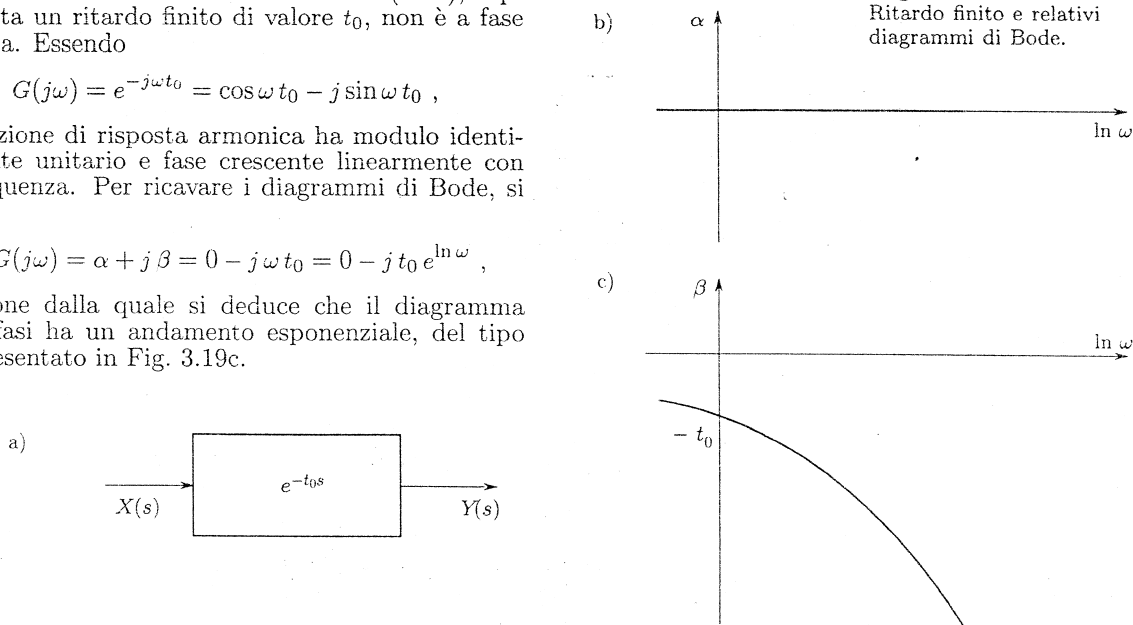
$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = 0 - j\omega t_0 = 0 - j t_0 e^{\ln \omega},$$

relazione dalla quale si deduce che il diagramma delle fasi ha un andamento esponenziale, del tipo rappresentato in Fig. 3.19c.

Anche in questo caso l'applicazione della formula di Bode avrebbe condotto ad un risultato errato (fase identicamente nulla).

Figura 3.19

Ritardo finito e relativi diagrammi di Bode.



3.5. Diagrammi polari

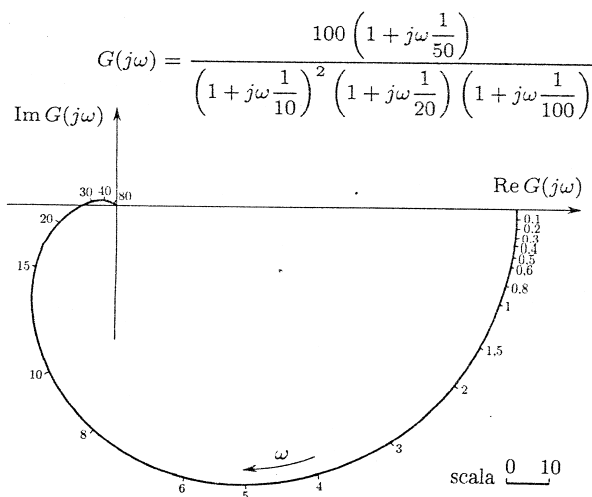
Diagrammi polari
Diagrammi di Nyquist

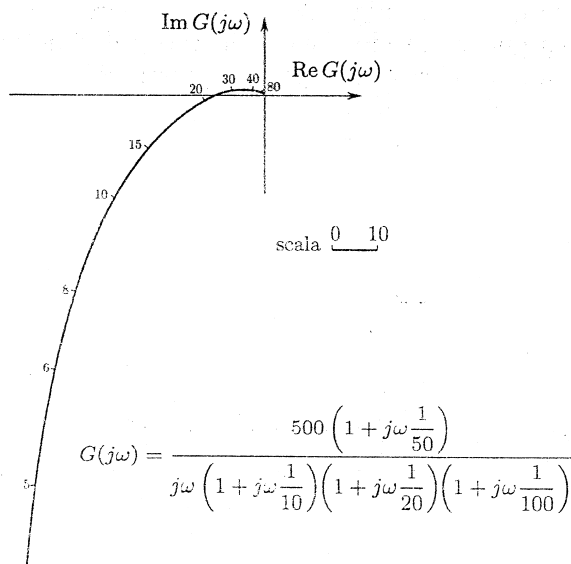
Per la rappresentazione delle funzioni di risposta armonica, in alternativa ai diagrammi di Bode si possono impiegare i *diagrammi polari* o di *Nyquist*.

Due esempi di diagrammi polari sono riportati in Fig. 3.20 e in Fig. 3.21: essi forniscono la curva che rappresenta, nel piano di Gauss, il

Figura 3.20

Esempio di diagramma polare, relativo a una funzione di trasferimento priva di poli nell'origine.



**Figura 3.21**

Esempio di diagramma polare, relativo a una funzione di trasferimento con un polo semplice nell'origine.

variare del numero complesso $G(j\omega)$ in funzione della pulsazione ω ; la curva è graduata in valori della pulsazione, cioè su di essa sono specificati i valori di ω corrispondenti a vari punti, in numero sufficiente per un'agevole interpolazione.

Poiché i valori del modulo e dell'argomento (M e φ) sono facilmente determinabili sul diagramma polare in funzione della pulsazione, i diagrammi di Bode si possono facilmente dedurre dai diagrammi polari e viceversa.

I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione; su di essi, in particolare, si basa un fondamentale criterio di stabilità, il criterio di Nyquist, che verrà più avanti enunciato.

Se la funzione di risposta armonica che si vuole rappresentare è relativa a un sistema di cui è data la funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare si può tracciare per punti, separando le parti reale e immaginaria di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di ω .

Se, in particolare, la funzione di trasferimento è data nella forma fattorizzata (3.16), la corrispondente funzione di risposta armonica si scrive

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}. \quad (3.30)$$

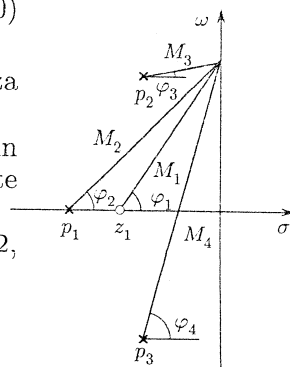
Nella (3.30), al contrario della (3.16), non si è ritenuto di porre in evidenza un eventuale polo nell'origine, semplice o multiplo.

Avendo localizzato i poli e gli zeri nel piano complesso e fissato un valore di ω , la risposta armonica ad esso corrispondente si può facilmente determinare elaborando i dati di una costruzione grafica.

Facendo riferimento, per fissare le idee, al caso particolare di Fig. 3.22, si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} = \\ &= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)}, \end{aligned}$$

in cui i valori di $M_1, M_2, M_3, M_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ corrispondono a distanze ed angoli facilmente determinabili per via grafica.

**Figura 3.22**

Valutazione grafica della funzione di risposta armonica.

Dalla costruzione grafica di Fig. 3.22 si può passare a un punto del diagramma polare eseguendo prodotti e quozienti di valori determinati graficamente e una somma algebrica di angoli. La costruzione si può ovviamente ripetere per diversi valori numerici di ω .

Il suddetto procedimento per la valutazione grafica della funzione di risposta armonica si può applicare anche in relazione a rappresentazioni di tale funzione diverse da quella polare, come i diagrammi di Bode o quelli di Nichols, per i quali è però in genere più conveniente seguire il procedimento, già descritto al Paragrafo 3.3 per i diagrammi di Bode, della composizione di termini elementari del primo e del secondo ordine. I diagrammi polari, oltretutto con calcolo diretto, si possono dedurre anche da quelli di Bode così costruiti.

In molti casi, in particolare quando i diagrammi polari si impiegano per analizzare la stabilità dei sistemi in retroazione, è sufficiente la conoscenza dell'andamento qualitativo del diagramma nel suo complesso, potendosi limitare la conoscenza più precisa a porzioni di esso in posizioni determinanti.

● Regole per il tracciamento dei diagrammi polari ● (vedi appendice)

Per il tracciamento qualitativo dei diagrammi polari risultano utili alcune regole, che verranno brevemente illustrate: per la funzione di trasferimento si farà riferimento sia alla forma (3.15) sia alla forma fattorizzata (3.18).

1 Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$

Se nella (3.15) o nella (3.18) è $\gamma=0$, il diagramma parte da un punto dell'asse reale, essendo nei due casi rispettivamente

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K_1 \frac{b_0}{a_0}, \quad (3.31)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K. \quad (3.32)$$

Se invece è $\gamma > 0$, il diagramma parte da un punto all'infinito. Infatti è

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = -\gamma \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \quad (3.33)$$

con $\varphi_0 = 0$ o $\varphi_0 = \pi$ a seconda che il valore di $K_1 b_0/a_\gamma$ nel caso della (3.15) o quello di K nel caso della (3.18) sia positivo o negativo.

Per studiare il comportamento del diagramma per piccoli valori di ω , si possono trascurare i termini in ω^2 o potenze superiori di ω . Considerando, in particolare, la forma (3.15), nel caso $\gamma=0$ si può scrivere

$$G(j\omega) \simeq K_1 \frac{b_0 + b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega} \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero.} \quad (3.34)$$

Confondendo la tangente con l'angolo, si ha pertanto

$$\Delta \arg G(j\omega) \simeq \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) \omega \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero.} \quad (3.35)$$

in cui $\Delta \arg G(j\omega)$ è la variazione dell'argomento di $G(j\omega)$ rispetto al valore che esso assume per $\omega=0$.

I coefficienti della (3.15) sono legati a quelli della (3.18) dalle relazioni

$$K_1 b_0 = K, \quad K_1 b_1 = K \left(\tau'_1 + \tau'_2 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + 2 \frac{\delta'_2}{\omega'_{n2}} + \dots \right), \quad (3.36)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \tau_1 + \tau_2 + \dots + 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} + 2 \frac{\delta_2}{\omega_{n2}} + \dots, \quad (3.37)$$

per cui, sostituendo nella (3.35), si ha

$$\Delta \arg G(j\omega) \simeq \left(\tau'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - \tau_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \right) \omega \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero.} \quad (3.38)$$

Si conclude che, nel caso $\gamma=0$, il diagramma polare lascia l'asse reale ruotando in senso orario o antiorario a seconda che sia negativa o positiva la somma entro parentesi a secondo membro della (3.35) o della (3.38).

Nel caso $\gamma=1$ i diagrammi polari presentano un asintoto parallelo all'asse immaginario. Essendo, in questo caso,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &\simeq K_1 \frac{b_0 + b_1 j\omega}{j\omega (a_1 + a_2 j\omega)} = K_1 \frac{(b_0 + b_1 j\omega)(a_1 - a_2 j\omega)}{j\omega (a_1 + a_2 j\omega)(a_1 - a_2 j\omega)} \\ &= K_1 \frac{(a_1 b_0 + a_2 b_1 \omega^2) + j\omega (a_1 b_1 - a_2 b_0)}{j\omega (a_1^2 + a_2^2 \omega^2)} \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero,} \end{aligned} \quad (3.39)$$

risulta che, per $\omega \rightarrow 0+$, la parte reale di $G(j\omega)$ tende al valore

$$\sigma_a = K_1 \frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2}, \quad (3.40)$$

che rappresenta la distanza dell'asintoto dall'asse immaginario.

Nel caso in cui la funzione di trasferimento sia data nella forma (3.18), con considerazioni analoghe a quelle che hanno consentito di dedurre la (3.38) dalla (3.35) si ricava

$$\sigma_a = K \left(\tau'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - \tau_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \right). \quad (3.41)$$

Quando è $\gamma > 1$, il diagramma polare inizia in un punto all'infinito nella direzione $-\gamma(\pi/2)$, ma, anziché ad una retta, per $\gamma=2$ tende ad una parabola avente tale direzione come asse, per $\gamma=3$ ad una parabola cubica, e così via (vedi Esercizi 3.7.1 e 3.7.2). Con una procedura del tutto analoga a quella precedentemente esposta per il caso $\gamma=1$, si può dimostrare che il diagramma polare per ω prossima a zero appartiene al quadrante che, in senso orario, precede o segue il semiasse avente la direzione del punto all'infinito a seconda che il valore di σ_a dato dalla (3.40) o dalla (3.41) sia positivo o negativo.

2 Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$

Se è $m=n$, il diagramma termina in un punto dell'asse reale, essendo

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = K_1 \quad \text{nel caso della (3.15);} \quad (3.42)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = K \frac{\tau'_1 \tau'_2 \dots \frac{1}{\omega'^2_{n1}} \frac{1}{\omega'^2_{n2}} \dots}{\tau_1 \tau_2 \dots \frac{1}{\omega^2_{n1}} \frac{1}{\omega^2_{n2}} \dots} \quad \text{nel caso della (3.18).} \quad (3.43)$$

Se è $m < n$, il diagramma termina nell'origine tangente ad uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} + (\text{sign } K_1 - 1) \frac{\pi}{2}. \quad (3.44)$$

La seconda delle (3.44) si riferisce alla forma (3.15); per estenderla alla (3.18) si può sostituire a K_1 il secondo membro della (3.43) o, in alternativa, notare che è $\text{sign } K_1 = \text{sign } K$ quando il numero complessivo degli zeri e dei poli a parte reale positiva è pari, $\text{sign } K_1 = -\text{sign } K$ nel caso contrario.

3 Rotazioni complessive intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞

Facendo riferimento al procedimento grafico illustrato in Fig. 3.22, si deduce

$$\Delta \arg G(j\omega) = (m - n) \frac{\pi}{2} - (\mu - \nu) \frac{\pi}{2} - (n_z - n_p) \pi, \quad (3.45)$$

in cui $\Delta \arg G(j\omega)$ è la variazione dell'argomento di $G(j\omega)$ per ω variabile da zero all'infinito, μ e ν sono i numeri degli zeri e dei poli immaginari, con n_z ed n_p quelli degli zeri e dei poli a parte reale positiva.

Nella (3.45) si conviene di considerare solo le variazioni "al finito", cioè relative all'intervallo $\epsilon < |G(j\omega)| < M$, in cui ϵ è un numero reale positivo molto piccolo, M molto grande. Ciò allo scopo di rendere ben definito il computo delle rotazioni anche nei casi in cui il diagramma polare passa per l'origine o ha delle diramazioni all'infinito, il che avviene rispettivamente quando la funzione di trasferimento presenta zeri e/o poli puramente immaginari.

La (3.45) si ottiene notando che ogni zero nel semipiano sinistro contribuisce a $\Delta \arg G(j\omega)$ per $\pi/2$, ogni polo per $-\pi/2$, mentre il contributo degli zeri e dei poli nel semipiano destro è l'opposto del precedente e quello degli zeri e dei poli immaginari è nullo, appunto perché si è convenuto di considerare solo le variazioni al finito: l'espressione discende dal fatto che i numeri degli zeri e dei poli nel semipiano sinistro sono rispettivamente $m - n_z - \mu$, $n - n_p - \nu$ e quelli nel semipiano destro n_z , n_p .

3.6. Diagrammi di Nichols

I diagrammi polari forniscono l'andamento della funzione di risposta armonica in un sol grafico e presentano quindi il vantaggio, rispetto ai diagrammi di Bode, di una rappresentazione più sintetica.

Per contro presentano l'inconveniente, comune a tutti i diagrammi non logaritmici, di non specificare con sufficiente dettaglio l'andamento della funzione quando il modulo assume valori molto piccoli e risultano di costruzione più complicata, dato che il diagramma polare di più sistemi in cascata non si può ottenere per semplice somma dei diagrammi di ciascun sistema, come nel caso dei diagrammi di Bode.

Diagrammi di Nichols

Tali inconvenienti si superano adottando i diagrammi di Nichols, che riportano in ascissa l'argomento e in ordinata, in scala logaritmica, il modulo della funzione di risposta armonica; come i diagrammi polari, sono costituiti da una sola curva, graduata in valori della pulsazione.

A titolo di esempio, in Fig. 3.23 è riportato il diagramma di Nichols relativo alla funzione di risposta armonica dei diagrammi di Fig. 3.2 e di Fig. 3.3: il diagramma viene usualmente tracciato con scala delle ampiezze data in dB.

Altri esempi di diagrammi di Nichols sono riportati in Fig. 3.24 e in Fig. 3.25: dal confronto con i corrispondenti diagrammi polari, riportati in Fig. 3.20 e in Fig. 3.21, risulta evidente il maggior dettaglio con il quale è rappresentato l'andamento della funzione di risposta armonica per valori elevati della pulsazione.

I diagrammi di Nichols sono largamente impiegati nella soluzione di problemi di sintesi, in quanto consentono di controllare rapidamente l'effetto di variazioni dei parametri delle reti correttrici.

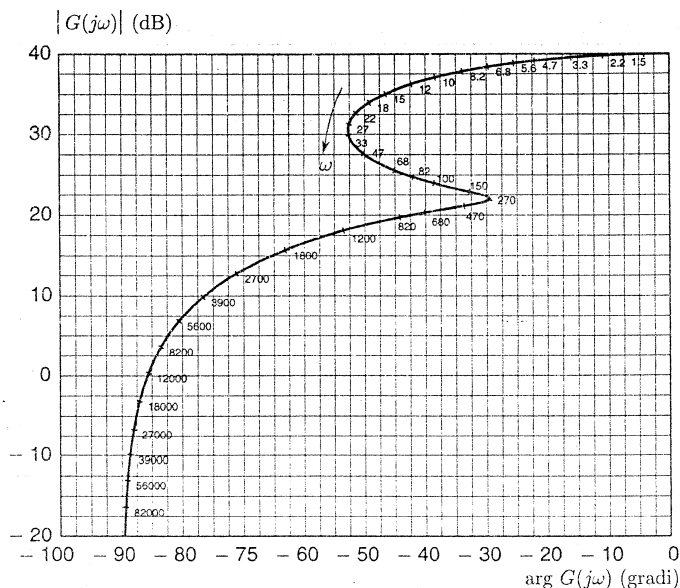


Figura 3.23
Esempio di diagramma di Nichols.

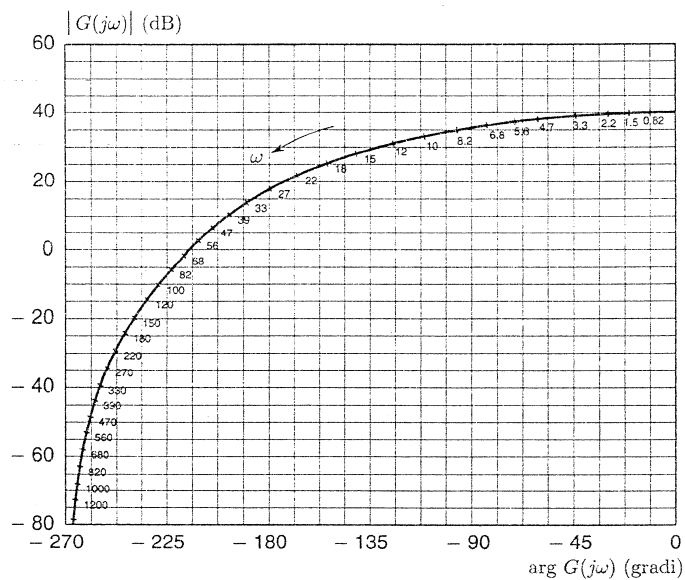


Figura 3.24
Diagramma di Nichols corrispondente al diagramma polare di Fig. 3.20.

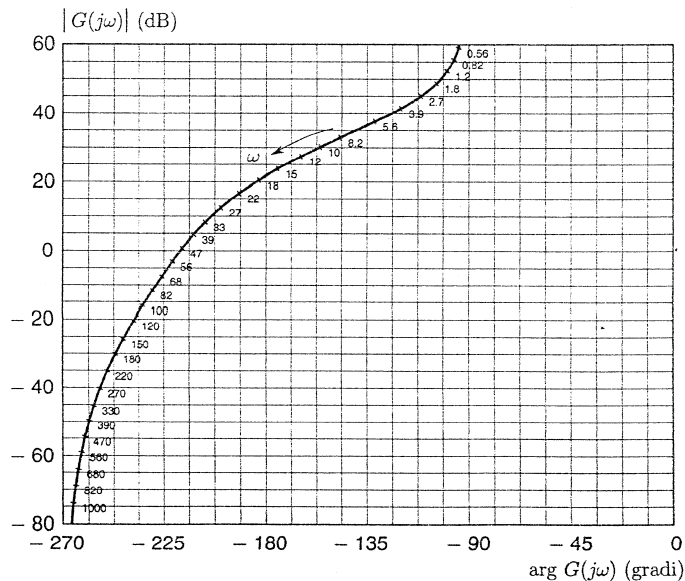


Figura 3.25
Diagramma di Nichols corrispondente al diagramma polare di Fig. 3.21.

3.7. Esercizi

3.7.1 Si determini l'andamento qualitativo del diagramma polare di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s^2(1+\tau s)}, \quad \tau > 0.$$

Soluzione La funzione di risposta armonica è

$$G(j\omega) = -\frac{K}{\omega^2(1+j\omega\tau)}. \quad (3.46)$$

1. Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$. Essendo $h=2$, si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = -\pi.$$

2. Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$. Si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi.$$

La parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$ sono

$$R(\omega) = \frac{-K}{\omega^2(1+\omega^2\tau^2)}, \quad I(\omega) = \frac{K\tau}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}.$$

Poiché la parte reale è sempre negativa e la parte immaginaria sempre positiva, il diagramma è tutto

compreso nel secondo quadrante. Risulta inoltre

$$\frac{I^2(\omega)}{R(\omega)} = \frac{-K\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

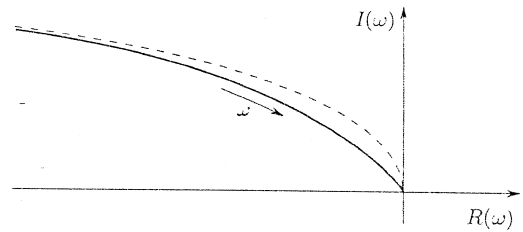
e, per $\omega \rightarrow 0+$,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} \frac{I^2(\omega)}{R(\omega)} = -K\tau^2,$$

cioè il diagramma tende asintoticamente a una parabola, come è mostrato in Fig. 3.26.

Figura 3.26

Diagramma polare della funzione (3.46).



3.7.2 Si determini l'andamento qualitativo del diagramma polare di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{s^2(1+\tau_3 s)}$$

$$\tau_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\tau_3 > \tau_1 + \tau_2.$$

Soluzione La funzione di risposta armonica è

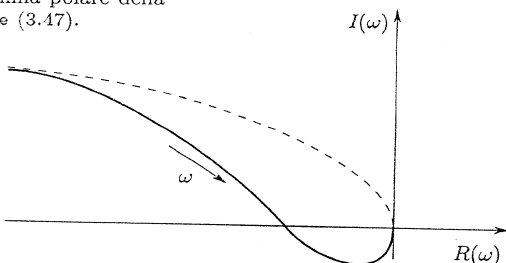
$$G(j\omega) = -\frac{K(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}{\omega^2(1+j\omega\tau_3)}. \quad (3.47)$$

1. Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$. Essendo $h=2$, si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = -\pi.$$

Figura 3.27

Diagramma polare della funzione (3.47).



2. Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$. Si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

il diagramma compie in complesso una rotazione di $\pi/2$.

La parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$ sono rispettivamente

$$R(\omega) = K \frac{\omega^2(\tau_1\tau_2 - \tau_3(\tau_1 + \tau_2)) - 1}{\omega^2(1+\omega^2\tau_3^2)},$$

$$I(\omega) = K \frac{\omega(\tau_3 - (\tau_1 + \tau_2) - \omega^2\tau_3\tau_1\tau_2)}{\omega^2(1+\omega^2\tau_3^2)}.$$

Il diagramma interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{\tau_3 - (\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1\tau_2\tau_3}}$$

e non interseca l'asse delle ordinate.

Si ricava inoltre

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} \frac{I^2(\omega)}{R(\omega)} = -K(\tau_3 - (\tau_1 + \tau_2))^2,$$

cioè il diagramma tende asintoticamente a una parabola, come è mostrato in Fig. 3.27.

3.7.3 Si determini l'andamento qualitativo del diagramma polare di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

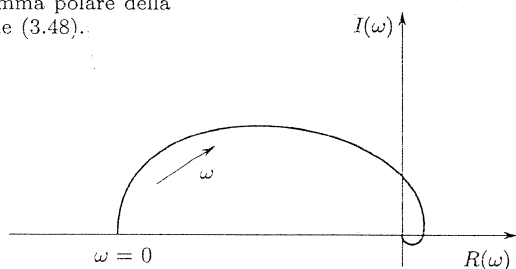
$$G(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+0,5)}.$$

Soluzione La funzione di risposta armonica è

$$G(j\omega) = -4 \frac{1 - j\omega 0,5}{(1 + j\omega)(1 + j\omega 2)}. \quad (3.48)$$

Figura 3.28

Diagramma polare della funzione (3.48).



1. Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$. Si deduce

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = 4, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = \pi.$$

2. Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$. Si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

il diagramma compie in complesso una rotazione di $-(3/2)\pi$.

La parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$ sono rispettivamente

$$R(\omega) = -\frac{4(1 - 3,5\omega^2)}{(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)},$$

$$I(\omega) = -\frac{4\omega(\omega^2 - 3,5)}{(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)}.$$

La parte reale si annulla per $\omega = \sqrt{1/3,5}$, la parte immaginaria per $\omega = 0$ e $\omega = \sqrt{3,5}$. L'andamento qualitativo del diagramma è riportato in Fig. 3.28.

Complementi al Capitolo 3

C3.1. Sviluppo in serie di Fourier e integrale di Fourier

L'importanza dell'analisi armonica dei sistemi lineari, introdotta al Paragrafo 3.1, è legata al fatto che un qualunque segnale, periodico o impulsivo (cioè di durata limitata) si può scomporre in una somma di sinusoidi (analisi armonica del segnale), di cui, in virtù della proprietà di linearità, si possono determinare separatamente gli effetti.

Confrontando il contenuto armonico del segnale (o *spettro* del segnale) con la risposta armonica del sistema, si può immediatamente giudicare della possibilità di ottenere una risposta fedele.

Si ritiene utile ricordare brevemente i principali enunciati relativi alla analisi armonica dei segnali.

◆ Sviluppo in serie di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo T , continua a tratti.⁽²⁾ Vale la relazione fondamentale

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (3.49)$$

Sviluppo in serie di Fourier

⁽²⁾La continuità a tratti è un'ipotesi più restrittiva del necessario, ma sufficiente a coprire tutti i casi di interesse pratico.

in cui è $\Omega = 2\pi/T$ e

$$a_0 := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\Omega t, \quad (3.50)$$

$$a_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n\Omega t d\Omega t, \quad (3.51)$$

$$b_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n\Omega t d\Omega t. \quad (3.52)$$

La (3.49) definisce lo *sviluppo in serie di Fourier*, che si può anche scrivere

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\Omega t + \varphi_n), \quad (3.53)$$

in cui si è posto

$$C_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (3.54)$$

$$\varphi_n := \arctan \frac{a_n}{b_n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.55)$$

Risulta pertanto che ogni funzione periodica può venire espressa come somma di un numero infinito di sinusoidi di diversa frequenza (dette *armoniche* del segnale considerato) che sono funzioni fra loro *ortogonali*, nel senso che vale la relazione

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\Omega t + \varphi_m) \sin(n\Omega t + \varphi_n) dt = 0$$

per ogni coppia m, n di interi non negativi con $m \neq n$.



Integrale di Fourier

Anche se le forme (3.49) e (3.53) dello sviluppo in serie di Fourier sono le più frequentemente applicate, conviene, in via preliminare alla presentazione dell'integrale di Fourier, dedurre una forma più compatta per lo sviluppo in serie, utile perché chiarisce l'origine dell'artificio matematico dell'introduzione delle pulsazioni negative. Posto

$$F_n := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (3.56)$$

$$F_{-n} := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\Omega t} dt \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (3.57)$$

la (3.49) si può scrivere

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}. \quad (3.58)$$

Si consideri ora un segnale $f(t)$ impulsivo, cioè tendente a zero per t tendente a $-\infty$ e a $+\infty$ e che soddisfi la relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \leq M < \infty. \quad (3.59)$$

Facendo tendere il periodo T all'infinito e quindi Ω a zero, posto $\omega = n\Omega$, $\Delta\omega = \omega/n = \Omega$ (incremento di pulsazione passando da un'armonica alla successiva), le (3.56), (3.57), che possono essere considerate un'unica relazione scritta per valori positivi e negativi di n , danno luogo alla

Trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.60)$$

e la (3.58) alla

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Omega) e^{jn\Omega t} \Delta\omega,$$

cioè

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.61) \quad \text{Antitrasformata di Fourier}$$

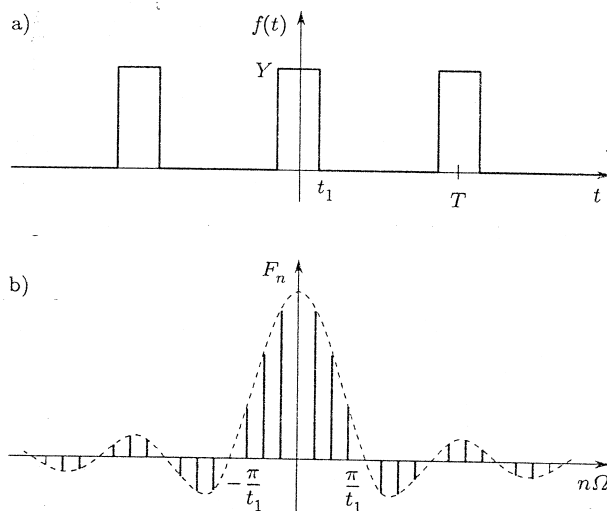
La (3.60) esprime l'integrale o trasformata di Fourier, la (3.61) l'antitrasformata di Fourier.

ESEMPIO C3.1.1 Si consideri il segnale periodico rappresentato in Fig. 3.29a. I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier (3.58) sono

$$\begin{aligned} F_n &= \int_{-T/2}^{T/2} Y e^{-jn\Omega t} dt = \frac{-Y}{jn\Omega} e^{-jn\Omega t} \Big|_{t=-t_1}^{t=t_1} \\ &= \frac{2Y}{n\Omega} \sin n\Omega t_1 = 2Y t_1 \frac{\sin n\Omega t_1}{n\Omega t_1}. \end{aligned}$$

Lo spettro del segnale è rappresentato in Fig. 3.29b.

Figura 3.29
Segnale periodico e suo spettro.

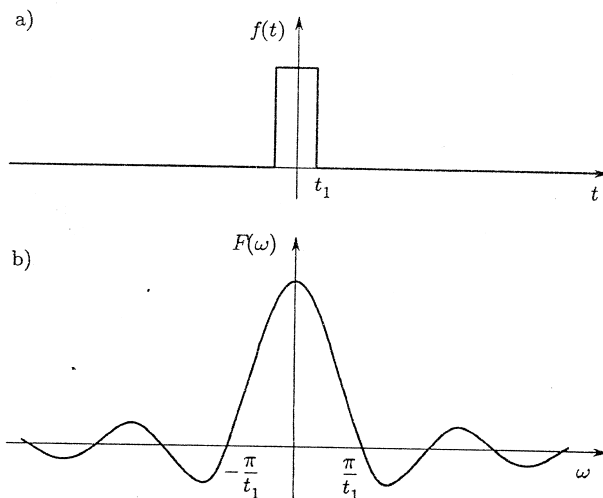


ESEMPIO C3.1.2 Si consideri il segnale impulsivo rappresentato in Fig. 3.30a. La sua trasformata di Fourier è data dalla relazione

$$\begin{aligned} F_n &= \int_{-t_1}^{t_1} Y e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-Y}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{t=-t_1}^{t=t_1} \\ &= \frac{2Y}{\omega} \sin \omega t_1 = 2Y t_1 \frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1}. \end{aligned}$$

Lo spettro del segnale è rappresentato in Fig. 3.30b.

Figura 3.30
Segnale impulsivo e suo spettro.



C3.2. Sviluppi relativi alla formula di Bode

Il grafico di Fig. 3.16 risulta di notevole utilità per l'applicazione della formula di Bode. Si riportano gli sviluppi matematici seguiti per la sua costruzione, al fine di facilitarne l'eventuale riproduzione.

La (3.29) si può scrivere nella forma

$$\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^u \ln \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} dx, \quad (3.62)$$

e, posto

$$e^{-x} = y, \quad \text{da cui } x = -\ln y, \quad dx = -\frac{dy}{y},$$

si riconduce alla

$$\beta = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{\omega_c}{\omega}} \ln \frac{1+y}{1-y} \frac{dy}{y}. \quad (3.63)$$

Essendo

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots \quad \text{per } |y| < 1,$$

$$-\ln(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots \quad \text{per } |y| < 1,$$

si ha

$$\ln \frac{1+y}{1-y} = 2 \left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \right) \quad \text{per } |y| < 1.$$

e, sostituendo nella (3.63), si ottiene

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\omega_c}{\omega}}^1 \left(1 + \frac{y^2}{3} + \frac{y^4}{5} + \dots \right) dy = \frac{2}{\pi} \left(y + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \dots \right) \Big|_{y=\frac{\omega_c}{\omega}}^{y=1} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) - \left(\frac{\omega_c}{\omega} + \frac{1}{9} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^3 + \frac{1}{25} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^5 + \dots \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{\omega_c}{\omega} + \frac{1}{9} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^3 + \frac{1}{25} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^5 + \dots \right) \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Il valore di $\pi^2/8$ come somma della serie $(1 + 1/9 + 1/25 + \dots)$ è congruente con il fatto che il valore di β per $\omega/\omega_c = \infty$ (oppure $\omega_c/\omega = 0$) è $\pi/4$.

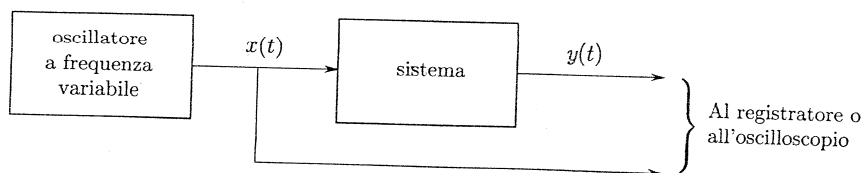
Per la costruzione del grafico di Fig. 3.16 è stato impiegato lo sviluppo in serie (3.64).

C3.3. Rilevazione della funzione di risposta armonica

La determinazione sperimentale della funzione di risposta armonica dal punto di vista concettuale non presenta alcuna difficoltà: è necessario un oscillatore sinusoidale a frequenza variabile e un registratore a doppia traccia oppure un oscilloscopio, possibilmente a memoria, date le basse frequenze alle quali normalmente si effettua la misura.

Figura 3.31

Collegamento per la determinazione sperimentale della risposta armonica.



In Fig. 3.31 è rappresentato il collegamento da effettuarsi. Se si utilizza un oscilloscopio, l'ampiezza Y e la fase φ dell'uscita rispetto all'ingresso si possono determinare, come è mostrato in Fig. 3.32, dall'analisi della figura di Lissajous ottenuta inviando ai due assi dell'oscilloscopio rispettivamente il segnale di ingresso e quello di uscita.

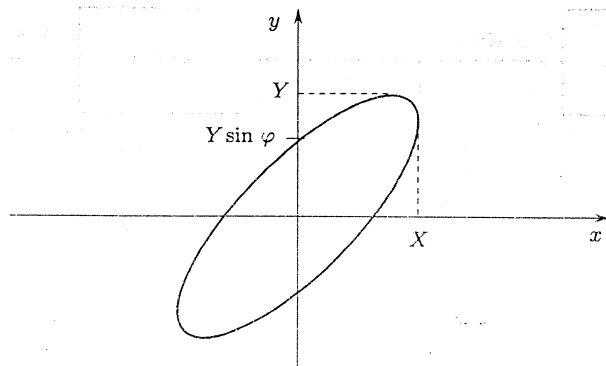


Figura 3.32
Figura di Lissajous.

Per una lettura diretta e più precisa della fase, si possono impiegare speciali oscillatori con due uscite, la seconda delle quali è sfasabile in anticipo o in ritardo rispetto alla prima di un angolo arbitrario, leggibile su una manopola graduata: si regola tale angolo di fase fino a ricondurre la figura di Lissajous ad una retta. Il collegamento è mostrato in Fig. 3.33.

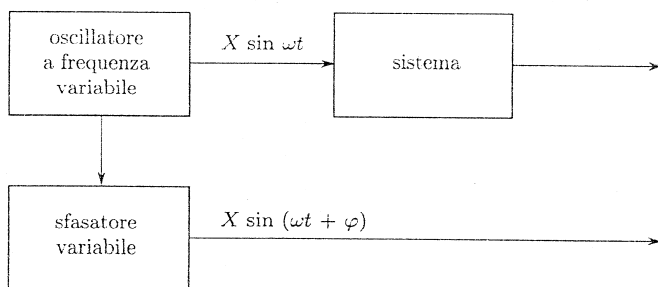


Figura 3.33
Impiego di un oscillatore a fase variabile.

I suddetti procedimenti non consentono una determinazione precisa della funzione di risposta armonica alle pulsazioni elevate, cioè quando il modulo della sinusoide in uscita diviene tanto piccolo da confondersi con i disturbi inevitabilmente presenti.

Per rilevare la funzione di risposta armonica anche in presenza di disturbi, si ricorre all'impiego di *correlatori*, funzionanti secondo il principio schematizzato in Fig. 3.34. Essendo

$$Y \sin(\omega t + \varphi) = Y (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi), \quad (3.65)$$

alle uscite dei moltiplicatori si hanno i segnali

$$z_1(t) = X Y (\sin^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi), \quad (3.66)$$

$$z_2(t) = X Y (\cos^2 \omega t \sin \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \cos \varphi), \quad (3.67)$$

cui valori medi, forniti dai filtri, sono

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_1(t) dt = \frac{X Y}{2} \cos \varphi, \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_2(t) dt = \frac{X Y}{2} \sin \varphi. \quad (3.69)$$

Moltiplicando i valori (3.68) e (3.69) per la costante $2/X^2$ si ottengono pertanto direttamente la parte reale e la parte immaginaria della funzione di risposta armonica.

Si noti che i valori medi (3.68) e (3.69) si possono calcolare estendendo gli integrali, anziché a un solo periodo, a un numero comunque grande di periodi mT : se, sovrapposto al segnale d'uscita, si ha un disturbo $d(t)$, anche di ampiezza maggiore rispetto al segnale, per il quale valgano le relazioni

$$\frac{1}{mT} \int_{-mT/2}^{mT/2} d(t) X \sin \omega t dt = 0, \quad (3.70)$$

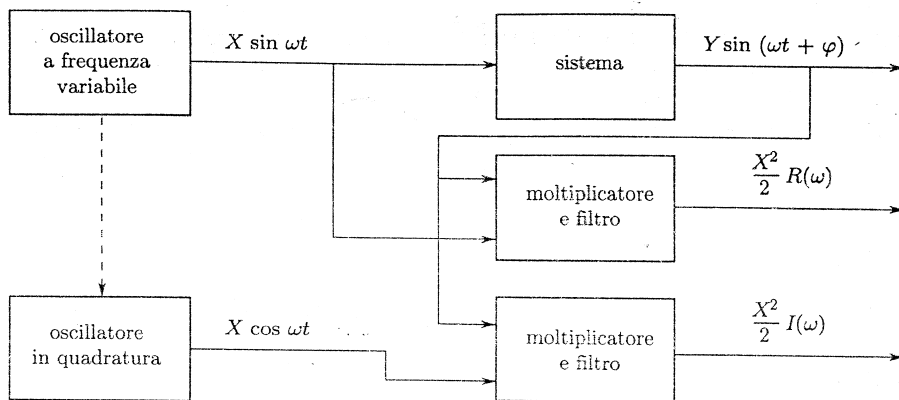
$$\frac{1}{mT} \int_{-mT/2}^{mT/2} d(t) X \cos \omega t dt = 0, \quad (3.71)$$

il procedimento conserva la sua validità.

Correlatore

Figura 3.34

Dispositivo correlatore per la rilevazione della funzione di risposta armonica.



Le (3.70), (3.71) sono certamente soddisfatte, per mT sufficientemente elevato, qualora $d(t)$ sia un segnale aleatorio, non correlato con il segnale d'ingresso applicato.

Si noti che le (3.68), (3.69) rappresentano, a meno di un fattore di proporzionalità, le formule per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier relativi all'armonica fondamentale.

Il dispositivo rappresentato in Fig. 3.34 si realizza normalmente con un elaboratore numerico provvisto di opportuni "convertitori analogico-digitali".

*Analizzatore di
risposta armonica*

Quando si procede per via numerica, anche il filtraggio risulta semplificato: negli *analizzatori digitali di risposta armonica* per ogni periodo dell'oscillazione applicata all'ingresso del sistema di cui si vuole determinare la funzione di risposta armonica si prendono N campioni dell'ingresso e dell'uscita, mediante convertitori analogico-digitali: i campioni vengono moltiplicati, per via numerica, per le funzioni $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ e sommati. Estendendo le somme a un numero intero m di periodi, si ottengono valori numerici proporzionali alle parti reale e immaginaria delle fondamentali dell'ingresso e dell'uscita, con filtraggio dei disturbi non correlati tanto più efficace quanto più grande è il valore di m : da essi, per elaborazione numerica, si deducono le parti reale e immaginaria, o il modulo e l'argomento, della funzione di risposta armonica.

Utilizzando tale procedura non è necessario che la perturbazione periodica applicata al sistema sia sinusoidale, come non è necessario che essa venga applicata direttamente all'ingresso del blocco di cui si vuole determinare la risposta armonica: ad esempio, si può determinare la risposta armonica del percorso di segnale diretto di un sistema in retroazione senza aprire l'anello, applicando la perturbazione al segnale di riferimento e analizzando il segnale errore e l'uscita.

Capitolo 4

Stabilità e sistemi in retroazione

Già nel Capitolo 2, analizzando il comportamento dei sistemi lineari stazionari soggetti a segnali tipici, come l'impulso e il gradino, si è riscontrata la possibilità di ottenere, anziché il raggiungimento di una condizione di equilibrio dopo la perturbazione, una risposta divergente al crescere del tempo: un sistema che presenti un tale comportamento si dice instabile. Utilizzando la trasformazione di Laplace si evidenzia il legame fra la stabilità del sistema e la posizione dei poli della sua funzione di trasferimento nel piano complesso. Nel presente capitolo il problema della stabilità viene ripreso da un punto di vista più rigoroso e vengono sottolineati i motivi che ne semplificano lo studio nel caso dei sistemi lineari, rispetto al caso generale dei sistemi non lineari. Con riferimento ai sistemi lineari stazionari, viene illustrato un criterio di stabilità, il criterio di Routh, che consente di dedurre informazione sulla posizione dei poli della funzione di trasferimento senza risolvere l'equazione caratteristica. Vengono quindi analizzate le proprietà principali dei sistemi in retroazione, per i quali la stabilità costituisce la specifica essenziale, e viene presentato un importante criterio di stabilità per sistemi lineari stazionari in retroazione, il criterio di Nyquist. In relazione ai sistemi in retroazione, oltre alla stabilità, vengono definite e analizzate altre importanti caratteristiche, che pure si traducono di regola in specifiche per il progettista, come il comportamento a regime, la sensibilità ai disturbi e alle variazioni di parametri, la banda passante.

4.1. Definizioni e teoremi relativi alla stabilità

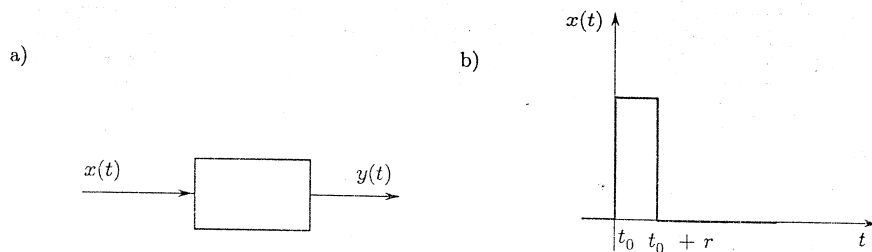
Per introdurre il concetto di stabilità, si fa riferimento ad un sistema a una sola variabile, schematizzato con il blocco di Fig. 4.1a, che si suppone in una *condizione di quiete* o *di equilibrio* all'istante $t = t_0$: ciò significa che per $t < t_0$ le variabili di ingresso e d'uscita sono nulle e che per $t \geq t_0$ l'uscita rimarrebbe nulla se l'ingresso non subisse variazioni. L'equilibrio ovviamente può corrispondere anche a valori costanti non nulli dell'ingresso e dell'uscita, potendosi questo caso ricondurre al precedente operando un opportuno cambiamento delle origini di riferimento delle variabili.

Si suppone che il sistema, inizialmente in quiete, venga perturbato, ad esempio applicando un segnale di ingresso diverso da zero per un intervallo

Condizione di quiete
Condizione di equilibrio

Figura 4.1

Sistema e perturbazione in ingresso.



di tempo di durata limitata τ , come quello rappresentato in Fig. 4.1b, il che si traduce in pratica in un cambiamento dello stato in $t_0 + \tau$ rispetto allo stato iniziale: la risposta a tale perturbazione può presentare tre diversi comportamenti:

Risposta limitata

1. *Risposta limitata* (Fig. 4.2a): esiste una costante M_y tale che sia

$$|y(t)| \leq M_y \quad \text{per ogni } t \geq t_0. \quad (4.1)$$

Risposta divergente

2. *Risposta divergente* (Fig. 4.2b): non esiste alcuna costante M_y che soddisfi la (4.1).

Risposta convergente asintoticamente a zero

3. *Risposta convergente asintoticamente a zero* (Fig. 4.2c): esiste una costante M_y che soddisfa la (4.1) ed inoltre è

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (4.2)$$

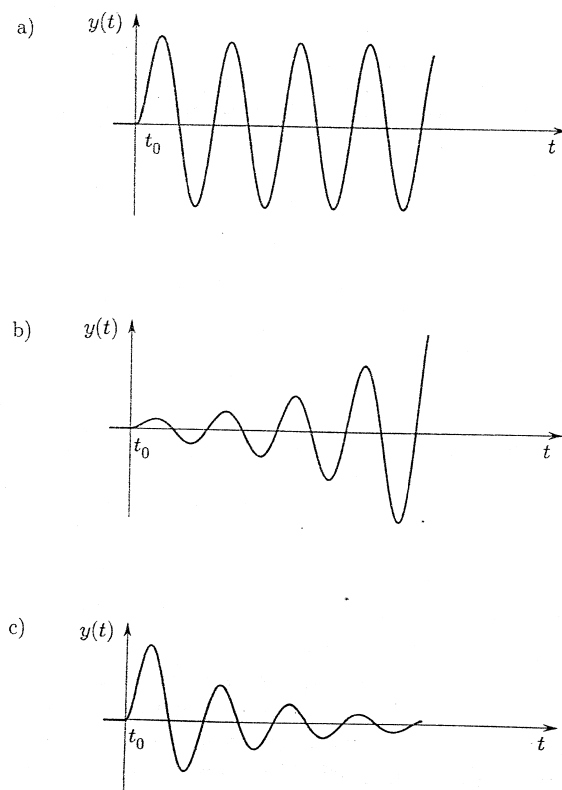
Sistema:
stabile
instabile

asintoticamente stabile
strettamente stabile

Il primo caso corrisponde ad un comportamento *stabile*, il secondo ad un comportamento *instabile*, il terzo ad un comportamento *asintoticamente stabile* o *strettamente stabile*.

Figura 4.2

Possibili risposte del sistema di Fig. 4.1a alla perturbazione di Fig. 4.1b.



Per un sistema non lineare il comportamento può essere diverso al variare sia del punto di equilibrio considerato sia dell'entità della perturbazione applicata: un punto di equilibrio si dice *globalmente stabile* o *globalmente asintoticamente stabile* se è rispettivamente stabile o asintoticamente stabile per perturbazioni di qualunque entità. Se ciò avviene in qualunque punto di equilibrio, si dice che *il sistema* (e non più il punto di equilibrio) è globalmente stabile o globalmente asintoticamente stabile.

*Punto di equilibrio
globalmente stabile*

*Sistema globalmente
stabile*

Nel caso dei sistemi lineari invece il comportamento non dipende né dal particolare punto di equilibrio considerato né dall'entità della perturbazione applicata: ciò è conseguenza della proprietà di sovrapposizione degli effetti: poiché tale proprietà deve essere soddisfatta in ogni condizione di quiete, se le risposte a due perturbazioni dell'ingresso identiche applicate in due diversi punti di equilibrio fossero diverse, per differenza risulterebbe la possibilità di avere una risposta diversa da zero in presenza di una perturbazione identicamente nulla, il che è manifestamente assurdo. Inoltre sempre dalla proprietà di linearità risulta che, poiché se si moltiplica la perturbazione per una costante, anche la risposta va moltiplicata per la stessa costante, il tipo di risposta rimane il medesimo al variare dell'entità della perturbazione.

È pertanto legittimo affermare che un sistema lineare (e non un particolare stato di equilibrio) è stabile, instabile, strettamente stabile a seconda che la sua risposta ad una qualunque perturbazione abbia il primo, il secondo, il terzo dei tipici andamenti rappresentati in Fig. 4.2.

Nel caso dei sistemi lineari stazionari a costanti concentrate, cioè con funzioni di trasferimento razionali fratte, cui è stata dedicata gran parte della precedente analisi, la stabilità è legata alla posizione dei poli della funzione di trasferimento nel piano complesso: infatti la risposta di un sistema descritto da un'equazione differenziale del tipo (2.5) ad un'azione perturbatrice che, senza ledere la generalità, si può pensare completamente svolta prima dell'istante $t = 0$, rientra nella classe dei segnali la cui trasformata è data dalla (2.35), cioè è un rapporto di polinomi, in cui il polinomio a denominatore coincide con il denominatore della funzione di trasferimento.

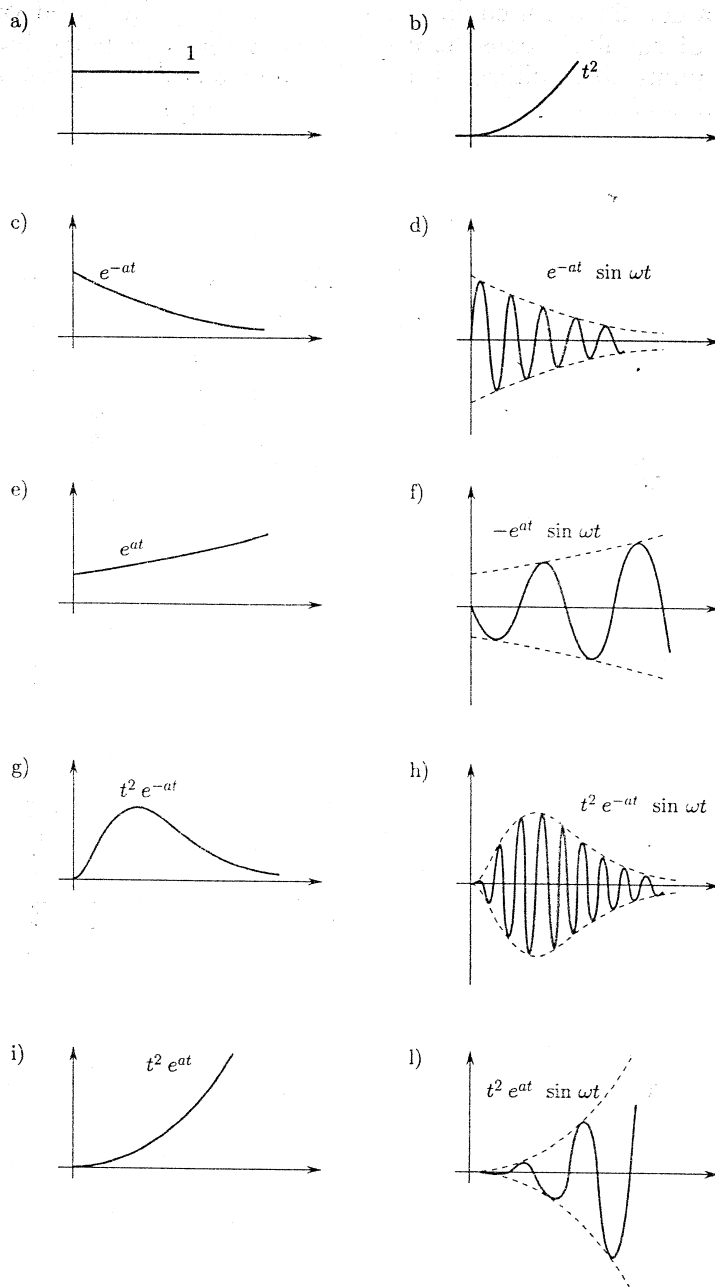
La risposta consiste in una somma di termini del tipo (2.58) nel caso di poli semplici o (2.59) nel caso di poli multipli, che si dicono *modi* della risposta stessa. Esempi di modi sono riportati in Fig. 4.3: essi si riferiscono rispettivamente al caso di un polo semplice nell'origine (a), di un polo triplo nell'origine (b), di un polo semplice reale negativo (c), di una coppia di poli semplici complessi a parte reale negativa (d), di un polo semplice reale positivo (e), di una coppia di poli semplici a parte reale positiva (f), di un polo multiplo reale negativo (g), di una coppia di poli multipli complessi a parte reale negativa (h), di un polo multiplo reale positivo (i), di una coppia di poli multipli a parte reale positiva (ℓ). Si fa presente che dalla formula di antitrasformazione (2.57) risulta che un polo reale o una coppia di poli complessi coniugati di ordine di molteplicità r in genere dà luogo a r diversi modi.

Considerando il comportamento dei modi per t tendente all'infinito, si può enunciare il seguente risultato.

TEOREMA 4.1.1 (relazione fra stabilità e posizione dei poli). Per la stabilità di un sistema lineare stazionario a costanti concentrate è necessario e sufficiente che la funzione di trasferimento non presenti alcun polo a parte reale positiva e che gli eventuali poli a parte reale nulla siano semplici. Per la stabilità asintotica è necessario e sufficiente che tutti i poli abbiano parte reale negativa.

Figura 4.3

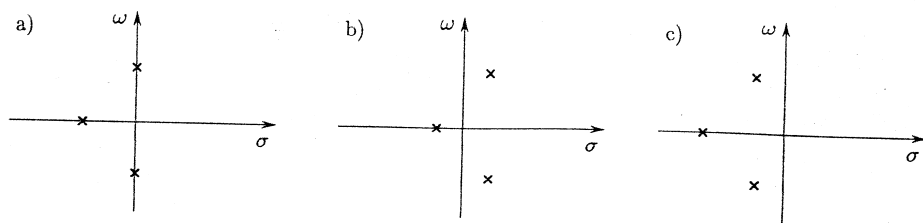
Esempi di modi della risposta.



In Fig. 4.4a-c sono riportate possibili posizioni dei poli della funzione di trasferimento di un sistema stabile (a), instabile (b), asintoticamente stabile (c).

Figura 4.4

Posizioni dei poli corrispondenti a risposte dei tipi di Fig. 4.2a-c.



Nella tecnica ciò che si richiede usualmente in relazione ai sistemi di controllo è la stabilità asintotica: in generale infatti si vuole che l'effetto di ogni disturbo o perturbazione tenda a scomparire con il passare del tempo.

Oltre alla *stabilità a seguito di perturbazioni*, precedentemente introdotta, si fa spesso riferimento ad un altro tipo o definizione di stabilità, la *stabilità ingresso limitato - uscita limitata* (i.l.u.l.), che può essere definita come segue: *un sistema riferito ad uno stato di equilibrio in cui ingresso e uscita sono identicamente nulli si dice stabile ingresso limitato - uscita limitata in tale stato di equilibrio se ad ogni segnale di ingresso che non superi un determinato limite presenta una risposta limitata.*

In termini più precisi un sistema è stabile ingresso limitato - uscita limitata in un dato stato di equilibrio se ad ogni costante positiva M_x si può associare una costante positiva M_y tale che per ogni segnale di ingresso $x(t)$ soddisfacente la

$$|x(t)| \leq M_x \quad \text{per ogni } t \geq t_0, \quad (4.3)$$

la corrispondente risposta $y(t)$ soddisfi la

$$|y(t)| \leq M_y \quad \text{per ogni } t \geq t_0. \quad (4.4)$$

Il significato delle limitazioni (4.3) e (4.4) è illustrato in Fig. 4.5.

Nel caso dei sistemi non lineari anche la stabilità i.l.u.l. dipende in generale dal punto di equilibrio considerato e dall'entità della perturbazione, cioè dal valore di M_x , nel senso che la possibilità di associare a un M_x un M_y per cui sia soddisfatta la definizione può sussistere solo qualora M_x non superi un dato valore, dipendente dal punto di equilibrio considerato.

Nel caso dei sistemi lineari invece, con considerazioni analoghe a quelle precedentemente riportate in relazione alla stabilità in presenza di perturbazioni, si può dimostrare che la stabilità i.l.u.l. non dipende né dal punto di equilibrio considerato né dal valore di M_x : se le (4.3), (4.4) sono soddisfatte per due generici valori M_x e M_y , saranno pure soddisfatte per i valori αM_x e αM_y , con α costante positiva arbitraria.

In relazione alla stabilità i.l.u.l. dei sistemi lineari, in generale anche non stazionari, vale il seguente risultato, la cui dimostrazione è riportata al Paragrafo C4.2.

TEOREMA 4.1.2 (relazione fra stabilità i.l.u.l. e risposta all'impulso).

Un sistema lineare è stabile i.l.u.l. se e solo se è soddisfatta la relazione

$$\int_{t_0}^t |g(t, \tau)| d\tau \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq t_0, \quad (4.5)$$

che nel caso dei sistemi lineari stazionari assume la forma

$$\int_0^\infty |g(\tau)| d\tau \leq M < \infty. \quad (4.6)$$

Le condizioni di stabilità (4.5) e (4.6) sono di notevole generalità, potendosi riferire a sistemi lineari non stazionari e sistemi lineari a costanti distribuite, per i quali il modello matematico più frequentemente adottato è la funzione di risposta all'impulso.

Per i sistemi lineari stazionari descritti da funzioni di trasferimento razionali fratte si può facilmente verificare d'altronde che la condizione (4.6) implica ed è implicata dalla stabilità asintotica, per cui per la stabilità i.l.u.l. è necessario e sufficiente che tutti i poli della funzione di trasferimento siano a parte reale negativa.

*Stabilità a seguito
di perturbazioni
Stabilità ingresso
limitato - uscita limitata*

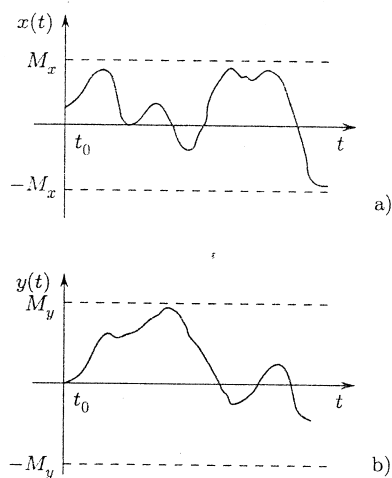


Figura 4.5

Funzioni di ingresso e di uscita di un sistema stabile i.l.u.l.

4.2. Il criterio di Routh

Si è sottolineato al precedente paragrafo che la stabilità dei sistemi lineari stazionari con funzione di trasferimento razionale fratta è legata alla posizione, nel piano complesso, dei poli della funzione di trasferimento, che sono le radici di un'equazione algebrica del tipo

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (4.7)$$

Equazione caratteristica

che, come si è specificato al Paragrafo 2.2, si dice *equazione caratteristica* del sistema.

Poiché la determinazione delle radici dell'equazione caratteristica comporta calcoli non semplici se, come spesso accade, essa è di grado elevato, risulta utile un criterio che consenta di determinare, eseguendo un esame dei coefficienti, il segno della parte reale delle radici stesse.

Nel seguito si supporrà che il coefficiente a_n sia positivo: ciò ovviamente non lede la generalità perché, in caso contrario, basterebbe moltiplicare per -1 ambo i membri dell'equazione (4.7). Si supporrà inoltre che il coefficiente a_0 sia non nullo, perché a tal caso ci si può sempre ricondurre dividendo ambo i membri per una potenza di s , col che viene separata una radice nulla di corrispondente ordine di molteplicità.

Si verifica facilmente che se l'equazione (4.7) ha radici tutte con parte reale negativa, cioè se il corrispondente sistema è asintoticamente stabile, tutti i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono positivi.

In altre parole, *condizione necessaria* (ma non sufficiente) perché le radici della (4.7) abbiano tutte parte reale negativa è che sia

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_{n-1} > 0, \quad a_n > 0. \quad (4.8)$$

Indicando infatti con $\rho_1, \dots, \rho_k$ le k radici reali e con $\sigma_1 + j\omega_1, \sigma_1 - j\omega_1, \dots, \sigma_h + j\omega_h, \sigma_h - j\omega_h$, con $h = (n - k)/2$, le $n - k$ radici complesse, il polinomio a primo membro della (4.7) si può scrivere nella forma fattorizzata

$a_n (s - \rho_1) \dots (s - \rho_k) (s - \sigma_1 - j\omega_1)(s - \sigma_1 + j\omega_1) \dots (s - \sigma_h - j\omega_h)(s - \sigma_h + j\omega_h)$: basta eseguire i prodotti indicati per verificare che, nell'ipotesi che le radici siano tutte a parte reale negativa, i coefficienti del polinomio che si ottiene sono tutti positivi.

Criterio di Routh

Un modo per determinare il segno della parte reale delle radici dell'equazione polinomiale (4.7) è dato dal *criterio di Routh*.

Tabella di Routh

Per applicare il criterio di Routh occorre anzitutto costruire con i coefficienti del polinomio la seguente *tabella di Routh*:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$		

Le prime due righe della tabella sono formate dai coefficienti del polinomio, disposti come è indicato, a partire da quello corrispondente alla potenza più elevata. Gli elementi della riga successiva sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots, \quad (4.10)$$

cioè il termine b_{n-2} è espresso dal determinante costituito dai primi due coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso per il primo

coefficiente della seconda riga, il termine b_{n-4} è espresso dal determinante costituito dai primi e terzi coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso ancora per il primo coefficiente della seconda riga, e così via.

In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

Le righe della tabella sono contraddistinte con i numeri $n, n-1, \dots$ e sono di lunghezza via via decrescente: l'ultima riga, contraddistinta con il numero 0, comprende un solo elemento.

Vale il seguente teorema, che consente di determinare, con la costruzione della tabella, il segno della parte reale delle radici della (4.7).

◆ **Criterio di Routh.** *Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella, considerati successivamente, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa.*

La dimostrazione del criterio di Routh è alquanto complessa e non viene qui riportata. In base al criterio di Routh, se tutti i termini della prima colonna hanno lo stesso segno (cioè sono positivi, essendosi supposto positivo il coefficiente a_n), tutte le radici hanno parte reale negativa. Si noti che il criterio di Routh non si applica quando la (4.7) presenta radici puramente immaginarie, cioè con parte reale nulla. Anche questo caso potrà peraltro essere incluso mediante un'estensione che verrà presentata nel seguito.

ESEMPIO 4.2.1 Data l'equazione

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0,$$

la corrispondente tabella di Routh è

3	1	1
2	-4	6
1	$\frac{-4-6}{-4} = 2,5$	0
0	$\frac{2,5 \cdot 6}{2,5} = 6$	

La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: pertanto si hanno due radici a parte reale positiva. Infatti le radici dell'equazione sono $-1, 2, 3$.

ESEMPIO 4.2.2 Data l'equazione

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0,$$

la corrispondente tabella di Routh è

4	2	3	10
3	1	5	0
2	-7	10	
1	$\frac{45}{7}$	0	
0	10		

La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: anche in questo caso due radici hanno parte reale positiva.

Si può facilmente verificare che, durante la costruzione della tabella, i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo senza che ciò modifichi il numero delle variazioni di segno nella prima colonna.

Impiegando tale proprietà, si può evitare che nella tabella compaiano numeri frazionari, a partire da un polinomio con coefficienti interi: nel calcolo degli elementi di una o più righe si può fare a meno di dividere per il primo elemento della riga superiore, limitandosi a un cambiamento di segno se esso è negativo.

ESEMPIO 4.2.3 Nel caso dell'equazione

$$4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0,$$

si può costruire la tabella di Routh dove tutte le radici hanno parte reale negativa.

4	4	5	1
3	3	2	0
2	7	3	
1	5	0	
0	3		

(non si è diviso per 3)
(non si è diviso per 7)

Durante la costruzione della tabella di Routh si possono presentare i seguenti casi singolari, che non consentono di portarla a termine:

- i) il primo termine di una riga è nullo;
- ii) tutti i termini di una riga sono nulli.

Nel caso i la costruzione della tabella può essere completata considerando, in luogo del termine nullo, un termine $+\epsilon$ o $-\epsilon$ di modulo piccolo a piacere. Come si è notato poco fa, non è necessario dividere la riga successiva per il termine in questione, ma solo tener conto del suo segno, da cui peraltro non dipende il risultato dell'analisi della tabella di Routh.

ESEMPIO 4.2.4 Si consideri l'equazione

$$s^3 + 3s - 2 = 0.$$

La tabella di Routh, nei due casi in cui si assegnino rispettivamente il segno positivo e il segno negativo al termine ϵ , è

3	1	3	3	1	3
2	$+\epsilon$	-2	2	$-\epsilon$	-2
1	$3\epsilon + 2$		1	$3\epsilon - 2$	
0	-2		0	-2	

Nella prima colonna si riscontra una variazione di segno, che rivela la presenza di una radice a parte reale positiva.

Metodo ϵ

Quanto esposto costituisce il cosiddetto *metodo ϵ* per completare il quadro di Routh nel primo caso singolare. Non sempre è di agevole impiego, in quanto si possono avere quadri di Routh con più zeri come primi elementi di una riga e, comunque, continuando il quadro in forma simbolica (con i vari elementi funzioni di ϵ e delle sue potenze) in genere non è facile stabilire quali elementi siano infinitesimi rispetto ad altri. Un'elegante procedura che può vantaggiosamente sostituire il metodo ϵ è la seguente: ogni riga iniziante con un certo numero h di zeri viene sommata con la riga da essa ottenuta moltiplicando per $(-1)^h$ e traslando verso sinistra di h posizioni; il quadro di Routh poi viene continuato ed interpretato nel modo usuale.⁽¹⁾

⁽¹⁾ Benidir, M. e Pincibono, B., "Extended table for eliminating the singularities in Routh's array", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 35, n. 2, pp. 218-222, 1990.

ESEMPIO 4.2.5 Nel caso dell'Esempio 4.2.4 si ha il quadro

3	1	3
2'	0	-2
2''	2	0
2	2	-2
1	4	
0	-2	

da cui risulta una variazione di segno nella prima colonna. Il risultato è in accordo con quello fornito dal metodo ϵ .

Nel caso *ii*, in cui è presente una riga tutta nulla, la costruzione della tabella non può essere in alcun modo proseguita. Peraltro questo caso si verifica sempre in corrispondenza di una riga contraddistinta da un numero dispari: sia esso $2m - 1$. Le eventuali variazioni di segno che si verificano nella prima colonna della tabella, relative alle prime $n - 2m + 1$ righe, riguardano solo $n - 2m$ radici del polinomio: ogni variazione di segno corrisponde ad una radice a parte reale positiva, ogni permanenza ad una radice a parte reale negativa.

Per dedurre informazione sulla posizione delle restanti $2m$ radici, si può procedere nel seguente modo. Siano

$$b_{2m}, b_{2m-2}, \dots, b_0$$

i termini della riga immediatamente precedente la riga di tutti zeri. Si costruisce l'*equazione ausiliaria*

$$b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2} s^{2m-2} + \dots + b_0 = 0 \quad (4.11)$$

Equazione ausiliaria

e la si risolve: le sue radici coincidono con le $2m$ radici dell'equazione polinomiale in esame sulle quali la tabella di Routh non ha fornito informazione.

Poiché nell'equazione ausiliaria mancano i termini di grado dispari, le radici sono disposte simmetricamente rispetto all'origine, com'è indicato in Fig. 4.6.

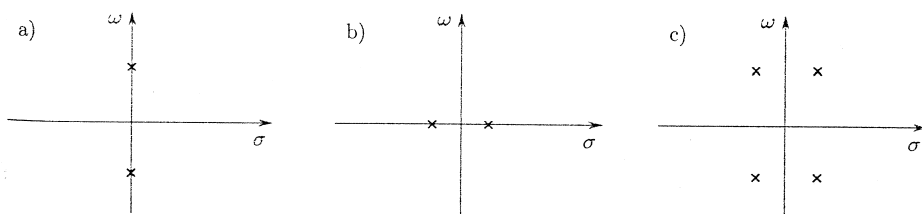


Figura 4.6

Possibili posizioni delle radici dell'equazione ausiliaria.

Infatti l'equazione ausiliaria si riconduce ad un'equazione di grado m operando la posizione

$$s^2 = z \quad (4.12)$$

Ogni radice reale negativa dell'equazione algebrica di grado m nella variabile z che così si ottiene corrisponde, nell'equazione (4.12), a due radici immaginarie (Fig. 4.6a), ogni radice reale positiva a due radici reali simmetriche rispetto all'origine (Fig. 4.6b), ogni coppia di radici complesse coniugate a due coppie di radici complesse coniugate simmetriche rispetto all'origine

(Fig. 4.6c). Pertanto l'equazione ausiliaria ha tante radici a parte reale positiva quante sono le sue radici a parte reale negativa e può presentare anche radici a parte reale nulla.

L'equazione ausiliaria si può risolvere in pratica solo se non è di grado elevato, cioè solo se è $2m = 4$ o $2m = 2$. Se invece essa è di grado troppo elevato, se ne deriva il primo membro e si prosegue la tabella di Routh disponendo i coefficienti del polinomio così ottenuto in corrispondenza della riga di tutti zeri: il numero delle variazioni di segno che si verificano nella prima colonna della tabella così proseguita, a partire dalla riga contraddistinta con il numero $n - 2m + 1$, è uguale al numero delle radici dell'equazione ausiliaria a parte reale positiva. Le eventuali radici immaginarie non portano a variazioni di segno, così come quelle a parte reale negativa.

ESEMPIO 4.2.6 Data l'equazione polinomiale

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0,$$

si costruisce la tabella

4	1	-3	2
3	1	-1	0
2	-2	2	
1'	0	-0	

La tabella fornisce informazione solo su due delle quattro radici dell'equazione: una di esse ha parte reale negativa, l'altra parte reale positiva.

ESEMPIO 4.2.7 La tabella di Routh corrispondente all'equazione polinomiale

$$s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

è

6	1	-2	-7	-4
5	1	-3	-4	
4	1	-3	-4	
3'	0	0	0	

Presentandosi una riga di tutti zeri, si ricava l'equazione ausiliaria

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0,$$

le cui radici, in s^2 , sono

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

L'equazione ausiliaria è

$$-2s^2 + 2 = 0$$

e si può risolvere facilmente: le radici sono $-1, 1$. In alternativa, derivando l'equazione ausiliaria si può proseguire la tabella, ottenendo

1	-4	0
0	2	

e dall'esame della prima colonna si deduce, come deve essere, un'altra variazione di segno.

Estraendo la radice quadrata, si ricavano le quattro radici in s :

$$s_1 = j, \quad s_2 = -j, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = -2.$$

In alternativa, si può derivare l'equazione ausiliaria e proseguire la tabella:

3	4	-6
2	-6	-16
1	-100	0
0	-16	

La tabella presenta una sola variazione di segno nella prima colonna, corrispondente a una sola radice a parte reale positiva ($+2$).

Si noti che la costruzione della tabella di Routh, proseguita eventualmente derivando l'equazione ausiliaria, fornisce informazione sul segno di tutte le radici dell'equazione polinomiale. La parte della tabella prima della riga di tutti zeri, con le permanenze o variazioni di segno degli elementi della prima colonna, fornisce informazione diretta sul segno della parte reale di un certo numero di radici, fra le quali ovviamente non vi sono mai radici

immaginarie. Per ogni variazione di segno degli elementi della prima colonna della parte di tabella restante, costruita derivando l'equazione ausiliaria, si ha un'ulteriore radice a parte reale positiva. Per la proprietà di simmetria illustrata in Fig. 4.6, le ulteriori radici a parte reale negativa sono in numero uguale: le restanti radici, per giungere al numero complessivo di n , sono immaginarie.

ESEMPIO 4.2.8 Si consideri l'equazione polinomiale

$$s^8 + s^7 + s^6 + s^5 + s^2 + 1 = 0,$$

cui corrisponde il quadro di Routh a fianco. La prima colonna presenta quattro permanenze e due variazioni prima della derivazione dell'equazione ausiliaria (ricavata dalla riga 2, sopra una riga di tutti zeri) e due permanenze dopo tale derivazione. Le radici del polinomio sono pertanto quattro a parte reale negativa, due a parte reale positiva e due immaginarie.

8	1	1	0	1	1
7	1	1	0	0	
6'	0	0	1	1	
6''	1	1	0	0	
6	1	1	1	1	
5'	0	-1	-1		
5''	1	1	0		
5	1	0	-1		
4	1	2	1		
3	-2	-2			
2	1	1			
1'	0	0			
1	2	0			
0	1				

Il criterio di Routh è di grande utilità nel progetto di dispositivi di controllo in retroazione: spesso i coefficienti dell'equazione caratteristica sono funzioni di un parametro, del quale è utile determinare i campi di variabilità in corrispondenza dei quali il sistema è stabile, onde sceglierne il valore entro uno di tali campi.

Nella maggior parte dei casi il parametro in questione è la costante di guadagno di anello; può essere però anche un parametro caratteristico di una rete correttiva. La determinazione dei campi di variabilità del parametro per i quali il sistema è stabile si può eseguire facilmente, imponendo che i termini della prima colonna della tabella di Routh abbiano tutti lo stesso segno.

ESEMPIO 4.2.9 L'equazione caratteristica del sistema in retroazione di Fig. 4.7 è

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2 = 0.$$

La corrispondente tabella di Routh è

4	1	11	$K + 2$
3	6	6	0
2	10	$K + 2$	
1	$48 - 6K$	0	
0	$K + 2$		

Per la stabilità asintotica si deducono le condizioni $48 - 6K > 0$ (da cui $K < 8$) e $K + 2 > 0$ (da cui $K > -2$). Il campo corrispondente alla stabilità asin-

totica del sistema è pertanto $-2 < K < 8$. Quando K assume il valore limite inferiore dell'intervallo di stabilità (-2) si ha un polo nell'origine, quando assume il valore limite superiore ($K^* = 8$) si ha una coppia di poli immaginari: in entrambi i casi il sistema è stabile, ma non asintoticamente.

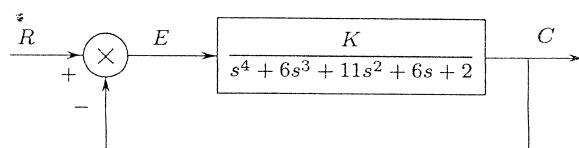


Figura 4.7
Sistema in retroazione.

Guadagno limite

Se il sistema ad anello aperto è stabile, a fase minima ed ha la costante di guadagno positiva, il sistema in retroazione in corrispondenza del *guadagno limite* K^* presenta sempre una coppia di poli immaginari che si determinano risolvendo l'equazione ausiliaria corrispondente all'annullarsi della penultima riga della tabella. Questa proprietà dipende dalla disposizione degli asintoti del luogo delle radici: infatti i rami che eventualmente lasciano il semipiano sinistro e tendono all'infinito sono sempre complessi coniugati.

Se il sistema ad anello aperto presenta un polo nell'origine, il sistema in retroazione non può essere stabile per valori negativi di K in quanto l'ultimo elemento della tabella è appunto K .

4.3. Proprietà generali dei sistemi in retroazione

Lo schema a blocchi tipico cui si può normalmente ricondurre un sistema dinamico in retroazione è rappresentato in Fig. 4.8a. Il significato dei simboli è:

$r(t)$: *segnale di riferimento* (o "set point");

$c(t)$: *variabile controllata*;

$e(t)$: *segnale errore*;

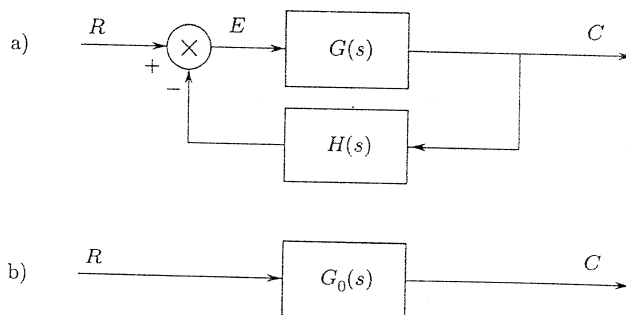
$G(s)$: *funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta* (o del *percorso di segnale diretto*);

$H(s)$: *funzione di trasferimento del trasduttore di segnale di retroazione* (o del *percorso di segnale di retroazione*);

$G(s)H(s)$: *guadagno di anello*.

Figura 4.8

Sistema in retroazione e sua forma minima.



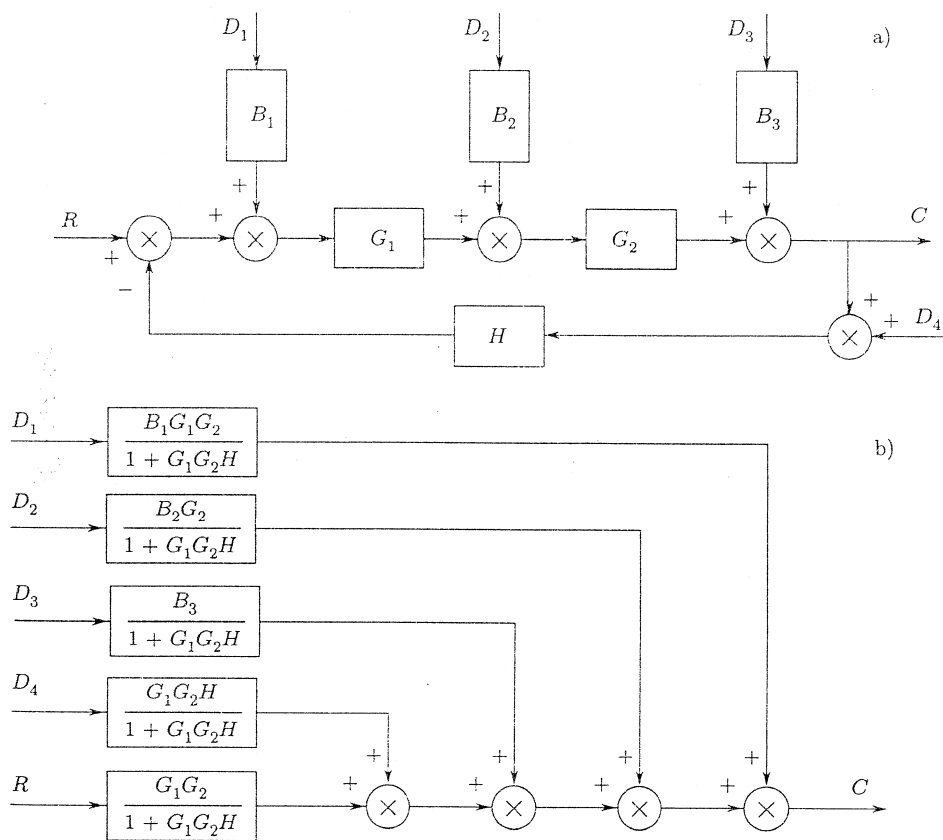
La determinazione della funzione di trasferimento complessiva, e quindi la riduzione dello schema a blocchi alla forma minima rappresentata in Fig. 4.8b, è immediata, facendo uso della regola 8 della riduzione degli schemi a blocchi (vedi Paragrafo 1.2). Si deduce che la funzione di trasferimento della forma minima è data dal rapporto fra la funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto e la somma dell'unità più il guadagno di anello:

$$G_0(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.13)$$

Nello schema di Fig. 4.8a la funzione di trasferimento $G(s)$ descrive il comportamento dinamico degli apparati amplificatori di segnale e potenza del

dispositivo di controllo, dell'eventuale rete corretttrice, dell'attuatore e del sistema controllato, mentre la funzione di trasferimento $H(s)$ è relativa al solo trasduttore di misura per la retroazione, che normalmente è estremamente pronto, in confronto agli apparati precedentemente citati. In molti casi si potrà pertanto assumere che la funzione di trasferimento del trasduttore di misura sia data da una semplice costante h .

Nel caso che, come spesso accade, si abbiano ingressi in più punti dell'anello (che possono rappresentare, ad esempio, dei disturbi), la regola per la riduzione dello schema a blocchi è analoga: per ricavare la funzione di trasferimento che rappresenta l'effetto di un singolo ingresso sulla variabile controllata, basta dividere la funzione di trasferimento che si avrebbe in assenza di retroazione in relazione al medesimo ingresso per la somma dell'unità più il guadagno di anello. Essendo il sistema lineare, ogni ingresso può essere considerato separatamente.

**Figura 4.9**

Sistema in retroazione a più ingressi e sua forma minima.

Dallo schema di Fig. 4.9a si può così passare alla forma minima di Fig. 4.9b. I segnali $d_1(t)$, $d_2(t)$ e $d_3(t)$ rappresentano disturbi agenti in vari punti della catena di amplificazione diretta, mentre $d_4(t)$ è il *disturbo sulla misura*, riferito all'ingresso del trasduttore di misura.

Disturbo sulla misura

Si è notato al Capitolo 1 che, per un buon comportamento del sistema per ciò che riguarda l'insensibilità ai disturbi e ad eventuali nonlinearità presenti nella catena di amplificazione diretta, è opportuno che il guadagno di anello sia il più elevato possibile: tale risultato è stato dedotto al Paragrafo 1.3 con riferimento ai modelli statici, cioè considerando il solo comportamento a regime, e verrà ora estesa al caso, più generale, dei sistemi dinamici.

◆ Sensibilità alla variazione di parametri

Si suppone che un parametro α della funzione di trasferimento di un sistema, ad esempio un coefficiente o una costante di tempo, subisca una piccola variazione $\Delta\alpha$ rispetto al valore nominale α_0 .

La funzione di trasferimento "nominale" sia $G(s, \alpha_0)$; la nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

$$G(s, \alpha_0 + \Delta\alpha) = G(s) + \Delta G(s), \quad (4.14)$$

in cui per semplicità di notazione si è posto

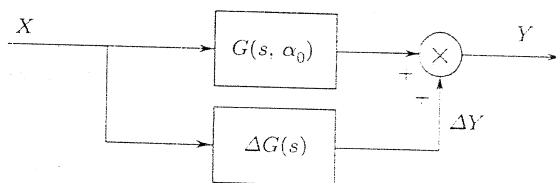
$$G(s) = G(s, \alpha_0), \quad \Delta G(s) = \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha. \quad (4.15)$$

Se il sistema è soggetto a un segnale d'ingresso la cui trasformata sia $X(s)$, la variazione del parametro porta a una variazione dell'uscita la cui trasformata, in prima approssimazione, può esprimersi come $\Delta Y(s) = \Delta G(s) X(s)$.

Tale variazione può schematizzarsi come se fosse dovuta alla presenza di un blocco in parallelo (Fig. 4.10).

Figura 4.10

Messa in conto in prima approssimazione degli effetti della variazione di un parametro.



Nei sistemi in retroazione, se vale la condizione che il guadagno di anello sia elevato, l'effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che si verifichi nella catena di amplificazione diretta o nel percorso di retroazione: infatti, come si verificherà tra poco, una variazione della funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta $G(s)$ produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ molto minore, mentre, al contrario, una variazione della funzione di trasferimento del percorso di retroazione $H(s)$ produce in $G_0(s)$ una variazione dello stesso ordine di grandezza.

In presenza della variazione $\Delta\alpha$ di un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto $G(s)$ (o meglio, $G(s, \alpha_0)$) si ha

$$\begin{aligned} \Delta G_0(s) &= \frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{G}{1 + GH} \right) \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha \\ &= \frac{1}{(1 + G(s)H(s))^2} \Delta G(s), \end{aligned}$$

in cui $\Delta G(s)$ è definita dalla (4.15). Per le variazioni relative si ha

$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.16)$$

Per interpretare la (4.16), che involve funzioni di variabile complessa, si considera la funzione di risposta armonica

$$\frac{\Delta G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} = \frac{1}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)},$$

e, per i moduli,

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + G(j\omega) H(j\omega)|} \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}.$$

Per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione

$$|G(j\omega) H(j\omega)| \gg 1,$$

si può scrivere

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}, \quad (4.17)$$

il che significa che l'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di $G(s)$ e per le frequenze per le quali il guadagno di anello è sufficientemente elevato è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto.

Non è così invece in presenza di una variazione $\Delta\beta$ di un parametro di $H(s)$. Infatti in questo secondo caso si deduce

$$\begin{aligned} \Delta G_0(s) &= \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{G}{1 + GH} \right) \frac{\partial H}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} \Delta\beta \\ &= - \frac{G^2(s)}{(1 + G(s) H(s))^2} \Delta H(s), \end{aligned}$$

in cui si è posto

$$\Delta H(s) = \frac{\partial H}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} \Delta\beta. \quad (4.18)$$

Per le variazioni relative si ha

$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s) H(s)}{1 + G(s) H(s)} \frac{\Delta H(s)}{H(s)}. \quad (4.19)$$

Gli errori relativi sono pertanto dello stesso ordine di grandezza.

◆ Sensibilità ai disturbi - Funzione di sensibilità e di sensibilità complementare

Sia $d(t)$ un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta, in un sistema di controllo in retroazione (vedi Fig. 4.11).

In assenza e in presenza di retroazione le trasformate della variazione dell'uscita dovuta al disturbo sono rispettivamente

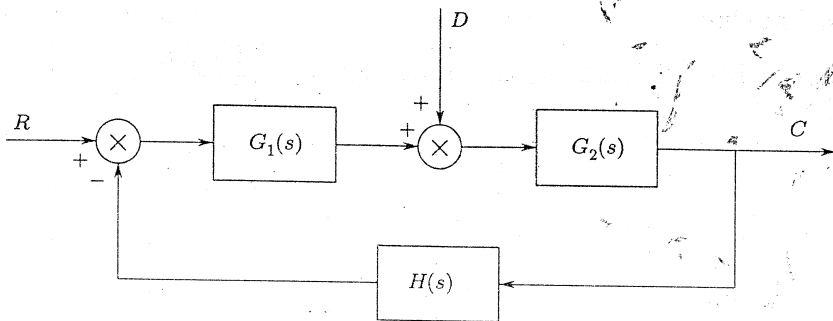
$$C'_d(s) = G_2(s) D(s),$$

$$C''_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G(s) H(s)} D(s), \quad \text{con } G(s) = G_1(s) G_2(s).$$

Affinché il confronto sia congruente si deve supporre che la funzione di trasferimento relativa al segnale di ingresso utile $r(t)$ sia, nei due casi, la medesima $G_0(s)$. Sotto tale ipotesi i rapporti fra il disturbo e il segnale d'uscita valgono, nei due casi

$$\frac{C'_d(s)}{C'_r(s)} = \frac{G_2(s)}{G_0(s)} \frac{D(s)}{R(s)}, \quad (4.20)$$

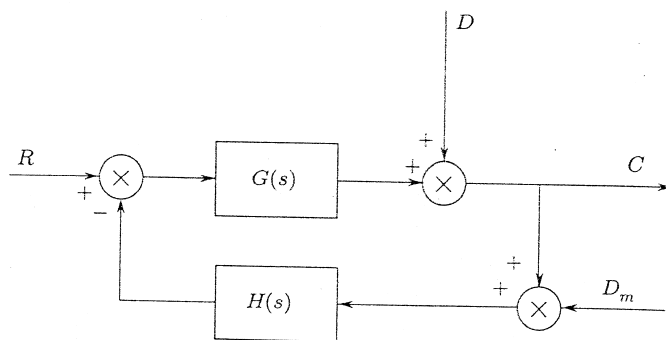
$$\frac{C''_d(s)}{C''_r(s)} = \frac{1}{(1 + G(s) H(s))} \frac{G_2(s)}{G_0(s)} \frac{D(s)}{R(s)}. \quad (4.21)$$

Figura 4.11Sistema in retroazione
soggetto a un disturbo.

Interpretando le precedenti relazioni in termini di risposta armonica, si può affermare che in presenza di retroazione il rapporto disturbo/segnale viene moltiplicato per il fattore $1/|1 + G(j\omega)H(j\omega)|$ e pertanto fortemente diminuito se nella banda di frequenza del disturbo vale la relazione $|G(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$. All'inverso di tale fattore espresso in dB si dà il nome di *reiezione del disturbo* alla pulsazione ω .

La funzione $S(s) := 1/(1 + G(s)H(s))$ viene detta *funzione di sensibilità*. La funzione $S(j\omega)$ rappresenta, alle varie pulsazioni, il fattore moltiplicativo che la presenza della retroazione produce per gli errori relativi dovuti alle variazioni parametriche e ai disturbi. Tale fattore non sempre corrisponde a una riduzione. Infatti la funzione di sensibilità può avere modulo sensibilmente maggiore di uno in prossimità della *pulsazione di incrocio*, cioè della pulsazione alla quale il guadagno di anello è unitario, e vale uno alle alte frequenze.

Di particolare interesse nelle procedure di sintesi sono i disturbi indicati in Fig. 4.12: si noti che la funzione di trasferimento fra il disturbo sull'uscita $D(s)$ e l'uscita $C(s)$ coincide con la funzione di sensibilità $S(s)$, mentre la funzione di trasferimento $S_c(s) := G(s)H(s)S(s)$, fra il rumore sulla misura $D_m(s)$ e l'uscita $C(s)$, viene denominata *funzione di sensibilità complementare*. Vale infatti la relazione $S(s) + S_c(s) = 1$.

Figura 4.12Disturbo sull'uscita e
sulla misura.

ESEMPIO 4.3.1 Si considerino le funzioni di trasferimento di anello

$$G(s)h = \frac{1000}{(s+1)(s+10)}$$

e

$$G(s)h = \frac{1000}{s(s+10)},$$

i cui diagrammi di Bode delle ampiezze sono riportati a tratto pieno rispettivamente in Fig. 4.13a e in Fig. 4.13b. I diagrammi di Bode delle corrispondenti funzioni di sensibilità e di sensibilità complementare sono tracciati a tratto e a punti nelle stesse figure.

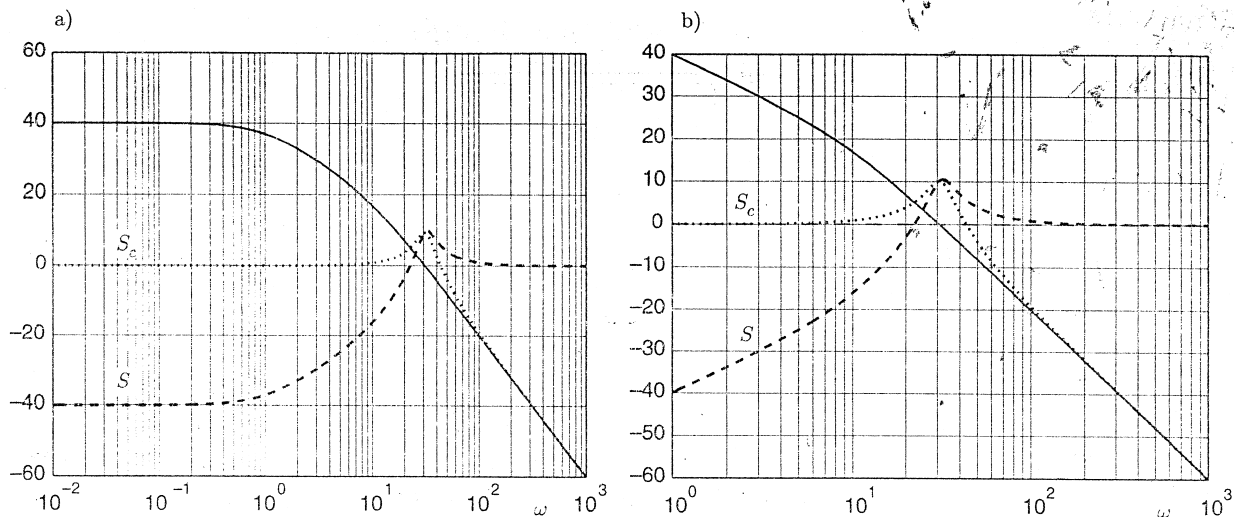


Figura 4.13

Esempi di funzioni di sensibilità e di sensibilità complementare.

◆ Banda passante

La *banda passante* di un sistema in retroazione avente funzione di trasferimento $G_0(s)$ è la pulsazione alla quale il modulo della funzione di risposta armonica è inferiore di 3 dB rispetto al valore statico $G_0(0)$. Si suppone che nel sistema di Fig. 4.8a la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione sia reale ($=h > 0$). In tale ipotesi si può scrivere

$$G_0(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + hG(j\omega)} = \frac{1}{h + \frac{1}{G(j\omega)}}. \quad (4.22)$$

Risulta

$$G_0(j\omega) \simeq \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{per } h|G(j\omega)| \gg 1 \\ G(j\omega) & \text{per } h|G(j\omega)| \ll 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

in una banda di pulsazioni basse rispetto a quella di guadagno unitario, $G_0(j\omega)$ rimane pressoché costante al variare di ω , pur potendo subire la $G(j\omega)$ variazioni anche notevoli nella suddetta banda. La ragione di questo fatto è chiarita dal diagramma vettoriale di Fig. 4.14, relativo al denominatore della (4.22): si vede che, anche per notevoli variazioni di $G(j\omega)$, tale denominatore varia di poco, sia in modulo, sia in argomento.

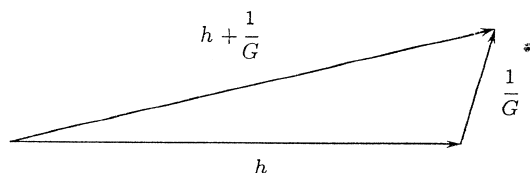


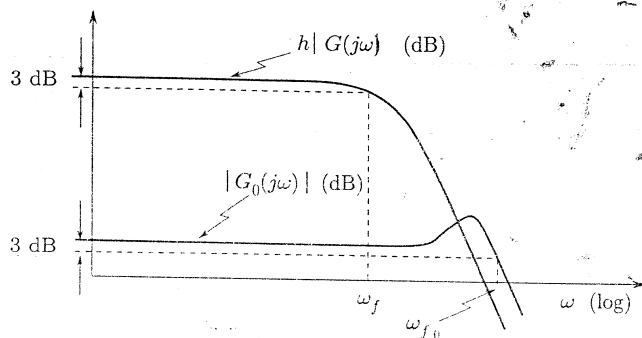
Figura 4.14

Diagramma vettoriale relativo al denominatore della (4.22).

Di conseguenza, la banda passante a -3 dB del sistema in retroazione (ω_{f0} in Fig. 4.15) è maggiore di quella del sistema ad anello aperto (ω_f in Fig. 4.15).

Figura 4.15

Diagrammi di risposta armonica ad anello aperto e in retroazione.



Si noti inoltre che la banda passante ad anello chiuso è di poco superiore alla pulsazione di incrocio.

I diagrammi riportati in Fig. 4.15 rivestono carattere esemplificativo e il loro andamento è puramente qualitativo; peraltro la deduzione della banda passante di un sistema in retroazione, nota la funzione di risposta armonica dello stesso sistema ad anello aperto, non presenta alcuna difficoltà e si può eseguire utilizzando le curve ad M costante (vedi Paragrafo 4.9).

ESEMPIO 4.3.2 Si consideri la funzione di trasferimento di anello

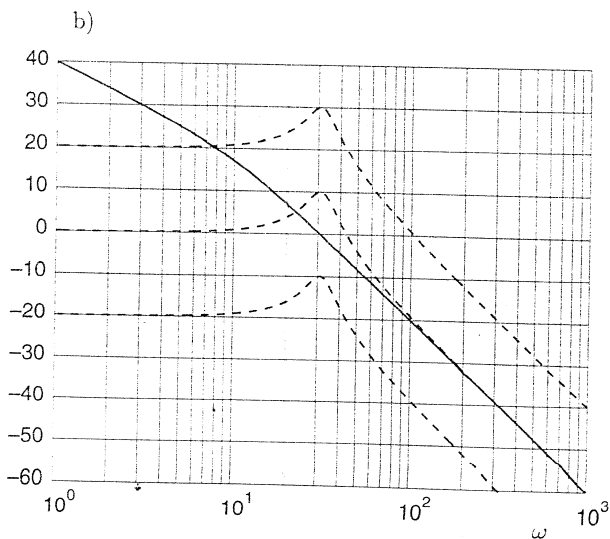
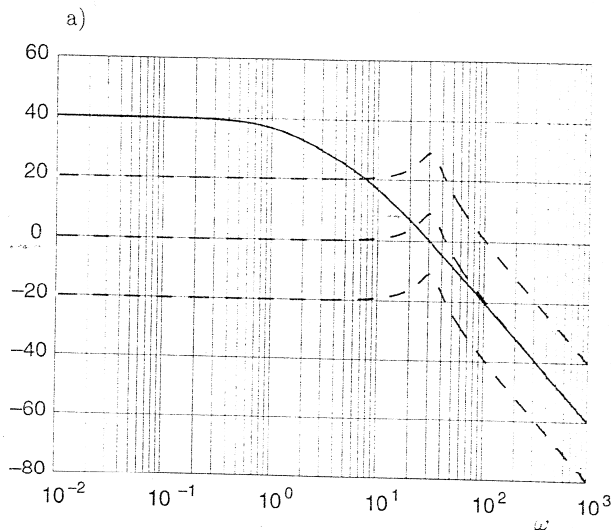
$$G(s)h = \frac{1000}{(s+1)(s+10)},$$

il cui diagramma di Bode delle ampiezze è riportato a tratto pieno in Fig. 4.16a. I diagrammi di Bode delle corrispondenti funzioni di risposta armonica ad anello chiuso relativi a diversi valori di h (0,1, 1 e 10) sono tracciati a tratto nella stessa figura.

Risulta evidente l'aumento della banda passante dovuto alla retroazione. La Fig. 4.16b è invece relativa alla funzione di trasferimento di anello

$$G(s)h = \frac{1000}{s(s+10)}.$$

Per la presenza del polo nell'origine, in questo caso non si può definire la banda passante ad anello aperto.

**Figura 4.16**

Risposta armonica ad anello aperto e ad anello chiuso per diversi valori di h .

4.4. Errori a regime e tipo di sistema

Nello studio dei sistemi di controllo in retroazione un dato di specifica di notevole importanza è l'errore a regime nella risposta ai segnali tipici. Ad esempio, in un servomeccanismo di posizione soggetto a un gradino o a una rampa occorre che, a regime, l'albero di uscita assuma una posizione corrispondente all'andamento della variabile di riferimento, entro limiti di errore specificati.

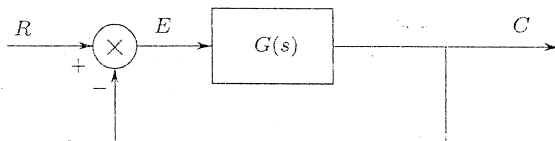


Figura 4.17

Sistema con retroazione unitaria.

Per il calcolo degli errori a regime nella risposta ai più importanti segnali tipici (gradino, rampa, parabola), si farà dapprima riferimento al sistema in retroazione di Fig. 4.17, con retroazione unitaria, in cui la variabile immediatamente a valle della giunzione sommatrice rappresenta effettivamente l'errore $e(t) = r(t) - c(t)$, inteso come scostamento della variabile controllata rispetto al riferimento imposto. Pertanto per il momento si suppone che il comportamento voluto consista nella ripetizione esatta del riferimento; in un secondo tempo si estenderà la trattazione al caso più generale, in cui la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione non sia unitaria e il comportamento voluto sia espresso da una funzione di trasferimento del tutto generica.

Per la funzione di trasferimento $G(s)$ ci si riferisce alla forma fattorizzata (3.18): l'ordine di molteplicità γ del polo nell'origine caratterizza fortemente, come si vedrà tra poco, l'andamento asintotico per t tendente all'infinito,

Il sistema si dice *di tipo 0* se è $\gamma=0$, cioè se $G(s)$ non presenta alcun polo nell'origine, *di tipo 1* se è $\gamma=1$, cioè se $G(s)$ presenta un polo semplice nell'origine, *di tipo 2* se è $\gamma=2$, cioè se $G(s)$ presenta un polo doppio nell'origine. Spesso il polo nell'origine, semplice o doppio, viene volutamente introdotto nella funzione di trasferimento del regolatore, per ottenere appunto determinate caratteristiche dell'andamento asintotico della risposta.

L'andamento nel tempo della variabile errore, in funzione dell'ingresso $r(t)$, si ottiene antitrasformando l'espressione

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) ; \quad (4.24)$$

poichè ne interessa l'andamento asintotico per t tendente all'infinito, si applicherà il teorema del valore finale, espresso dalla relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) . \quad (4.25)$$

◆ Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione

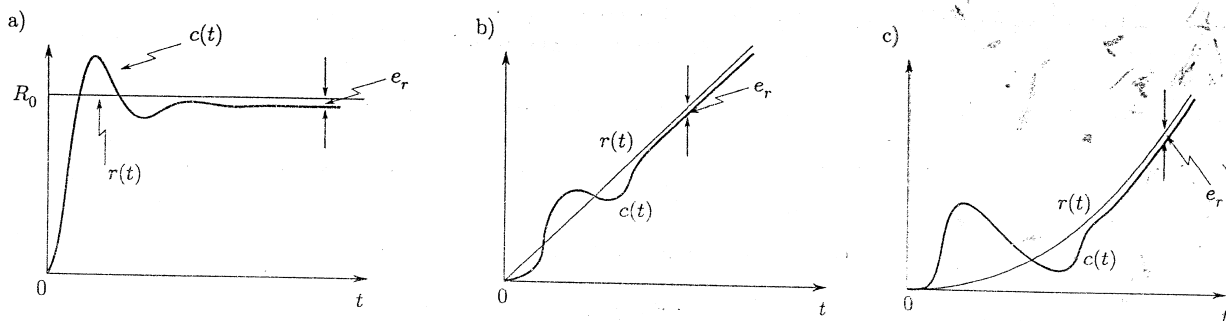
Errore di posizione

Si supponga di applicare all'ingresso del sistema di Fig. 4.17 il gradino di ampiezza R_0

$$r(t) = R_0 u(t) ,$$

la cui trasformata di Laplace è

$$R(s) = R_0 \frac{1}{s} .$$

**Figura 4.18**

Errori a regime nelle risposte al gradino, alla rampa e alla parabola.

L'andamento qualitativo della risposta è rappresentato in Fig. 4.18a: il valore a regime dell'errore, indicato con e_r in figura, è dato dall'espressione

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} \quad (4.26)$$

Posto

Costante di posizione

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (\text{costante di guadagno o di posizione}), \quad (4.27)$$

si può scrivere

$$e_r = \frac{R_0}{1 + K_p} \quad (4.28)$$

Se il sistema è di tipo 0, è $K_p = K$, cioè la costante di posizione coincide con il guadagno statico; se esso è di tipo 1 o 2 è $K_p = \infty$ e l'errore di posizione a regime è nullo: ciò è intuitivo perché in tali sistemi il guadagno di anello per pulsazione nulla è infinito.

Errore di velocità

◆ Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità

Si consideri ora come segnale di ingresso la rampa di pendenza R_0

$$r(t) = R_0 t,$$

la cui trasformata di Laplace è

$$R(s) = R_0 \frac{1}{s^2}.$$

Il valore a regime dell'errore, indicato in Fig. 4.18b, è dato dall'espressione

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} \quad (4.29)$$

Posto

Costante di velocità

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \quad (\text{costante di velocità}), \quad (4.30)$$

si può scrivere

$$e_r = \frac{R_0}{K_v} \quad (4.31)$$

Se il sistema è di tipo 0, si ha $K_v = 0$ e quindi l'errore a regime nella risposta alla rampa è infinito; se esso è di tipo 1, si ha $K_v = K$ e l'errore è R_0/K , se è di tipo 2, si ha $K_v = \infty$ e l'errore è nullo. Si noti che in quest'ultimo caso

viene annullato anche l'errore a regime nella risposta al gradino e quindi, per linearità, quello nella risposta a qualunque combinazione lineare di un gradino e di una rampa.

◆ Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione

Errore di accelerazione

Si supponga infine di applicare al sistema di Fig. 4.17 il segnale d'ingresso

$$r(t) = \frac{1}{2} R_0 t^2,$$

la cui trasformata di Laplace è

$$R(s) = R_0 \frac{1}{s^3}.$$

Il valore a regime dell'errore, indicato in Fig. 4.18c, è dato dall'espressione

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}. \quad (4.32)$$

Posto

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (\text{costante di accelerazione}), \quad (4.33)$$

Costante di accelerazione

si può scrivere

$$e_r = \frac{R_0}{K_a}. \quad (4.34)$$

Se il sistema è di tipo 0 o di tipo 1, si ha $K_a = 0$, e quindi l'errore è infinito; se è di tipo 2, si ha $K_a = K$, e quindi l'errore è pari a R_0/K .

I risultati cui si è pervenuti, riassunti nella tabella qui di seguito riportata, esprimono il cosiddetto *principio del modello interno*: affinché sia neutralizzato (con errore nullo a regime) un modo corrispondente ad un polo nell'origine di ordine γ , occorre generare lo stesso modo nel regolatore, che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine γ o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^\gamma$ che genera quel modo.

Principio del modello interno

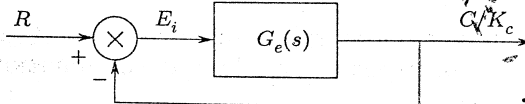
Tabella 4.1 Tipo di sistema ed errori a regime.

tipo di sistema	K_p	K_v	K_a	errore di posizione	errore di velocità	errore di accelerazione
0	K	0	0	$e_r = \frac{R_0}{1 + K}$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	∞	K	0	$e_r = 0$	$e_r = \frac{R_0}{K}$	$e_r = \infty$
2	∞	∞	K	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = \frac{R_0}{K}$

In conclusione, si è mostrato che il comportamento a regime è tanto migliore quanto maggiore è il tipo di sistema. Un sistema di tipo 1 o di tipo 2 o eventualmente di tipo superiore si comporta meglio a regime di un sistema di tipo 0. Un sistema di tipo elevato presenta però notevoli difficoltà realizzative per ciò che riguarda la stabilità. Già i sistemi di tipo 2 sono piuttosto rari, perché, come risulterà chiaro nel seguito, sono di difficile stabilizzazione: il loro impiego è giustificato solo in sistemi di posizionamento e

Figura 4.19

Schema per il calcolo dell'errore riferito all'ingresso.



inseguimento di altissima precisione, in cui è accettabile l'uso di dispositivi accessori anche complessi per ottenere un comportamento stabile in ogni circostanza.

Le considerazioni precedenti si possono estendere ai sistemi con retroazione non unitaria, del tipo generale rappresentato in Fig. 4.8a e riferendosi ad una definizione più generale dell'errore⁽²⁾. Anche in questo caso il sistema si dice di tipo γ se la funzione $G(s)$ presenta un polo nell'origine di ordine γ .

Se l'obiettivo del controllo è l'inseguimento e il comportamento ideale è descritto dalla (1.18), l'errore riferito all'ingresso e quello riferito all'uscita sono dati rispettivamente dalle relazioni

$$e_i(t) := \frac{K_c r(t) - c(t)}{K_c}, \quad (4.35)$$

$$e_u(t) := K_c e_i(t) = K_c r(t) - c(t). \quad (4.36)$$

Si mostrerà che per il calcolo dell'errore riferito all'ingresso ci si può ricondurre allo schema con retroazione unitaria di Fig. 4.19, in cui $G_e(s)$ è una funzione opportuna di $G(s)$, $H(s)$ e K_c . Trasformando secondo Laplace la (4.35) e tenendo conto della funzione di trasferimento del sistema, si ottiene

$$\begin{aligned} E_i(s) &= \left(1 - \frac{G(s)/K_c}{1 + G(s)H(s)} \right) R(s) = \\ &= \frac{1 + G(s)H(s) - G(s)/K_c}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \frac{1}{1 + G_e(s)} R(s), \end{aligned} \quad (4.37)$$

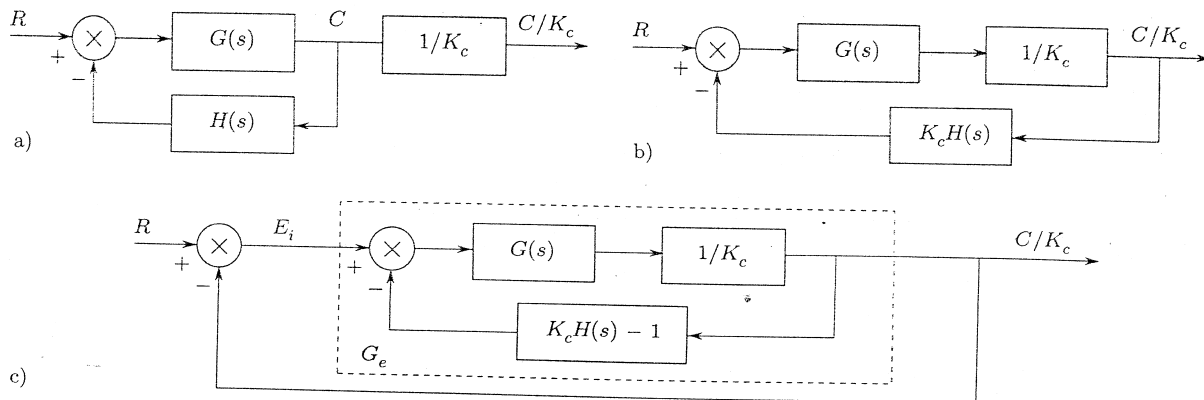
in cui si è posto

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{K_c + G(s)(K_c H(s) - 1)}. \quad (4.38)$$

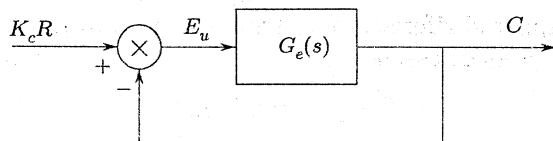
Figura 4.20

Elaborazioni per ottenere lo schema di Fig. 4.19.

Le elaborazioni di schemi a blocchi mostrate in Fig. 4.20 presentano un modo alternativo, più facile da ricordare, per dedurre la funzione $G_e(s)$.



⁽²⁾ Si utilizzerà in generale il simbolo e per il segnale a valle della giunzione sommande, mentre con e_i ed e_u si indicheranno rispettivamente l'errore riferito all'ingresso e quello riferito all'uscita, espressi in relazione a un dato comportamento ideale.

**Figura 4.21**

Schema per il calcolo dell'errore riferito all'uscita.

Per ciò che riguarda l'errore riferito all'uscita, ci si riconduce invece al sistema con retroazione unitaria di Fig. 4.21, conseguenza ovvia delle definizioni (4.35), (4.36).

Qualora il trasduttore di retroazione si possa considerare puramente algebrico, cioè caratterizzato da una costante reale h e il sistema abbia un elevato guadagno statico di anello oppure sia di tipo 1 o 2, per ingressi costanti o lentamente variabili si ha $c(t) \simeq (1/h) r(t)$ e risulta pertanto logico assumere $K_c := 1/h$: si ottiene allora $G_e(s) = G(s)h$ e ci si riconduce, per il calcolo dell'errore riferito all'ingresso, direttamente al caso di un sistema con retroazione unitaria, in cui in luogo della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto si considera l'intero guadagno di anello: in questo caso particolare evidentemente risulta $e_i(t) = e(t)$, $e_u(t) = e(t)/h$.

In alcuni sistemi in retroazione, ad esempio filtri attivi utilizzando amplificatori operazionali, il comportamento ideale non consiste nell'inseguimento del segnale di ingresso, ma nell'elaborazione di tale segnale secondo una data funzione di trasferimento $W(s)$. In questi casi per il calcolo degli errori si possono ancora utilizzare le relazioni precedenti, sostituendovi $W(s)$ a K_c .

4.5. Il criterio di Nyquist

Il problema fondamentale che si presenta quando si progetta un dispositivo di controllo è lo studio del comportamento dinamico dei sistemi in retroazione noto quello degli stessi sistemi ad anello aperto.

In relazione a tale problema, il *criterio di Nyquist* costituisce un valido ausilio, in quanto consente di stabilire se un sistema, del quale si conosce la risposta armonica ad anello aperto, sia stabile o meno una volta chiuso in retroazione: per la sua natura sostanzialmente grafica, esso risulta di notevole utilità per il progettista perché, oltre a fornire indicazione sulla stabilità del sistema in retroazione (a tal fine sarebbe sufficiente l'impiego del criterio di Routh), costituisce anche un'utile guida per giudicare dell'efficacia di possibili interventi che, attraverso opportune modifiche della funzione di risposta armonica ad anello aperto, migliorino il comportamento dinamico del sistema in retroazione.

L'enunciato del criterio di Nyquist risulta molto semplice qualora ci si limiti a considerare sistemi che non presentino né poli né zeri immaginari, escluso al più un polo semplice o doppio nell'origine che, come si è mostrato al precedente paragrafo, spesso viene volutamente introdotto per migliorare il comportamento a regime: a tale caso ci si limiterà per non complicare eccessivamente l'applicazione di un criterio che trae appunto dalla sua semplicità i più forti motivi di interesse.

Dato il sistema in retroazione rappresentato con lo schema a blocchi generale di Fig. 4.8a, si indica con

$$F(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \quad (4.39)$$

la funzione di risposta armonica di anello, di cui si suppone noto il diagramma polare, tracciato per ω variabile da 0 a ∞ .

Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist si riferisce peraltro a diagrammi polari tracciati per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$; essendo

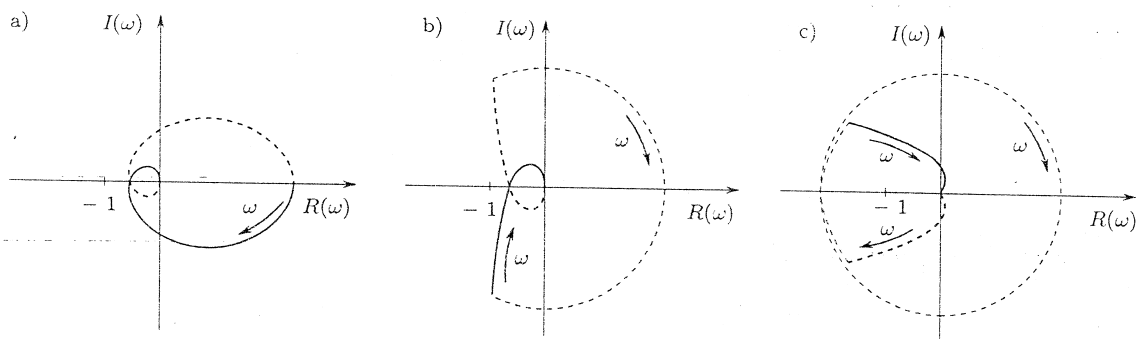
$$F(-j\omega) = F^*(j\omega), \quad (4.40)$$

il completamento del diagramma per pulsazioni negative non presenta difficoltà, ottenendosi per ribaltamento intorno all'asse delle ascisse di quello tracciato per pulsazioni positive.

Nel caso di un sistema di tipo 0, esemplificato in Fig. 4.22a, si ottiene una curva chiusa; non così nei casi di sistemi di tipo 1 o di tipo 2, i cui diagrammi polari presentano rami all'infinito; se peraltro si conviene di completare i diagrammi rispettivamente con una semicirconferenza e con una circonferenza all'infinito percorsa in senso orario, anche i diagrammi completi relativi a tali sistemi saranno curve chiuse, con gli andamenti tipici rappresentati in Fig. 4.22b e in Fig. 4.22c.

Figura 4.22

Diagrammi polari "completi" di sistemi di tipo 0, di tipo 1 e di tipo 2.



Ciò posto, si può enunciare il criterio di Nyquist.

◆ **Criterio di Nyquist: sistemi stabili ad anello aperto.** *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione di Fig. 4.8a sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ non circonda né tocchi il punto critico $-1 + j0$.*

Tale enunciato del criterio di Nyquist è quello che copre la maggior parte dei casi di interesse. Si può dare tuttavia il seguente enunciato più generale, che si applica anche al caso in cui il sistema in esame sia instabile ad anello aperto.

◆ **Criterio di Nyquist: sistemi instabili ad anello aperto.** *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione di Fig. 4.8a sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circonda il punto critico $-1 + j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva. Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario rispetto al numero richiesto dal teorema corrisponde alla presenza nel sistema in retroazione di un polo con parte reale positiva.*

La dimostrazione del criterio di Nyquist e un enunciato più generale, che comprende anche il caso in cui la funzione guadagno di anello abbia zeri e/o poli puramente immaginari, sono riportati al Paragrafo C4.3.

ESEMPIO 4.5.1 Si consideri un sistema in retroazione avente il guadagno di anello

$$F(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)} : \quad (4.41)$$

per $K > 0$ sufficientemente elevato, $\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0$, il relativo diagramma polare, rappresentato in Fig. 4.23, una volta completato, circonda due volte il punto critico in senso orario.

Essendo il sistema ad anello aperto asintoticamente stabile, il sistema in retroazione è instabile, con due poli a parte reale positiva.

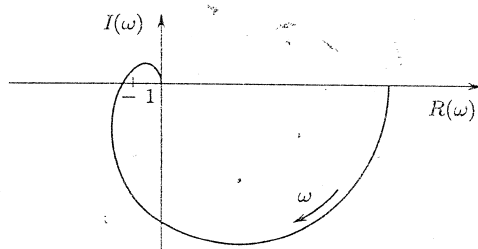


Figura 4.23

Diagramma polare relativo alla funzione (4.41).

ESEMPIO 4.5.2 Si consideri un sistema in retroazione avente il guadagno di anello

$$F(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{(1 - \tau_1 s)(1 - \tau_2 s)} : \quad (4.42)$$

il relativo diagramma polare per valori positivi dei parametri è riportato in Fig. 4.24.

Se il punto critico viene circondato (due volte in senso antiorario), il che avviene per valori elevati della costante K , il sistema in retroazione è stabile, dato che il guadagno di anello presenta due poli con parte reale positiva. Se invece il punto critico non viene circondato, il che avviene per valori relativamente bassi della costante K , il sistema in retroazione è instabile.

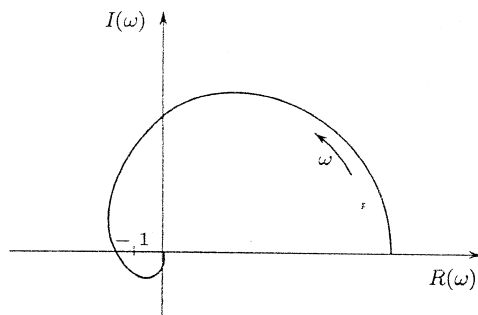


Figura 4.24

Diagramma polare relativo alla funzione (4.42).

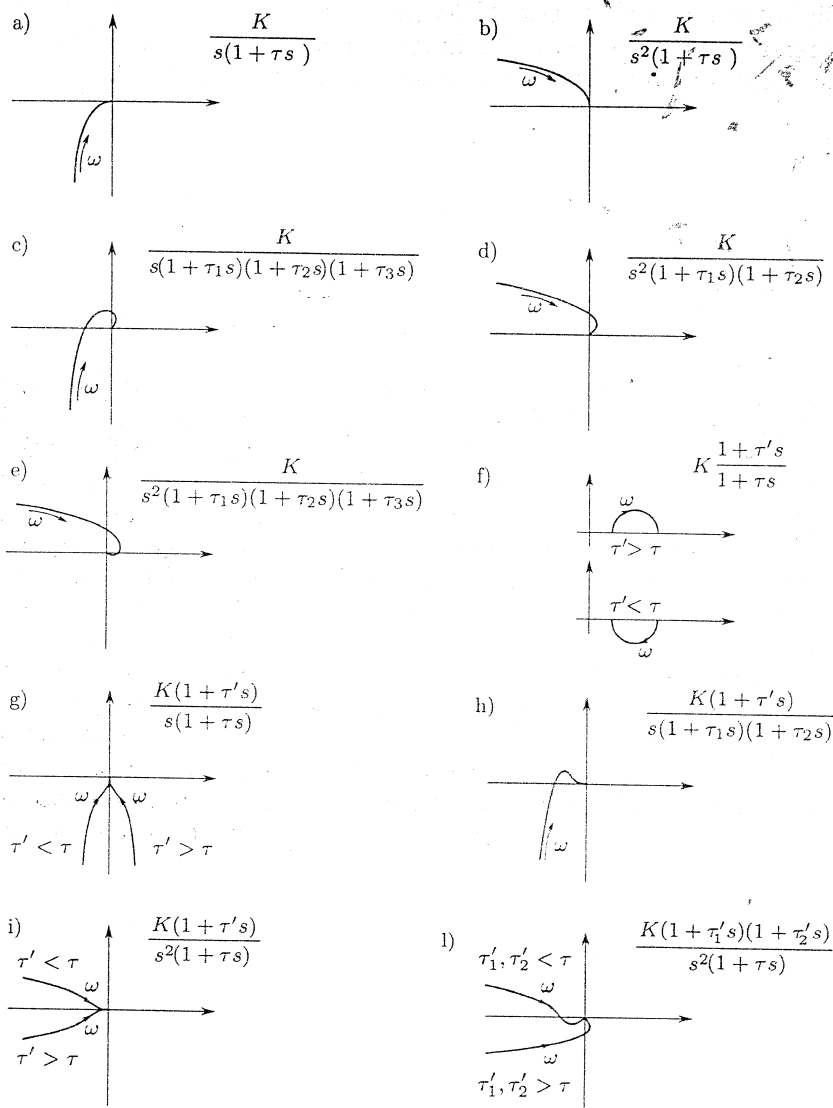
Nella costruzione dei diagrammi di Nyquist aiuta molto l'esperienza, che porta a giudicare direttamente sull'influenza che hanno sull'andamento del diagramma le varie caratteristiche particolari della funzione di trasferimento.

In Fig. 4.25a-l sono riportati gli andamenti qualitativi dei diagrammi elementari corrispondenti a varie funzioni di trasferimento di interesse pratico. Le ultime figure della tabella si riferiscono ad esempi di sistemi di tipo 2 che possono risultare stabili per l'effetto anticipativo, sulla fase dovuto agli zeri della funzione di trasferimento (spesso volutamente introdotti mediante opportune reti correttrici).

I diagrammi polari consentono di studiare l'influenza, sulla stabilità del sistema, della variazione della costante K della funzione di guadagno di anello, costante che, in pratica, si può variare normalmente entro limiti estesi agendo sul guadagno del regolatore. Posto $K = m K_0$, la variazione del diagramma polare al variare di m è rappresentata in Fig. 4.26: le lunghezze dei segmenti che congiungono ciascun punto con l'origine variano nello stesso

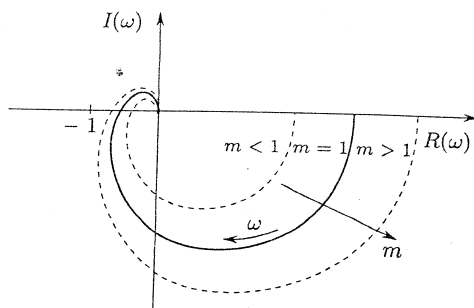
Figura 4.25

Esempi di diagrammi di Nyquist.



rapporto: in generale, se un sistema in retroazione è stabile per un certo valore di K , è stabile anche per valori inferiori.

Più semplicemente, tracciato il diagramma polare corrispondente al valore K_0 , anziché un punto critico “fisso” -1 , si può considerare un punto critico “variabile” $-1/m$, come è indicato in Fig. 4.27: il risultato, per ciò che riguarda lo studio della stabilità, è evidentemente il medesimo.

Figura 4.26Effetto di variazioni della costante K .

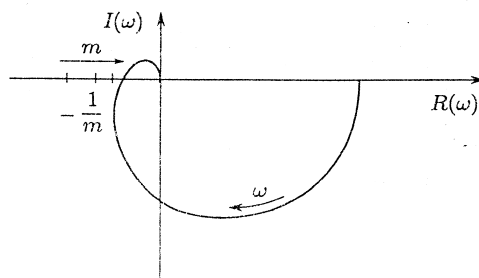


Figura 4.27
Metodo alternativo per considerare l'effetto di variazioni della costante K .

Si danno casi di sistemi che, stabili per un dato valore K_0 della costante K , diventano instabili sia per valori superiori sia per valori inferiori. Un esempio è riportato in Fig. 4.28, relativo a un sistema di tipo 2 stabilizzato con l'introduzione di uno zero.

Un sistema di questo tipo si dice *a stabilità condizionata*: poiché durante il transitorio di avviamento o in presenza di saturazione dovuta a forti perturbazioni si può avere un effetto analogo a quello di una diminuzione di guadagno, il regolatore deve essere inserito solo quando l'errore è inferiore a determinati limiti, entro i quali sia esclusa la saturazione dell'amplificatore.

Ad esempio, nel sistema il cui diagramma polare è riportato in Fig. 4.28, si può inserire il regolatore di tipo 2 (cui il diagramma si riferisce) per diminuire l'errore a regime ed ottenere quindi un inseguimento più preciso, quando il posizionamento operato da un regolatore meno preciso, ma senza limitazioni di stabilità (ad esempio di tipo 1) è sufficientemente vicino al valore voluto. La possibilità che sistemi a stabilità condizionata presentino oscillazioni persistenti in presenza di saturazione risulterà chiarita dal metodo della funzione descrittiva, presentato al Paragrafo 7.2.

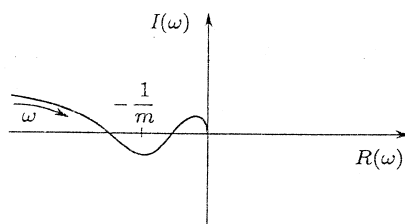


Figura 4.28
Sistema a stabilità condizionata.

4.6. Margini di ampiezza e di fase

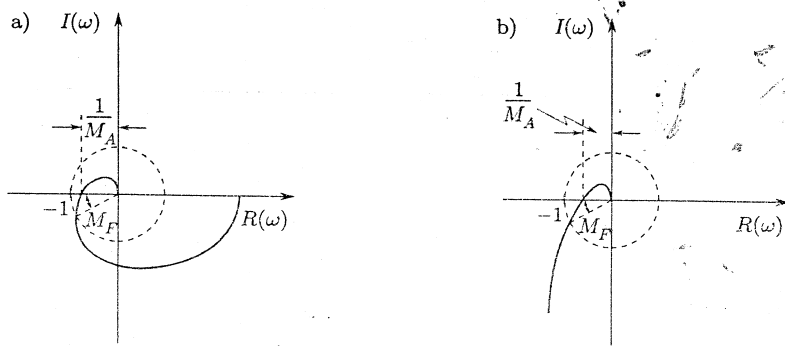
Quando il diagramma di Nyquist di un sistema in retroazione ha un andamento regolare, con ampiezza funzione monotona decrescente della pulsazione ω , si può dedurre da esso informazione non solo sulla stabilità del sistema, ma anche sulla sua maggiore o minore criticità o tendenza all'instabilità.

È infatti evidente che, quanto più il diagramma di Nyquist di un sistema stabile ad anello aperto si svolge lontano dal punto critico, tanto più lontano dall'instabilità è il sistema: la vicinanza del diagramma di Nyquist al punto critico è normalmente associata ad un comportamento dinamico non soddisfacente.

Con riferimento ai diagrammi tipici rappresentati in Fig. 4.29, relativi a un sistema di tipo 0 e a un sistema di tipo 1 stabili ad anello aperto, l'avvicinamento del diagramma al punto critico, ottenuto per esempio aumentando il valore di K (guadagno statico o costante di velocità), è associato all'avvi-

Figura 4.29

Margini di ampiezza e di fase di un sistema di tipo 0 e di un sistema di tipo 1.



cinamento all'asse immaginario di una coppia di poli complessi, che vengono a trovarsi sull'asse immaginario quando il diagramma passa per il punto critico e passano nel semipiano destro quando esso viene a circondare il punto critico.

Poli dominanti

Questi sono i poli che più degli altri determinano il comportamento dinamico del sistema (*poli dominanti*): molti sistemi in retroazione, anche di ordine elevato, hanno un comportamento dinamico simile a quello di un sistema del secondo ordine, in quanto presentano due poli dominanti complessi coniugati: i termini del transitorio corrispondenti agli altri poli, più lontani dall'asse immaginario, sono infatti di minore entità e si estinguono più rapidamente.

Rimanendo nell'ambito dei sistemi il cui diagramma di Nyquist ha un andamento regolare, è pertanto utile associare, anche in termini quantitativi, la "bontà" del comportamento dinamico del sistema in retroazione alla prossimità del diagramma di Nyquist al punto critico.

Margini di stabilità

A tal fine si introducono due parametri, detti *margini di stabilità*, che misurano la cosiddetta "stabilità relativa" dei sistemi in retroazione:

Margine di ampiezza

1. *Margine di ampiezza* M_A : è l'inverso del modulo del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente alla fase $-\pi$ (detta *pulsazione di fase pi greco*);

Margine di fase

2. *Margine di fase* M_F : è l'angolo che occorre sottrarre alla fase (normalmente negativa) del guadagno di anello alla pulsazione ω_i corrispondente al valore unitario del modulo (detta *pulsazione di intersezione o di incrocio*) per ottenere il valore $-\pi$. Il nome della pulsazione fa riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze o a quello di Nichols, che in corrispondenza di essa intersecano l'asse delle ascisse.

Normalmente il margine di ampiezza viene dato in dB. Valori negativi del margine di ampiezza in dB o del margine di fase corrispondono all'instabilità.

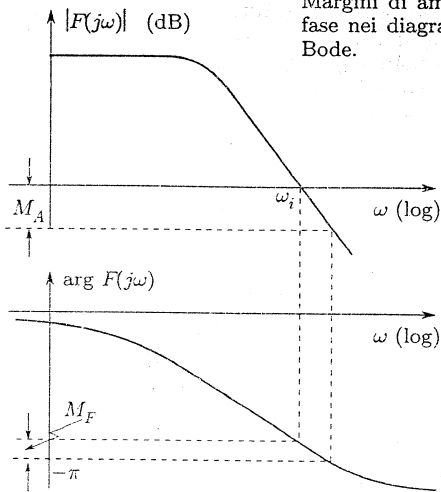
I margini di ampiezza e di fase si determinano facilmente sui diagrammi di Nyquist, considerando rispettivamente l'intersezione del diagramma con l'asse reale e con la circonferenza di raggio unitario, come è indicato in Fig. 4.29.

Anche facendo uso dei diagrammi di Bode o di Nichols la determinazione dei margini di ampiezza e fase è agevole, come è indicato in Fig. 4.30 e in Fig. 4.31.

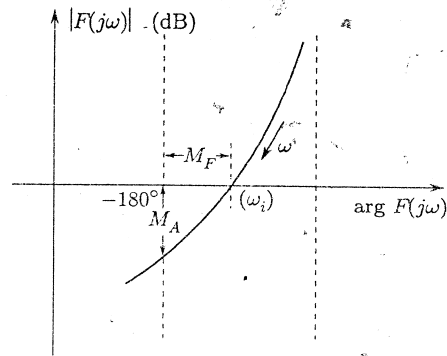
Valori tipici per un buon comportamento di un sistema in retroazione sono: M_A da 4 a 6 (cioè da 12 a 16 dB) e M_F da 45° a 60° . Spesso i margini di ampiezza e di fase sono direttamente oggetto di specifica.

Figura 4.30

Margini di ampiezza e fase nei diagrammi di Bode.

**Figura 4.31**

Margini di ampiezza e fase nei diagrammi di Nichols.



4.7. Sistemi con ritardi finiti

Nell'enunciato del criterio di Nyquist, presentato al Paragrafo 4.5, si è fatto implicitamente riferimento a sistemi aventi la funzione di guadagno di anello $F(s)$ razionale fratta. Questi sistemi sono caratterizzati dal fatto che l'uscita o una sua derivata rispondono immediatamente all'applicazione dell'ingresso.

In molti sistemi di controllo, con trasmissioni pneumatiche, idrauliche o meccaniche si possono presentare ritardi finiti: l'uscita e le sue derivate rispondono dopo un tempo finito dall'applicazione dell'ingresso.

Un modello matematico spesso accettabile per la rappresentazione di tali sistemi è dato dalla funzione di trasferimento trascendente

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}, \quad (4.43)$$

in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi in s , mentre $e^{-t_0 s}$ è la funzione di trasferimento di un ritardo finito di entità t_0 .

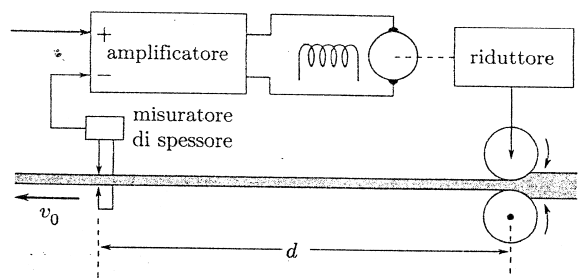
Il criterio di Nyquist si può estendere, senza modifiche dell'enunciato, a tali sistemi con un ritardo finito entro l'anello. Come si è notato al Paragrafo 3.4, i sistemi con ritardo finito non sono a fase minima.

Si mostrerà con un semplice esempio che la presenza di un ritardo finito ha un'influenza notevolissima sulla stabilità di un sistema in retroazione.

ESEMPIO 4.7.1 Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 4.32, il cui obiettivo è di effettuare la regolazione automatica dello spessore di un laminato agendo sulla distanza fra i cilindri del laminatoio. La misura dello spessore avviene ad una certa distanza d dai cilindri, per cui, se la velocità di trasporto v_0 del laminato è costante, si ha un ritardo finito di valore $t_0 = d/v_0$.

Figura 4.32

Sistema per la regolazione dello spessore di un laminato.



La funzione di trasferimento del gruppo misuratore-amplificatore-motore-riduttore è del tipo

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_m s)} \quad (4.44)$$

e quella di anello

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + T_m s)} \quad (4.45)$$

Operando la posizione $s = j\omega$, si ottiene la funzione di risposta armonica di anello

$$F(j\omega) = \frac{K e^{-j\omega t_0}}{j\omega(1 + j\omega T_m)} \quad (4.46)$$

Se non vi fosse il ritardo finito, il diagramma di Nyquist sarebbe del tipo indicato con A in Fig. 4.33: per la presenza del ritardo finito esso si modifica nel senso che ogni vettore viene sfasato in ritardo dell'angolo ωt_0 , proporzionale alla pulsazione, e il

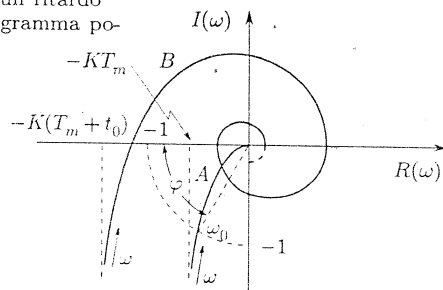
diagramma assume l'andamento a spirale indicato con B in Fig. 4.33.

Anche l'asintoto viene traslato verso sinistra: sviluppando in serie l'esponenziale e considerando solo i primi due termini dello sviluppo, il che è lecito per $j\omega$ tendente a zero, si ottiene

$$F(j\omega) \simeq \frac{K(1 - j\omega t_0)}{j\omega(1 + j\omega T_m)} \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero.}$$

Figura 4.33

Influenza di un ritardo finito sul diagramma polare.



Dall'esempio appare che un sistema con un ritardo finito si presenta alquanto critico agli effetti della stabilità. Per giudicare della stabilità del sistema con ritardo finito in esame si può fare riferimento al diagramma di Nyquist A (in cui non si è tenuto conto del ritardo) e misurare il margine di fase φ : indicando con ω_0 la pulsazione per cui il modulo è unitario, se è $\omega_0 t_0 > \varphi$, il sistema con ritardo è instabile.

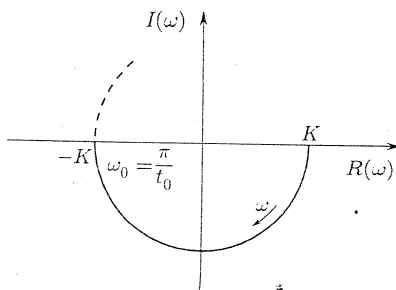
Un sistema di tipo 0 avente la funzione di trasferimento di anello

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots} \quad (4.47)$$

con $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$ ha il diagramma di Nyquist rappresentato in Fig. 4.34, che, pur essendo ancora a forma di spirale, nel tratto iniziale si può approssimare con una circonferenza, dato che lo sfasamento dovuto al ritardo si manifesta prima dell'attenuazione e dello sfasamento dovuti ai termini del primo ordine.

Figura 4.34

Diagramma polare di un sistema di tipo 0 caratterizzato essenzialmente da un ritardo finito.



Per la stabilità asintotica deve essere soddisfatta la condizione

$$K < 1, \quad (4.48)$$

che corrisponde a un limite inaccettabile sul guadagno statico di anello: in effetti, mantenendo così basso il guadagno statico, l'errore a regime nella risposta ad un gradino di ampiezza R_0 resulterebbe non inferiore ad $R_0/2$.

Conviene, in questi casi, impiegare un dispositivo di controllo di tipo *integrale*, cioè introdurre artificialmente un polo nell'origine. La funzione di trasferimento diviene

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots} \quad (4.49)$$

Assumendo ancora $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$, il valore della pulsazione quando la fase è pari a $-\pi$ è $\omega_0 = \pi/2 t_0$, dovendo essere pari a $-\pi/2$ il contributo del ritardo finito in corrispondenza di tale pulsazione, in quanto il contributo del polo nell'origine è pari a $-\pi/2$ e i contributi degli altri poli sono trascurabili.

La condizione di stabilità asintotica si ottiene imponendo $|F(j\omega_0)| < 1$ ed è espressa dalla relazione $K < \pi/(2t_0)$. In termini più generali, il valore di K corrispondente al margine di fase M_F è

$$K = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_F \right) \quad (4.50)$$

Il diagramma di Nyquist relativo al caso in esame è riportato in Fig. 4.35, nell'ipotesi che siano trascurabili le costanti di tempo a denominatore della (4.49): con A e B si sono indicati, come in Fig. 4.33, i diagrammi in assenza e in presenza del ritardo finito.

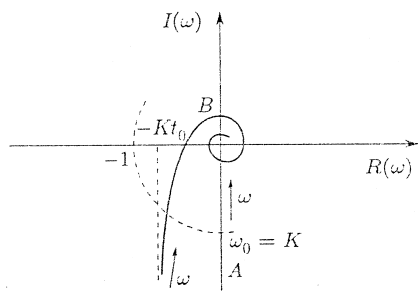


Figura 4.35

Diagramma polare di un sistema composto di un integratore e di un ritardo finito.

L'introduzione del polo nell'origine consente di ridurre a zero l'errore a regime nella risposta al gradino e costituisce, nella pratica, un accorgimento frequentemente adottato per la stabilizzazione dei sistemi in retroazione che presentino ritardi finiti di notevole entità.

◆ Le approssimanti di Padé

Nello studio dei sistemi con ritardi finiti è spesso necessario impiegare approssimazioni razionali della funzione $e^{-t_0 s}$. Ad esempio, se si vuole determinare la risposta al gradino di un sistema in retroazione nel cui anello sia compreso un ritardo finito, conviene esprimere il ritardo con una funzione razionale che lo approssimi, per poter procedere con le tecniche usuali (sviluppo in somma di fratti semplici e antitrasformazione di Laplace). A tal fine si usano correntemente le *approssimanti di Padé*: una funzione razionale $P(s)/Q(s)$, in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi di gradi generici p e q , è un'approssimante di Padé della funzione $f(s)$, sviluppabile in serie di potenze, se la serie di potenze di s ottenuta dividendo i polinomi (con il procedimento indicato al termine del Paragrafo B.1) ha i primi $p+q+1$ termini uguali a quelli dello sviluppo in serie di Maclaurin di $f(s)$.

Nel caso della funzione esponenziale

$$f(s) = e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3!} + \dots \quad (4.51)$$

Approssimanti di Padé

si può verificare che, posto

$$P(s) := b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_0, \quad (4.52)$$

$$Q(s) := a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_0, \quad (4.53)$$

i coefficienti delle approssimanti di Padé sono legati ai valori di p e q dalle relazioni

$$b_k = \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} (-1)^k \quad (k=0, \dots, p), \quad (4.54)$$

$$a_k = \frac{(p+q-k)! q!}{(p+q)! k! (q-k)!} \quad (k=0, \dots, q). \quad (4.55)$$

Le approssimanti di $e^{-t_0 s}$ si ottengono, ovviamente, sostituendo $t_0 s$ ad s nelle (4.52, 4.53).

ESEMPIO 4.7.2 Per $p=q=3$ si ottiene l'approssimante

$$G_{3,3}(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3}, \quad (4.56)$$

mentre, per $p=0$ e $q=6$ si ha

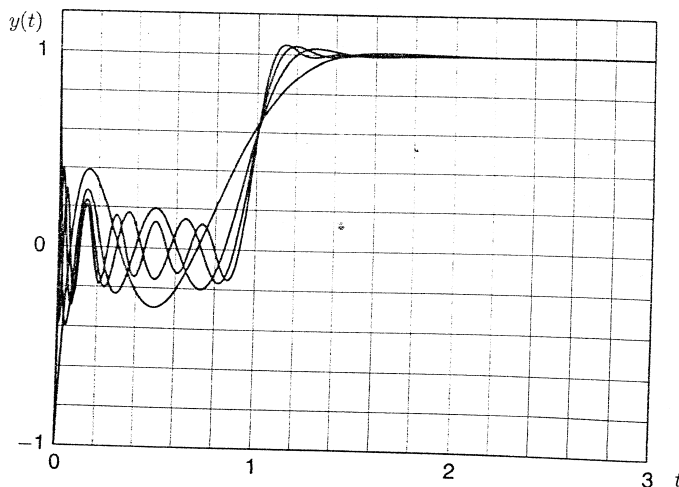
$$G_{0,6}(s) = \frac{1}{1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \frac{1}{120}s^5 + \frac{1}{720}s^6}. \quad (4.57)$$

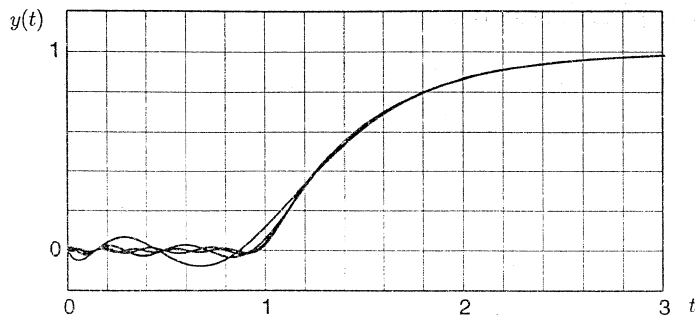
In entrambi i casi dividendo il polinomio a numeratore per quello a denominatore si ottiene lo sviluppo (4.51) fino al termine in s^6 . I termini successivi sono diversi fra loro e da quelli dello sviluppo dell'esponenziale.

Nelle approssimanti di Padé del ritardo finito normalmente si assume $p=q$ (o eventualmente anche $p>q$), perché in tal caso l'approssimante è sicuramente stabile. In caso contrario si può avere instabilità: ad esempio la $G_{0,6}(s)$ data dalla (4.57) è instabile. In Fig. 4.36 sono riportate le risposte al gradino di alcune approssimanti di Padé del ritardo unitario e in Fig. 4.37 quelle delle stesse approssimanti poste in cascata a un sistema del primo ordine. Si noti che il filtraggio operato dal sistema del primo ordine rende accettabile l'errore dell'approssimazione. La scelta dell'ordine dell'approssimante si dovrà pertanto effettuare considerando, caso per caso, il valore del ritardo finito in rapporto a quelli delle costanti di tempo più significative presenti nell'anello di retroazione.

Figura 4.36

Risposte al gradino delle approssimanti di Padé del ritardo unitario corrispondenti a $p=q=3, 6, 9, 12$.

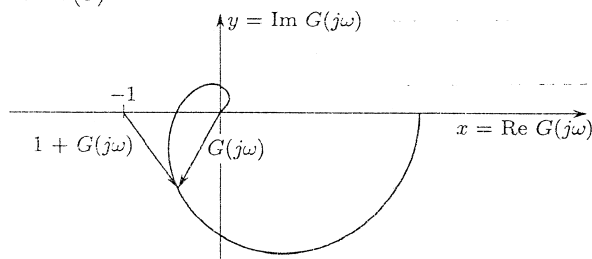


**Figura 4.37**

Risposte al gradino delle approssimanti di Padé di Fig. 4.36, in cascata al sistema $G_1(s) = 1/(1 + 0,5s)$.

4.8. Luoghi a M costante e a N costante

Si prende nuovamente in esame il sistema di controllo con retroazione unitaria rappresentato in Fig. 4.17. Le considerazioni che seguono, presentate per semplicità con riferimento a tale sistema, verranno poi estese al caso generale in cui la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione sia una generica $H(s)$.

**Figura 4.38**

Deduzione della risposta armonica ad anello chiuso nel caso di retroazione unitaria.

Si disponga del diagramma polare della funzione di risposta armonica ad anello aperto $G(j\omega)$, rappresentato in Fig. 4.38: si vuole determinare la risposta armonica $G_0(j\omega)$ del sistema ad anello chiuso. Essendo

$$G_0(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}, \quad (4.58)$$

il numero complesso $G_0(j\omega)$ si può calcolare facilmente, per la pulsazione generica ω , eseguendo il rapporto dei due numeri complessi rappresentati dai vettori indicati in Fig. 4.38.

La determinazione di $G_0(j\omega)$ è notevolmente facilitata se sul foglio dove è disegnato il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ sono indicati, per ogni punto, l'ampiezza e la fase della relativa $G_0(j\omega)$ o, in altre parole, sono disegnati i luoghi corrispondenti a modulo costante (detti *luoghi a M costante*) e ad argomento costante (detti *luoghi a N costante*) del numero complesso $G_0(j\omega)$. Con N , come si vedrà tra poco, si indica la tangente dell'argomento.

Luoghi a M costante
Luoghi a N costante

◆ Luoghi a M costante

Per ricavare i luoghi a M costante, anzitutto si esprime la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ in forma cartesiana:

$$G(j\omega) = x + jy. \quad (4.59)$$

Sostituendo nella (4.58), si deduce

$$G_0(j\omega) = \frac{x + jy}{1 + x + jy}; \quad (4.60)$$

posto $M = |G_0(j\omega)|$, si può scrivere

$$M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2},$$

da cui

$$M^2 (1 + x^2 + 2x + y^2) = x^2 + y^2,$$

cioè

$$x^2 (M^2 - 1) + y^2 (M^2 - 1) + 2x M^2 + M^2 = 0,$$

da cui ancora

$$x^2 + y^2 + 2x \frac{M^2}{M^2 - 1} + \frac{M^2}{M^2 - 1} = 0, \quad (4.61)$$

che è l'equazione di una circonferenza⁽³⁾ con centro nel punto

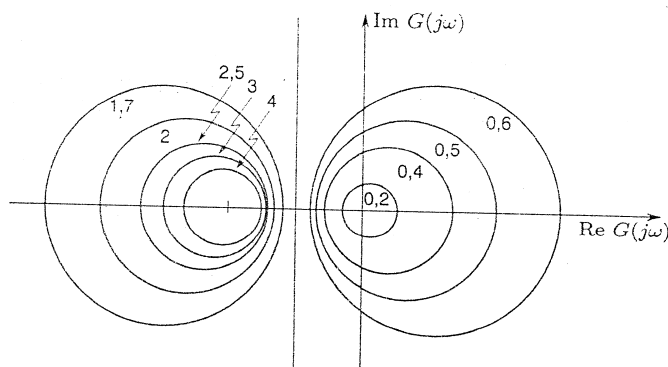
$$x_0 = \frac{M^2}{1 - M^2}, \quad y_0 = 0 \quad (4.62)$$

e raggio

$$r = \sqrt{\frac{M^2}{(1 - M^2)^2}} = \frac{M}{|1 - M^2|}. \quad (4.63)$$

Figura 4.39

Luoghi a M costante.



In Fig. 4.39 sono rappresentate le circonferenze corrispondenti a diversi valori di M . Si noti che per $M=0$ la circonferenza degenera in un punto (l'origine), per $M=1$ in una retta (la retta verticale $x = -1/2$) e per M tendente all'infinito ancora in un punto (il punto critico $-1, 0$).

⁽³⁾ Infatti l'equazione di una circonferenza con centro in x_0, y_0 e raggio r è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

cioè

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0,$$

per cui l'equazione generica

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza avente centro nel punto

$$x_0 = -a, \quad y_0 = -b$$

e raggio

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c} = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$

◆ Luoghi a N costante

Razionalizzando la (4.60), si ottiene

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{(x + jy)(1 + x - jy)}{(1 + x)^2 + y^2} \\ &= \frac{x(1 + x) + y^2 + j(y(1 + x) - xy)}{(1 + x)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Posto $N = \tan \arg G_0(j\omega)$, si può scrivere

$$N = \frac{y}{x(1 + x) + y^2},$$

da cui

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{N} = 0, \quad (4.64)$$

che è l'equazione di una circonferenza con centro nel punto

$$x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{2N} \quad (4.65)$$

e raggio

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2 + 1}{N^2}}. \quad (4.66)$$

In Fig. 4.40 sono rappresentate le circonferenze corrispondenti a diversi valori dell'argomento. Tutte le circonferenze intersecano l'asse delle ascisse nei due punti $x = 0$, $x = -1$, come facilmente si deduce ponendo $y = 0$ nella (4.64).

Si noti che per $N = 0$ la circonferenza degenera nell'asse delle ascisse, per N tendente all'infinito essa ha centro nel punto $(-1/2, 0)$ e raggio $1/2$.

Le circonferenze corrispondenti a valori di N uguali in modulo e di segno opposto sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse.

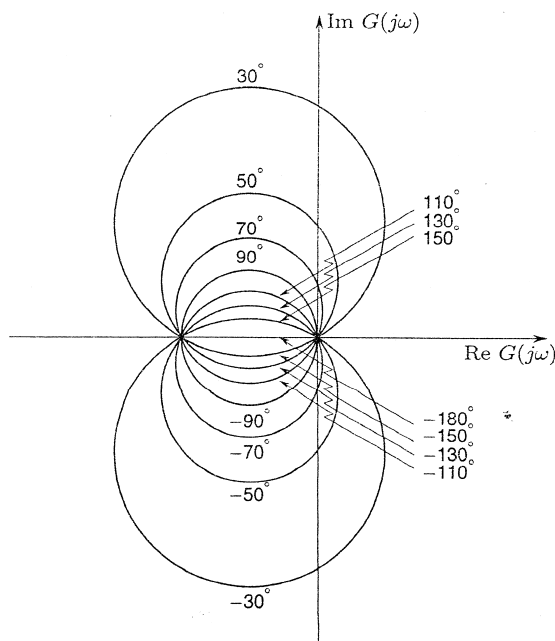


Figura 4.40
Luoghi a N costante.

In Fig. 4.40, anziché il valore di N , a ciascuna delle circonferenze è associato direttamente il valore della fase, naturalmente a meno di multipli di π per la periodicità della tangente trigonometrica (ad esempio, la circonferenza contrassegnata con 50° può corrispondere anche a -130°).

Per le considerazioni finora svolte si è fatto riferimento ad un sistema con retroazione unitaria. Se la retroazione non è unitaria, in luogo della (4.58) si scrive

$$G_0(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}, \quad (4.67)$$

ossia

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}, \quad (4.68)$$

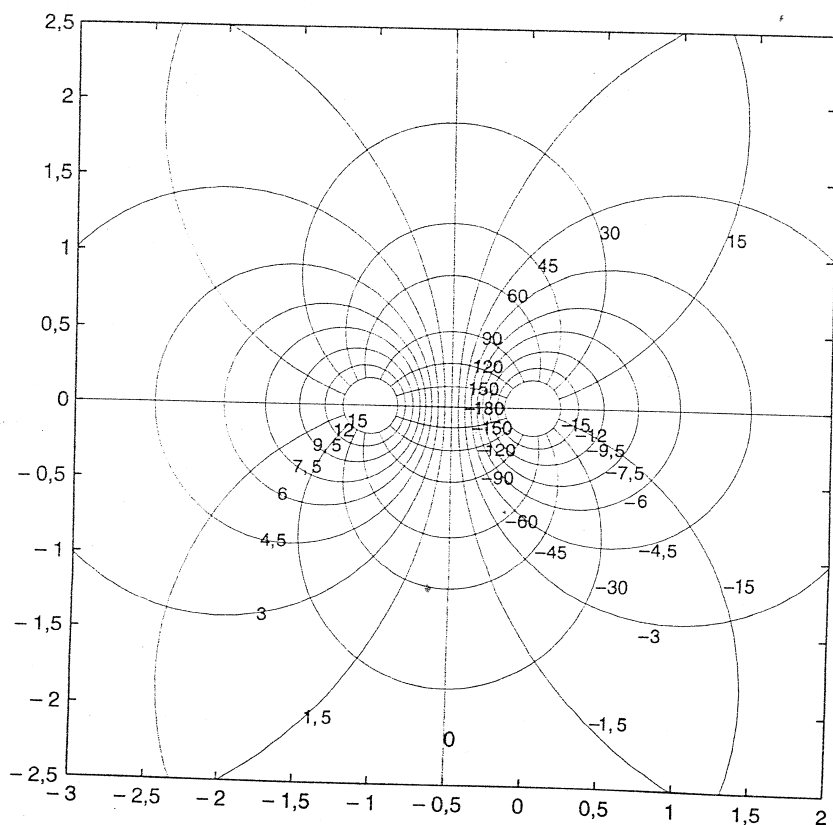
da cui risulta che la risposta armonica ad anello chiuso $G_0(j\omega)$ si può ricavare da quella ad anello aperto $F(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$ ancora utilizzando i luoghi a M ed N costanti, purché il risultato venga diviso per $H(j\omega)$.

Come già più volte si è notato, in molti casi la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione si riduce ad una costante reale h : in questi casi impiegando i luoghi a M ed N costanti si ottiene la funzione di risposta armonica ad anello chiuso a meno di un semplice fattore di scala.

In Fig. 4.41 è rappresentata una carta già preparata con un certo numero di curve a M ed N costanti: se il diagramma polare della funzione di risposta armonica ad anello aperto viene tracciato su un foglio di carta lucida ad essa sovrapposto, si possono facilmente dedurre numerosi valori della funzione di risposta armonica ad anello chiuso, fra i quali eseguire un'interpolazione.

Figura 4.41

Carta per diagrammi polari, con luoghi a M ed N costanti graduati rispettivamente in dB e gradi.



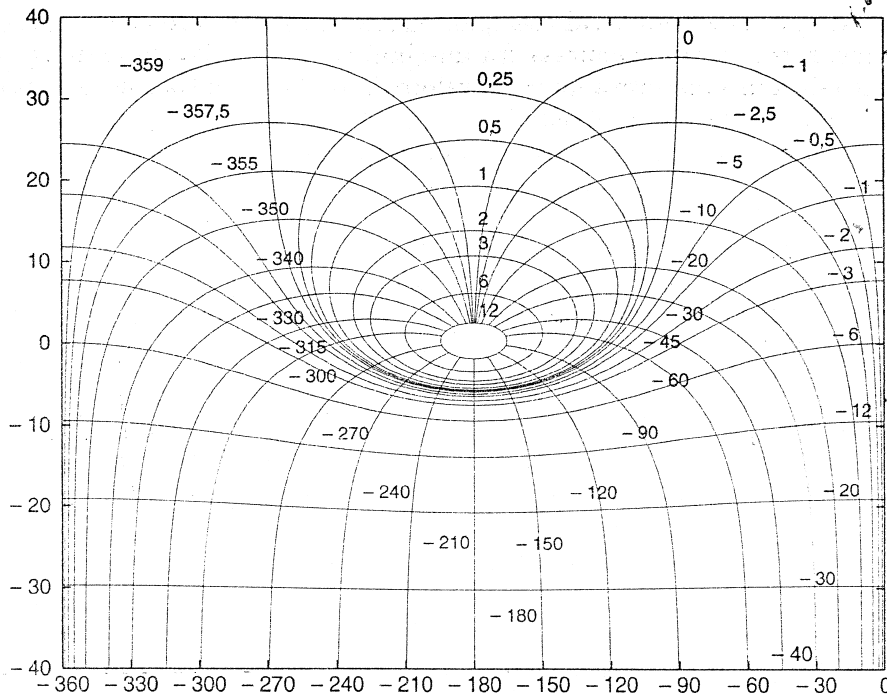


Figura 4.42
Carta di Nichols.

Una carta analoga a quella di Fig. 4.41 si può costruire per i diagrammi di Nichols, più frequentemente utilizzati di quelli polari per il progetto dei sistemi di controllo. Essa è riportata in Fig. 4.42 ed è detta *carta di Nichols*. I valori di M sono dati in dB, mentre le curve ad N costante sono graduate in gradi. Un esempio di applicazione di tale carta, relativo alla deduzione del picco di risonanza di un sistema in retroazione dalla risposta armonica ad anello aperto, è riportato al prossimo paragrafo.

Carta di Nichols

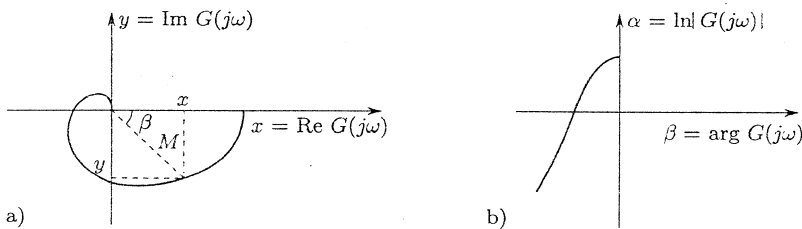


Figura 4.43
Corrispondenza fra il piano dei diagrammi di Nyquist e quello dei diagrammi di Nichols.

I luoghi a M costante e a N costante nei diagrammi di Nichols non sono circonferenze. Per la loro deduzione, si considera il piano dei diagrammi di Nyquist, riportato in Fig. 4.43a, e si indicano con x, y le coordinate di un punto generico: le coordinate β, α del punto corrispondente nel piano dei diagrammi di Nichols, riportato in Fig. 4.43b, sono

$$\beta = \arg(x + jy), \quad (4.69)$$

$$\alpha = \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.70)$$

4.9. Pulsazione di risonanza, picco di risonanza e banda passante

Al Paragrafo 2.4 si sono elencati alcuni parametri caratteristici della risposta al gradino, che possono costituire dati di specifica imposti al progettista di

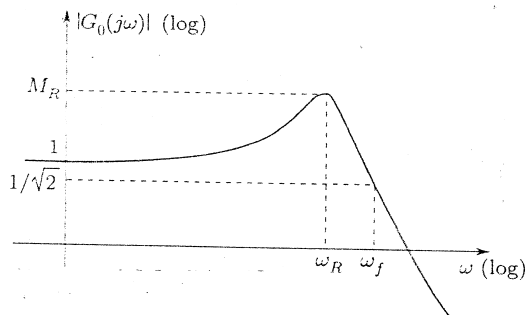
un sistema di controllo. Ad esempio, può essere specificato che la massima sovraelongazione sia compresa fra due limiti dati, che il tempo di assestamento sia non superiore a un certo valore dato, ecc. Tali specifiche si dicono *specifiche nel dominio del tempo*.

In alternativa, possono essere imposte *specifiche nel dominio della frequenza*, cioè relative a parametri caratteristici della funzione di risposta armonica.

Si fa riferimento all'andamento tipico del modulo della funzione di risposta armonica di un sistema in retroazione, riportato in Fig. 4.44, che in genere è analogo a quello di un sistema del secondo ordine, per la presenza di due poli dominanti complessi coniugati.

Figura 4.44

I più importanti parametri della risposta armonica di un tipico sistema in retroazione.



I parametri più significativi, indicati nella stessa Fig. 4.44, sono:

1. *Pulsazione di risonanza ω_R* : pulsazione in corrispondenza della quale il modulo di $G_0(j\omega)$ assume il valore massimo.
2. *Picco di risonanza M_R* : rapporto fra il massimo modulo di $G_0(j\omega)$ e il valore statico $G_0(0)$.
3. *Banda passante ω_f* : pulsazione alla quale il modulo della funzione di risposta armonica è inferiore di 3 dB (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $1/\sqrt{2}$) al valore statico $G_0(0)$.

Le specifiche nel dominio della frequenza sono, naturalmente, correlate con quelle nel dominio del tempo, potendosi dedurre la risposta armonica dalla risposta all'impulso e viceversa.

Tale correlazione però, nel caso di un sistema generico di ordine qualsiasi, non è esprimibile analiticamente, dato che in genere il valore di un parametro relativo a una delle due risposte dipende dall'andamento dell'altra nel suo complesso.

Pertanto nell'ipotesi, spesso accettabile, che il comportamento del sistema in retroazione sia simile a quello di un sistema del secondo ordine, non è difficile stabilire le corrispondenze impiegando i risultati dei paragrafi 2.4 e 3.2: ad esempio, la massima sovraelongazione e il picco di risonanza si possono porre in corrispondenza usando i diagrammi di Fig. 2.30 e di Fig. 3.11.

La pulsazione di risonanza, il picco di risonanza e la banda passante si determinano facilmente facendo uso dei luoghi a M costante, come è indicato in Fig. 4.45.

La Fig. 4.45a è relativa a un sistema di tipo 1, con retroazione puramente algebrica. Nel caso di un sistema di tipo 0, sempre con retroazione puramente algebrica, si determina dapprima il valore $M_0 = G_0(0)h$, come è indicato in Fig. 4.45b; si ha poi $M_R = M_1/M_0$, mentre la banda passante si determina facendo riferimento alla circonferenza $M_f = M_0/\sqrt{2}$.

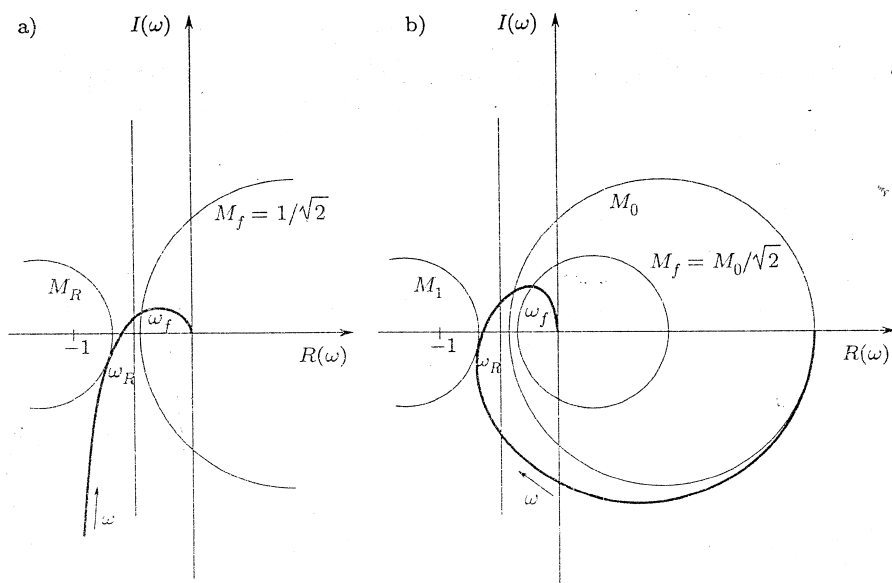


Figura 4.45

Determinazione dei più importanti parametri della risposta armonica di un sistema in retroazione.

Quando, durante il progetto di un sistema di controllo in retroazione, si modifica la risposta armonica ad anello aperto con l'introduzione di opportuni sistemi di correzione, è facile, con il metodo suesposto, controllare continuamente se le specifiche nel dominio della frequenza sono o meno soddisfatte.

Considerazioni analoghe si possono effettuare con riferimento ai diagrammi di Nichols, utilizzando i luoghi a M ed N costanti rappresentati in Fig. 4.42.

ESEMPIO 4.9.1 È dato un sistema avente il guadagno di anello

$$G(s)h = \frac{1000}{(s+1)(s+10)}, \quad (4.71)$$

con retroazione puramente algebrica. Si vuole determinare il picco di risonanza.

Posto $s=j\omega$, si ricava, per punti, il diagramma di Nyquist di Fig. 4.46.

Il guadagno statico del sistema in retroazione unitaria è

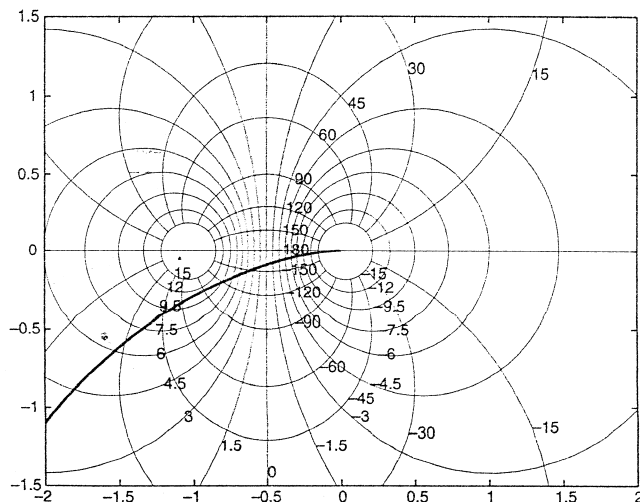
$$G_0(0)h = \frac{100}{100+1} \simeq 0,99 = -0,087 \text{ dB}.$$

Il picco di risonanza si determina con i luoghi a M costante rappresentati in figura. Si ottiene

$$M_R = M_1 - G_0(0)h \text{ (in dB)} \simeq 9,3 \text{ dB} = 2,91.$$

Figura 4.46

Determinazione del picco di risonanza con i luoghi a M costante sul diagramma di Nyquist.



ESEMPIO 4.9.2 È dato un sistema avente il guadagno di anello

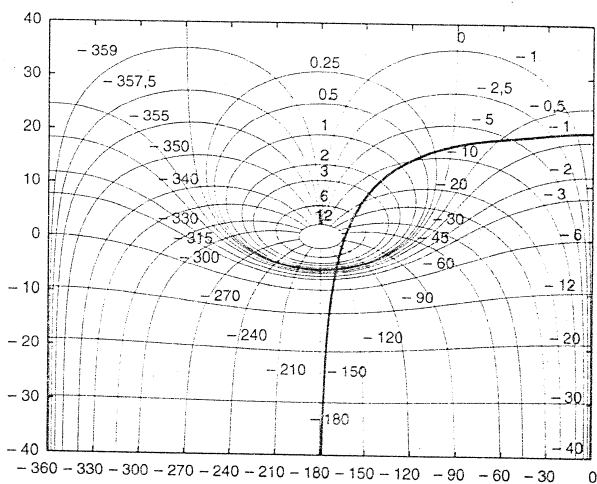
$$G(s)h = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+s+s^2)}, \quad (4.72)$$

con retroazione puramente algebrica. Si vuole determinare il picco di risonanza.

Posto $s = j\omega$, si ricava il diagramma di Nichols per punti. Si ottiene il diagramma di Fig. 4.47.

Figura 4.47

Determinazione del picco di risonanza con la carta di Nichols.



Il guadagno statico del sistema in retroazione unitaria si può facilmente calcolare, ottenendo

$$G_0(0)h = \frac{10}{10+1} \approx 0,9 \approx -0,8 \text{ dB}.$$

In alternativa, il guadagno statico si sarebbe potuto dedurre dalla carta di Nichols, individuando il luogo a M costante passante per il punto del diagramma corrispondente alla pulsazione nulla.

Il picco di risonanza è dato dalla relazione

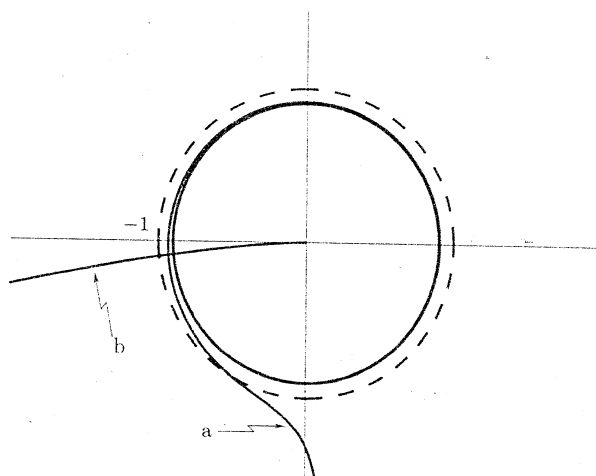
$$\begin{aligned} M_R &= M_1 - G_0(0)h \text{ (in dB)} = \\ &= 12 + 0,8 = 12,8 \text{ dB} = 4,37. \end{aligned}$$

L'inverso del picco di risonanza $1/M_R$ rappresenta

una misura del margine di stabilità dei sistemi in retroazione più affidabile dei margini di ampiezza e fase, che in alcuni casi possono dare indicazioni fra loro contrastanti.

Figura 4.48

Casi in cui le indicazioni fornite dai margini di ampiezza e fase risultano in contrasto fra loro.



Ad esempio, in Fig. 4.48 sono rappresentati, indicati rispettivamente con a e b, i diagrammi di Nyquist delle funzioni

$$G_1(s) = 0,9 \left(1 + \frac{1}{s}\right) e^{-0,8s} \quad \text{e} \quad G_2(s) = \frac{100}{s(s+1)} :$$

nel primo caso si ha un buon margine di fase (circa 60°) e uno scarso margine di ampiezza (1,07), mentre nel secondo il margine di fase è scarso (circa $5,7^\circ$) e il margine di ampiezza è infinito. Per un buon comportamento dei sistemi in retroazione si richiede tipicamente che $1/M_R$ sia compreso fra 0,8 e 0,9. Tale intervallo corrisponde a valori di M_R compresi fra 1 e 2 dB. In entrambi i casi cui si riferisce la Fig. 4.48 M_R è invece superiore a 20 dB.

4.10. Esercizi

4.10.1 Dato il sistema in retroazione di Fig. 4.49, determinare il dominio di stabilità nel piano dei parametri K, τ .

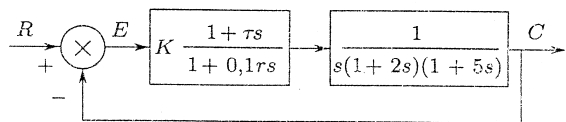


Figura 4.49 Sistema in retroazione.

Soluzione L'equazione caratteristica è

$$\tau s^4 + (10 + 0,7\tau)s^3 + (7 + 0,1\tau)s^2 + s + K + K\tau s = 0.$$

Da essa si deduce la tabella di Routh

4	τ	$7 + 0,1\tau$	K
3	$10 + 0,7\tau$	$1 + K\tau$	
2	A	$K(10 + 0,7\tau)$	
1	$A(1 + K\tau) - (10 + 0,7\tau)^2 K$		
0	$K(10 + 0,7\tau)$		

in cui è

$$A := (7 + 0,1\tau)(10 + 0,7\tau) - (1 + K\tau)\tau.$$

La condizione

$$A(1 + K\tau) - (10 + 0,7\tau)^2 K > 0$$

include anche la $A > 0$, essendo $K, \tau > 0$.

Scritta per esteso, la condizione assume la forma

$$-\tau^3 K^2 + (0,07\tau^3 + 3,41\tau^2 + 56\tau - 100)K + (0,07\tau^2 + 4,9\tau + 70) > 0.$$

Eguagliando il primo membro a zero, si ottiene un'equazione di secondo grado in K che ammette una sola radice positiva per ogni valore di τ : risolvendola per vari valori di τ si ottiene per punti la frontiera del dominio di stabilità, rappresentata in Fig. 4.50.

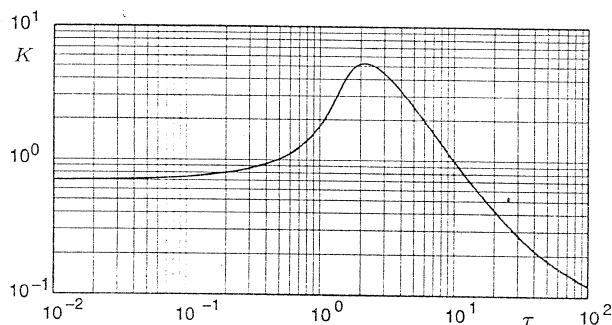


Figura 4.50 Dominio di stabilità del sistema di Fig. 4.49.

4.10.2 È dato il sistema in retroazione rappresentato in Fig. 4.51. I valori dei parametri sono: $\tau_1 = 10$ sec, $\tau_2 = 2$ sec, $\tau_3 = 1$ sec. Si suppone che r e c siano adimensionali, per cui K è espressa in sec^{-1} .

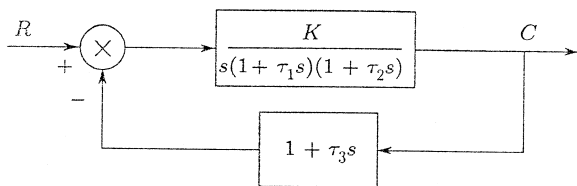
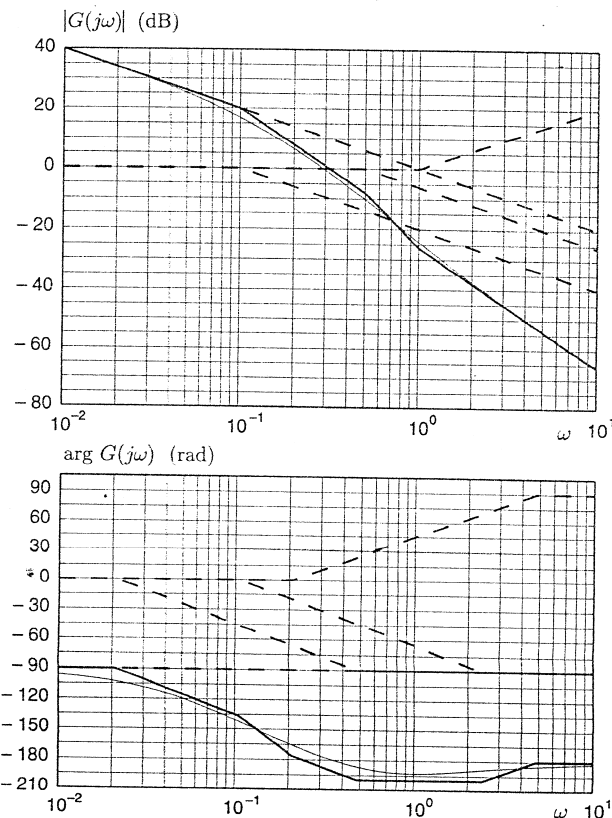


Figura 4.51 Sistema in retroazione.

1. Si determini il campo di valori di K corrispondenti alla stabilità del sistema.
2. Si determini il valore di K per il quale l'errore a regime in risposta alla rampa unitaria è uguale a 2 (l'errore si definisce come $e = r - c$).
3. Si traccino i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi per il valore di K di cui al punto 2. È sufficiente riportare le approssimazioni a spezzata.

Figura 4.52
Diagrammi di Bode
relativi al sistema di
Fig. 4.51.



Soluzione (cenno)

1. Impiegando il criterio di Routh, si ricava

$$0 \leq K \leq 1,5 \quad (\text{sec}^{-1}).$$

2. Per il calcolo dell'errore si riconduce il sistema a un sistema equivalente con retroazione unitaria utilizzando la (4.38) con $K_c = 1$ (come risulta dal confronto della definizione dell'errore di cui all'enunciato con la (4.35)).

Si determina quindi

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_e(s) = \frac{K}{1 + K \tau_3},$$

che, sostituito nella (4.31), fornisce

$$e_r = \frac{1 + K \tau_3}{K}$$

Imponendo che sia $e_r = 2$, si ottiene $K = 1 \text{ sec}^{-1}$.

3. I diagrammi sono riprodotti in Fig. 4.52.

4.10.3 È dato il sistema in retroazione rappresentato in Fig. 4.53, in cui è

$$G(s) = K_1 \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)(s+6)}$$

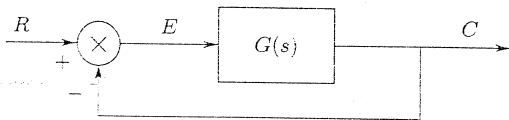


Figura 4.53 Sistema in retroazione.

1. Si determini il valore di K_1 corrispondente ad un errore a regime in risposta alla rampa unitaria pari a 0.5.
2. Si determini il campo di stabilità in K_1 .
3. Impiegando il valore di K_1 dedotto al punto 1, si traccino i diagrammi di Bode asintotici e si deducano su di essi i margini di ampiezza e di fase.

Soluzione (cenno)

1. Utilizzando le (4.30), (4.31), si ottiene $K_1 = 72$.
2. Impiegando il criterio di Routh, si ricava

$$0 \leq K_1 \leq 254.$$

3. I diagrammi sono riportati in Fig. 4.54: da essi si deduce $M_A = 8 \text{ dB}$, $M_F = 30^\circ$.

Il valore esatto del margine di ampiezza è $M_A = 254/72 = 3,5278$, pari a 10,95 dB e quello del margine di fase, dedotto per approssimazioni successive, è $M_F = 46,5^\circ$. Il notevole errore nel margine di fase è dovuto al fatto che il diagramma di Bode delle ampiezze effettivo si svolge alquanto al di sotto della sua approssimazione asintotica nel campo di frequenze dell'intersezione, per cui l'intersezione stessa avviene a una pulsazione notevolmente inferiore a quella dell'approssimazione asintotica ($\omega = 2,41 \text{ rad/sec}$).

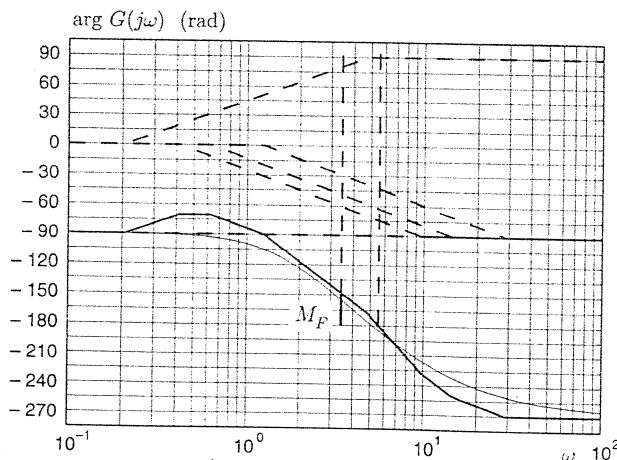
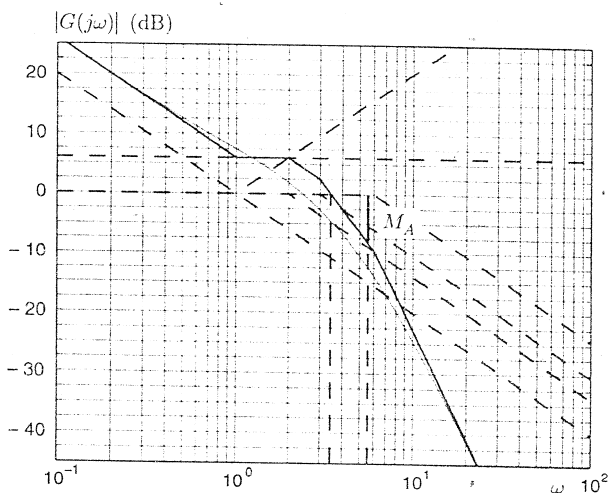


Figura 4.54 Diagrammi di Bode relativi al sistema di Fig. 4.53.

4.10.4 Supposto che il sistema con retroazione unitaria rappresentato in Fig. 4.53 abbia il guadagno di anello

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)},$$

si determini il valore di K corrispondente ad un margine di fase di 45° e, per tale valore di K , la massima sovrallungamento nella risposta al gradino.

Soluzione La pulsazione alla quale la fase è pari a -135° è $\omega_0 = 1/\tau$; perché il guadagno di anello sia unitario in corrispondenza di tale pulsazione deve essere

$$K = \omega_0 |1 + j\omega_0 \tau| = \frac{\sqrt{2}}{\tau}.$$

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s(1 + \tau s)}{K}}.$$

Da essa risulta che il sistema in retroazione è del secondo ordine con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau},$$

$$\delta = \frac{\omega_n}{2K} = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}} = 0,420.$$

A tale valore di δ nel grafico di Fig. 2.30 corrisponde una massima sovraelongazione del 24 %.

4.10.5 Supposto che il sistema con retroazione unitaria rappresentato in Fig. 4.53 abbia il guadagno di anello

$$G(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)^2},$$

si determini il valore di K corrispondente ad un margine di fase di 45° e, per tale valore, la massima sovraelongazione nella risposta al gradino.

Soluzione La pulsazione ω_0 alla quale la fase è -135° è data dalla relazione

$$\arg(1 + j\omega_0 \tau) = 135^\circ/2 = 67,5^\circ,$$

da cui

$$\omega_0 \tau = \tan 67,5^\circ = 2,41.$$

Perché il guadagno di anello sia unitario in corri-

spondenza della pulsazione ω_0 , deve essere

$$K = |1 + j\omega_0 \tau|^2 = 6,83.$$

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{\tau^2 s^2}{K+1} + \frac{2\tau s}{K+1} + 1}.$$

da essa risulta che il sistema in retroazione è del secondo ordine con

$$\omega_n = \frac{\sqrt{K+1}}{\tau},$$

$$\delta = \frac{\omega_n \tau}{K+1} = \frac{1}{\sqrt{K+1}} = 0,36.$$

A tale valore di δ nel grafico di Fig. 2.30 corrisponde una massima sovraelongazione del 30 %.

Complementi al Capitolo 4

C4.1. Controllo in tempo minimo in presenza di saturazione dell'ingresso

Si consideri il sistema avente ingresso x , uscita y e funzione di risposta all'impulso $g(t)$ e si supponga che la funzione di ingresso sia limitata dalla condizione

$$-1 \leq x(t) \leq 1, \quad (4.73)$$

che rappresenta la *saturazione*, fenomeno sempre presente nei sistemi fisici. Ci si propone di portare l'uscita del sistema, inizialmente in quiete, ad un dato valore y_1 applicando una funzione di ingresso ammissibile, cioè continua a tratti e soddisfacente la (4.73). Senza ledere la generalità si può supporre che y_1 sia positiva (infatti, qualora fosse negativa, per linearità basterebbe applicare l'opposto del segnale di ingresso corrispondente al controllo in tempo minimo a $-y_1$).

Saturazione

Anzitutto si nota che la funzione di ingresso (detta *legge di controllo*) che, in relazione ad un dato istante finale t_1 , consente di ottenere il massimo valore positivo di $y(t_1)$ è

$$x(t) = \text{sign } g(t_1 - t). \quad (4.74)$$

Infatti, sostituendo tale funzione nell'integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (4.75)$$

si ottiene il valore finale dell'uscita

$$y_M(t_1) = F(t_1), \quad \text{con} \quad F(t) := \int_0^t |g(\tau)| d\tau, \quad (4.76)$$

manifestamente massimo, in quanto la funzione sotto il segno di integrale nella (4.75) è resa massima dalla funzione di ingresso (4.74), rispetto ad ogni altra funzione di ingresso ammissibile.

Viceversa, dato il valore y_1 dell'uscita che si vuole raggiungere, si determina il valore t_1 del tempo minimo in base alla relazione $y_1 = F(t_1)$ (si noti che la funzione $F(t)$ è monotona) e si applica la funzione di ingresso (4.74). Si noti che, nei sistemi lineari stazionari a costanti concentrate, descritti da equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, la risposta all'impulso $g(t)$ non può essere identicamente nulla in un intervallo di tempo finito perché, se così fosse, essa sarebbe identicamente nulla anche al di fuori di tale intervallo: la legge di controllo ottenuta è pertanto costante a tratti e commuta dall'uno all'altro dei valori estremi -1 e $+1$. Un siffatto controllo si dice *bang-bang*.

Controllo bang-bang

ESEMPIO C4.1.1 Per controllare il sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 1}$$

in tempo minimo al valore $y_1 = 5,7$ si applica la seguente procedura, che viene descritta con riferimento alla Fig. 4.55:

- i) si determina la risposta all'impulso $g(t)$ (curva 1);
- ii) si determina la funzione $F(t)$ per integrazione numerica (curva 2);
- iii) si determina il valore del tempo minimo t_1 dalla $y_1 = F(t_1)$ (costruzione grafica mostrata in figura);
- iv) si determina la funzione di ingresso (4.74) (curva 3): in pratica si traccia il grafico della funzione $\text{sign } g(t)$ e lo si ribalta in modo che gli istanti $t = 0$ e $t = t_1$ vengano scambiati fra loro;
- v) si verifica che la risposta a tale funzione di ingresso (curva 4) assume effettivamente il valore y_1 all'istante t_1 .

Si noti che nel caso in esame, in cui il sistema è asintoticamente stabile, la curva 2 tende ad un asintoto orizzontale, che rappresenta il valore massimo dell'uscita raggiungibile (per t_1 tendente all'infinito) applicando un controllo bang-bang di periodo $2\pi/\omega$, in cui ω è la parte immaginaria dei poli del sistema: in tal caso la fase iniziale è ovviamente influente. Se il sistema non fosse asintoticamente stabile, cioè se il coefficiente di smorzamento fosse nullo, la curva 2, sempre monotona, sarebbe

sempre compresa fra due rette parallele di inclinazione non nulla, il che significa che in tal caso il problema del controllo in tempo minimo ammetterebbe soluzione per y_1 comunque grande.

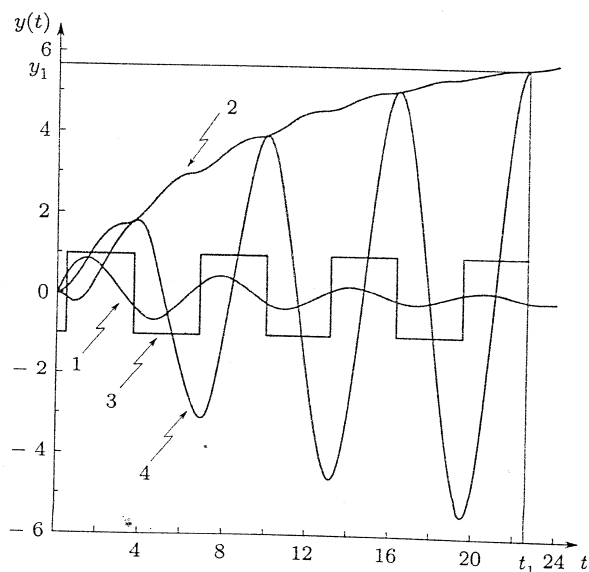


Figura 4.55 Procedura per la determinazione del controllo in tempo minimo di un sistema del secondo ordine.

C4.2. Dimostrazioni di alcuni teoremi relativi alla stabilità

Si prendono in esame e si dimostrano alcuni teoremi relativi alla stabilità dei sistemi lineari, già enunciati al Paragrafo 4.1.

TEOREMA C4.2.1 (relazione fra stabilità i.l.u.l. e risposta all'impulso). Un sistema lineare è stabile i.l.u.l. se e solo se è soddisfatta la relazione

$$\int_{t_0}^t |g(t, \tau)| d\tau \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq t_0, \quad (4.77)$$

in cui $g(t, \tau)$ è la funzione di risposta all'impulso.

Dimostrazione Assumendo $|x(t)| \leq M_x$ per ogni $t \geq t_0$, dalla (2.73) discende

$$|y(t)| = \left| \int_{t_0}^t x(\tau) g(t, \tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |x(\tau)| |g(t, \tau)| d\tau \leq M_x \int_{t_0}^t |g(t, \tau)| d\tau \leq M_x M.$$

Basta porre $M_y = M_x M$ per concludere la dimostrazione della sufficienza della (4.77) affinché il sistema sia stabile i.l.u.l.

Per dimostrarne la necessità si procede per assurdo, verificando che, se l'integrale a primo membro della (4.77) fosse grande a piacere per un valore finito di t , si potrebbe ottenere una risposta grande a piacere ad un ingresso limitato; ciò discende dai risultati sul controllo in tempo minimo illustrati al paragrafo precedente. Detto M_1 un numero grande a piacere, si verifica che, nell'ipotesi che non valga la (4.77), esiste un valore del tempo t_1 tale che, con un particolare ingresso limitato, si può avere $y(t_1) = M_1$.

Infatti, se la (4.77) non è soddisfatta, per ogni numero reale positivo M_1 grande a piacere esiste un valore t_1 del tempo per cui è

$$\int_{t_0}^{t_1} |g(t_1, \tau)| d\tau = M_1.$$

Assumendo infatti la funzione di ingresso

$$x(t) = \text{sign } g(t_1, t),$$

si ha

$$y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} x(\tau) g(t_1, \tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} |g(t_1, \tau)| d\tau = M_1.$$

COROLLARIO C4.2.1 (restrizione del teorema precedente al caso dei sistemi lineari stazionari). Un sistema lineare stazionario è stabile i.l.u.l. se e solo se è soddisfatta la relazione

$$\int_0^\infty |g(t)| dt \leq M < \infty, \quad (4.78)$$

in cui $g(t)$ è la funzione di risposta all'impulso.

Dimostrazione Nel caso in cui il sistema sia stazionario, potendosi assumere $t_0 = 0$, la (4.77) si scrive

$$\int_0^t |g(t - \alpha)| d\alpha \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Posto $\tau = t - \alpha$, per cui è $d\tau = -d\alpha$, si ottiene

$$-\int_t^0 |g(\tau)| d\tau = \int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

relazione che equivale manifestamente alla (4.78).

TEOREMA C4.2.2 (relazione fra stabilità i.l.u.l. e stabilità asintotica nel caso dei sistemi lineari stazionari). Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta è stabile i.l.u.l. se e solo se è asintoticamente stabile; cioè se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale negativa.

Dimostrazione La relazione (4.78) non è soddisfatta se $G(s)$ ha poli a parte reale non negativa. Infatti dalla definizione della trasformazione di Laplace si deduce

$$|G(s)| = \left| \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |g(t)| |e^{-st}| dt \quad (4.79)$$

se ci si limita a considerare i valori di s per i quali è $\sigma = \operatorname{Re} s \geq 0$ (asse immaginario e semipiano destro del piano complesso), che soddisfano la

$$|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}| |e^{-j\omega t}| = |e^{-\sigma t}| \leq 1,$$

si può scrivere

$$|G(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)| dt \quad \text{per } \operatorname{Re} s \geq 0,$$

relazione da cui risulta che l'integrale a primo membro della (4.79) non converge se $G(s)$ ha dei poli a parte reale non negativa.

D'altra parte, se $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa, la (4.78) è soddisfatta. Infatti la sua antitrasformata $g(t)$ è la somma di un numero finito di termini dei tipi (2.58) o, più generalmente, (2.59). Tale somma è assolutamente integrabile se e solo se ciascuno dei termini è assolutamente integrabile; ogni termine peraltro è maggiorato da un integrale del tipo

$$\int_0^\infty t^n e^{\sigma t} dt = \frac{n!}{(-\sigma)^{n+1}} \quad \text{per } \sigma < 0, \quad (4.80)$$

di valore finito.

Per provare la (4.80), si considera la famiglia di integrali

$$I_n(t) = \int_0^t e^{\sigma \tau} \tau^n d\tau \quad \text{per } \sigma < 0.$$

Integrando per parti, con le posizioni

- fattore finito $f = \tau^n$, da cui $f' = n \tau^{n-1}$,
 - fattore differenziale $g' d\tau = e^{\sigma \tau} d\tau$, da cui $g = (1/\sigma) e^{\sigma \tau}$,
- si ottiene la relazione ricorrente

$$I_n(t) = \frac{\tau^n e^{\sigma \tau}}{\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{n}{\sigma} I_{n-1}(t),$$

con

$$I_0(t) = \frac{e^{\sigma \tau}}{\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t},$$

da cui si deduce la (4.80) per t tendente all'infinito.

Per introdurre la funzione di risposta armonica, al Paragrafo 3.1 si è dimostrato che un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa, sottoposto a un segnale di ingresso sinusoidale, presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la medesima frequenza del segnale di ingresso.

È interessante notare che questa proprietà è soddisfatta da qualunque sistema lineare stazionario, anche a costanti distribuite, purché sia stabile i.l.u.l. Il seguente teorema estende quello enunciato al Paragrafo 3.1.

TEOREMA C4.2.3 (regime sinusoidale dei sistemi lineari stazionari). Un sistema lineare stazionario stabile i.l.u.l. soggetto ad un'eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ dalla relazione $F(\omega) = G(j\omega)$.

Dimostrazione L'ipotesi di stabilità i.l.u.l. comporta che ad ogni $\epsilon > 0$ si possa associare un valore t_1 del tempo tale che sia soddisfatta la relazione

$$\int_{t_1}^{\infty} |g(t)| dt < \epsilon.$$

Ciò posto, si verifica facilmente che per ogni $t > t_1$ la risposta del sistema all'eccitazione

$$x(t) = X \sin \omega t$$

è espressa dalla relazione

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi(\omega)) - \eta, \\ &= |G(j\omega)| X (\sin \omega t \cos \varphi(\omega) + \cos \omega t \sin \varphi(\omega)) - \eta \\ &= X (R(\omega) \sin \omega t + I(\omega) \cos \omega t) - \eta, \end{aligned}$$

in cui η è un numero reale avente modulo non superiore a $X\epsilon$.

In virtù della (2.66) si può scrivere infatti

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau) X \sin \omega t \cos \omega \tau d\tau - \int_0^t g(\tau) X \cos \omega t \sin \omega \tau d\tau \\ &= (X \sin \omega t) \int_0^t g(\tau) \cos \omega \tau d\tau - (X \cos \omega t) \int_0^t g(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \end{aligned}$$

e, ricordando le (3.10), (3.11),

$$y(t) = (R(\omega) \sin \omega t + I(\omega) \cos \omega t) - \eta,$$

in cui è

$$\eta = \int_t^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) d\tau.$$

Da questa si ottiene infine

$$|\eta| \leq X \int_t^{\infty} |g(\tau)| d\tau < X\epsilon \quad \text{per ogni } t > t_1.$$

Scegliendo opportunamente l'istante t_1 , a partire dal quale il sistema si considera a regime, si può rendere piccolo quanto si vuole l'errore η a meno del quale la risposta soddisfa l'enunciato del teorema.

C4.3. Dimostrazione del criterio di Nyquist

Al Paragrafo 4.5 il criterio di Nyquist è stato enunciato nella forma più semplice, quella cui si fa riferimento per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione più comuni.

Oggetto del presente paragrafo è la presentazione e la dimostrazione di una forma più generale e rigorosa del criterio, forma che si presta a più vaste applicazioni.

Per la deduzione del criterio di Nyquist risulta fondamentale il seguente lemma.

LEMMA C4.3.1 (teorema dell'indice logaritmico). Sia Γ una curva chiusa in un dominio $\mathcal{D}$ del piano s e $F(s)$ una funzione analitica in $\mathcal{D}$, ad eccezione di un numero finito di poli. Con $\Delta \arg F(s)$ si indica la variazione che subisce l'argomento di $F(s)$ al variare di s lungo Γ per un giro completo in senso antiorario. Vale la relazione

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p, \quad (4.81)$$

in cui n_z è il numero degli zeri e n_p il numero dei poli di $F(s)$ circondati da Γ , valutati ciascuno con il suo ordine di molteplicità.

Dimostrazione Si può verificare che il primo membro della (4.81) è uguale all'integrale

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F'(s)}{F(s)} ds, \quad (4.82)$$

in cui con $F'(s)$ si è indicata la derivata di $F(s)$.

Infatti, posto $w = F(s)$, si può scrivere

$$\frac{F'(s)}{F(s)} ds = d \ln F(s) = d \ln w = d (\ln |w| + j \arg w),$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} d \ln |w| + \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \arg w.$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo, in quanto il modulo, ritornando s al valore iniziale dopo un giro completo lungo Γ , riassume il valore che aveva all'inizio.

Il secondo integrale è uguale al primo membro della (4.81), cioè rappresenta il numero di giri che il punto $F(s)$ compie in senso orario intorno all'origine nel piano w , al variare di s lungo Γ .

La funzione $F'(s)/F(s)$ è la *derivata logaritmica* di $F(s)$: essa presenta singolarità isolate in corrispondenza degli zeri e dei poli di $F(s)$. Infatti, se s_0 è uno zero di $F(s)$ di ordine r , esiste una funzione $f(s)$ tale che

$$F(s) = (s - s_0)^r f(s) \quad \text{con } f(s_0) \neq 0,$$

$$F'(s) = (s - s_0)^r f'(s) + r(s - s_0)^{r-1} f(s),$$

e quindi

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{f'(s)}{f(s)} + \frac{r}{s - s_0}.$$

La derivata logaritmica ha pertanto in s_0 un polo semplice con residuo uguale all'ordine di molteplicità dello zero di $F(s)$. Se s_0 è un polo di $F(s)$ di ordine r anziché uno zero di ordine r , basta sostituire $-r$ a r negli sviluppi precedenti. Ciò posto, il teorema dell'indice logaritmico è conseguenza immediata del teorema dei residui di Cauchy, enunciato al Paragrafo C2.1.

Nel caso di una funzione razionale fratta, posta nella forma fattorizzata

$$F(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (4.83)$$

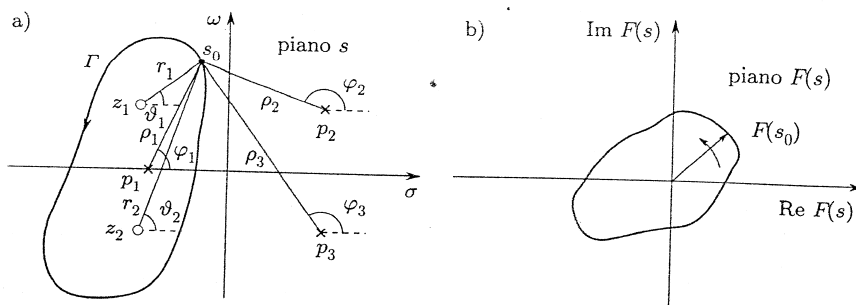
il teorema dell'indice logaritmico si può dedurre in modo più diretto.

Infatti, facendo riferimento al caso esemplificato in Fig. 4.56a (funzione con due zeri e tre poli), la (4.83) si scrive

$$F(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = K_1 \frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Figura 4.56

Illustrazione del significato del teorema dell'indice logaritmico.



Al variare di s per un giro completo in senso antiorario sulla curva Γ , gli angoli ϑ_1 , ϑ_2 e φ_1 , corrispondenti a zeri e poli circondati dalla curva, variano ciascuno di 2π , mentre gli angoli φ_2 e φ_3 , corrispondenti a poli non circondati dalla curva, subiscono una variazione totale nulla.

In definitiva l'argomento della funzione $F(s)$ rappresentata in Fig. 4.56b varia di 2π un numero di volte corrispondente al numero degli zeri n_z meno il numero dei poli n_p circondati dalla curva Γ , cioè il vettore che rappresenta la funzione $F(s)$ compie un numero di giri in senso antiorario intorno all'origine pari a $n_z - n_p$.

Se la curva viene percorsa in senso orario, il numero dei giri intorno all'origine compiuti dal vettore $F(s)$ è ancora $n_z - n_p$, ma i giri sono anch'essi in senso orario.

Per la deduzione del criterio di Nyquist, si opera una scelta particolare della curva Γ , indicata in Fig. 4.57.

La curva cui si fa riferimento è composta delle seguenti parti:

- i) una semicirconferenza di raggio R e centro nell'origine;
- ii) semicirconferenze di raggio ρ e centri in poli e zeri immaginari della funzione $F(s)$;
- iii) segmenti dell'asse immaginario.

Facendo tendere ρ a zero e R all'infinito, si ottiene una curva che circonda tutto il semipiano destro.

Si applica ora il teorema dell'indice logaritmico, considerando separatamente i contributi delle varie parti della curva Γ così definita alla variazione dell'argomento della funzione $F(s)$.

i) Semicirconferenza all'infinito: l'espressione (4.83), quando il modulo di s tende all'infinito, può essere approssimata dalla

$$F(s) \simeq K_1 s^{m-n};$$

il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ corrispondente alla variazione di s sulla semicirconferenza all'infinito si calcola ponendo $s = R e^{j\vartheta}$ e facendo variare ϑ da $\pi/2$ a $-\pi/2$. Si deduce

$$\Delta \arg F(s) = (m - n) \Delta \vartheta = -(m - n) \pi. \quad (4.84)$$

ii) Semicirconferenza aggirante uno zero o un polo immaginario: ponendo in evidenza gli ordini di molteplicità degli zeri e dei poli, la (4.83) si può scrivere

$$F(s) = K_1 \frac{(s - z_1)^{h_1} (s - z_2)^{h_2} \dots (s - z_u)^{h_u}}{(s - p_1)^{k_1} (s - p_2)^{k_2} \dots (s - p_v)^{k_v}}, \quad (4.85)$$

in cui è

$$\sum_{i=1}^u h_i = m, \quad \sum_{i=1}^v k_i = n.$$

Si suppone che nella (4.85) z_1 sia uno zero immaginario. Posto $s = z_1 + \rho e^{j\vartheta}$, il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ che corrisponde alla variazione di s sulla semicirconferenza di raggio infinitesimo ρ e centro in z_1 si ottiene facendo variare ϑ da $-\pi/2$ a $\pi/2$. Quando ρ tende a zero, la (4.85) può essere approssimata dalla

$$F(s) \simeq K_1 \rho^{h_1} e^{jh_1\vartheta} \frac{(z_1 - z_2)^{h_2} \dots (z_1 - z_u)^{h_u}}{(z_1 - p_1)^{k_1} \dots (z_1 - p_v)^{k_v}};$$

pertanto la variazione dell'argomento è pari a

$$\Delta \arg F(s) = \pi h_1.$$

Si conclude che il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ corrispondente alla semicirconferenza aggirante uno zero immaginario di ordine di molteplicità h è pari a πh ; il contributo totale dovuto alle semicirconferenze aggiranti zeri immaginari è $\pi \mu$, in cui μ è il numero totale degli zeri immaginari, ciascuno contato tante volte quanto è il suo ordine di molteplicità.

Con ragionamento del tutto analogo, si può verificare che il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ corrispondente alla semicirconferenza aggirante un polo immaginario di ordine di molteplicità k è pari a $-\pi k$; il contributo totale dovuto alle semicirconferenze aggiranti poli immaginari è $-\pi \nu$, in cui ν è il numero totale dei poli immaginari, ciascuno contato tante volte quanto è il suo ordine di molteplicità.

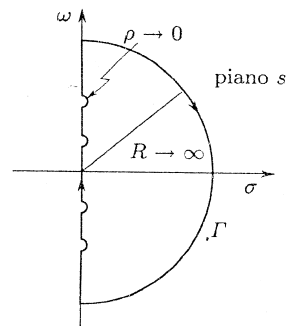


Figura 4.57

Curva Γ scelta per la deduzione del criterio di Nyquist.

iii) Segmenti dell'asse immaginario: il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ corrispondente alla variazione di s lungo i segmenti dell'asse immaginario facenti parte della curva Γ di Fig. 4.57 è pari a ϑ_f , cioè alla rotazione "al finito" (per valori non nulli e non infiniti del modulo) del vettore $F(j\omega)$ intorno all'origine al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$. facilmente determinabile una volta tracciato il diagramma polare della funzione $F(j\omega)$.

Raccogliendo i risultati finora esposti, si giunge alla relazione

$$-2\pi(n_z - n_p) = \vartheta_f - \pi\mu - \pi\nu - \pi(m - n), \quad (4.86)$$

in cui il significato dei simboli è:

- n_z numero degli zeri della funzione $F(s)$ con parte reale positiva;
- n_p numero dei poli della funzione $F(s)$ con parte reale positiva;
- ϑ_f variazione al finito dell'argomento del vettore $F(j\omega)$ per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$;
- μ numero degli zeri immaginari della funzione $F(s)$;
- ν numero dei poli immaginari della funzione $F(s)$;
- m grado del polinomio a numeratore di $F(s)$;
- n grado del polinomio a denominatore di $F(s)$.

La (4.86) rispecchia l'applicazione del teorema dell'indice logaritmico nel caso particolare della curva Γ rappresentata in Fig. 4.57: infatti la variazione dell'argomento della funzione $F(s)$ è uguale a $-2\pi(n_z - n_p)$; d'altra parte tale variazione è pari alla somma dei contributi precedentemente passati in rassegna, somma che appare a secondo membro della (4.86).

Dividendo la (4.86) per -2π , si ottiene la relazione equivalente

$$n_z - n_p = n_f - \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{m - n}{2}, \quad (4.87)$$

in cui con n_f si indica il numero dei giri percorsi "al finito" in senso orario intorno all'origine dal vettore $F(j\omega)$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$. Considerare solo i giri al finito significa prescindere dal calcolo delle rotazioni quando il diagramma polare che rappresenta l'andamento del vettore $F(j\omega)$ entra in una circonferenza di raggio molto piccolo con centro nell'origine (nei casi in cui il diagramma passa per l'origine) o esce da una circonferenza di raggio molto grande e centro nell'origine (nei casi in cui il diagramma presenta rami all'infinito): infatti i corrispondenti contributi alla fase sono stati determinati a parte, escludendo il passaggio per poli e zeri immaginari con le semicirconferenze di raggio ρ e chiudendo la curva Γ con la semicirconferenza di raggio R .

La relazione (4.87) è fondamentale per la deduzione del criterio di Nyquist. Il suo significato sarà illustrato con alcuni semplici esempi.

ESEMPIO C4.3.1 Si considera la funzione

$$F(s) = \frac{K}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad \tau_1, \tau_2 > 0. \quad (4.88)$$

Posto $s = j\omega$ e facendo variare ω da 0 a $+\infty$, si deduce il diagramma di Nyquist indicato a tratto pieno in Fig. 4.58.

Considerando la variazione di ω da 0 a $+\infty$, è chiaro che il vettore compie intorno all'origine mezzo giro in senso orario. Poiché per ω variabile da $-\infty$ a 0 si ottiene il diagramma indicato a tratto in figura, che è l'immagine speculare rispetto all'asse reale di quello a tratto pieno, si conclude che è $n_f = 1$.

Essendo, nel caso in esame, $n_z = 0$, $n_p = \mu = 0$, $\nu = 1$, la (4.87) si scrive

$$0 - 0 = 1 - 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

ed è pertanto soddisfatta.

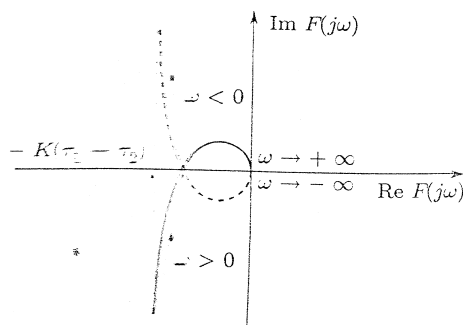


Figura 4.58 Diagramma polare della funzione (4.88).

ESEMPIO C4.3.2 Si considera la funzione

$$F(s) = K \frac{1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad \tau_1, \tau_2, \omega_n > 0, \quad (4.89)$$

che presenta due zeri e un polo sull'asse immaginario (vedi Fig. 4.59).

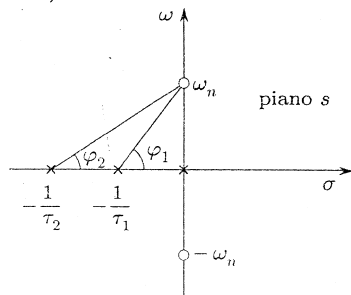


Figura 4.59 Configurazione poli-zeri della funzione (4.89).

Il diagramma di Nyquist ha l'andamento rappresentato in Fig. 4.60: in corrispondenza della pulsazione $\omega_1 = \omega_n - \epsilon$, con ϵ infinitesimo, è

$$\arg F(j\omega_1) \simeq -\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2 :$$

infatti i contributi di fase relativi ai due zeri si elidono, valendo rispettivamente $-\pi/2$ e $\pi/2$.

In corrispondenza della pulsazione $\omega_2 = \omega_n + \epsilon$ si ha in-

vece

$$\arg F(j\omega_2) \simeq -\frac{\pi}{2} - \varphi_1 + \varphi_2 + \pi :$$

infatti i contributi di fase relativi ai due zeri valgono ciascuno $\pi/2$.

Passando da ω_1 a ω_2 si verifica una variazione di fase pari a π , come è chiarito dal diagramma di Nyquist di Fig. 4.60. Tale contributo non viene considerato quando si calcola n_f (numero di giri al finito), che vale $2(1/2) = 1$.

La relazione (4.87) nel caso in esame si scrive

$$0 - 0 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ed è pertanto soddisfatta.

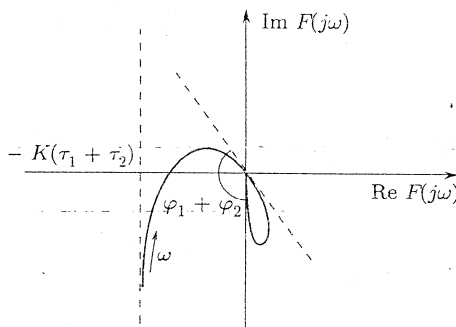


Figura 4.60 Diagramma polare della funzione (4.89).

La relazione fondamentale (4.87) viene utilizzata principalmente nello studio dei sistemi in retroazione e permette di dedurre direttamente il criterio di Nyquist. Con riferimento al sistema in retroazione tipico rappresentato in Fig. 4.8a, al criterio di Nyquist si può dare il seguente enunciato, che comprende, come casi particolari, quelli riportati al Paragrafo 4.5.

TEOREMA C4.3.1 (criterio di Nyquist). Il sistema in retroazione di Fig. 4.8a è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma polare della funzione $F(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$, tracciato per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$, circonda il punto critico $(-1 + j0)$ per tanti giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ nel semipiano destro e per tanti mezzi giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli sull'asse immaginario.

Dimostrazione Supponendo che $G(s)$ e $H(s)$ nel sistema in retroazione di Fig. 4.8a siano entrambe razionali fratte, si pone

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}, \quad H(s) = \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} : \quad (4.90)$$

e si scrive la funzione di trasferimento del sistema complessivo nella forma

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{P_1(s)Q_2(s)}{Q_1(s)Q_2(s) + P_1(s)P_2(s)} \quad (4.91)$$

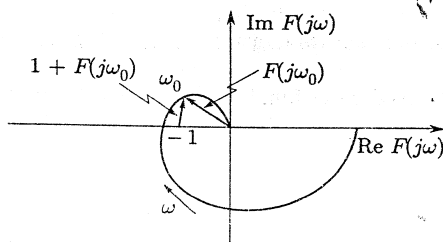
Appare evidente che gli zeri della (4.91) coincidono con quelli della funzione $G(s)$ e con i poli di $H(s)$, mentre i poli, che interessano agli effetti della stabilità, sono dati dagli zeri della funzione

$$1 + F(s), \quad (4.92)$$

in cui con $F(s) = G(s)H(s)$ si indica il guadagno di anello.

Figura 4.61

Diagramma polare di un sistema in retroazione e punto critico.



I poli della $G(s)$ non corrispondono a poli della $G_0(s)$ perché tale funzione vi assume il valore $1/H(s)$, mentre negli zeri della $H(s)$ la $G_0(s)$ assume il valore $G(s)$.

Si tracci il diagramma polare del guadagno di anello $F(j\omega)$ (vedi Fig. 4.61) e si supponga di conoscere il numero dei poli della funzione $F(s)$ nel semipiano destro e sull'asse immaginario: tali poli evidentemente coincidono con quelli della funzione $1+F(s)$.

Si applica ora la relazione (4.87) alla funzione $1+F(s)$, notando che n_f , il numero dei giri al finito che compie intorno all'origine il vettore $1+F(j\omega)$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$ è uguale a quello che compie il vettore $F(j\omega)$ intorno al "punto critico" $-1+j0$ (vedi Fig. 4.61), che il numero degli zeri immaginari è nullo se il diagramma non passa per il punto critico e che è $m-n=0$.

Ciò posto, nell'ipotesi che il diagramma polare della $F(j\omega)$ non passi per il punto critico, si può scrivere

$$n_z = n_f + n_p + \frac{\nu}{2}, \quad (4.93)$$

in cui il significato dei simboli è:

- n_z numero degli zeri della funzione $1+F(s)$ aventi parte reale positiva;
- n_f numero dei giri al finito del diagramma polare della funzione $F(j\omega)$ intorno al punto critico $-1+j0$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$;
- n_p numero dei poli della funzione $F(s)$ aventi parte reale positiva;
- ν numero dei poli immaginari della funzione $F(s)$.

Il teorema risulta così provato.

Si fa notare che negli enunciati semplificati del criterio di Nyquist riportati al Paragrafo 4.5 non si sono considerate le rotazioni "al finito", ma quelle dei diagrammi "completi", rappresentati in Fig. 4.22b-c, che si richiudono attraverso una semicirconferenza (o una circonferenza) di raggio tendente all'infinito corrispondente alla semicirconferenza di raggio infinitesimo che, nella curva, esclude l'origine, in cui è presente un polo. L'enunciato precedente, non richiedendo la messa in conto di questa richiusura artificiosa del diagramma polare, risulta più semplice ed elegante.

ESEMPIO C4.3.3 Si considera il sistema in retroazione avente il guadagno di anello (4.42), cui corrisponde il diagramma polare di Fig. 4.24.

Dall'esame della funzione di trasferimento risulta $n_p = 2$, $\nu = 0$. Se il punto critico viene circondato, il che avviene per valori elevati della costante K , è $n_f = -2$ e la (4.93) fornisce

$$n_z = -2 + 2 + 0 = 0 :$$

il sistema in retroazione è stabile.

Se invece il punto critico non viene circondato, il che avviene per valori bassi della costante K , è $n_f = 0$ e si ha

$$n_z = 0 + 2 + 0 = 2 :$$

il sistema in retroazione è instabile e presenta due poli a parte reale positiva.

Capitolo 5

Il metodo del luogo delle radici

I metodi di analisi nel dominio della frequenza, in particolare il criterio di stabilità di Nyquist e i criteri basati sui margini di stabilità, che di esso sono conseguenze, sono di notevole utilità per una valutazione operativamente molto semplice, ma approssimativa, delle caratteristiche dinamiche dei sistemi in retroazione e consentono di confrontare gli effetti di varie possibili scelte in un progetto di massima. D'altra parte un progetto accurato richiede la conoscenza dei poli del sistema in retroazione e dell'influenza che su di essi hanno le variazioni dei più importanti parametri a disposizione del progettista: a tal fine risulta di notevole utilità il metodo del luogo delle radici, che costituisce un procedimento grafico per la costruzione del tracciato descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica al variare di un parametro, normalmente la costante di guadagno di anello. Oggetto di questo capitolo è l'illustrazione delle proprietà del luogo delle radici e delle regole per la sua costruzione.

5.1. Definizione del luogo delle radici

Com'è noto, l'equazione caratteristica del sistema in retroazione schematizzato in Fig. 4.8a è

$$1 + G(s)H(s) = 0. \quad (5.1)$$

Si suppone che il prodotto $G(s)H(s)$ sia una funzione razionale fratta posta nella forma con costanti di tempo (3.18) e che la costante di guadagno K sia positiva⁽¹⁾: al variare del parametro K da 0 a ∞ , le radici dell'equazione (5.1) descrivono una curva nel piano s , cui si dà il nome di *luogo delle radici*.

Il luogo delle radici risulta di grande utilità per giudicare l'effetto di variazioni della costante di guadagno sulla stabilità e sulla risposta del sistema in retroazione. Il metodo si può modificare facilmente per ottenere le variazioni delle radici dell'equazione caratteristica in funzione di parametri diversi dalla costante di guadagno di anello, come ad esempio poli o zeri del sistema ad anello aperto: in tali versioni modificate il metodo viene indicato con il nome di *contorno delle radici*.

Metodo del luogo delle radici

Luogo delle radici

Contorno delle radici

⁽¹⁾ Ciò avviene se il sistema è in retroazione negativa. A tale caso ci si riferisce perché è di maggior interesse; peraltro il metodo si può estendere senza alcuna difficoltà al caso in cui la retroazione sia positiva.

Per il tracciamento del luogo delle radici conviene anzitutto esprimere il prodotto $G(s)H(s)$ nella forma

$$G(s)H(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad n \geq m. \quad (5.2)$$

Posto

$$G_1(s) := \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (5.3)$$

la (5.1) si può scrivere

$$1 + K_1 G_1(s) = 0. \quad (5.4)$$

La costante K_1 è proporzionale alla costante di guadagno K , definita nella (3.20), e può essere positiva o negativa. Il legame fra K e K_1 è dato dalla relazione

$$K_1 = K (-1)^{m+k} \frac{p_1 p_2 \dots p_k}{z_1 z_2 \dots z_m}, \quad (5.5)$$

in cui i poli $p_1, p_2, \dots, p_k$ ($k \leq n$) sono tutti e soli quelli non nulli. Si fa l'ipotesi che la funzione di trasferimento di anello non presenti zeri nell'origine.

Se la costante di guadagno è positiva e il sistema è stabile ad anello aperto e a fase minima, come spesso accade nella pratica (cioè non ha né zeri né poli a parte reale positiva), la costante K_1 è positiva. Non è peraltro infrequente il caso in cui, pur essendo il sistema in retroazione negativa (e quindi K positiva), la costante K_1 sia negativa.

Al variare di K da 0 a ∞ , la costante K_1 , a seconda dei casi, può variare da 0 a ∞ o da 0 a $-\infty$: poiché per la costruzione del luogo delle radici si fa riferimento alla relazione (5.4), sarà necessario considerare ambedue le possibilità in relazione al segno di K_1 .

Se la costante K_1 è positiva, la (5.4) equivale alle due equazioni

$$|G_1(s)| = \frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero}), \quad (5.6)$$

mentre, se K_1 è negativa, si ha

$$|G_1(s)| = -\frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = 2\nu\pi \quad (\nu \text{ intero}). \quad (5.7)$$

La seconda delle equazioni (5.6) o (5.7) è sufficiente per la costruzione del luogo, mentre la prima serve per la graduazione del luogo stesso in funzione di K_1 (o di K , qualora si tenga conto della (5.5)).

ESEMPIO 5.1.1 Si consideri un sistema con guadagno statico positivo e con funzione di trasferimento ad anello aperto caratterizzata da quattro poli e uno zero, disposti nel piano complesso come è indicato in Fig. 5.1.

$$G_1(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)}$$

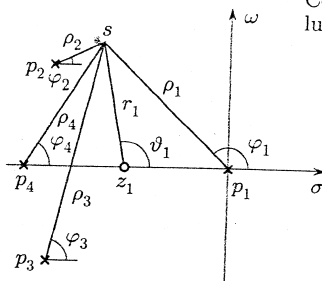


Figura 5.1
Costruzione per punti del luogo delle radici.

Il punto s indicato in figura fa parte del luogo delle radici se e solo se vale la relazione

$$\vartheta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = (2\nu + 1)\pi,$$

e, se questa è soddisfatta, il valore di K_1 cui tale

punto del luogo corrisponde è dato dalla

$$\frac{r_1}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} = \frac{1}{K_1}.$$

ESEMPIO 5.1.2 Per costruire il luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}, \quad \tau > 0, \quad (5.8)$$

si riconduce anzitutto l'espressione di tale guadagno alla forma (5.2), dividendo numeratore e denominatore per τ . Si ottiene

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}, \quad \text{con } K_1 := \frac{K}{\tau}. \quad (5.9)$$

Al variare di K da 0 a ∞ , nel caso in esame anche K_1 varia da 0 a ∞ , per cui si applicano le regole relative al caso in cui K_1 è positiva.

Si verifica facilmente che i punti che soddisfano la condizione richiesta per gli argomenti, data dalla seconda delle (5.6), sono quelli dell'asse reale compresi fra i due poli della (5.9) e quelli dell'asse del segmento compreso fra i due poli stessi.

La prima delle (5.6) fornisce la relazione

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{K_1} = \frac{\tau}{K};$$

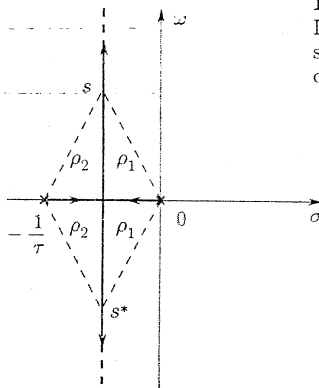
valori piccoli di K_1 corrispondono pertanto a punti

vicini ai poli, valori grandi a due punti sul ramo verticale del luogo, in posizione simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, che si allontanano da esso al crescere di K_1 .

In definitiva, al variare di K_1 da 0 a ∞ , le radici partono dai poli del sistema ad anello aperto, confluiscono nel punto $-1/(2\tau)$ e quindi procedono, una verso l'alto e l'altra verso il basso, sui rami verticali del luogo (Fig. 5.2).

Figura 5.2

Luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello (5.8).



ESEMPIO 5.1.3 Si considera il sistema avente il guadagno di anello

$$G(s)H(s) = K \frac{1-\tau s}{1+\tau s} = K_1 \frac{s - \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (5.10)$$

$$\text{con } K_1 := -K.$$

In questo caso, essendo la costante K_1 negativa, occorre applicare le condizioni (5.7).

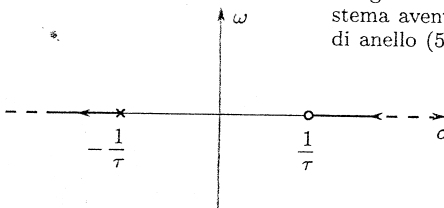
Si ottiene così il luogo delle radici rappresentato in Fig. 5.3, che si svolge nel semipiano sinistro al variare di K_1 da 0 a -1 (cioè al variare di K da 0 ad 1), nel semipiano destro al variare di K_1 da -1 a $-\infty$ (cioè al variare di K da 1 a ∞).

Per $K_1 = -1$ (cioè $K=1$) il polo del sistema va all'infinito, cioè il sistema in retroazione diventa pu-

ramente algebrico. Ciò costituisce una condizione ideale per ciò che riguarda la conformità dell'uscita all'ingresso, ma, come il luogo delle radici stesso pone in evidenza, a spese di una condizione di stabilità alquanto critica.

Figura 5.3

Luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello (5.10).



5.2. Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne agevolano la costruzione. Esse verranno qui di seguito enunciate ed illustrate.

PROPRIETÀ 5.2.1 Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto $K_1 G_1(s)$, che si intersecano sulle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito.

Dimostrazione Essendosi supposto $n \geq m$, il grado dell'equazione polinomiale (5.4) è n , per cui i rami del luogo delle radici sono n . Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ perché, quando K_1 è nulla, l'equazione (5.4) è soddisfatta solo per i valori di s per i quali $G_1(s)$ è infinita, mentre può terminare in uno zero di $G_1(s)$ perché, quando K_1 è infinita, la (5.4) è soddisfatta solo per i valori di s per i quali $G_1(s)$ è nulla. Se è $n > m$, fra questi valori si hanno anche punti all'infinito: in questo caso $n - m$ rami del luogo terminano all'infinito, secondo direzioni che verranno più avanti specificate.

PROPRIETÀ 5.2.2. Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Dimostrazione La proprietà discende dal fatto che le radici complesse di un'equazione polinomiale a coefficienti reali si presentano a coppie coniugate.

PROPRIETÀ 5.2.3. Se la costante K_1 è positiva, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e poli. Se la costante K_1 è negativa, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e poli.

Dimostrazione Si consideri la costruzione grafica di Fig. 5.1: una coppia di zeri o poli complessi coniugati dà un contributo di fase sempre nullo o multiplo di 2π , mentre gli zeri e i poli reali a destra del punto considerato danno luogo ciascuno a un contributo pari a π o $-\pi$, quelli a sinistra un contributo nullo.

PROPRIETÀ 5.2.4. Se la costante K_1 è positiva, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo semplice p_i è

$$(2\nu + 1)\pi + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \arg(p_i - p_j),$$

mentre l'angolo secondo il quale il luogo tende a uno zero semplice z_i è

$$(2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j).$$

Se la costante K_1 è negativa, nell'enunciato si sostituisce $2\nu\pi$ a $(2\nu + 1)\pi$.

Dimostrazione Si considera un punto del luogo a distanza infinitesima dal polo o dallo zero in questione, per cui la tangente si può confondere con l'angolo e i segmenti che congiungono tale punto agli altri poli e zeri si possono confondere con quelli che congiungono il polo o lo zero in questione con gli altri poli e zeri: la proprietà discende dalle condizioni sugli angoli, espresse dalle seconde delle (5.6) e (5.7).

ESEMPIO 5.2.1 Si veda la costruzione grafica di Fig. 5.4, relativa alla determinazione degli angoli di emergenza del luogo da una coppia di poli complessi coniugati.

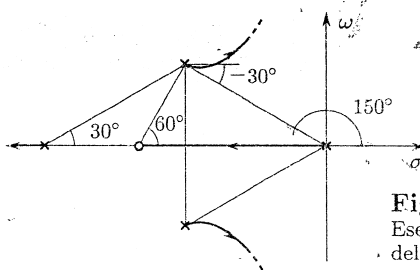


Figura 5.4
Esempio di applicazione della proprietà 4.

La precedente proprietà si estende nei seguenti termini al caso di poli o zeri multipli.

PROPRIETÀ 5.2.4 bis. Se la costante K_1 è positiva, gli n_i rami del luogo che lasciano un polo p_i di molteplicità n_i formano con l'asse reale gli angoli

$$\left((2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \arg(p_i - p_j) \right) \frac{1}{n_i}, \quad 1 \leq \nu \leq n_i.$$

Gli m_i rami del luogo che tendono ad uno zero z_i di molteplicità m_i formano con l'asse reale gli angoli

$$\left((2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j) \right) \frac{1}{m_i}, \quad 1 \leq \nu \leq m_i.$$

Se la costante K_1 è negativa, nell'enunciato si sostituisce $2\nu\pi$ a $(2\nu + 1)\pi$.

Come risulta dall'esempio di Fig. 5.2, i rami del luogo delle radici possono avere punti in comune, corrispondenti a valori di K_1 per i quali l'equazione (5.4) ammette radici multiple. In relazione all'andamento del luogo nell'intorno di tali punti valgono le due seguenti proprietà.

PROPRIETÀ 5.2.5. Una radice multipla di ordine μ corrisponde a un punto comune a μ rami del luogo delle radici, in cui, oltre alla (5.4), sono soddisfatte le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di guadagno di anello fino alla $(\mu - 1)$ -esima.

Radici multiple

Dimostrazione La proprietà è conseguenza del fatto che uno zero di un polinomio che sia multiplo di ordine μ è zero anche dei polinomi derivati fino all'ordine $(\mu - 1)$ -esimo. Nel caso in esame, posto $F(s) := G(s)H(s)$, le relative equazioni polinomiali si ottengono dalle relazioni

$$\frac{d}{ds} F(s) = 0, \dots, \frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} F(s) = 0, \quad (5.11)$$

o anche, considerando la (5.4),

$$\frac{d}{ds} G_1(s) = 0, \dots, \frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}} G_1(s) = 0. \quad (5.12)$$

Particolare interesse, perché più frequenti, rivestono le radici doppie. Eseguendo l'operazione di derivazione espressa dalla prima delle (5.12), si ottiene

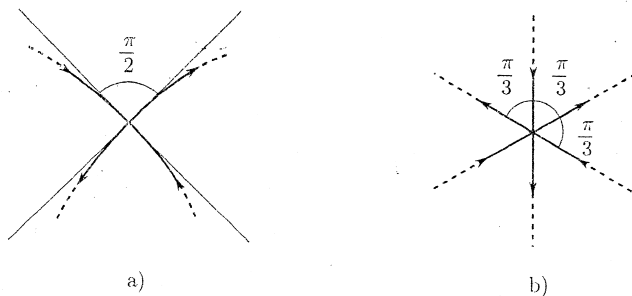
$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = 0, \quad (5.13)$$

relazione che talvolta conviene utilizzare direttamente, in luogo della prima delle (5.11) o della prima delle (5.12), per individuare possibili punti di convergenza di due rami.

I due rami che convergono in un punto corrispondente ad una radice doppia, vi convergono da direzioni opposte; nel punto si originano altri due rami, che ne divergono secondo direzioni opposte, disposte a 90° rispetto alle direzioni di arrivo dei primi, come è indicato in Fig. 5.5a.

Figura 5.5

Comportamento del luogo in corrispondenza di radici multiple.



Più in generale, se la radice è multipla di ordine μ , le direzioni di arrivo dei μ rami che terminano nel punto considerato e dei μ rami che ne partono formano fra loro angoli pari a π/μ : i rami entranti sono intercalati a quelli uscenti, come è indicato nella Fig. 5.5b, che si riferisce al caso $\mu = 3$.

Tale comportamento risulta dalla seguente proprietà, la cui dimostrazione è riportata al Paragrafo C5.1.

PROPRIETÀ 5.2.6. In corrispondenza di una radice di ordine μ il luogo presenta μ rami entranti e μ rami uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono lo spazio circostante in settori uguali, di π/μ radianti.

Per la determinazione dell'andamento, anche qualitativo, del luogo delle radici, risulta di grande utilità il tracciamento degli asintoti secondo i quali $n - m$ rami del luogo tendono all'infinito. In relazione agli asintoti si riporta la seguente proprietà, che verrà anch'essa dimostrata al Paragrafo C5.1.

Asintoti

PROPRIETÀ 5.2.7. Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right); \quad (5.14)$$

se la costante K_1 è positiva, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{n - m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n - m - 1); \quad (5.15)$$

se la costante K_1 è negativa, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{2\nu\pi}{n - m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n - m - 1). \quad (5.16)$$

Questa proprietà comporta un'interessante conseguenza: gli asintoti di un sistema in retroazione negativa avente funzione di trasferimento di anello stabile e a fase minima (cioè con tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso) intersecano l'asse immaginario in punti diversi dall'origine, il che spiega il fatto che i poli dominanti, cioè quelli che per primi, all'aumentare del guadagno, tendono a passare nel semipiano destro, sono di regola complessi coniugati.

Per il tracciamento del luogo delle radici, specie per ciò che riguarda i rami corrispondenti ai poli dominanti, è utile la conoscenza dei punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario e dei relativi valori del parametro K_1 . Poiché tali punti corrispondono al limite di stabilità del sistema in retroazione, per la loro determinazione si può impiegare il criterio di Routh, che fornisce il valore di K_1 corrispondente al limite di stabilità: risolvendo l'equazione ausiliaria, si ottengono poi i valori della pulsazione in corrispondenza dei quali avviene l'intersezione con l'asse immaginario.

ESEMPIO 5.2.2 Si consideri la funzione di trasferimento di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Essendo $n-m=3$, il luogo delle radici presenta tre asintoti, che si possono determinare utilizzando le (5.14), (5.15). Si ottiene

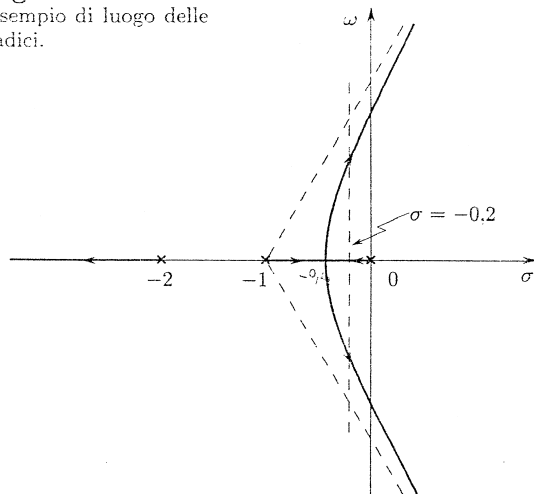
$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1,$$

$$\vartheta_{a0} = 60^\circ, \quad \vartheta_{a1} = 180^\circ, \quad \vartheta_{a2} = -60^\circ.$$

L'andamento del luogo delle radici è rappresentato in Fig. 5.6.

Figura 5.6

Esempio di luogo delle radici.



Il punto di diramazione sull'asse reale (detto anche *punto di emergenza*) si ottiene risolvendo l'equazione ottenuta derivando l'equazione caratteristica. Essa ammette due radici reali, una delle quali non appartiene al luogo. L'altra, che costituisce il punto

di diramazione cercato, è $s_0 = -0,422$. L'equazione caratteristica (5.4) si scrive

$$s(s+1)(s+2) + K_1 = 0,$$

cioè

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0. \quad (5.17)$$

La tabella di Routh ad essa relativa è

3	1	2
2	3	K_1
1	$(6-K_1)/3$	
0	K_1	

Il limite di stabilità è dato da $K_1 = 6$. Sostituendo nella tabella tale valore, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$3s^2 + 6 = 0,$$

che ammette le radici $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} = \pm j1,41$: queste corrispondono alle intersezioni del luogo con l'asse immaginario.

Il procedimento indicato può servire anche per trovare le intersezioni del luogo delle radici con una retta verticale diversa dall'asse immaginario.

Sia essa la retta $\sigma = \lambda$: basta porre $z := s - \lambda$ ($s = z + \lambda$ nell'equazione caratteristica) e applicare il criterio di Routh all'equazione in z così ottenuta. Ad esempio, si voglia determinare l'intersezione del luogo di Fig. 5.6 con la retta verticale $\sigma = -0,2$. Ponendo $s = z - 0,2$ nella (5.17), si ottiene

$$z^3 + 2,4z^2 + 0,92z - 0,288 + K_1 = 0.$$

La tabella di Routh è

3	1	0,92
2	2,4	$-0,288 + K_1$
1	$2,208 - (K_1 - 0,288)$	
0	$-0,288 + K_1$	

Le intersezioni avvengono per $K_1 = 2,496$ e valgono $z_{1,2} = \pm j\sqrt{2,208/2,4} = \pm j0,96$.

5.3. Alcuni esempi di luoghi delle radici

La conoscenza, anche qualitativa, del luogo delle radici di un sistema di controllo e delle modifiche che gli si possono apportare inserendo reti cor-

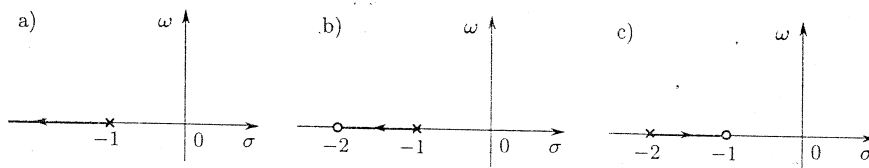
rettrici, che introducono nuovi zeri e poli, risulta di grande utilità in fase di progetto.

Per acquisire quella base di esperienza che, unita all'applicazione delle regole elencate al precedente paragrafo, consente un tracciamento immediato dell'andamento qualitativo del luogo, è utile passare in rassegna i luoghi corrispondenti alle più tipiche configurazioni di zeri e poli.

In Fig. 5.7 sono riportati i luoghi, semplicissimi, relativi a sistemi del primo ordine.

Figura 5.7

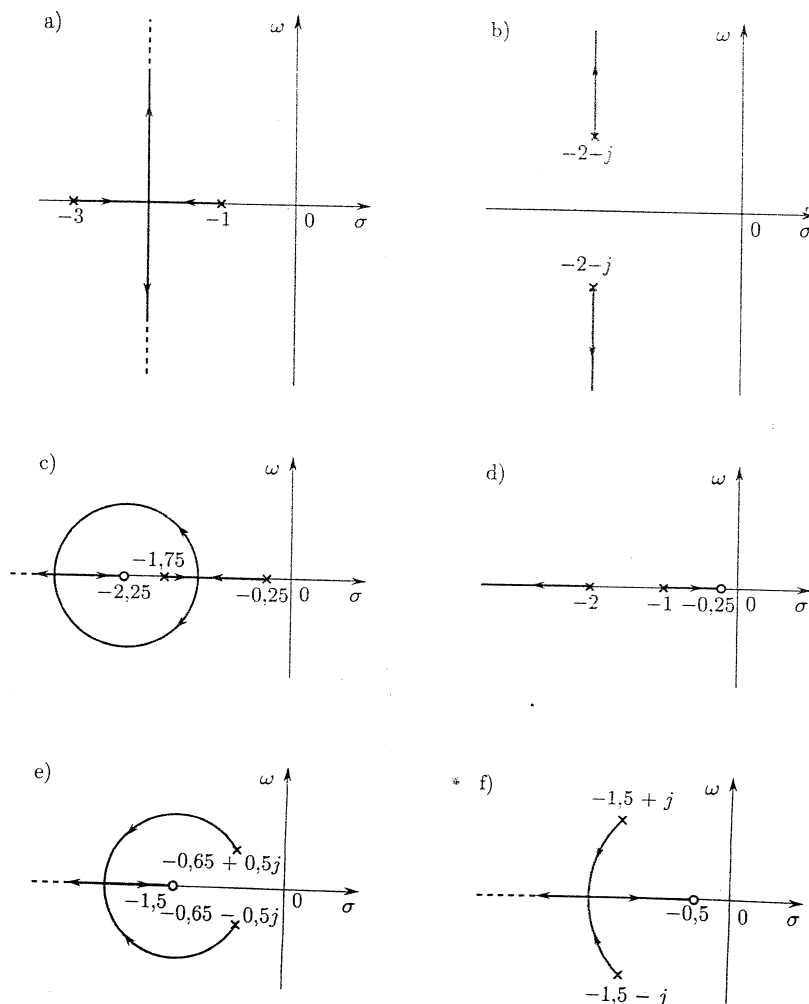
Luoghi delle radici di sistemi del primo ordine.



In Fig. 5.8a-b sono riportati i luoghi relativi a sistemi del secondo ordine privi di zeri nei due casi di poli reali e poli complessi: per l'introduzione di uno zero, tali luoghi si modificano rispettivamente come è indicato in Fig. 5.8c-d e in Fig. 5.8e-f, con riferimento a diverse posizioni relative dello zero rispetto ai poli.

Figura 5.8

Luoghi delle radici di sistemi del secondo ordine.

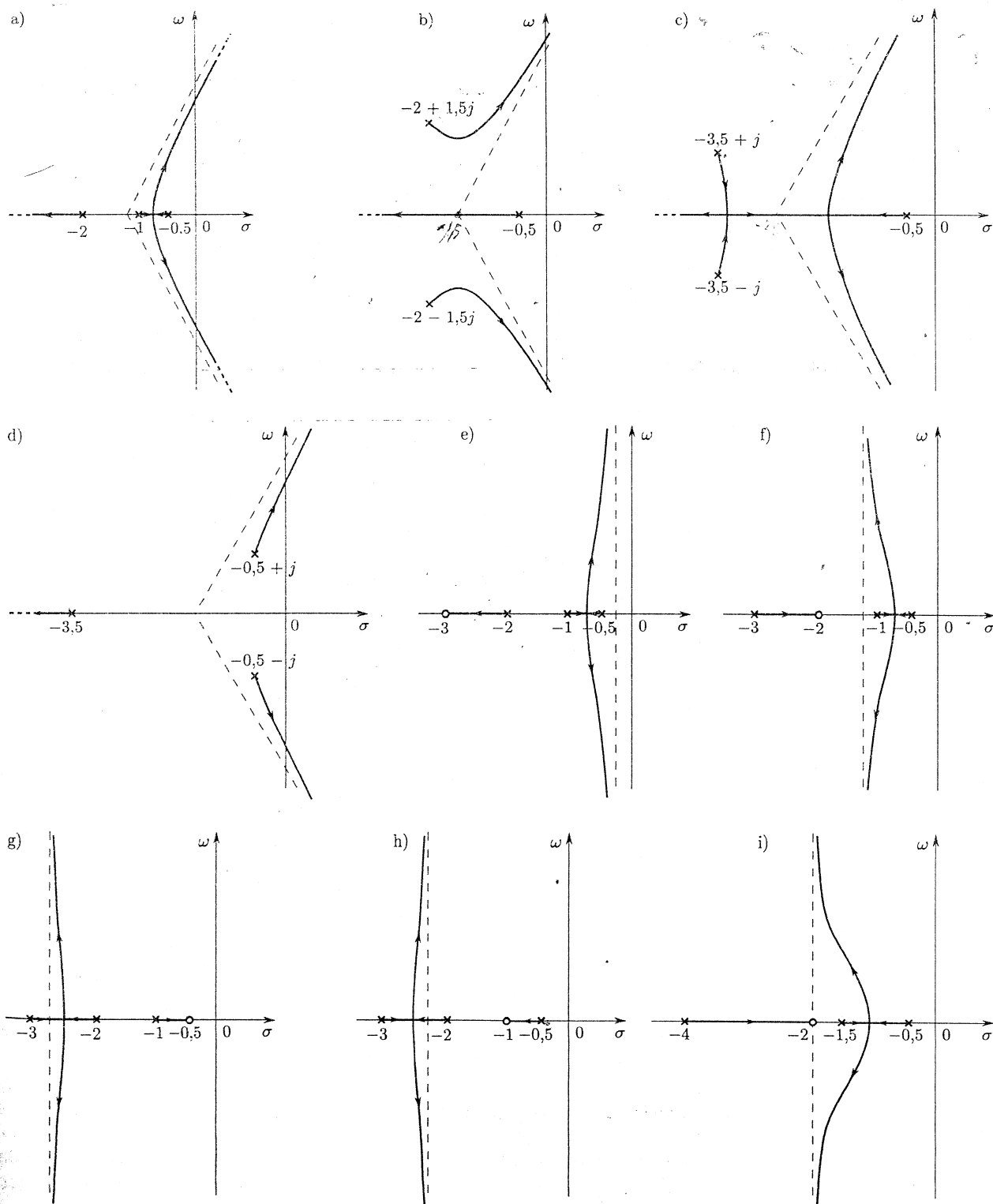


In Fig. 5.9a-d sono riportati i luoghi relativi a diversi sistemi del terzo ordine privi di zeri. Si noti come incide sulla forma dei luoghi la posizione relativa dei poli.

La presenza di uno zero modifica i luoghi come è indicato in Fig. 5.9e-l, quella di due zeri come è indicato in Fig. 5.9m-p.

Figura 5.9

Luoghi delle radici di sistemi del terzo ordine.



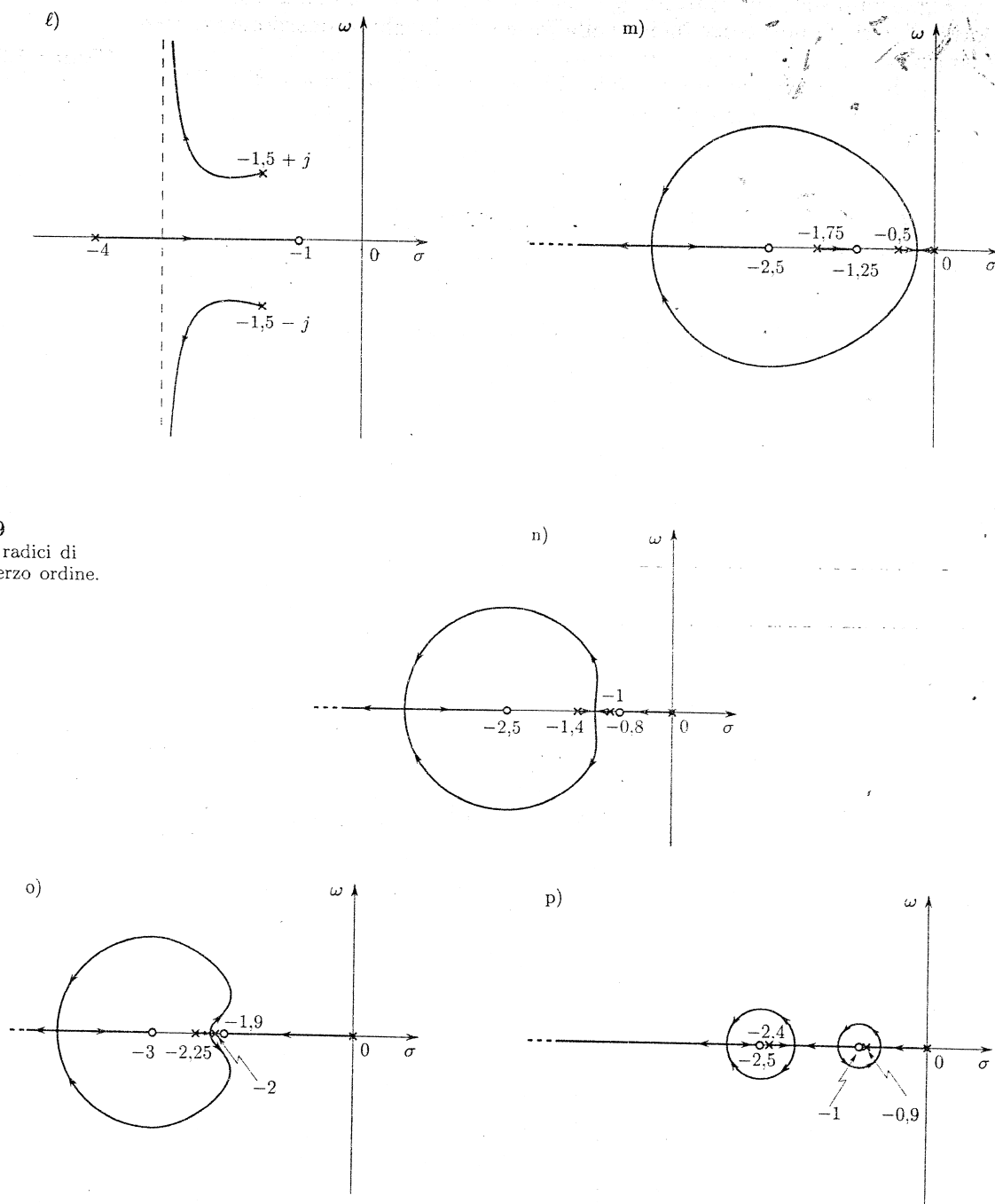


Figura 5.9
Luoghi delle radici di
sistemi del terzo ordine.

In Fig. 5.10a-i sono riportati i luoghi relativi a sistemi con quattro poli. Le tipiche modifiche dei luoghi dovute all'inserimento di uno zero sono indicate in Fig. 5.10h-i.

Si noti che, in tutti i casi in cui venga inserito uno zero, il luogo presenta, rispetto all'andamento preesistente, una distorsione verso sinistra, dato che lo zero ne attrae i rami verso il semipiano sinistro del piano complesso, come direttamente risulta applicando la seconda delle (5.6) o la seconda delle (5.7). In generale pertanto l'inserimento di uno zero produce un'effetto stabilizzante sul sistema.

Figura 5.10
Luogo delle radici di un
sistema del quarto ordine.

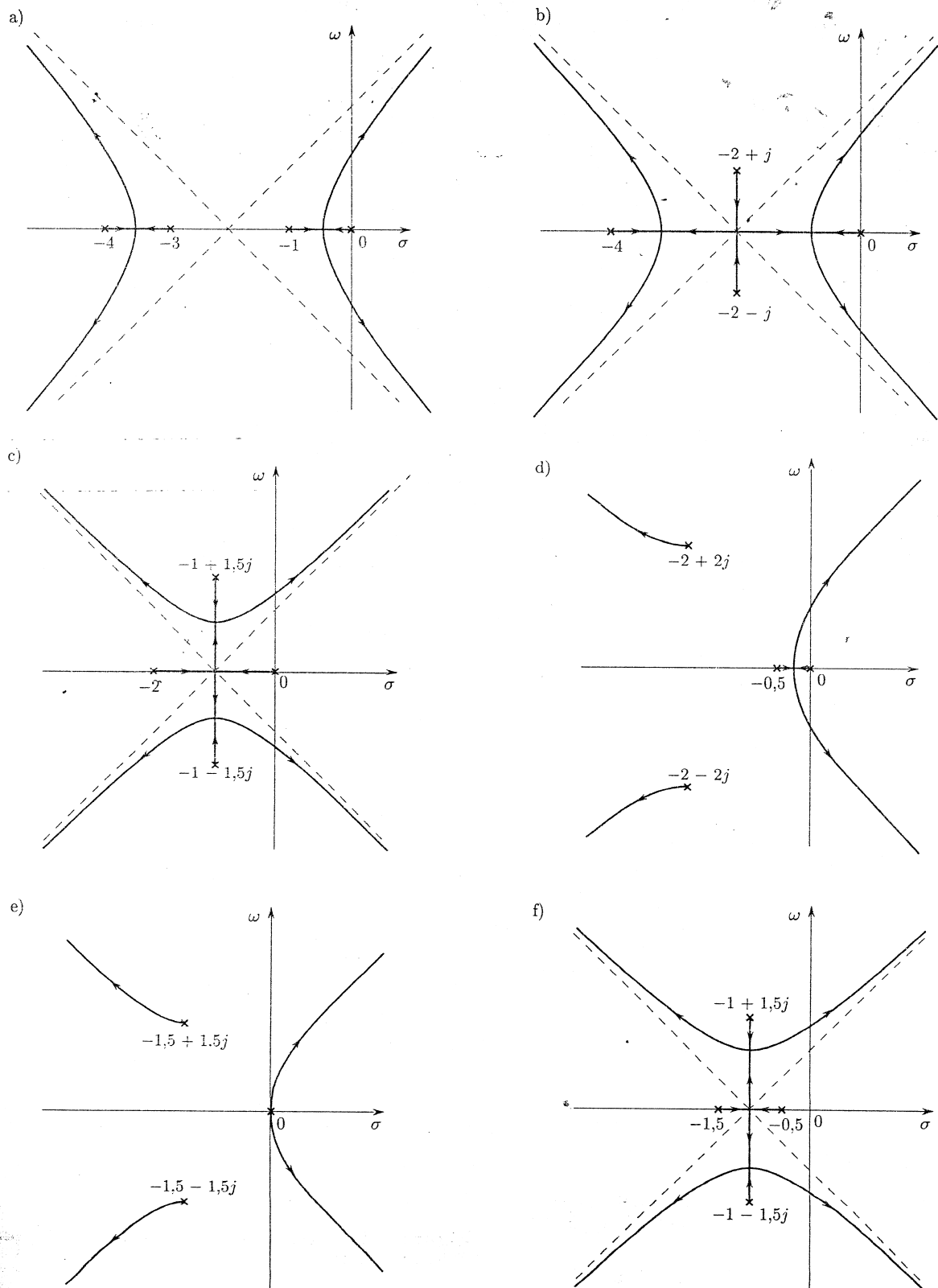
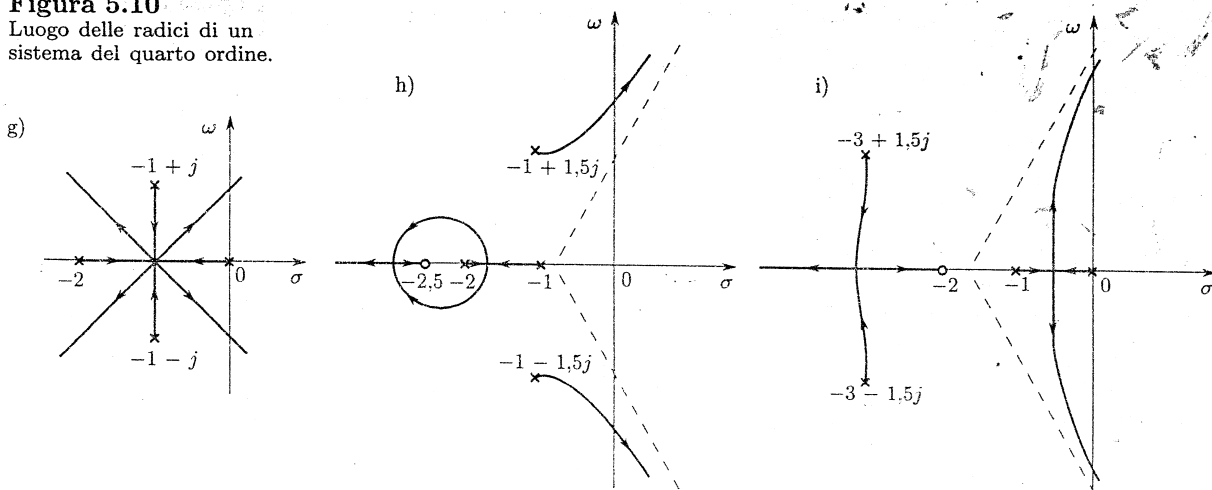


Figura 5.10

Luogo delle radici di un sistema del quarto ordine.



Questa proprietà viene utilizzata per la stabilizzazione dei sistemi di controllo mediante reti "ad anticipo", che sono appunto caratterizzate dalla presenza di uno o più zeri dominanti.

5.4. Esercizi

5.4.1 Costruire il luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}, \quad (5.18)$$

sia per $K > 0$, sia per $K < 0$.

Soluzione

1. $K > 0$:

- il punto di incontro degli asintoti è $\sigma_a = -2$;
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli $\pi/4, (3/4)\pi, (5/4)\pi, (7/4)\pi$;
- i segmenti dell'asse reale $[-4, -3]$ e $[-1, 0]$ fanno parte del luogo;
- i punti di diramazione sono radici dell'equazione

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+4} = 0 : \quad (5.19)$$

delle tre radici $(-0,42, -2,00, -3,58)$ si scarta la $-2,00$ in quanto non appartiene al luogo.

Il luogo è rappresentato in Fig. 5.11a.

2. $K < 0$:

- il punto di incontro degli asintoti è $\sigma_a = -2$;
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli $0, \pi/2, \pi, (3/2)\pi$;
- i segmenti dell'asse reale $[-\infty, -4]$, $[-3, -1]$ e $[0, \infty]$ fanno parte del luogo;
- i punti di diramazione sono radici dell'equazione (5.19): delle tre radici solo la $-2,00$ appartiene al luogo.

Il luogo è rappresentato in Fig. 5.11b.

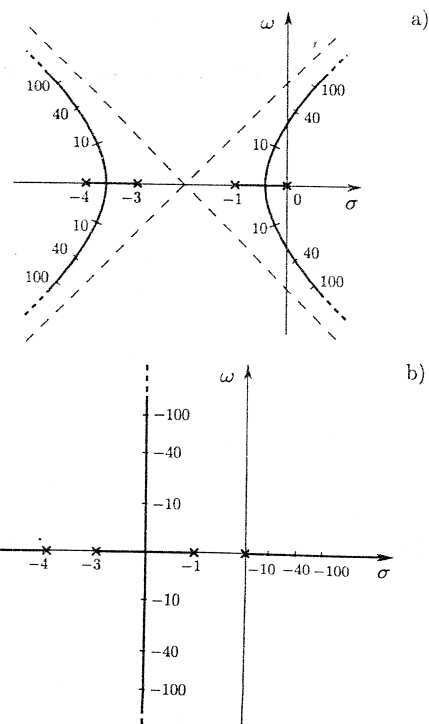


Figura 5.11 Luoghi delle radici del sistema (5.18), per $K > 0$ e per $K < 0$.

5.4.2 Nel sistema in retroazione rappresentato in Fig. 5.12a viene inserita, nella posizione corrispondente al blocco 1, la rete di Fig. 5.12b, con $RC = 1$ sec.

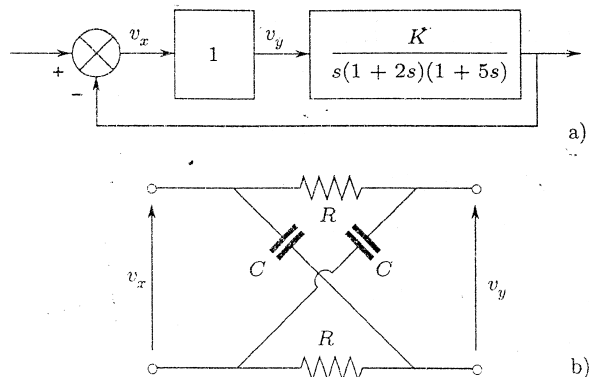


Figura 5.12 Sistema in retroazione e rete RC .

Determinare:

1. Il limite di stabilità prima e dopo il collegamento della rete.
2. L'andamento qualitativo del luogo delle radici a rete inserita.

Soluzione

1. Prima di inserire la rete, la funzione di trasferimento di anello è

$$\frac{K}{s(1+2s)(1+5s)}$$

e ad essa corrisponde l'equazione caratteristica

$$10s^3 + 7s^2 + s + K = 0.$$

Dalla tabella di Routh

3	10	1
2	7	K
1	$7 - 10K$	0
0	K	

si deduce che per la stabilità deve essere

$$K \leq 7/10 \text{ sec}^{-1}.$$

A rete inserita, la funzione di trasferimento diviene

$$\frac{K(1-s)}{s(1+2s)(1+5s)(1+s)},$$

e l'equazione caratteristica

$$10s^4 + 17s^3 + 8s^2 + (1-K)s + K = 0.$$

Dalla tabella di Routh

4	10	8	K
3	17	$1-K$	
2	$126 + 10K$	$17K$	
1	a		
0	$17K$		

in cui è $a := -10K^2 - 405K + 126$, si deduce che per la stabilità deve essere $a \geq 0$, il che comporta la limitazione $K \leq 0,31 \text{ sec}^{-1}$.

2. Il luogo delle radici, tracciato per $K \geq 0$, ha l'andamento qualitativo rappresentato in Fig. 5.13.

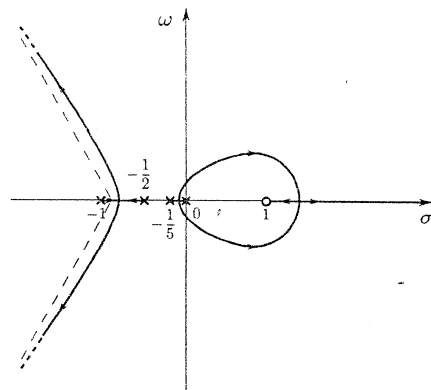


Figura 5.13 Luogo delle radici del sistema di Fig. 5.12.

5.4.3 Tracciare il luogo delle radici del sistema il cui guadagno di anello presenta i seguenti zeri e poli:

$$z_1 = -1,5, \quad z_2 = -4,5 + j, \quad z_3 = -4,5 - j,$$

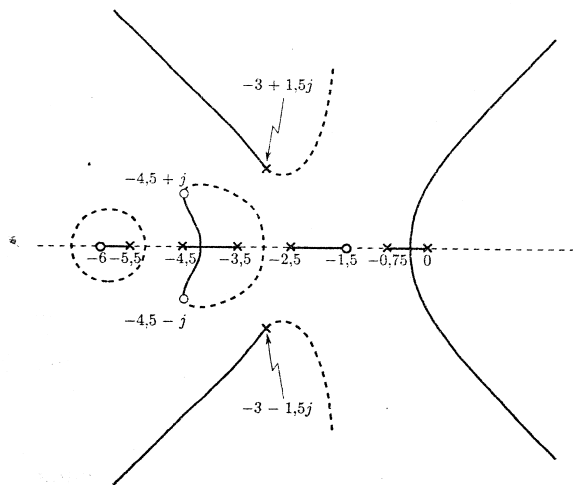
$$z_4 = -6, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -0,75,$$

$$p_3 = -2,5, \quad p_4 = -3 + 1,5j, \quad p_5 = -3 - 1,5j,$$

$$p_6 = -3,5, \quad p_7 = -4,5, \quad p_8 = -5,5.$$

Soluzione Il luogo delle radici è riportato in Fig. 5.14, a tratto pieno per $K_1 > 0$, a tratteggio per $K_1 < 0$. Si noti la continuità del tracciato, passando da valori positivi a valori negativi di K_1 .

Figura 5.14 Luogo delle radici di cui all'enunciato dell'Esercizio 5.4.3.



Complementi al Capitolo 5

C5.1. Dimostrazione delle proprietà 5.2.6 e 5.2.7

Nel Paragrafo 5.2 sono state enunciate e dimostrate le principali proprietà del luogo delle radici, che normalmente vengono utilizzate come regole per la sua costruzione. Delle sole proprietà 5.2.6 e 5.2.7, per non appesantire la trattazione, non è stata data la dimostrazione, che viene riportata nel presente paragrafo.

Ambedue le proprietà discendono dal seguente lemma.

LEMMA C5.1.1. (Equazione parametrica di una stella di raggi nel piano complesso.)
L'equazione

$$(s - s_0)^\mu = K e^{j\vartheta_0}, \quad (5.20)$$

in cui s_0 è una costante complessa e ϑ_0 una costante reale, rappresenta, al variare del parametro K da $-\infty$ a $+\infty$, una stella di raggi del tipo indicato in Fig. 5.15, centrata in s_0 .

Dimostrazione Posto

$$s - s_0 = \rho e^{j\vartheta},$$

la (5.20) si può scrivere

$$\rho^\mu e^{j\mu\vartheta} = K e^{j\vartheta_0},$$

cioè, per $K \geq 0$,

$$\rho = \sqrt[\mu]{K}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta_0 + 2\nu\pi}{\mu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu-1), \quad (5.21)$$

equazioni che corrispondono ai rami uscenti da s_0 in Fig. 5.15 (relativa al caso particolare $\mu=3$).

Per $K \leq 0$ si ha invece

$$\rho = \sqrt[\mu]{-K}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta_0 + (2\nu+1)\pi}{\mu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, \mu-1), \quad (5.22)$$

equazioni che corrispondono ai rami entranti in s_0 in Fig. 5.15.

Dimostrazione della proprietà 5.2.6

Sia s_0 una radice multipla di ordine μ : in s_0 vale l'equazione (5.4) per un opportuno valore di K_1 . Indicando con K_{10} tale valore, si può scrivere

$$\frac{1}{K_{10}} + G_1(s_0) = 0.$$

I punti del luogo situati in un intorno della radice multipla si ottengono dando piccole variazioni, in più e in meno, al parametro K_{10} , cioè facendo variare in un piccolo intervallo contenente l'origine il parametro reale ϵ dell'equazione

$$\frac{1}{K_{10}} + G_1(s) = \epsilon.$$

Essendo s_0 uno zero multiplo di ordine μ del primo membro, l'equazione si può scrivere anche

$$(s - s_0)^\mu f(s) = \epsilon,$$

cioè, per piccole variazioni,

$$(s - s_0)^\mu \simeq \frac{\epsilon}{f(s_0)}, \quad (5.23)$$

in cui $f(s_0)$ è un numero complesso costante.

Stella di raggi nel piano complesso

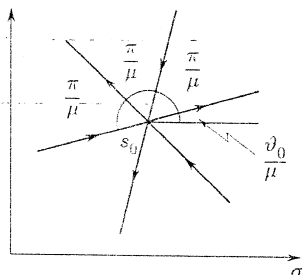


Figura 5.15
Stella di raggi nel piano complesso.

La (5.23) è del tutto analoga alla (5.20), per cui il comportamento locale del luogo delle radici risulta simile a quello indicato in Fig. 5.15. In particolare si noti che, quando la radice multipla è reale, $f(s_0)$ è un numero reale e quindi l'angolo ϑ_0 rappresentato in Fig. 5.15 vale 0 o π , per cui la stella risulta simmetrica rispetto all'asse reale.

Dimostrazione della proprietà 5.2.7

La (5.4) si può anche scrivere

$$1 + K_1 \frac{s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots}{s^n - s^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i + \dots} = 0$$

cioè, dividendo i due polinomi,

$$\frac{1}{s^{n-m} - \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots} = -\frac{1}{K_1} \quad (5.24)$$

Quando il modulo di s tende all'infinito, il valore del primo membro della (5.24) tende al valore di ogni altra funzione razionale dello stesso tipo per la quale il grado $n-m$ e il coefficiente di s^{n-m-1} nel polinomio a denominatore siano gli stessi; in altre parole i coefficienti relativi ai termini del polinomio a denominatore che non sono espressamente indicati a primo membro della (5.24) non influiscono sugli asintoti. L'andamento asintotico del luogo corrispondente alla (5.24) sarà pertanto il medesimo del luogo corrispondente alla

$$\frac{1}{\left(s - \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \right)^{n-m}} = -\frac{1}{K_1}, \quad (5.25)$$

che appunto ha gli stessi coefficienti nei primi due termini del polinomio a denominatore, come si può verificare eseguendo lo sviluppo della potenza del binomio. La (5.25) si può scrivere anche

$$(s - \sigma_a)^{n-m} = -K_1, \quad (5.26)$$

in cui si è posto

$$\sigma_a := \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right). \quad (5.27)$$

Ricordando quanto si è precedentemente dimostrato con riferimento alla (5.20), si può affermare che la (5.26) rappresenta una stella di $n-m$ raggi che escono dal punto $\sigma_a + j0$ e che formano con l'asse reale angoli facilmente calcolabili applicando le (5.21), (5.22).

C5.2. Il contorno delle radici

Il procedimento per la costruzione del luogo delle radici si può applicare anche quando, invece di variare la costante di guadagno, si varia qualche altro parametro della funzione di trasferimento del sistema, come ad esempio la costante di tempo relativa a un polo reale o quella relativa a uno zero reale o qualunque altro parametro di cui uno o più coefficienti dell'equazione caratteristica siano funzioni lineari.

In questi casi il tracciato descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro si dice *contorno delle radici*: la denominazione trae origine dal fatto che, se oltre alla costante di guadagno si fa variare un altro parametro, in più o in meno rispetto al valore nominale, si ottiene una famiglia di curve che contorna il luogo delle radici appoggiandosi ad esso.

La costruzione del contorno delle radici è utile per la determinazione dei valori ottimi dei più importanti parametri delle reti corretttrici.

Si esamineranno i due casi della variazione di un polo reale e della variazione di uno zero reale, in quanto particolarmente significativi; esempi relativi a variazioni di altri parametri saranno presentati come complementi al prossimo capitolo, con riferimento al progetto delle reti corretttrici.

◆ Contorno delle radici relativo alla variazione di un polo

Ponendo in evidenza la costante di tempo che si desidera variare, il guadagno di anello si può scrivere

$$G(s)H(s) = R(s) \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (5.28)$$

Variazione di un polo

in cui $R(s)$ è una funzione razionale fratta con $m \leq n + 1$.

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)};$$

la corrispondente equazione caratteristica si scrive

$$1 + G(s)H(s) = 1 + R(s) \frac{1}{1 + \tau s} = 0,$$

cioè

$$1 + \tau s + R(s) = 0,$$

o, dividendo per $1 + R(s)$,

$$1 + \frac{\tau s}{1 + R(s)} = 0. \quad (5.29)$$

Al variare della costante di tempo τ da 0 a ∞ , le radici dell'equazione (5.29) descrivono il contorno delle radici. Il contorno parte, per $\tau = 0$, dalle radici dell'equazione $1 + R(s) = 0$, cioè dai poli che presenta il sistema in retroazione quando è $\tau = 0$, cioè prescindendo dal polo che si è posto in evidenza.

Il contorno si determina facendo uso delle regole precedentemente dedotte per la costruzione del luogo delle radici: infatti la (5.29) è analoga alla (5.4), a parte il diverso simbolo usato per il parametro variabile (τ invece di K_1).

Si noti peraltro che nel caso del contorno delle radici può essere $m > n$; ciò non incide sulle regole di costruzione, che restano identiche a quelle del luogo, ad eccezione del verso di percorrenza dei rami asintotici, che in tal caso vanno dall'infinito al finito, come si può facilmente verificare invertendo ambo i membri della (5.26).

La presenza di un ramo dall'infinito al finito si riscontra sempre nel caso del contorno relativo alla variazione di un polo: infatti per $\tau = 0$ l'ordine del sistema diminuisce di un'unità, il che significa che si ha un polo in meno. Tale polo verrà ripristinato, per $\tau > 0$, mediante un ramo del luogo proveniente dall'infinito.

◆ Contorno delle radici relativo alla variazione di uno zero

In questo caso il guadagno di anello si può scrivere

Variazione di uno zero

$$G(s)H(s) = R(s)(1 + \tau s), \quad (5.30)$$

in cui $R(s)$ è una funzione razionale fratta con $m \leq n - 1$. L'equazione caratteristica è

$$1 + G(s)H(s) = 1 + R(s)(1 + \tau s) = 0,$$

cioè

$$1 + R(s) + \tau s R(s) = 0,$$

ossia ancora

$$1 + \frac{\tau s R(s)}{1 + R(s)} = 0. \quad (5.31)$$

Il contorno delle radici si ottiene al variare del parametro τ da 0 a ∞ : anche in questo caso esso parte dai poli del sistema in retroazione in cui si sia posto $\tau = 0$, cioè in cui si sia escluso lo zero di cui si studia l'effetto.

Come risulterà evidente dagli esempi riportati nel seguito, il contorno delle radici viene di regola appoggiato al luogo delle radici. In altre parole, fissato un valore opportuno per la costante K_1 (col che sul luogo delle radici, tracciato per la funzione di trasferimento in cui si è posto $\tau = 0$, vengono stabiliti i poli da cui si origina il contorno), si traccia il contorno al variare di τ da 0 a ∞ .

Talvolta, per avere un quadro completo dell'influenza di K_1 e τ , si tracciano più contorni, ciascuno per un diverso valore di K_1 , ottenendo una famiglia di curve a due parametri.

ESEMPIO C5.2.1 In relazione al sistema con guadagno di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}, \quad (5.32)$$

si vuole costruire il contorno delle radici relativo al parametro τ .

Ponendo $\tau = 0$, con riferimento alla (5.28) si ha

$$R(s) = \frac{K}{s} :$$

il luogo delle radici, ottenuto al variare di K , è rappresentato in Fig. 5.16a.

Fissando un valore di K , che si indicherà con K_0 , si stabilisce il punto del luogo ($-K_0$) da cui si origina il contorno delle radici. Nel caso in esame l'equazione (5.29) si scrive

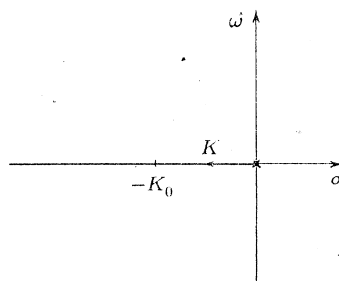
$$1 + \frac{\tau s}{1 + \frac{K_0}{s}} = 0,$$

cioè

$$1 + \frac{\tau s^2}{s + K_0} = 0.$$

Il contorno delle radici, corrispondente a quest'ultima relazione, è riportato in Fig. 5.16b.

a)



b)

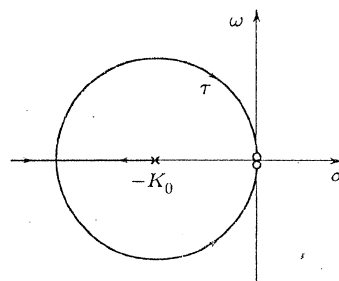


Figura 5.16 Luogo e contorno delle radici del sistema con guadagno di anello (5.32).

ESEMPIO C5.2.2 In relazione al sistema con guadagno di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(1+\tau s)}, \quad (5.33)$$

si vuole costruire il contorno delle radici relativo al parametro τ .

In questo caso è

$$R(s) = \frac{K}{s(s+1)}.$$

Il luogo delle radici, che si ottiene al variare di K da 0 a ∞ , è riportato in Fig. 5.17.

Fissato il valore di K_0 , si ricava l'equazione del contorno delle radici nella forma

$$1 + \frac{\tau s^2(s+1)}{s(s+1) + K_0} = 0.$$

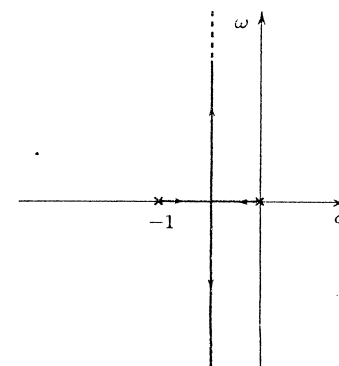


Figura 5.17 Luogo delle radici del sistema con guadagno di anello (5.33).

L'andamento del contorno è riportato in Fig. 5.18 per diversi valori di K_0 (il primo corrispondente a radici reali, gli altri a radici complesse coniugate).

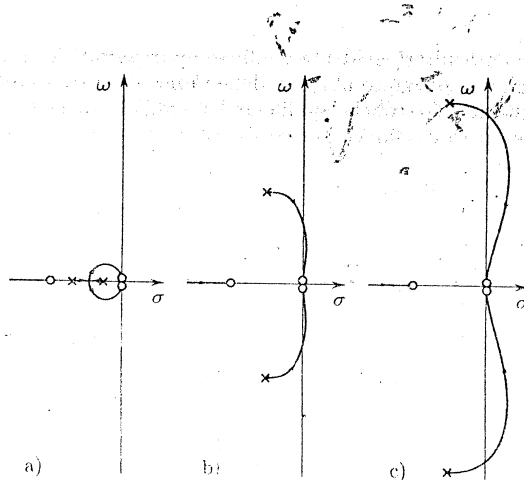


Figura 5.18 Contorni delle radici del sistema con guadagno di anello (5.33).

ESEMPIO C5.2.3 In relazione al sistema con guadagno di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K_1(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}, \quad (5.34)$$

si vuole costruire il contorno delle radici relativo al parametro τ .

Essendo

$$R(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)},$$

prescindendo dallo zero di cui si vuole studiare l'effetto, si ha un luogo delle radici del tipo riportato in Fig. 5.19a. Si fissa un valore di K_1 , ad esempio quello relativo alle posizioni delle radici indicate in figura con p_1 , p_2 , p_3 ($K_{10} := 20$): a partire da questi punti, si costruisce il contorno delle radici utilizzando la (5.31), che nel caso in esame si scrive

$$1 + \frac{\tau s K_{10}}{s(s+1)(s+2) + K_{10}} = 0.$$

Il contorno presenta due asintoti, il punto d'incontro dei quali è sull'asse reale ed ha ascissa

$$\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - 0}{3 - 1} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

L'andamento del contorno delle radici è rappresentato in Fig. 5.19b.

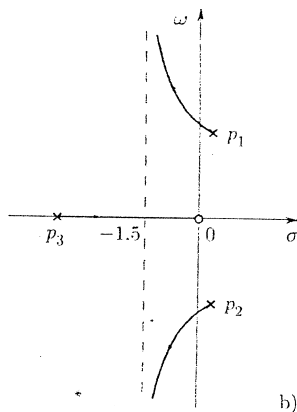
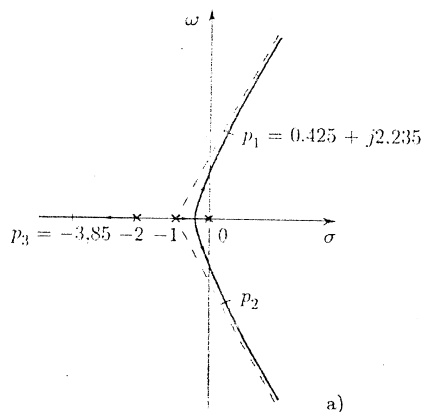


Figura 5.19 Luogo e contorno delle radici del sistema con guadagno di anello (5.34).

È di un certo interesse notare che nel caso in esame il punto di incontro degli asintoti del contorno delle radici è indipendente dal valore di K_1 per il quale il contorno è tracciato: tutti i contorni relativi a diversi valori di K_1 hanno gli stessi asintoti. Ciò è formalizzato nel seguente teorema.

TEOREMA C5.2.1. (Teorema del baricentro del luogo delle radici.) La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento razionale con polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

Baricentro del luogo delle radici

Dimostrazione Si considera la (5.4), in cui la funzione $G_1(s)$ è definita dalla (5.3). Se è $n \geq m + 2$, moltiplicando ambo i membri per il polinomio a denominatore si ottiene la relazione

$$s^n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n) s^{n-1} + \dots = 0.$$

Essendo la somma delle radici del generico polinomio

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

uguale a $-a_{n-1}/a_n$, l'asserto risulta provato.

Se si considerano le radici rappresentate da punti di massa unitaria che si muovono contemporaneamente, al variare di K_1 , sul luogo delle radici, risulta che, quando è $n \geq m + 2$, il loro baricentro rimane fisso.

In Fig. 5.20, sempre con riferimento al sistema avente il guadagno di anello (5.34), i rami principali del contorno delle radici (quelli relativi ai poli dominanti) sono tracciati per diversi valori di K_1 : si ottiene così una famiglia di curve appoggiate al luogo delle radici.

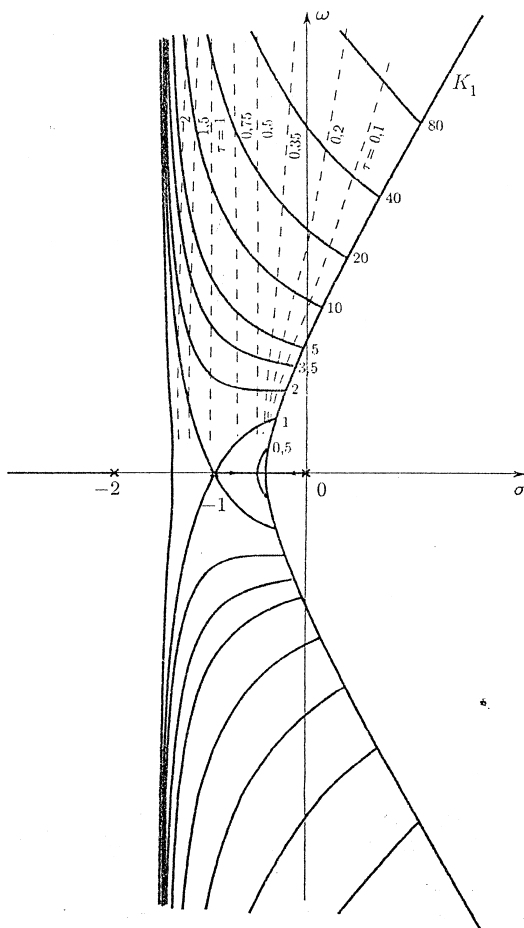


Figura 5.20

Contorno delle radici del sistema con guadagno di anello (5.34) tracciato per diversi valori della costante K_1 .

C5.3. Costruzione grafica di alcuni luoghi delle radici

Per alcuni luoghi delle radici semplici e di frequente impiego si possono dare delle regole di costruzione grafica diretta, che rendono pressoché immediato il tracciamento con riga, compasso e goniometro.

Si considereranno tutti i casi relativi a sistemi con una somma di poli e zeri non superiore a 4. Le costruzioni grafiche sono state proposte da Bjorkstam⁽²⁾ e sono relative al caso $K_1 > 0$.

1. *Due poli reali e uno zero.* Le tre disposizioni possibili sono riportate in Fig. 5.21a-c. Nel caso di Fig. 5.21c, cioè quando i poli sono situati entrambi a destra dello zero, il luogo, oltre a due porzioni dell'asse reale, comprende una circonferenza con centro nello zero e raggio $R := \sqrt{d_1 d_2}$.

2. *Due poli complessi e uno zero.* Il luogo, costituito da una porzione dell'asse reale e un arco di circonferenza con centro nello zero, è riportato in Fig. 5.21d.

3. *Tre poli reali.* Il luogo, costituito da due porzioni dell'asse reale e un arco di curva, è riportato in Fig. 5.21e. L'arco di curva si costruisce come segue:

- i) si sceglie un punto A arbitrario sull'asse reale a destra del polo centrale;
- ii) si tracciano due archi di circonferenza con centri in A e nel polo più a destra, entrambi aventi il raggio

$$R := \sqrt{c(c+d)} :$$

essi si intersecano in due punti appartenenti al luogo, uno al di sopra e l'altro al di sotto dell'asse reale;

- iii) si ripete la costruzione per più scelte di A .

4. *Un polo reale e due poli complessi.* Il luogo, costituito da una porzione di asse reale e due archi di curva, è riportato in Fig. 5.21f. Gli archi di curva si determinano come segue:

- i) si sceglie un punto A arbitrario sull'asse reale;
- ii) si tracciano due archi di circonferenza, con centri in A e nel polo reale e raggio R pari alla distanza di A dai poli complessi: essi si intersecano in punti appartenenti al luogo;
- iii) si ripete la costruzione per più scelte di A .

5. *Due poli reali e due zeri reali.* I luoghi sono riportati in Fig. 5.21g-i. Nel caso di Fig. 5.21i, cioè quando i poli sono situati a sinistra degli zeri, il luogo è costituito da due porzioni dell'asse reale e un arco di circonferenza. Il centro della circonferenza si determina come segue:

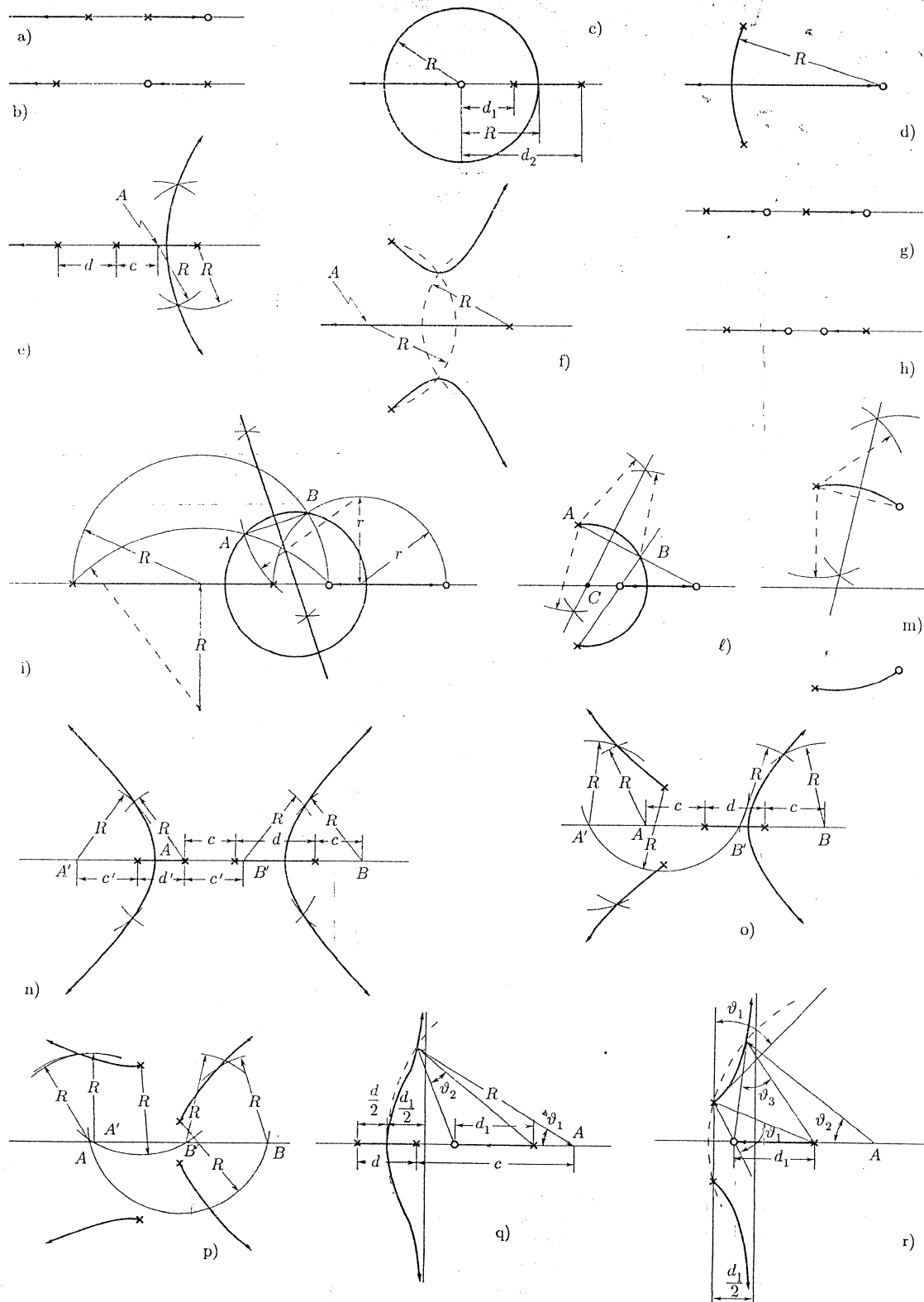
- i) si tracciano due circonferenze passanti per il polo a sinistra e lo zero a sinistra, la prima, di raggio R , con centro nel punto di mezzo del segmento avente per estremi tali punti, la seconda con centro in un punto dell'asse dello stesso segmento, posto al di sotto dell'asse reale e a distanza αR dall'asse reale stesso, in cui α è una costante arbitraria (si può assumere, per semplicità, $\alpha = 1$);
- ii) si tracciano altre due circonferenze, passanti per il polo a destra e lo zero a destra, la prima, di raggio r , con centro nel punto di mezzo del segmento avente per estremi tali punti, la seconda con centro in un punto dell'asse dello stesso segmento, posto al di sopra dell'asse reale e a distanza αr dall'asse reale stesso, in cui α è la costante scelta al punto precedente;
- iii) si determinano, come intersezioni delle circonferenze, i punti A e B del luogo; il centro C della circonferenza facente parte del luogo è dato dall'intersezione dell'asse reale con l'asse del segmento congiungente A e B . La medesima costruzione si applica anche quando i poli sono situati a destra degli zeri.

6. *Due poli complessi e due zeri reali.* Il luogo è costituito da una porzione dell'asse reale e un arco di circonferenza ed è riportato in Fig. 5.21l. Il centro della circonferenza si può ricavare mediante la seguente costruzione grafica:

- i) si determina un punto B della circonferenza come intersezione del segmento congiungente un polo e uno zero con il segmento congiungente l'altro polo e l'altro zero;
- ii) si traccia l'asse del segmento congiungente il punto A (uno dei poli) con il punto B : l'intersezione con l'asse reale determina il centro C della circonferenza.

⁽²⁾Bjorkstam, A. L., "Simplifying root locus plotting, I - II", *Control Engineering*, vol. 13, n. 3, pp. 99-100 - vol. 13, n. 4, pp. 95-96, 1966.

Figura 5.21

Costruzioni grafiche di
tipici luoghi delle radici.

La medesima costruzione si applica anche nel caso di due zeri complessi e due poli reali.

7. *Due poli complessi e due zeri complessi.* Il luogo, costituito da due archi di circonferenza, è riportato in Fig. 5.21m. Il centro della circonferenza si determina come intersezione dell'asse reale con l'asse del segmento congiungente un polo con lo zero situato dalla stessa parte dell'asse reale.

8. *Quattro poli reali.* Il luogo, costituito da due porzioni dell'asse reale e da due archi di curva, è riportato in Fig. 5.21n. Gli archi di curva si costruiscono come segue:

- i) si sceglie un punto A' arbitrario sull'asse reale a sinistra del polo più a sinistra, a distanza c' da esso; si determina quindi il punto B' , a distanza c' dal secondo polo (contato procedendo da sinistra a destra), e a destra di esso;
- ii) si determinano i punti A, B , in analoga posizione rispetto agli altri due poli e a distanza da essi pari a

$$c = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2},$$

in cui R è definito dalla

$$R := \sqrt{c'(c' + d')}:$$

- d', d sono la distanza fra i primi due poli e quella fra gli ultimi due;
- iii) si tracciano quattro circonferenze di raggio R con centri in A, A', B, B' , che si intersecano a due a due in punti del luogo;
- iv) si ripete la costruzione per più scelte di A' .

9. *Due poli reali e due poli complessi.* Il luogo è costituito da una porzione dell'asse reale e tre archi di curva ed è riportato in Fig. 5.21o. Gli archi di curva si costruiscono come segue:

- i) si sceglie ad arbitrio un punto A a sinistra del polo reale sinistro, a distanza c da esso e si determina il punto B , a distanza c dal polo reale destro;
- ii) si calcola il valore

$$R := \sqrt{c(c + d)},$$

- in cui d è la distanza fra i poli reali; il valore di R deve essere maggiore della parte immaginaria dei poli complessi: se non lo è, si procede a una diversa scelta di A ;
- iii) si determinano i punti A' e B' tracciando un arco di circonferenza di raggio R e centro in uno dei poli complessi;
- iv) si tracciano circonferenze di raggio R con centri in A', A, B', B , che si intersecano a due a due in punti del luogo;
- v) si ripete la costruzione per più scelte di A .

10. *Due coppie di poli complessi.* Il luogo è costituito da quattro archi di curva ed è riportato in Fig. 5.21p. Gli archi si costruiscono come segue:

- i) si determinano due punti A', B' dell'asse reale tracciando un arco di circonferenza di raggio arbitrario R e centro in uno dei poli con maggiore parte immaginaria;
- ii) si determinano i punti A, B tracciando un arco di circonferenza di raggio R e centro in uno dei poli dell'altra coppia;
- iii) si tracciano circonferenze di raggio R con centri in A, A', B', B , che si intersecano a due a due in punti del luogo;
- iv) si ripete la costruzione per più scelte di R .

11. *Tre poli reali e uno zero.* Il luogo è costituito da due porzioni dell'asse reale e un arco di curva ed è riportato in Fig. 5.21q. L'arco di curva si costruisce come segue:

- i) si sceglie ad arbitrio un punto A dell'asse reale, a distanza c dal polo più vicino della coppia di poli reali non intercalati con uno zero;
- ii) si traccia un arco di circonferenza di centro A e raggio

$$R := \sqrt{c(c + d)},$$

- in cui d è la distanza dei poli reali non intercalati con uno zero;
 - iii) per tentativi, si determina su tale arco un punto per il quale risulti $\vartheta_1 = \vartheta_2$, punto che appartiene al luogo;
 - iv) si ripete la costruzione per più scelte di A .
- Il luogo tende ad una retta verticale situata a distanza $(d_1 + d_2)/2$ dal polo più a sinistra: d_1 rappresenta la distanza fra il polo singolo e lo zero.

12. *Due poli complessi, un polo reale e uno zero.* Il luogo è costituito da una porzione dell'asse reale e due archi di curva ed è riportato in Fig. 5.21r. Gli archi si costruiscono come segue:

- i) si tracciano due segmenti di retta, uno congiungente un polo complesso e il polo reale, l'altro lo stesso polo complesso e lo zero reale: si indica con ϑ_1 l'angolo compreso fra questi due segmenti; tale angolo coincide con quello secondo il quale i due archi lasciano i poli, misurato rispetto alla verticale;
 - ii) si sceglie ad arbitrio un punto A dell'asse reale e si traccia un arco di circonferenza passante per i poli complessi e con centro in A ;
 - iii) si determina su tale arco un punto per il quale risulti $\vartheta_2 = \vartheta_3$, punto che appartiene al luogo;
 - iv) si ripete la costruzione per più scelte di A .
- Il luogo tende ad una retta verticale situata a distanza $d_1/2$ dalla retta passante per i poli complessi: d_1 rappresenta la distanza fra lo zero reale e il polo reale.

C5.4. Esercizi

C5.4.1 Per il sistema chiuso in retroazione unitaria avente la funzione di trasferimento di anello

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}, \quad K > 0, \quad (5.35)$$

si determini:

1. Il luogo delle radici.
2. L'intervallo di valori di K nel quale i poli del sistema sono complessi.
3. La massima sovraelongazione corrispondente al minimo valore del coefficiente di smorzamento.

Soluzione

1. Il luogo delle radici, del tipo di Fig. 5.21c, è rappresentato in Fig. 5.22.
2. Dall'equazione caratteristica

$$s^2 + 3s + Ks + 4K = 0,$$

in cui si sostituiscono i valori $s = -2$ e $s = -6$, corrispondenti ai punti di diramazione del luogo, si deducono rispettivamente i valori $K = 1$ e $K = 9$; pertanto l'intervallo richiesto è

$$1 < K < 9.$$

3. Dalla Fig. 5.22 risulta

$$\delta = \cos \varphi = \cos 30^\circ = 0,87,$$

$$\omega_n = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,464.$$

Il sistema è del secondo ordine con uno zero, la cui costante di tempo vale $T = 0,25$. Utilizzando le (2.106) e (2.107) si deduce

$$S = 1,33 \, \%.$$

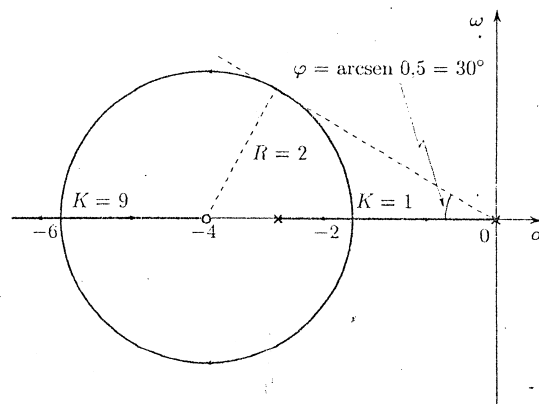


Figura 5.22 Luogo delle radici del sistema (5.35).

Capitolo 6

Le reti corretttrici e i regolatori standard

I procedimenti di analisi precedentemente introdotti, in particolare l'analisi armonica (diagrammi di Bode, Nyquist, Nichols) e il metodo del luogo delle radici, trovano la loro più frequente applicazione, nell'ambito dei controlli automatici, per la progettazione dei dispositivi di correzione della risposta. Tali dispositivi vengono comunemente indicati col nome di reti corretttrici, generalizzando una denominazione propria dei sistemi con amplificazione elettronica o elettromeccanica, in cui la correzione viene in effetti generalmente realizzata con speciali reti o circuiti elettrici. Il presente capitolo è dedicato al progetto dei più comuni sistemi di correzione: oltre alle reti corretttrici vere e proprie, si considereranno la retroazione tachimetrica, sistema di correzione specifico per i servomeccanismi di posizione, e i regolatori standard con azione proporzionale, integrale, derivativa, a parametri aggiustabili in relazione alle caratteristiche del sistema controllato.

6.1. Dati di specifica e loro compatibilità

I dati di specifica sui quali si basa il progetto di un sistema di controllo riguardano la *precisione*, la *stabilità* e la *prontezza* e la *sensibilità ai disturbi*.

I dati che riguardano la precisione sono gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di determinati disturbi e determinate variazioni di parametri; i dati che riguardano la stabilità, intesa nel senso lato di "comportamento dinamico soddisfacente" (in quanto la stabilità in senso stretto è sempre sottintesa), sono la massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti; i dati che riguardano la prontezza sono il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante; i dati che riguardano la sensibilità ai disturbi sono i valori delle funzioni di sensibilità a diversi tipi di disturbi e a diverse frequenze.

Alcuni di questi dati di specifica sono relativi alla risposta ai segnali tipici, altri alla risposta armonica; molti dell'uno e dell'altro tipo sono, grosso modo, equivalenti. Poiché il progetto del sistema di controllo si effettua normalmente considerando la risposta armonica, occorre riportare i parametri nel dominio del tempo a parametri nel dominio della frequenza:

Dati di specifica
Precisione
Stabilità
Prontezza
Sensibilità ai disturbi

tale operazione non è in generale possibile in modo rigoroso in quanto, se è pur vero che l'intera risposta armonica è legata biunivocamente all'intera risposta a un segnale tipico, per esempio il gradino, ciò non vale per *alcuni* parametri delle due risposte. L'unico modo per porre in relazione, sia pure in modo approssimato, i parametri che riguardano la risposta armonica e quelli che riguardano la risposta a un segnale tipico è ipotizzare che il sistema in retroazione si comporti approssimativamente come un sistema del secondo ordine a poli complessi o comunque abbia un numero limitato di poli dominanti.

Il primo parametro che si determina in fase di progetto, utilizzando i dati di specifica che si riferiscono alla precisione, è la costante di guadagno (guadagno statico nei sistemi di tipo 0, costante di velocità nei sistemi di tipo 1).

Una volta determinata la costante di guadagno, si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche che riguardano la stabilità e la prontezza; se, come spesso accade, tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare un dispositivo opportuno (*rete corretttrici* o *rete compensatrice*), che, inserito nell'anello, modifichi le caratteristiche dinamiche del sistema.

Rete corretttrici
Rete compensatrice

ESEMPIO 6.1.1 Si consideri un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)};$$

si suppone che sia specificato un errore a regime in risposta alla rampa unitaria inferiore a 0,1, il che comporta un valore della costante di velocità K_v (vedi Paragrafo 4.4) superiore a 10 sec^{-1} .

Dovrà essere pertanto

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{K_1}{2} = 10 \text{ sec}^{-1}.$$

Tuttavia dall'applicazione del criterio di Routh risulta che il sistema, in assenza di reti corretttrici, risulta instabile per tutti i valori di K_1 maggiori di 6 sec^{-1} . Affinché il sistema possa soddisfare la specifica imposta occorre inserirvi un'opportuna rete corretttrici.

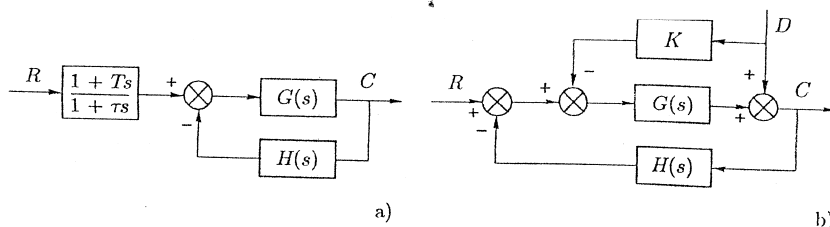
Del progetto delle reti corretttrici si tratterà a lungo in questo capitolo: può succedere peraltro che i dati riguardanti la precisione impongano un valore della costante di guadagno tanto elevato che con nessuna rete corretttrici si riesca ad ottenere un comportamento dinamico soddisfacente.

Compensazione
ad azione diretta

In questi casi si può impiegare la *compensazione ad azione diretta* per diminuire gli errori, a prescindere dalla presenza della retroazione.

In Fig. 6.1 sono rappresentate due tipiche compensazioni ad azione diretta: la Fig. 6.1a si riferisce a una possibile compensazione dell'errore a regime in risposta alla rampa, basata sul fatto che l'elemento posto in cascata a regime alza la rampa unitaria di $T - \tau$, la Fig. 6.1b alla compensazione dell'errore statico dovuto all'azione di un disturbo. Occorre notare che, anche se in teoria una scelta opportuna di T , τ e K consentirebbe

Figura 6.1
Compensazioni ad azione diretta.



l'eliminazione completa degli errori, per la presenza delle inevitabili imprecisioni e incertezze nella conoscenza e imposizione dei valori dei parametri le compensazioni ad azione diretta consentono solamente una riduzione degli errori (ad esempio fino al 10 - 20 % dei valori che avrebbero in loro assenza), che però può essere sufficiente per superare eventuali difficoltà nel progetto dei sistemi in retroazione dovute a un valore eccessivo della costante di guadagno, difficoltà conseguenti alla presenza di uno o più dati di specifica riguardanti la precisione ed eccessivamente vincolanti.

Come si è precedentemente accennato, il progetto della compensazione dei sistemi di controllo in retroazione è normalmente eseguito nel dominio della frequenza, utilizzando i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols. Indicazioni sulla scelta di un particolare sistema di compensazione, in ordine alla possibilità di intervento sul comportamento dinamico del sistema, sono fornite dal luogo e dal contorno delle radici; questi ultimi metodi consentono anche un'accurata verifica della risposta nel dominio del tempo. In particolare, mentre i metodi di sintesi nel dominio della frequenza, basati sull'imposizione della pulsazione di incrocio e dei margini di stabilità, incidono prevalentemente sulla pulsazione naturale e sul coefficiente di smorzamento dei poli dominanti (quindi su prontezza e massima sovraelongazione nella risposta al gradino), il luogo e il contorno delle radici consentono di rilevare anche la posizione del polo reale più vicino all'origine, che incide in misura notevole sul tempo di assestamento.

Prima di entrare nel dettaglio del progetto nel dominio della frequenza, conviene ricordare quali parametri si possano direttamente dedurre dal diagramma di Bode del modulo del guadagno di anello. Ci si riferisce al sistema in retroazione unitaria rappresentato in Fig. 6.2, in cui l'unica funzione di trasferimento $G(s)$ si riferisce alla cascata di regolatore, sistema controllato e collegamento di retroazione. Per una rappresentazione più articolata si rimanda al Paragrafo 6.9.

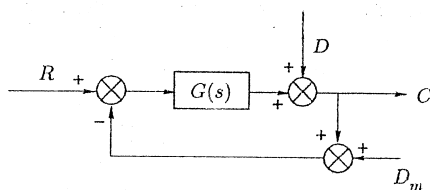


Figura 6.2
Sistema in retroazione unitaria.

Dal diagramma di Bode del modulo di $G(j\omega)$, riportato in Fig. 6.3, si possono dedurre i valori dei seguenti parametri.

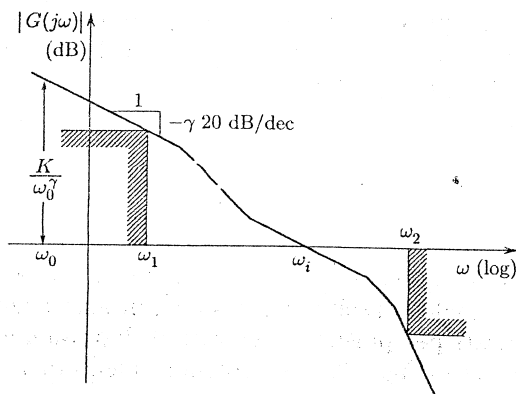


Figura 6.3
Diagramma di Bode del modulo di $G(j\omega)$.

1. *Tipo di sistema γ* : corrisponde all'inclinazione iniziale del diagramma.
2. *Errore a regime non nullo in risposta a segnali tipici* (ad esempio l'errore in risposta alla rampa per un sistema di tipo 1): risulta $e_r = 1/k$, in cui k si determina come è indicato in figura, scegliendo una pulsazione ω_0 inferiore a quella del primo punto di rottura (zero o polo).
3. *Sensibilità ai disturbi a bassa frequenza*, cioè nella banda $[0, \omega_1]$ con $\omega_1 \ll \omega_i$: è data dal modulo della funzione di sensibilità $1/(1 + G(j\omega_1))$ in dB (negativi), che corrisponde approssimativamente al valore di $|G(j\omega_1)|$ in dB (positivi), trascurando l'unità rispetto a tale valore.
4. *Sensibilità ai disturbi di misura ad alta frequenza*, cioè nella banda $[\omega_2, \infty]$ con $\omega_2 \gg \omega_i$: è data dal modulo della funzione di sensibilità complementare $G(j\omega_2)/(1 + G(j\omega_2))$ in dB (negativi), che corrisponde approssimativamente al valore di $|G(j\omega_2)|$ in dB (negativi).
5. *Massima sovraelongazione nella risposta al gradino*: dipende dal margine di fase, deducibile dal diagramma di Bode delle fasi in corrispondenza della pulsazione di incrocio ω_i ; per un buon margine di fase in genere si richiede che il diagramma delle ampiezze incroci l'asse delle ascisse con pendenza di -20 dB/dec.
6. *Pulsazione di risonanza ω_R e banda passante ω_f* : risulta $\omega_R \simeq \omega_i$, $\omega_f > \omega_i$ (tipicamente $\omega_f \simeq 2\omega_i$ per sistemi con buon margine di fase).
7. *Tempo di salita, di ritardo e di massima sovraelongazione*: dipendono da ω_R e quindi da ω_i (vedi risposte dei sistemi del secondo ordine con $\omega_n \simeq \omega_R \simeq \omega_i$).
8. *Tempo di assestamento*: non si può dedurre dal diagramma di Bode, a meno che non si garantisca, attraverso l'esame del luogo o del contorno delle radici, che tutti i poli ad anello chiuso siano a sinistra dei poli dominanti complessi coniugati, nel qual caso si può ancora utilizzare l'analogia con il sistema del secondo ordine.

6.2. Le principali reti corretttrici a resistenze e capacità

Le reti corretttrici più frequentemente impiegate nei sistemi di controllo con amplificazione elettronica sono a resistenze e capacità. Le medesime funzioni di trasferimento si possono peraltro ottenere, in sistemi di controllo con amplificazione pneumatica o idraulica, con analoghi sistemi di strozzature e serbatoi o con sistemi meccanici (molle e ammortizzatori).

1 Rete integratrice

La rete integratrice è rappresentata in Fig. 6.4a. In Fig. 6.4b è riportata la disposizione, nel piano complesso, dei poli e degli zeri della sua funzione di trasferimento (nel caso in esame si ha un solo polo e nessuno zero), in Fig. 6.4c il diagramma di Nyquist e in Fig. 6.4d i diagrammi di Bode.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{1}{Cs} = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \text{con } \tau := RC \quad (6.1)$$

Il nome di "rete integratrice" è dovuto al fatto che per pulsazioni elevate rispetto a $1/\tau$ il segnale di uscita approssima l'integrale nel tempo del segnale di ingresso: infatti per pulsazioni elevate il diagramma polare di risposta armonica della rete (Fig. 6.4c) approssima quello di un integratore ideale (Fig. 6.4e).

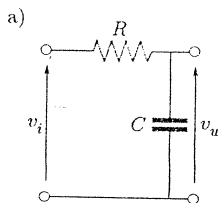
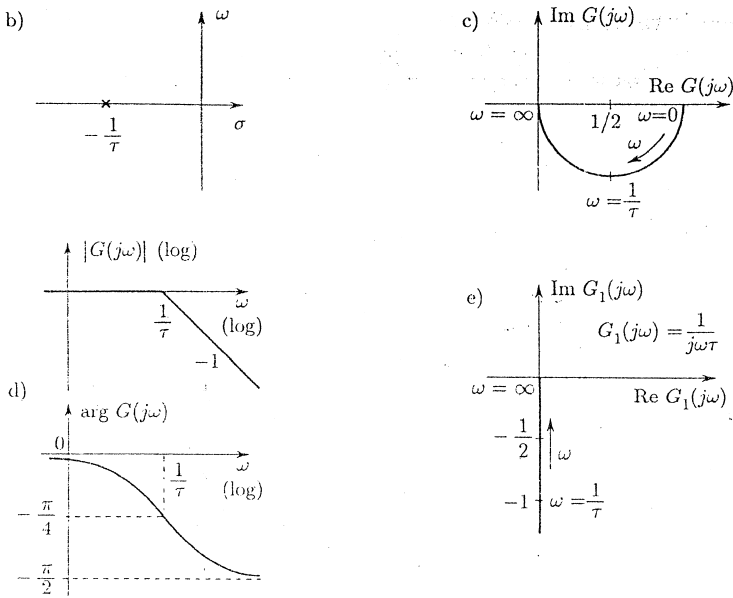


Figura 6.4a-e
Rete integratrice e relativi diagrammi.



La funzione di trasferimento di un integratore ideale è $1/\tau s$ e la risposta armonica $1/j\omega\tau$; la risposta armonica della rete è

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \simeq \frac{1}{j\omega\tau} \quad \text{per } \omega \gg \frac{1}{\tau}. \quad (6.2)$$

2 Rete derivatrice

La rete derivatrice è rappresentata in Fig. 6.5a. In Fig. 6.5b è rappresentata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.5c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.5d i diagrammi di Bode.

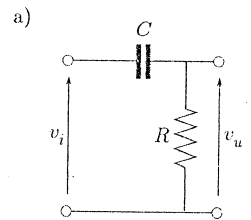
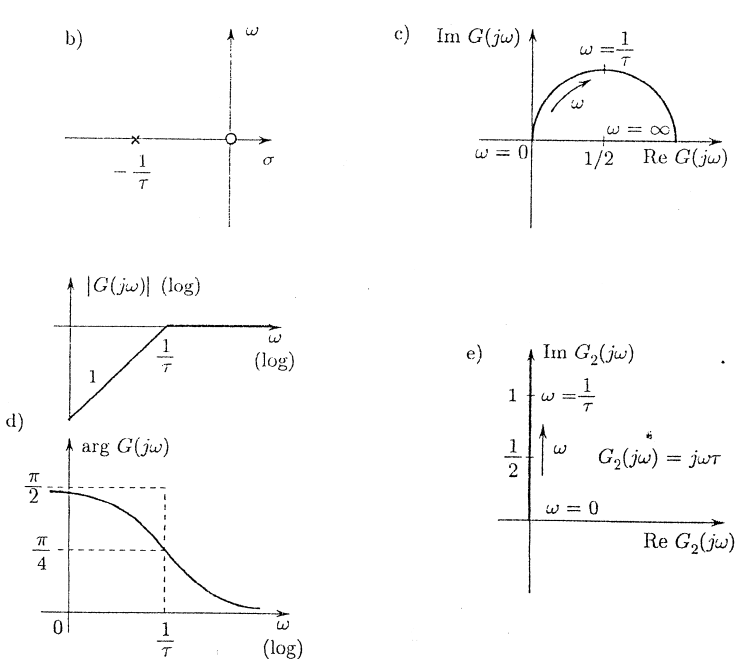


Figura 6.5a-e
Rete derivatrice e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\tau s}{1 + \tau s}, \quad \text{con } \tau := RC. \quad (6.3)$$

Il nome di “rete derivatrice” è dovuto al fatto che per pulsazioni piccole rispetto a $1/\tau$ il segnale di uscita approssima la derivata rispetto al tempo del segnale di ingresso: infatti per piccole pulsazioni il diagramma polare di risposta armonica della rete (Fig. 6.5c) approssima quello di un derivatore ideale (Fig. 6.5e).

La funzione di trasferimento di un derivatore ideale è τs e la risposta armonica della rete è

$$G(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \simeq j\omega\tau \quad \text{per } \omega \ll \frac{1}{\tau}. \quad (6.4)$$

Le reti integratrice e derivatrice danno rispettivamente un ritardo e un anticipo di fase per tutte le pulsazioni finite; per la stabilizzazione dei sistemi di controllo esse vengono impiegate raramente perché presentano alcuni inconvenienti rispetto alle reti ritardatrice ed anticipatrice descritte nel seguito, di cui si possono considerare casi particolari. La rete derivatrice non può essere utilizzata semplicemente in cascata nell'anello di un sistema in retroazione in quanto è un filtro passa alto e blocca la componente continua del segnale, mentre i sistemi di controllo devono presentare elevato guadagno di anello principalmente per la componente continua.

3 Rete ritardatrice

La rete ritardatrice (“phase lag”) è rappresentata in Fig. 6.6a. In Fig. 6.6b è riportata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.6c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.6d i diagrammi di Bode.

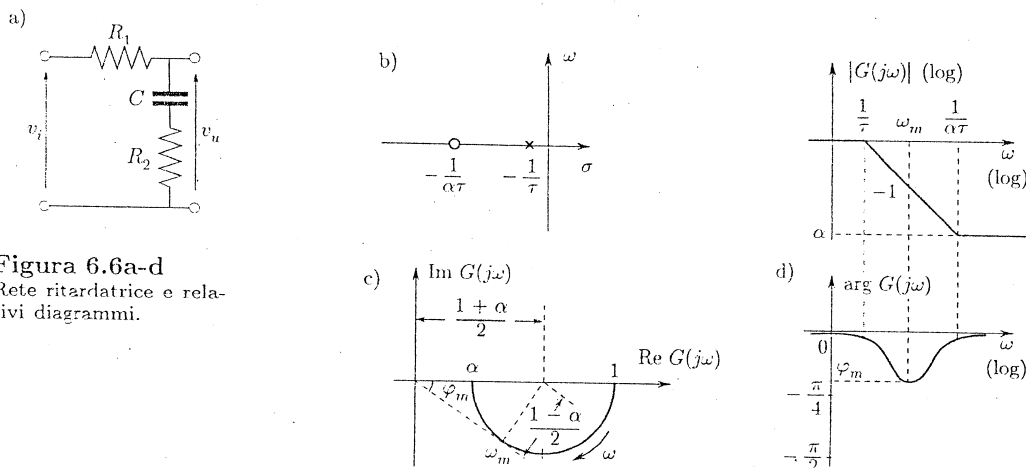


Figura 6.6a-d
Rete ritardatrice e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2 Cs}{1 + (R_1 + R_2) Cs} = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \quad (6.5)$$

in cui si è posto

$$\tau := (R_1 + R_2) C, \quad \alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1.$$

La rete ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla essa non sfasa né attenua, in corrispondenza della pulsazione infinita essa non sfasa e attenua di α . Il massimo ritardo di fase che si può ottenere dalla rete è funzione del parametro α ed è dato dalla relazione

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad (6.6)$$

come si può facilmente dedurre dalla Fig. 6.6c.

La pulsazione ω_m in corrispondenza della quale tale ritardo di fase si verifica si può ricavare ponendo uguale a zero la derivata della funzione $\varphi(\omega)$. Essendo

$$\varphi(\omega) = \arctan \alpha \omega \tau - \arctan \omega \tau,$$

e ricordando che è

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2},$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\alpha \tau}{1 + \alpha^2 \omega_m^2 \tau^2} - \frac{\tau}{1 + \omega_m^2 \tau^2} = 0,$$

da cui risulta $\omega_m^2 = 1/(\alpha \tau^2)$ e quindi

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}. \quad (6.7)$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti anche notando che nel diagramma di Bode per ragioni di simmetria la pulsazione ω_m è intermedia ed equidistante dalle pulsazioni $1/\tau$ e $1/(\alpha \tau)$ (Fig. 6.6d): data la natura logaritmica del diagramma, essa coincide pertanto con la media geometrica di tali pulsazioni.

4 Rete anticipatrice

La rete anticipatrice ("phase lead") è indubbiamente la più largamente impiegata per la stabilizzazione dei sistemi di controllo in retroazione. Essa è rappresentata in Fig. 6.7a. In Fig. 6.7b ne è riportata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.7c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.7d i diagrammi di Bode.

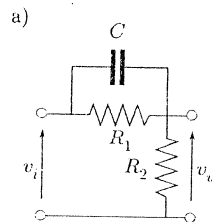
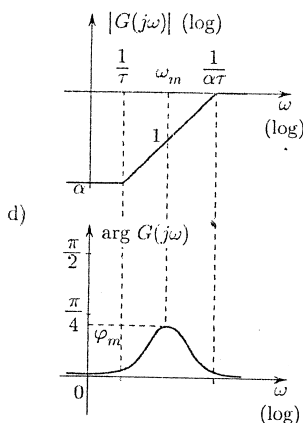
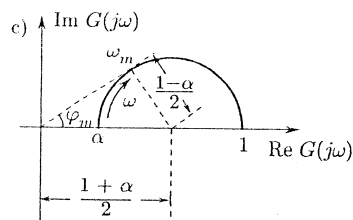
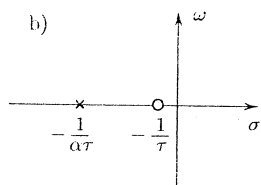


Figura 6.7a-d
Rete anticipatrice e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{(1/R_1) + Cs}} = \frac{R_2 (1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad (6.8)$$

in cui si è posto

$$\tau := R_1 C, \quad \alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1.$$

La rete anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla essa non sfasa e attenua di α , in corrispondenza della pulsazione infinita essa non sfasa né attenua.

Procedendo in modo analogo al caso della rete ritardatrice, si può calcolare il massimo anticipo di fase in funzione del parametro α . Esso risulta

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (6.9)$$

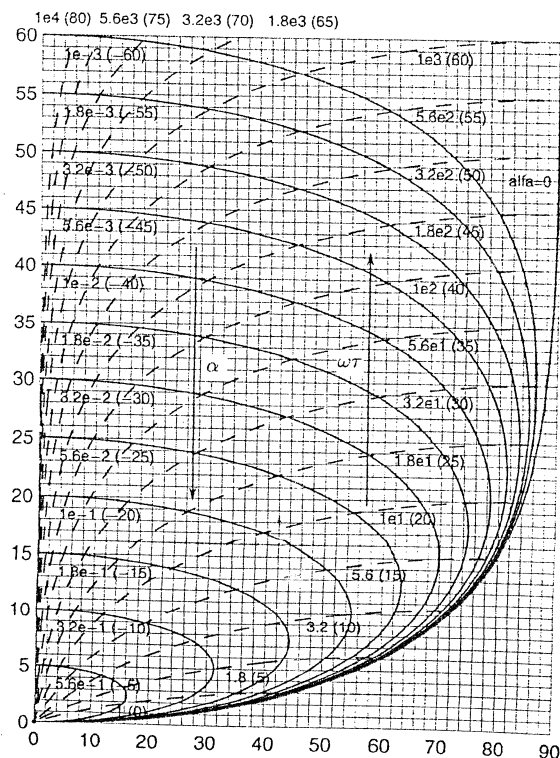
La pulsazione ω_m in corrispondenza della quale si verifica tale anticipo di fase è data dalla relazione

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}. \quad (6.10)$$

Quando si progetta un regolatore in cui la correzione della risposta è operata da una rete anticipatrice, in genere si ignora il fattore α presente nella funzione di trasferimento della rete, che si traduce in un'attenuazione delle basse frequenze facilmente compensabile con un corrispondente aumento del guadagno statico del regolatore. La funzione di trasferimento priva del fattore α si dice "della rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico" ed è la reciproca di quella della rete ritardatrice.

In Fig. 6.8 sono rappresentati i diagrammi di Nichols della rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico, per diversi valori di α , riportati

Figura 6.8
Diagramma di Nichols
della rete anticipatrice
con ripresa del guadagno
statico.



sulla sinistra della figura ed espressi anche in dB per una più agevole interpolazione; le curve tratteggiate si riferiscono alla graduazione dei diagrammi di Nichols in funzione di $\omega\tau$, con valori riportati sulla destra ed espressi anche in dB. L'impiego di tali diagrammi in procedimenti grafici di sintesi nel dominio delle frequenze può essere evitato utilizzando le formule di inversione cui è dedicato il Paragrafo 6.5.

5 Rete a ritardo e anticipo o rete a sella

La rete a ritardo e anticipo o rete a sella ("lead-lag") è rappresentata in Fig. 6.9a. In Fig. 6.9b ne è riportata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.9c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.9d i diagrammi di Bode.

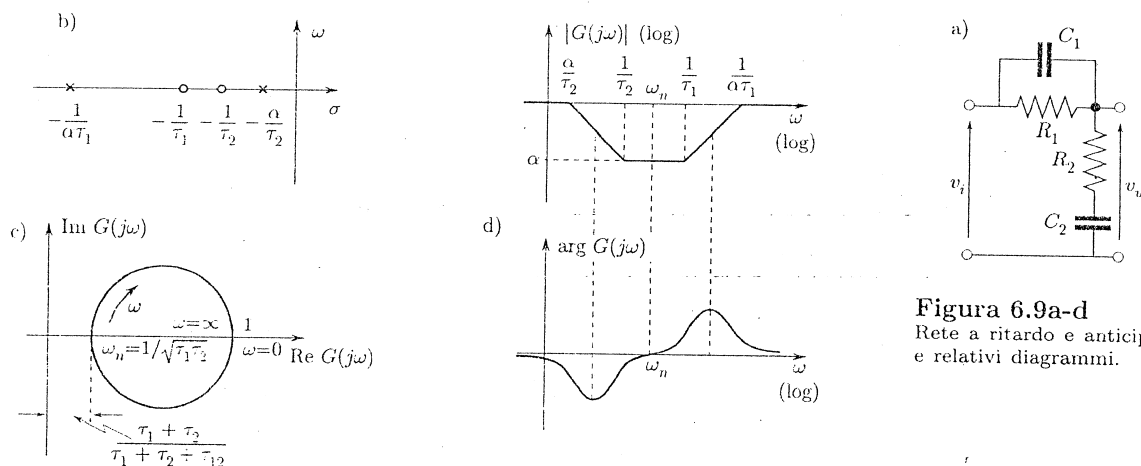


Figura 6.9a-d
Rete a ritardo e anticipo
e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s}} = \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s) + R_1 C_2 s} \\
 &= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}, \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

$$\text{con } \tau_1 := R_1 C_1, \tau_2 := R_2 C_2, \tau_{12} := R_1 C_2.$$

Il discriminante dell'equazione polinomiale che si ottiene ponendo uguale a zero il denominatore della funzione di trasferimento è positivo. Infatti il discriminante dell'equazione $(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) = 0$, che presenta le radici reali negative $-1/\tau_1$, $-1/\tau_2$, è positivo: aumentando il modulo del coefficiente del termine lineare in s , con l'aggiunta di $\tau_{12}s$, il valore del discriminante aumenta e, con esso, aumenta pure la distanza fra le due radici, che restano, naturalmente, reali negative.

Pertanto la (6.11) si può scrivere anche

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}, \quad (6.12)$$

in cui è $\tau_1 \tau_2 = \tau_a \tau_b$; assumendo, per fissare le idee, $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_a < \tau_b$, si ha

$$\frac{\tau_a}{\tau_1} = \frac{\tau_2}{\tau_b} = \alpha, \quad \alpha < 1. \quad (6.13)$$

La costante α è minore dell'unità, dovendo essere i poli distanti fra loro più degli zeri.

In definitiva la funzione di trasferimento si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + (\tau_2/\alpha)s)(1 + \alpha\tau_1 s)}, \quad \alpha < 1. \quad (6.14)$$

Se si vogliono scrivere i polinomi a numeratore e a denominatore in forma non fattorizzata, si ha invece

$$G(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

in cui è

$$\begin{aligned} \omega_n &:= \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \\ \delta' &:= \frac{1}{2} \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > 1 \quad (\text{se } \tau_1 \neq \tau_2), \\ \delta &:= \frac{1}{2} \frac{R_1 (C_1 + C_2) + R_2 C_2}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta' > 1. \end{aligned}$$

La disuguaglianza $\delta' > 1$ si deduce sviluppando il quadrato $(\sqrt{\tau_1} - \sqrt{\tau_2})^2$. Si noti che in corrispondenza della pulsazione ω_n la rete non sfasa e attenua di

$$\alpha_n := |G(j\omega_n)| = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_a + \tau_b} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha) + \alpha\tau_1}. \quad (6.15)$$

Per $0 < \omega < \omega_n$ la rete fornisce un ritardo di fase, per $\omega_n < \omega < \infty$ un anticipo di fase. In corrispondenza della pulsazione nulla e della pulsazione infinita non si ha né sfasamento né attenuazione.

6 Rete a T

La rete a T o meglio, a T ponticellato ("bridged-T"), è rappresentata in Fig. 6.10a. In Fig. 6.10b ne è riportata la posizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.10c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.10d i diagrammi di Bode.

Per semplicità di analisi si considererà solo il caso di una rete a T simmetrica, cioè con le due resistenze uguali.

Indicando con $I_1(s)$, $I_2(s)$ le trasformate di Laplace delle correnti di maglia, con $V_i(s)$, $V_u(s)$ quelle delle tensioni di ingresso e uscita, si ottengono le equazioni

$$V_i(s) = \left(R + \frac{1}{C_1 s}\right) I_1(s) - R I_2(s),$$

$$0 = -R I_1(s) + \left(2R + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2(s),$$

$$V_u(s) = V_i(s) - \frac{1}{C_2 s} I_2(s).$$

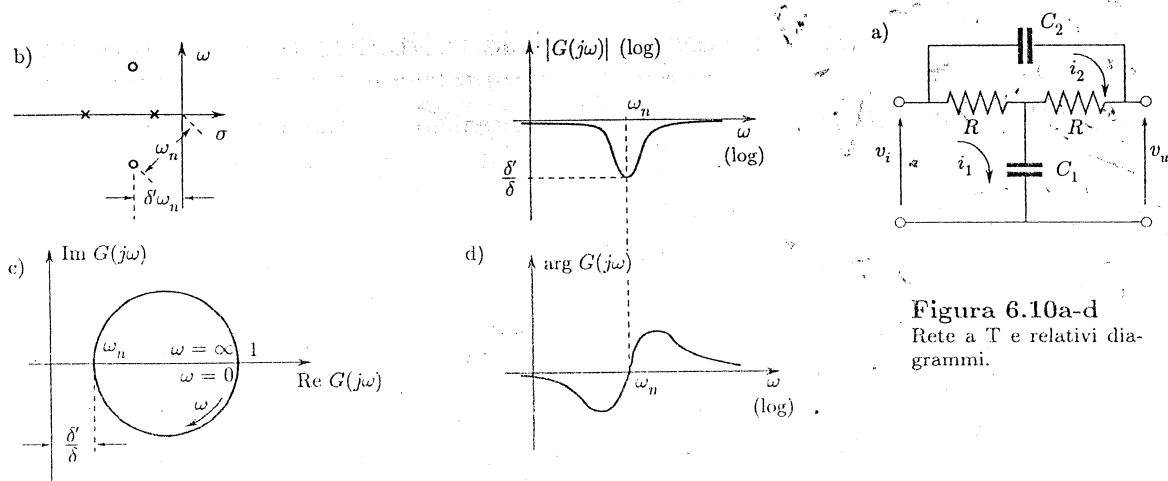


Figura 6.10a-d
Rete a T e relativi dia-
grammi.

Eliminando $I_1(s)$ dalle prime due equazioni ed esplicitando $I_2(s)$, si ricava

$$I_2(s) = \frac{R C_1 C_2 s^2}{R^2 C_1 C_2 s^2 + R(C_1 + 2C_2)s + 1} V_i(s),$$

da cui, utilizzando la terza equazione, si ottiene infine la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R^2 C_1 C_2 s^2 + 2 R C_2 s + 1}{R^2 C_1 C_2 s^2 + R(C_1 + 2C_2)s + 1}. \quad (6.16)$$

Un tipo diverso di rete a T simmetrica, in cui resistenze e capacità sono scambiate di posizione, è rappresentata in Fig. 6.11; la sua funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{C^2 R_1 R_2 s^2 + 2 R_2 C s + 1}{C^2 R_1 R_2 s^2 + C(R_1 + 2R_2)s + 1}, \quad (6.17)$$

del tutto simile alla (6.16).

La (6.16) si può scrivere anche

$$G(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

con

$$\omega_n := \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}}, \quad \delta' := \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, \quad \delta := \frac{C_1 + 2C_2}{2 \sqrt{C_1 C_2}} > 1.$$

La rete può presentare pertanto una coppia di zeri complessi coniugati (se è $C_1 > C_2$). I due poli sono invece sempre reali: infatti dalla $(\sqrt{C_1} - \sqrt{C_2})^2 \geq 0$ si deduce $C_1 + C_2 \geq 2\sqrt{C_1 C_2}$, e quindi $C_1 + 2C_2 > 2\sqrt{C_1 C_2}$.

La risposta armonica è analoga a quella della rete a ritardo e anticipo precedentemente esaminata: in corrispondenza delle pulsazioni nulla e infinita la rete non attenua né sfasa; nel campo $0 < \omega < \omega_n$ essa produce un ritardo di fase, nel campo $\omega_n < \omega < \infty$ un anticipo di fase.

La presenza di zeri complessi anziché reali si traduce peraltro in una maggiore selettività, cioè in un diagramma di Bode delle ampiezze più "a punta" e in una più spiccata variazione di fase nell'intorno della pulsazione ω_n .

Queste caratteristiche rendono la rete a T particolarmente adatta alla compensazione dei sistemi di controllo in alternata.

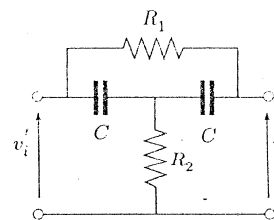


Figura 6.11
Tipo alternativo di rete
a T.

6.3. La compensazione mediante reti ritardatrici

Come si è precedentemente accennato, lo studio della compensazione di un sistema di controllo si esegue dapprima sul diagramma di risposta armonica, cercando di soddisfare i dati di specifica che a tale diagramma si possono direttamente o indirettamente riferire. In un secondo tempo, definito il progetto di massima, si opera in genere una messa a punto impiegando il luogo e il contorno delle radici.

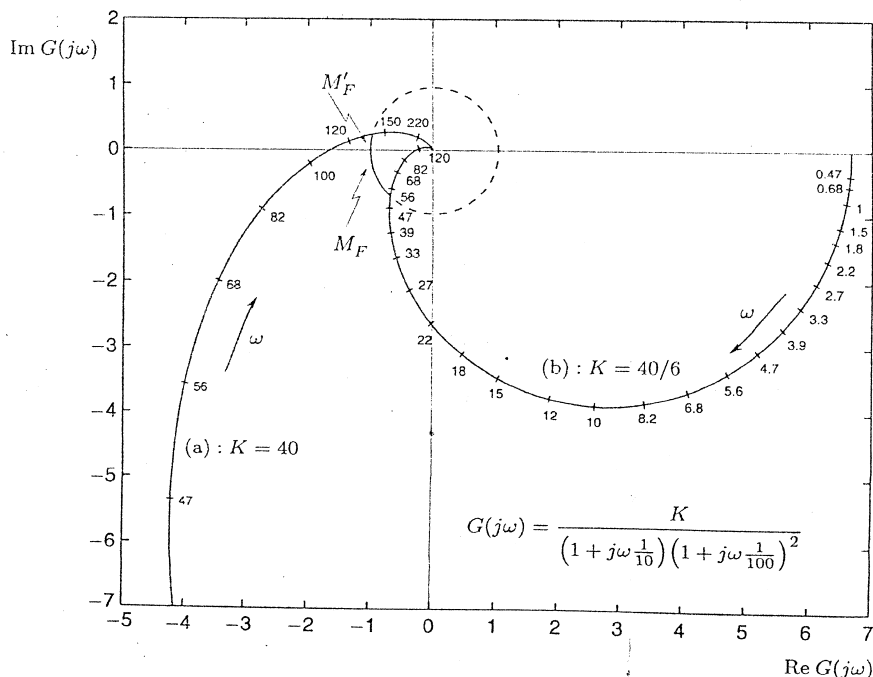
Nella prima fase sono largamente utilizzati i diagrammi di Bode, che presentano il vantaggio di una notevole semplificazione grafica (per la possibile approssimazione asintotica dei termini elementari), immediatamente legata all'espressione analitica della funzione di trasferimento; i diagrammi di Bode sono inoltre immediatamente traducibili in diagrammi di Nichols per la determinazione della risposta armonica ad anello chiuso o la verifica delle eventuali specifiche ad essa relative.

Quando si impiegano i diagrammi di Bode con riferimento a sistemi a fase minima (cioè nella grande maggioranza dei casi), è di notevole utilità, nella prima fase del progetto, la formula di Bode (vedi Paragrafo 3.4), che consente di impostare il progetto sul diagramma delle ampiezze, senza considerare quello delle fasi: la fase in corrispondenza della pulsazione alla quale il diagramma delle ampiezze interseca l'asse delle ascisse (detta *pulsazione di intersezione* o di *incrocio* o di *guadagno unitario*), che è quella cui ci si riferisce per il calcolo del margine di fase, dipende dalla pendenza del diagramma delle ampiezze in un intorno della pulsazione di intersezione medesima; in pratica basta considerare l'andamento del diagramma per una decade in più e una decade in meno rispetto alla pulsazione di intersezione: se si fa in modo che l'intersezione avvenga con pendenza -1 (-20 dB/dec) e che tale pendenza si conservi in un intorno sufficientemente ampio della frequenza di intersezione, la stabilità è assicurata con un buon margine di fase.

Nei sistemi di tipo 0 e di tipo 1 pertanto la stabilità si può sempre ottenere mediante una diminuzione della costante di guadagno, come è chiarito dall'esempio di Fig. 6.12 (diagramma di Nyquist) e Fig. 6.13 (diagrammi di

Pulsazione di
intersezione
o di incrocio
o di guadagno unitario

Figura 6.12
Stabilizzazione ottenuta
diminuendo la costante di
guadagno (diagrammi di
Nyquist).



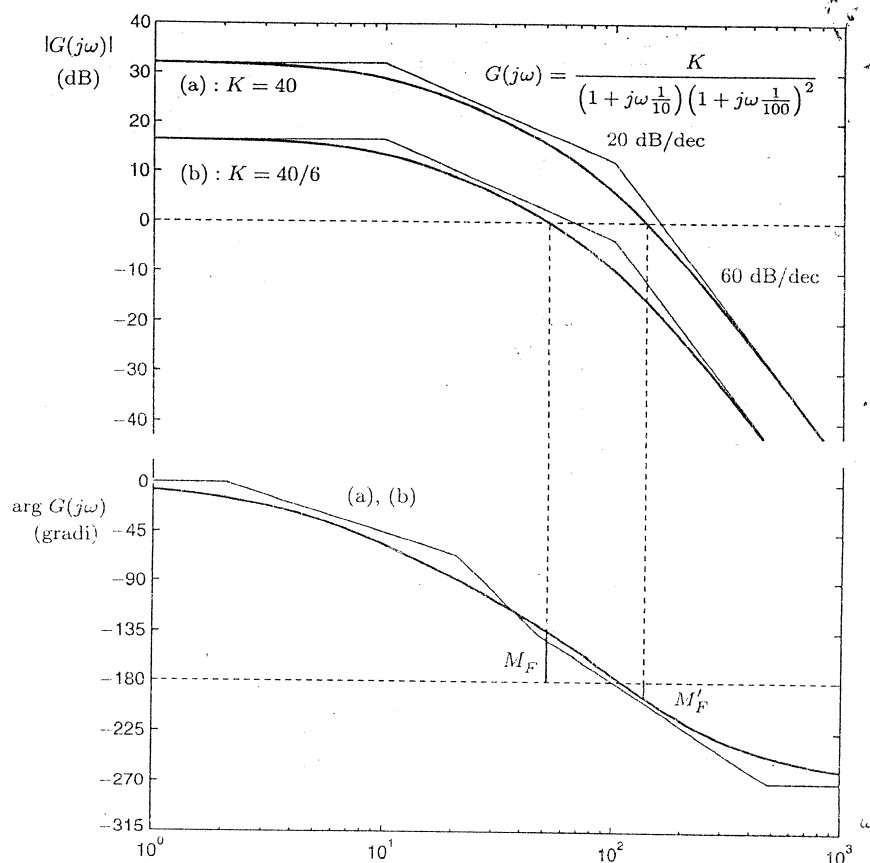


Figura 6.13
Stabilizzazione ottenuta diminuendo la costante di guadagno (diagrammi di Bode).

Bode); i diagrammi contrassegnati con a) corrispondono ad un sistema instabile; riducendo il guadagno, si ottengono i diagrammi contrassegnati con b), corrispondenti ad un sistema stabile. Nel primo caso l'intersezione del diagramma di Bode con l'asse delle ascisse avviene con la pendenza -3 (-60 dB/dec), nel secondo caso con la pendenza -1 (-20 dB/dec); il margine di fase passa dal valore M'_F (negativo) al valore M_F (positivo).

In Fig. 6.13 sono riportate, dei vari diagrammi, anche le approssimazioni a spezzata, che vengono spesso utilizzate perché di più agevole costruzione.

La Fig. 6.14, che si riferisce ai diagrammi di Nichols, è ancora di più immediata interpretazione, in quanto una diminuzione della costante di guadagno si traduce in un abbassamento del diagramma, e quindi, quando esso presenta un andamento regolare come quello indicato, con ritardo di fase crescente al crescere della pulsazione, porta ad un aumento dei margini di stabilità.

Una correzione consistente nella semplice riduzione della costante di guadagno costituisce però un intervento sconsigliabile, in quanto i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, come prontezza e insensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello; inoltre i dati di specifica relativi agli errori a regime spesso impongono un valore minimo della costante di guadagno, cui corrisponde un comportamento dinamico non soddisfacente.

Ad esempio, facendo sempre riferimento al sistema i cui diagrammi di Bode sono riportati in Fig. 6.13, se i dati di specifica riguardanti il comportamento a regime non consentono una diminuzione del guadagno statico, si può intervenire con una rete ritardatrice, come è indicato in Fig. 6.15: la rete diminuisce il guadagno alle alte frequenze senza influire sulla costante di guadagno.

Figura 6.14
Stabilizzazione ottenuta diminuendo la costante di guadagno (diagrammi di Nichols).

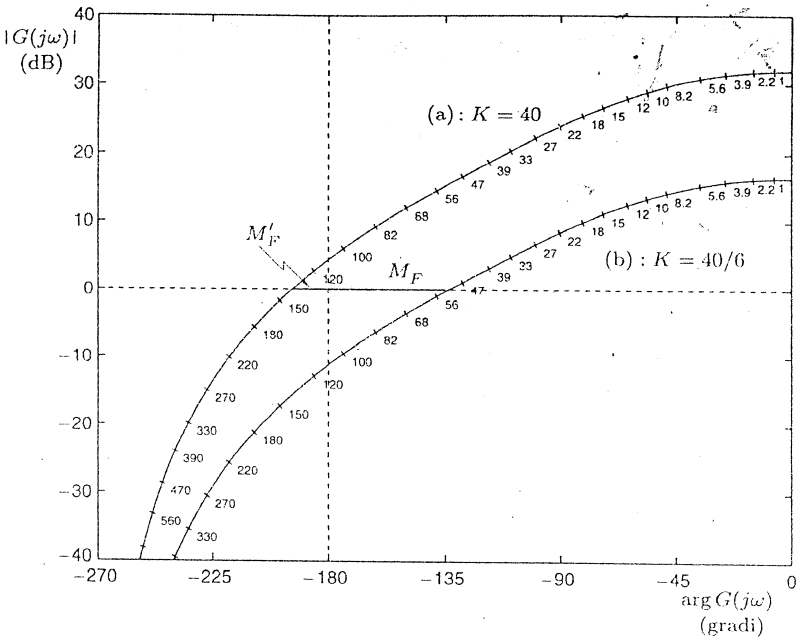
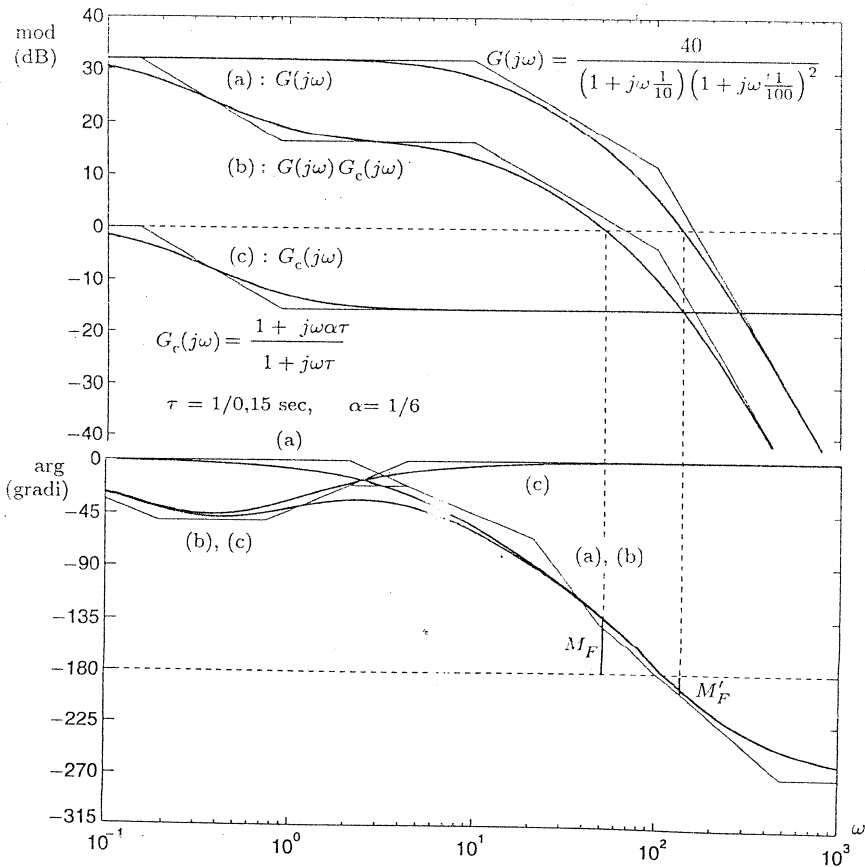


Figura 6.15
Stabilizzazione ottenuta mediante una rete ritar-datrice.



Se la costante di tempo relativa al polo della rete ritardatrice viene scelta di valore sufficientemente elevato, e quindi la relativa pulsazione di rottura di valore sufficientemente basso rispetto alla pulsazione di intersezione, l'introduzione della rete, pur non influenzando sulla costante di guadagno e quindi sugli errori a regime, può diminuire eccessivamente la banda passante, e, di conseguenza, la prontezza di risposta del sistema.

Convien pertanto scegliere un valore di α inferiore (cioè imporre una maggiore attenuazione), in modo da poter tollerare un certo ritardo di fase ad opera della rete; si può così scegliere un valore di τ inferiore, cioè elevare il valore della pulsazione al di sopra della quale per la presenza della rete il guadagno di anello viene ridotto.

Un progetto che segua questa impostazione deve essere condotto per tentativi; peraltro non risulta molto gravoso, data la modesta precisione che normalmente si richiede nell'imposizione di un dato valore del margine di stabilità.

In Fig. 6.16 sono riportati i diagrammi di Bode relativi al sistema di Fig. 6.15. ma corrispondenti alla scelta di una rete corretttrice con valori inferiori di α e τ : risulta evidente il miglioramento della banda passante.

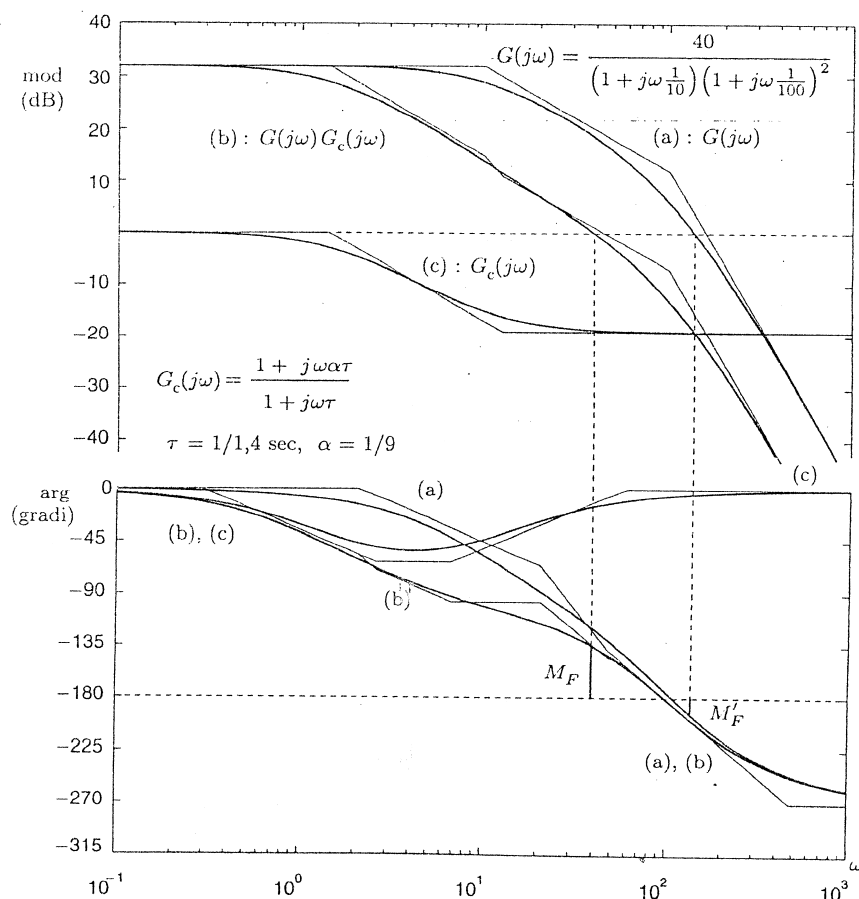


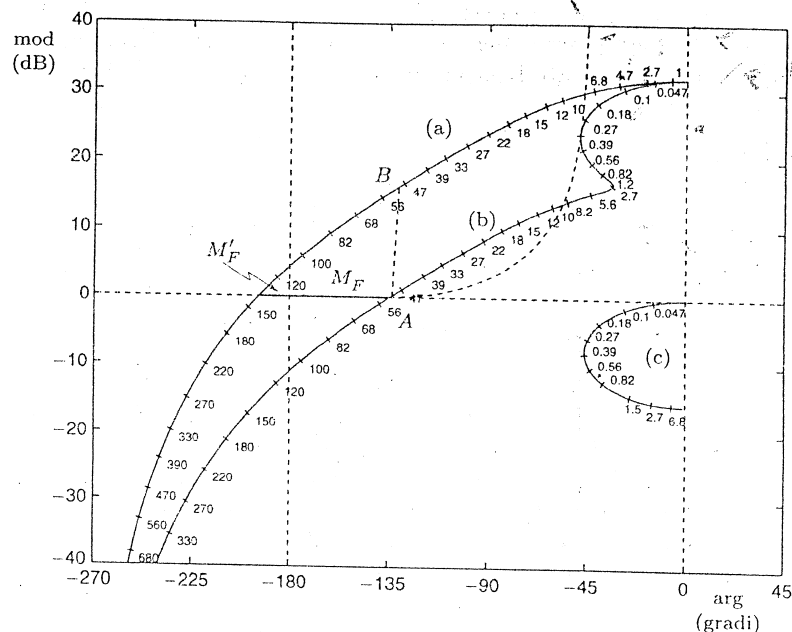
Figura 6.16
Progetto alternativo di rete corretttrice per il sistema di Fig. 6.15.

◆ Impiego dei diagrammi di Nichols

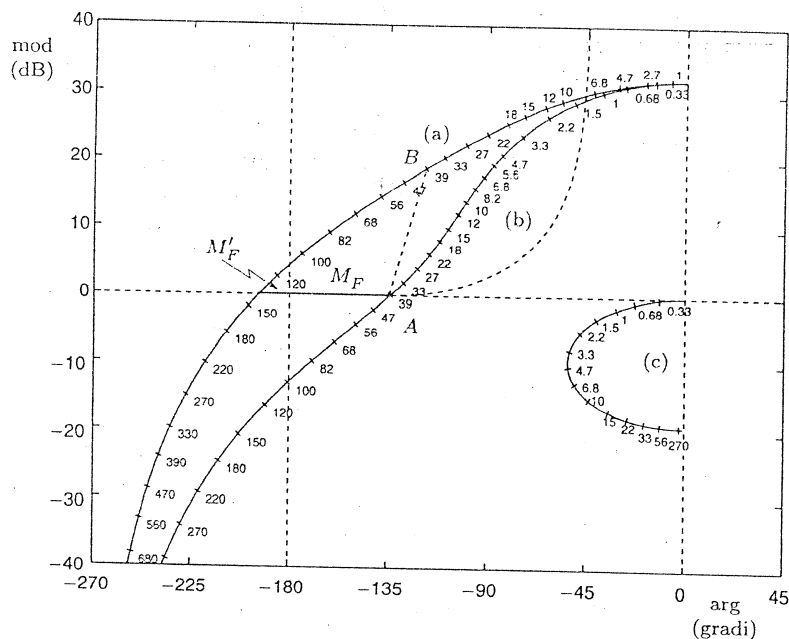
Il progetto delle reti corretttrici si può effettuare anche utilizzando i diagrammi di Nichols, che consentono in genere un più agile confronto di diverse possibili soluzioni. In Fig. 6.17 sono riportati i diagrammi di Nichols

Figura 6.17

Diagrammi di Nichols
corrispondenti a quelli di
Bode di Fig. 6.15.

**Figura 6.18**

Diagrammi di Nichols
corrispondenti a quelli di
Bode di Fig. 6.16.



corrispondenti ai diagrammi di Bode di Fig. 6.15, mentre in Fig. 6.18 sono riportati i diagrammi corrispondenti a quelli di Fig. 6.16.

Il progetto della rete ritardatrice mediante i diagrammi di Nichols si articola nei seguenti punti:

- i) in base ai dati di specifica si determina un punto del piano di Nichols attraverso il quale far passare il diagramma corretto, ad esempio il punto *A* delle Figg. 6.17 e 6.18, che corrisponde a una specifica sul margine di fase;
- ii) si sceglie un punto *B* sul diagramma che sia al di sopra del punto *A* e a destra della retta verticale passante per *A*; sia ω_0 la relativa pulsazione;

iii) si leggono il ritardo di fase e l'attenuazione in dB corrispondenti al passaggio da B ad A : nella famiglia di diagrammi di Fig. 6.8 tali coordinate, invertite di segno, individuano un punto cui sono associati valori di α e di $\omega\tau$, da cui, ponendo $\omega = \omega_0$, si deducono i due parametri della rete corretttrice.

Per ciò che riguarda il punto iii), si possono impiegare, in alternativa, le formule di inversione (6.25) riportate al Paragrafo 6.5. La curva a tratto passante per il punto A esprime il massimo ritardo di fase φ consentito dalla rete ritardatrice in funzione del modulo M ($\varphi = -\arccos M$), e delimita pertanto la zona in cui si può scegliere il punto B .

Rispetto ai diagrammi di Bode, quelli di Nichols presentano il vantaggio di consentire l'agevole considerazione di specifiche relative alla risposta armonica ad anello chiuso, utilizzando una carta preparata con i luoghi a M ed N costanti.

La rete ritardatrice si usa con vantaggio nei sistemi in cui si vuole ottenere un elevato guadagno alle basse frequenze e la cui stabilizzazione è difficile perché il ritardo di fase corrispondente alla pulsazione alla quale il diagramma delle ampiezze interseca l'asse delle ascisse è molto elevato, in quanto tale intersezione avviene con pendenza elevata. Una tale situazione è rappresentata dal diagramma a) di Fig. 6.19; con l'impiego della rete ritardatrice il diagramma di Bode viene modificato come indicato con b).

Molti amplificatori elettronici da usarsi contro-reazionati (amplificatori operazionali) sono appunto caratterizzati da una risposta armonica che, in assenza di correzione, è del tipo a) di Fig. 6.19, con un'elevata pendenza dovuta al fatto che, al crescere della frequenza, le capacità parassite presenti nei vari stadi di amplificazione vengono a manifestare la loro presenza quasi contemporaneamente. Gli amplificatori operazionali vengono stabilizzati di norma mediante una rete ritardatrice.

Come si è precedentemente notato, l'inconveniente principale della rete ritardatrice è la riduzione del guadagno alle alte frequenze, cioè della banda passante del sistema, che si traduce in una risposta transitoria meno pronta e in una neutralizzazione dei disturbi ad alta frequenza meno efficace: in altre parole l'uso di una rete ritardatrice limita, ma solo parzialmente, gli inconvenienti che si riscontrerebbero stabilizzando il sistema mediante una semplice riduzione di guadagno.

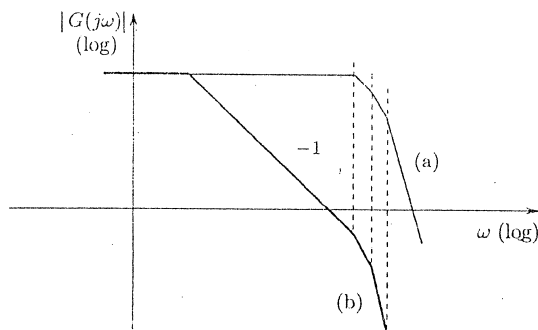


Figura 6.19
Stabilizzazione di un sistema con elevato guadagno statico.

6.4. La compensazione mediante reti anticipatrici

Si è visto al paragrafo precedente come l'effetto stabilizzante delle reti ritardatrici sia legato più propriamente all'attenuazione alle alte frequenze che non al ritardo di fase (che, da solo, costituirebbe anzi un effetto nocivo).

Il meccanismo di intervento di una rete anticipatrice è del tutto differente: quando la rete è collegata a valle della giunzione sommanza, esso si spiega con l'introduzione di un termine proporzionale alla derivata dell'errore, che si somma al segnale errore applicato all'ingresso della rete.

In un sistema in retroazione infatti la presenza di un errore a valle della giunzione sommanza porta ad una correzione che può essere esuberante, dato l'elevato guadagno, e condurre, per il ritardo di risposta del sistema controllato, ad un errore di polarità opposta, e così via, con insorgere di oscillazioni.

ESEMPIO 6.4.1 L'insorgere di oscillazioni è spiegato con un semplice esempio: si immagini di dover spostare la massa M di Fig. 6.20 nel punto A , così da rendere nullo l'errore di posizione e . Un possibile intervento per ottenere lo scopo è quello di assoggettare la massa ad una forza F proporzionale all'errore, che si annulla pertanto solo quando l'errore è zero: in questo modo però, per inerzia, la massa supera il punto A , l'errore e la forza si invertono entrambi di segno e insorgono oscillazioni, com'è naturale, dato che l'intervento sulla massa è

analogo a quello esplicato da una molla di richiamo, che, unita al sistema di Fig. 6.20, darebbe luogo ad un sistema del secondo ordine non smorzato.

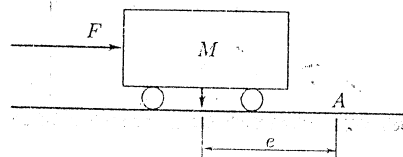


Figura 6.20 Controllo di un sistema con inerzia.

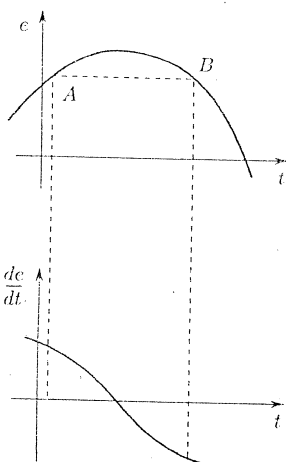


Figura 6.21

Illustrazione dell'effetto di un'azione derivativa.

In un servomeccanismo di posizione la situazione è analoga: in luogo della massa si ha il momento d'inerzia del motore e del carico, in luogo della forza la coppia motrice, proporzionale all'errore di posizione.

Un modo per ridurre la tendenza ad oscillare dei dispositivi di questo tipo è operare la correzione legando il valore della variabile manipolabile non solo all'errore, ma alla somma dell'errore e della sua derivata, cosicché l'azione sia rinforzata quando l'errore tende ad aumentare (punto A di Fig. 6.21), indebolita quando essa tende a diminuire (punto B di Fig. 6.21). In tal modo, considerando ancora l'esempio di Fig. 6.20, la forza si annulla e cambia di segno con un certo anticipo rispetto alla condizione di errore nullo: il risultato è il medesimo che si otterrebbe introducendo un ammortizzatore in parallelo alla molla.

Un intervento del tipo illustrato richiederebbe la realizzazione, entro il regolatore, della funzione di trasferimento

$$G(s) = 1 + \tau s, \quad (6.18)$$

cui corrisponde il diagramma polare di risposta armonica di Fig. 6.22a. Tale funzione non è fisicamente realizzabile, ma per pulsazioni relativamente basse può essere approssimata dalla funzione di trasferimento

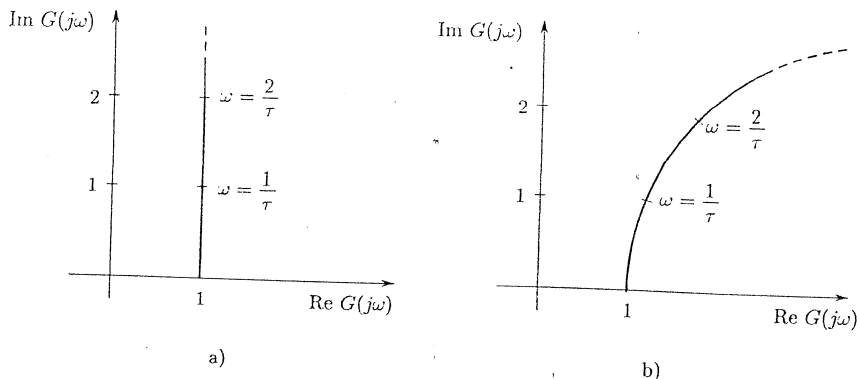
$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad \alpha < 1, \quad (6.19)$$

cui corrisponde il diagramma polare di risposta armonica di Fig. 6.22b: l'approssimazione è tanto maggiore quanto minore è il valore di α .

La (6.19) differisce dalla funzione di trasferimento della rete anticipatrice rappresentata in Fig. 6.7a per la mancanza del fattore di attenuazione α , che peraltro non è essenziale agli effetti delle considerazioni che si svolge-

Figura 6.22

Diagrammi di risposta armonica relativi a compensazioni ad anticipo di fase.



ranno per il progetto, potendosi l'attenuazione sempre compensare con un opportuno aumento del guadagno dell'amplificatore che, normalmente, si trova immediatamente a valle della rete: nel seguito questa operazione verrà sottintesa e si farà pertanto riferimento a una funzione di trasferimento del tipo (6.19).

Ovviamente l'azione della rete anticipatrice si può giustificare in modo più rigoroso illustrando come il suo effetto sul diagramma di risposta armonica si traduca in un aumento del margine di fase. L'azione della rete risulta evidente dai diagrammi di Bode di Fig. 6.23.

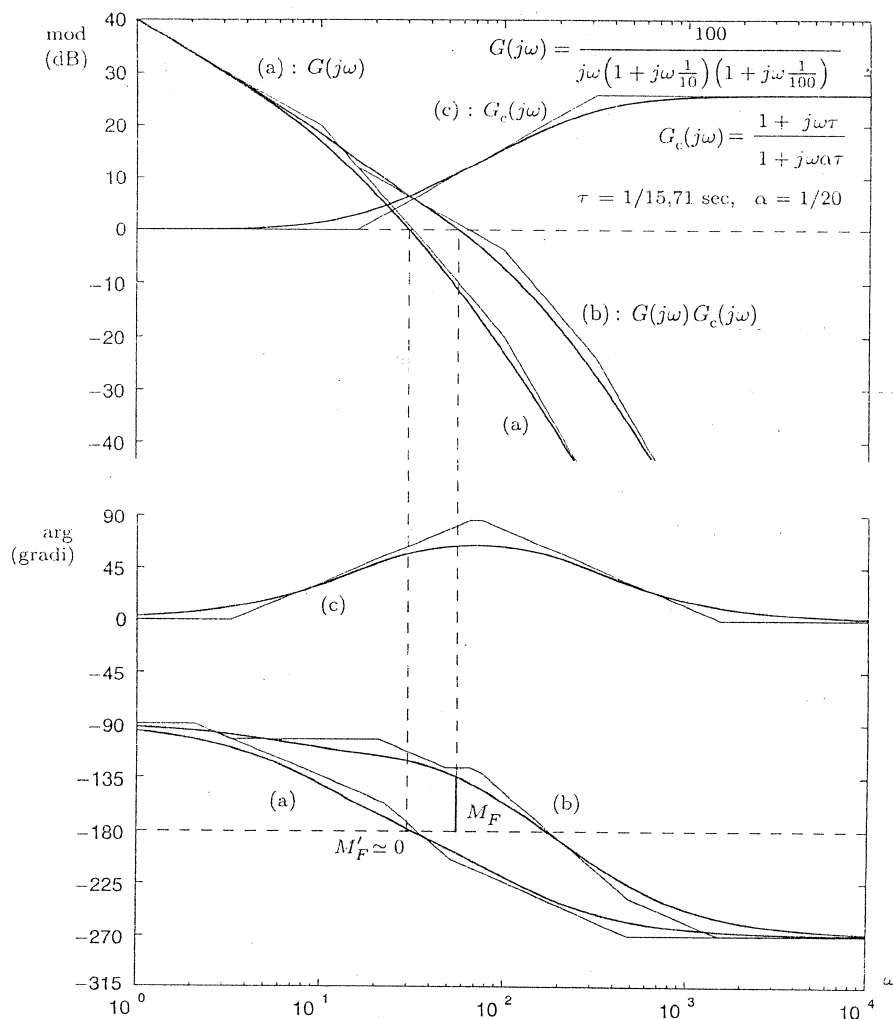


Figura 6.23

Stabilizzazione ottenuta mediante una rete anticipatrice.

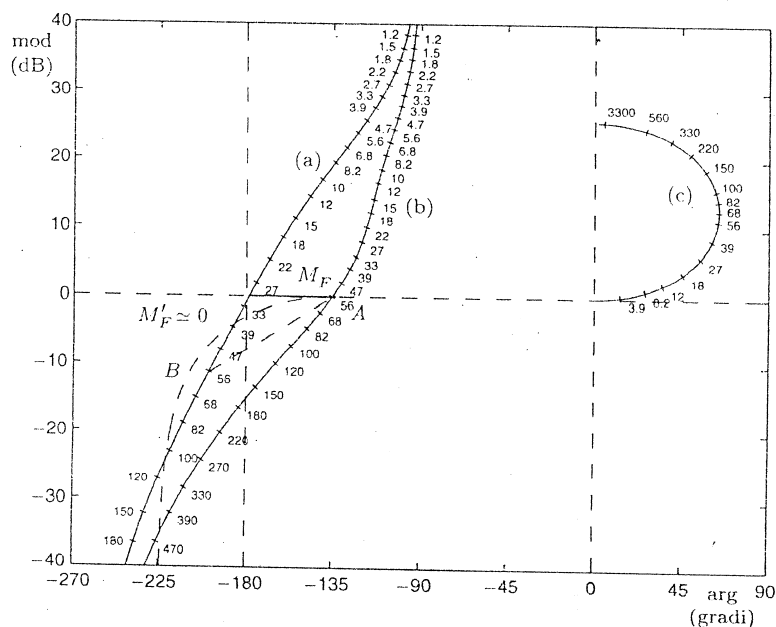
Il progetto si può svolgere secondo le seguenti modalità: si determina il margine di fase del sistema non compensato, si sceglie un valore di α tale che l'anticipo di fase massimo della rete sia sufficiente a riportare il margine di fase al valore voluto, e si determina il valore di τ per tentativi, in modo che alla pulsazione di intersezione si abbia il margine di fase voluto, correggendo eventualmente il valore di α se è il caso. In alternativa, si possono impiegare le formule di inversione, presentate nel prossimo paragrafo; la curva segnata a tratto riporta la somma di $\arg G(j\omega)$ e $\arcsin |G(j\omega)|$ e, in relazione appunto all'uso delle formule di inversione,

serve per determinare il massimo anticipo di fase ottenibile con una sola rete anticipatrice.

La rete anticipatrice ha l'effetto di aumentare il guadagno alle alte frequenze e quindi la banda passante del sistema in retroazione. Per ciò che riguarda il transitorio, si ottiene una risposta più pronta (minor tempo di salita nella risposta al gradino). L'aumento della banda alle alte frequenze, quando non sia voluto, si può facilmente eliminare: ad esempio l'amplificatore in alternata di Fig. 10.11d realizza una rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico e possibilità di eliminare l'amplificazione alle alte frequenze.

Figura 6.24

Diagrammi di Nichols corrispondenti ai diagrammi di Bode di Fig. 6.23.



◆ Impiego dei diagrammi di Nichols

In Fig. 6.24 sono riportati i diagrammi di Nichols corrispondenti ai diagrammi di Bode di Fig. 6.23. Il progetto si può condurre sui diagrammi di Nichols e si articola nei seguenti passi:

- i) in base ai dati di specifica, si determina un punto del piano di Nichols attraverso il quale far passare il diagramma corretto, ad esempio il punto A;
- ii) si sceglie un punto B del diagramma che sia al di sotto del punto A e a sinistra della retta verticale per A: sia ω_0 la relativa pulsazione;
- iii) si leggono l'anticipo di fase e l'incremento di guadagno in dB corrispondenti al passaggio da B ad A: nella famiglia di diagrammi di Fig. 6.8 tali coordinate individuano un punto cui sono associati valori di α e di $\omega\tau$, da cui, ponendo $\omega = \omega_0$, si deducono i due parametri della rete corretttrice.

Per ciò che riguarda il punto iii), si possono impiegare, in alternativa, le formule di inversione (6.25) riportate al Paragrafo 6.5. La curva a tratto passante per il punto A esprime il massimo anticipo di fase φ consentito dalla rete anticipatrice in funzione del modulo M ($\varphi = \arccos M^{-1}$), e delimita quindi la zona in cui si può scegliere il punto B.

◆ Compensazione per cancellazione polo-zero

Il progetto delle reti anticipatrici può essere molto semplificato, a scapito però della flessibilità di intervento, scegliendo lo zero della rete in modo che cancelli un polo del sistema situato sull'asse reale; poiché il polo della rete è più lontano dall'asse immaginario dello zero, l'introduzione della rete equivale praticamente ad allontanare un polo del sistema dall'asse immaginario, nel rapporto di 1 ad $1/\alpha$. Normalmente viene spostato il polo non nullo più vicino all'asse immaginario. A questo tipo di intervento si dà il nome di *compensazione per cancellazione polo-zero*.

La compensazione per cancellazione polo-zero risulta particolarmente conveniente nei sistemi del secondo ordine, come mostra il seguente esempio:

Cancellazione polo-zero

ESEMPIO 6.4.2 Si consideri il sistema con retroazione unitaria avente la funzione di trasferimento di anello

$$G(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}, \quad \tau = 1 \text{ sec}, \quad (6.20)$$

per il quale si vogliono soddisfatte le seguenti specifiche:

- costante di velocità $K_v = 10 \text{ sec}^{-1}$;
- picco di risonanza $M_R = 1,3$.

La prima specifica impone che sia $K = 10 \text{ sec}^{-1}$. Con tale valore della costante di guadagno, la seconda specifica non può essere soddisfatta senza compensazione. Infatti la funzione di trasferimento del sistema in retroazione non compensato è

$$G_0(s) = \frac{K}{\tau s^2 + s + K} = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad (6.21)$$

con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}} = 3,16 \text{ sec}^{-1}, \quad \delta = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}} = 0,16.$$

Come risulta dal diagramma di Fig. 3.11, il picco di risonanza corrispondente a tale valore di δ è pari a 3,20, molto maggiore del valore desiderato. Dal medesimo diagramma si può dedurre che per limitare il picco di risonanza al valore desiderato occorre un valore δ' del coefficiente di smorzamento pari a 0,45. Impiegando una rete anticipatrice il cui zero cancelli il polo del sistema, si ottiene

$$G'(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s(1+\tau s)(1+\alpha\tau s)} = \frac{K}{s(1+\alpha\tau s)}; \quad (6.22)$$

il sistema in retroazione viene ad assumere la fun-

zione di trasferimento

$$G'_0(s) = \frac{K}{\alpha\tau s^2 + s + K} = \frac{1}{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega'_n} + \frac{s^2}{\omega_n'^2}}, \quad (6.23)$$

con

$$\omega'_n = \sqrt{\frac{K}{\alpha\tau}}, \quad \delta' = \frac{1}{2\sqrt{K\alpha\tau}}.$$

Imponendo che sia $\delta' = 0,45$, dall'ultima relazione si deduce $\alpha\tau = 1/8 \text{ sec}$. Essendo $\tau = 1 \text{ sec}$, si ricava $\alpha = 1/8$.

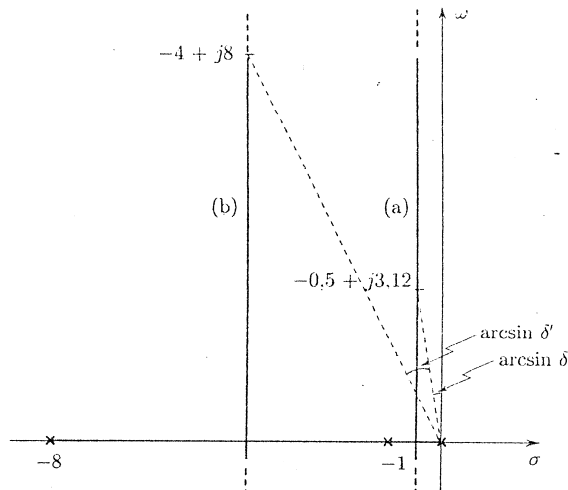


Figura 6.25 Modifica del luogo delle radici ottenuta con la cancellazione polo-zero.

In Fig. 6.25 sono riportati, parzialmente sovrapposti, i luoghi delle radici del sistema non corretto (a) e del sistema corretto (b).

La cancellazione polo-zero in pratica non può essere perfetta, per cui il luogo delle radici presenterà sempre un polo in vicinanza della coppia: nel caso dell'esempio precedente, se la disposizione è quella di Fig. 6.26a, il polo sul ramo proveniente dall'origine si avvicina al punto -1 prima che il polo sull'altro ramo se ne allontani sensibilmente, mentre, se la disposizione è

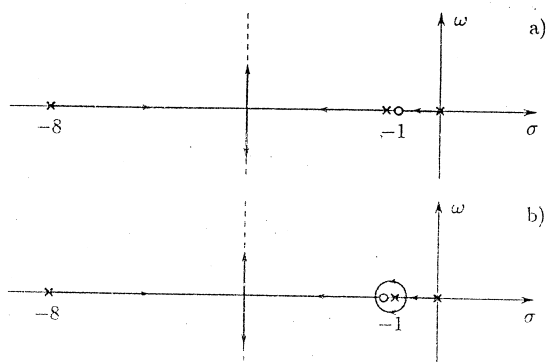


Figura 6.26

Casi di non perfetta cancellazione polo-zero.

quella di Fig. 6.26b, in pratica si ha un ramo, molto corto, che congiunge il polo e lo zero la cui cancellazione non è perfetta. Il residuo associato al polo situato nelle vicinanze della coppia polo-zero è peraltro molto piccolo, come risulta dalla regola per il calcolo grafico dei residui illustrata in Fig. 2.18: infatti gli zeri della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto si conservano nel sistema in retroazione e il residuo corrispondente al polo in questione è quindi molto piccolo, per la vicinanza di uno zero; il termine corrispondente nel dominio del tempo sarà pertanto di entità trascurabile.

La cancellazione polo-zero non consente di stabilizzare un sistema instabile, con un polo reale positivo, utilizzando una rete con uno zero positivo, come ad esempio quella rappresentata in Fig. 3.18a: infatti, per effetto delle inevitabili imprecisioni nella realizzazione pratica, tale intervento conduce solo a una diminuzione, non all'annullamento, del residuo associato al polo reale positivo.

6.5. Il progetto della rete ritardatrice ed anticipatrice con le formule di inversione

Formule di inversione

Per eseguire il progetto della rete ritardatrice ed anticipatrice imponendo il margine di fase senza procedere per tentativi sono essenziali le formule di inversione, così denominate perché forniscono direttamente l'inversa della funzione esprimente la risposta armonica della rete⁽¹⁾.

Si consideri la funzione $F : (\alpha, (\omega\tau)) \rightarrow (M, \varphi)$ definita da

$$M e^{j\varphi} = \frac{1 + j(\omega\tau)}{1 + j\alpha(\omega\tau)}, \quad (6.24)$$

con dominio $\alpha \in [0, 1)$, $(\omega\tau) \in (0, \infty)$, cui corrisponde il codominio $M \in (1, \infty)$, $\varphi \in (0, \arcsin(1/M))$, il cui contorno, utile per le costruzioni grafiche di progetto sui diagrammi di Bode e di Nichols, è riportato in Fig. 6.27. Si dimostra (vedi Paragrafo C6.2) che la funzione inversa $F^{-1} : (M, \varphi) \rightarrow (\alpha, (\omega\tau))$ è espressa dalle relazioni

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad (6.25)$$

Formule di inversione
della rete anticipatrice
Formule di inversione
della rete ritardatrice

dette *formule di inversione della rete anticipatrice*. Le *formule di inversione della rete ritardatrice* si possono ottenere sostituendo, nelle (6.25), $1/M$ ad M e $-\varphi$ a φ . In pratica per la rete ritardatrice conviene impiegare ancora le (6.25) convenendo di operare tale posizione prima del loro utilizzo.

Il progetto delle reti corretttrici sui diagrammi di Bode del sistema non corretto $|G(j\omega)|$ e $\arg G(j\omega)$ per ottenere un dato margine di fase M_F si effettua come segue:

1. *Rete ritardatrice*: si determina una pulsazione ω_0 minore di quella di incrocio in cui sia $\pi + \arg G(j\omega_0) = M_F + \varphi_0$, con φ_0 scelto ad arbitrio nell'intervallo aperto $(0, \arcsin|G(j\omega_0)|^{-1})$. Si noti che la scelta è sempre

⁽¹⁾Vedi Policastro, M. e Zonta, G., "Un procedimento di calcolo delle reti corretttrici nella sintesi in frequenza delle reti di controllo", Istituto di Elettrotecnica ed Elettronica, Università di Trieste, Relazione interna n. 88, gennaio 1982.

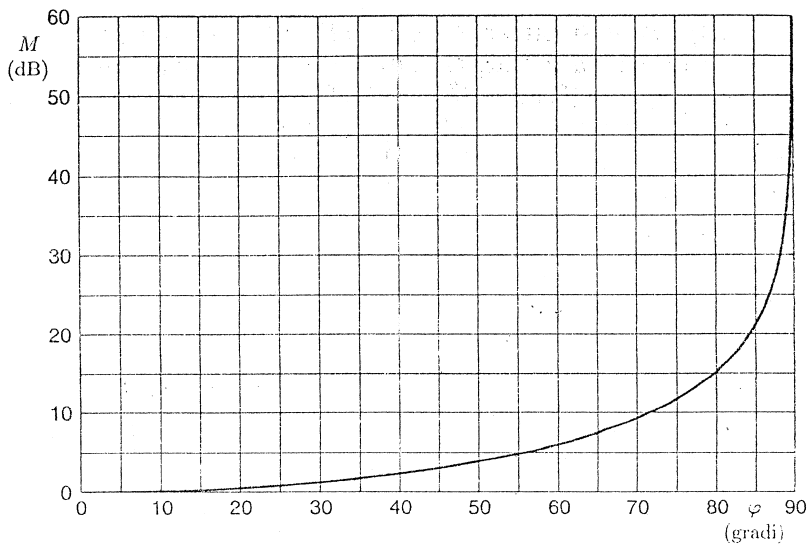


Figura 6.27
Grafico della funzione
 $M = 1/\cos\varphi$.

possibile se il sistema è di tipo 0 o di tipo 1 ed $M_F < \pi/2$. Dalle (6.25), con $M := |G(j\omega_0)|$ e $\varphi = \varphi_0$ si ricava la rete ritardatrice definita da α e $\tau = \omega\tau/\omega_0$, che realizza il margine di fase M_F alla pulsazione di incrocio ω_0 .

ESEMPIO 6.5.1 Si consideri il sistema i cui diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 6.15 o Fig. 6.16, cui si vuole imporre il margine di fase $M_F = 45$ gradi. Conviene eseguire la costruzione grafica riportata in Fig. 6.28, articolata nei seguenti punti:

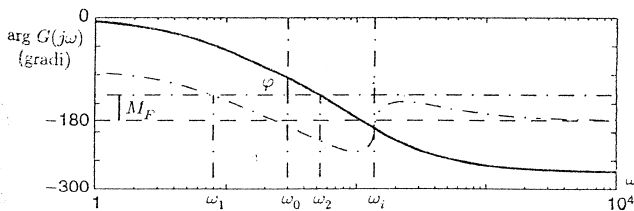
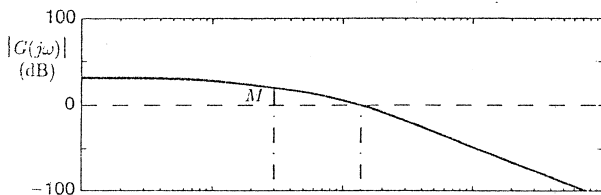


Figura 6.28 Costruzione grafica per il progetto della rete ritardatrice con le formule di inversione.

- i) sul diagramma delle fasi si riporta la retta orizzontale corrispondente al margine di fase voluto;
- ii) utilizzando il diagramma di Fig. 6.27 si costruisce, a sinistra della pulsazione di incro-

cio ω_i , il grafico della funzione $\arg G(j\omega) - \arccos(1/|G(j\omega)|)$, che rappresenta, alle varie pulsazioni il massimo ritardo di fase (il minimo è zero) che la rete consente di ottenere;

- iii) si determinano le pulsazioni ω_1 e ω_2 , che definiscono l'intervallo in cui la rete consente di ottenere il margine di fase voluto;
- iv) scelta una pulsazione ω_0 in tale intervallo, si leggono l'attenuazione M e il ritardo di fase φ per il progetto della rete.

Supponendo di aver scelto $\omega_0 = 30$ rad/sec, l'elaborazione numerica, eseguita a questo punto per maggiore precisione, fornisce

$$\begin{aligned} G(j30) &= \frac{40}{(1 + j0,1 \cdot 30)(1 + j0,01 \cdot 30)^2} \\ &= \frac{40}{(3,162e^{j1,249})(1,044e^{j0,292})^2} = \\ &= 11,61e^{-j1,832}, \end{aligned}$$

da cui $M = 11,61$, $\varphi_0 = \pi - 1,832 - M_F = 0,5242$ rad. Per tali valori le (6.25) forniscono $\alpha = 0,0726$, $\omega\tau = 21,49$, da cui $\tau = 21,49/30 = 0,7165$ sec.

In modo del tutto analogo, ma ancora più diretto, si sarebbe potuto procedere considerando il diagramma di Nichols del sistema non corretto, rappresentato in Fig. 6.17 e in Fig. 6.18: il modulo e l'argomento del vettore orientato dal punto A al punto B costituiscono direttamente i valori M e φ da utilizzare nelle (6.25).

2. *Rete anticipatrice*: si determina una pulsazione ω_0 maggiore di quella di incrocio in cui sia $\pi + \arg G(j\omega_0) = M_F - \varphi_0$, con φ_0 appartenente all'intervallo aperto $(0, \arccos|G(j\omega_0)|)$. L'estremo destro di tale intervallo corrisponde al caso $\alpha = 0$ (azione proporzionale-derivativa). Dalle (6.25), con $M := 1/|G(j\omega_0)|$ e $\varphi = \varphi_0$ si ricava la rete anticipatrice definita da α e $\tau = \omega\tau/\omega_0$, che realizza il margine di fase M_F alla pulsazione di incrocio ω_0 . Il margine di fase ottenibile con azione proporzionale-derivativa ponendo la pulsazione di incrocio al generico valore ω è $\pi + \arg G(j\omega) + \arccos|G(j\omega)|$. Il massimo di tale funzione di ω corrisponde pertanto alla pulsazione di incrocio ω_0 più conveniente in rapporto all'aumento del margine di fase: se esso è superiore al margine di fase voluto, potendosi imporre un valore di φ_0 inferiore all'estremo destro dell'intervallo consentito, si ottiene in effetti una rete anticipatrice (con $\alpha \neq 0$). In caso contrario, con una sola rete anticipatrice non si può realizzare il margine di fase voluto.

ESEMPIO 6.5.2 Si consideri il sistema i cui diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 6.23, cui si vuole imporre il margine di fase $M_F = 45$ gradi. In questo caso si ricorre alla costruzione grafica mostrata in Fig. 6.29, che si articola nei seguenti punti:

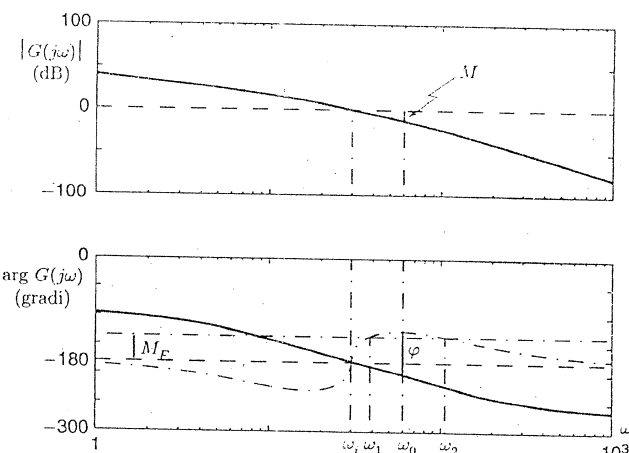


Figura 6.29 Costruzione grafica per il progetto della rete anticipatrice con le formule di inversione.

- i) sul diagramma delle fasi si riporta la retta orizzontale corrispondente al margine di fase voluto;
- ii) utilizzando il diagramma di Fig. 6.27 si costruisce, a destra della pulsazione di incrocio ω_i , il grafico della funzione $\arg G(j\omega) + \arccos(|G(j\omega)|)$, che rappresenta, alle varie pulsazioni il massimo ritardo di fase (il minimo è zero) che la rete consente di ottenere;

iii) si determinano le pulsazioni ω_1 e ω_2 , che definiscono l'intervallo in cui la rete consente di ottenere il margine di fase voluto;

iv) scelta una pulsazione ω_0 in tale intervallo, si leggono il guadagno M e l'anticipo di fase φ per il progetto della rete.

Supponendo di aver scelto $\omega_0 = 60$ rad/sec, l'elaborazione numerica, eseguita a questo punto per maggiore precisione, fornisce

$$\begin{aligned} G(j60) &= \frac{100}{j60(1 + j0,1 \cdot 60)(1 + j0,01 \cdot 60)} = \\ &= \frac{100}{(60 e^{j\pi/2})(6,083 e^{j1,406})(1,166 e^{j0,540})} = \\ &= 0,235 e^{-j3,517}, \end{aligned}$$

da cui $\varphi_0 = M_F - \pi + 3,517 = 1,1606$ rad. Le (6.25), con $M = 1/0,235 = 4,2553$ e $\varphi = \varphi_0$ forniscono $\alpha = 0,0425$, $\omega\tau = 4,2054$, da cui $\tau = 4,2054/60 = 0,0701$ sec.

Anche in questo caso i valori numerici da impiegare nelle (6.25) si possono desumere direttamente dal diagramma di Nichols del sistema non corretto, riportato in Fig. 6.24: l'inverso del modulo e l'opposto dell'argomento del vettore orientato dal punto A al punto B definiscono i valori M e φ da impiegare nelle (6.25). La costruzione che consente di delimitare la zona ammissibile per la scelta del punto B è particolarmente semplice sul diagramma di Nichols, in quanto consiste nella traslazione di una curva indipendente dalla funzione di risposta armonica considerata, in modo da farla passare per il punto A.

6.6. La compensazione mediante reti a ritardo e anticipo e reti a T

La rete a ritardo e anticipo, rappresentata in Fig. 6.9a, presenta il vantaggio di unire in sé i requisiti delle reti anticipatrice e ritardatrice precedentemente prese in esame.

Inoltre, il progetto della compensazione con l'impiego dei diagrammi di Bode è molto facilitato, rispetto alle reti precedentemente esaminate, per il fatto che in corrispondenza della pulsazione ω_n la rete non sfasa ed attenua.

Con riferimento alla Fig. 6.30, se è imposto un dato margine di fase M_F , si determina la pulsazione ω_n alla quale la fase è $-\pi + M_F$ e l'attenuazione α_n che occorrerebbe introdurre per abbassare il diagramma delle ampiezze in modo da ottenerne l'intersezione con l'asse delle ascisse alla stessa pulsazione.

Compensazione con reti a ritardo e anticipo

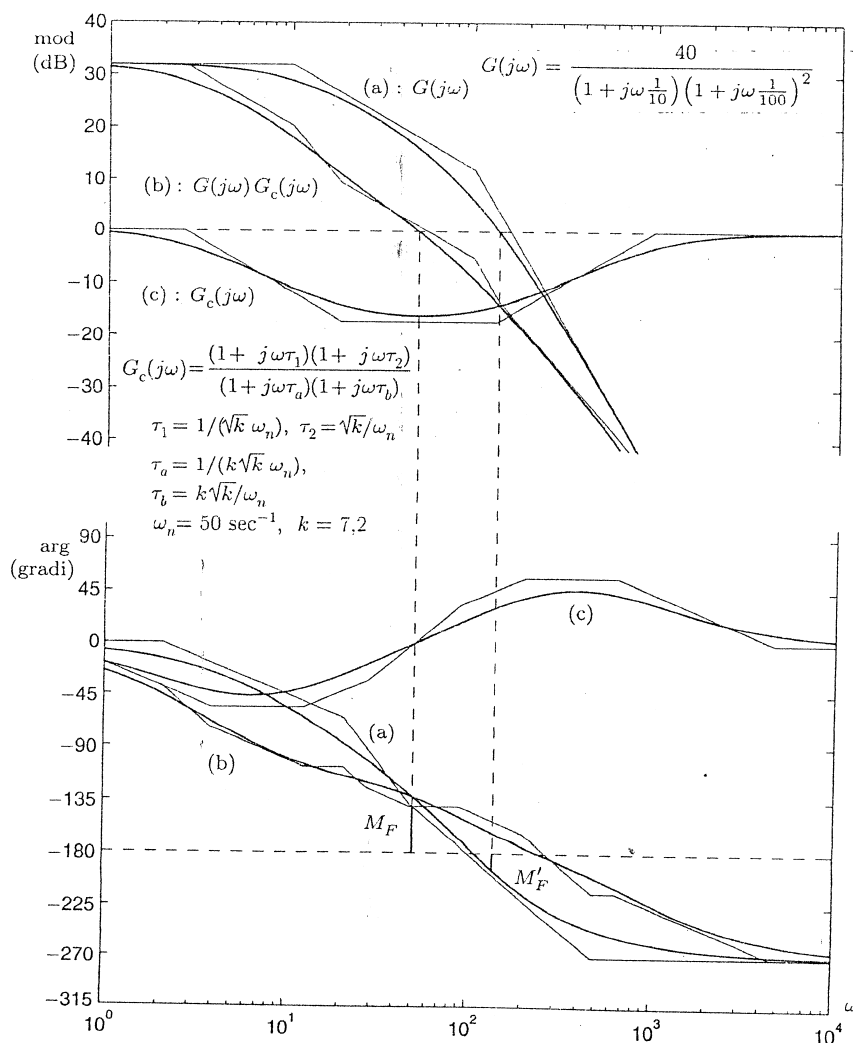
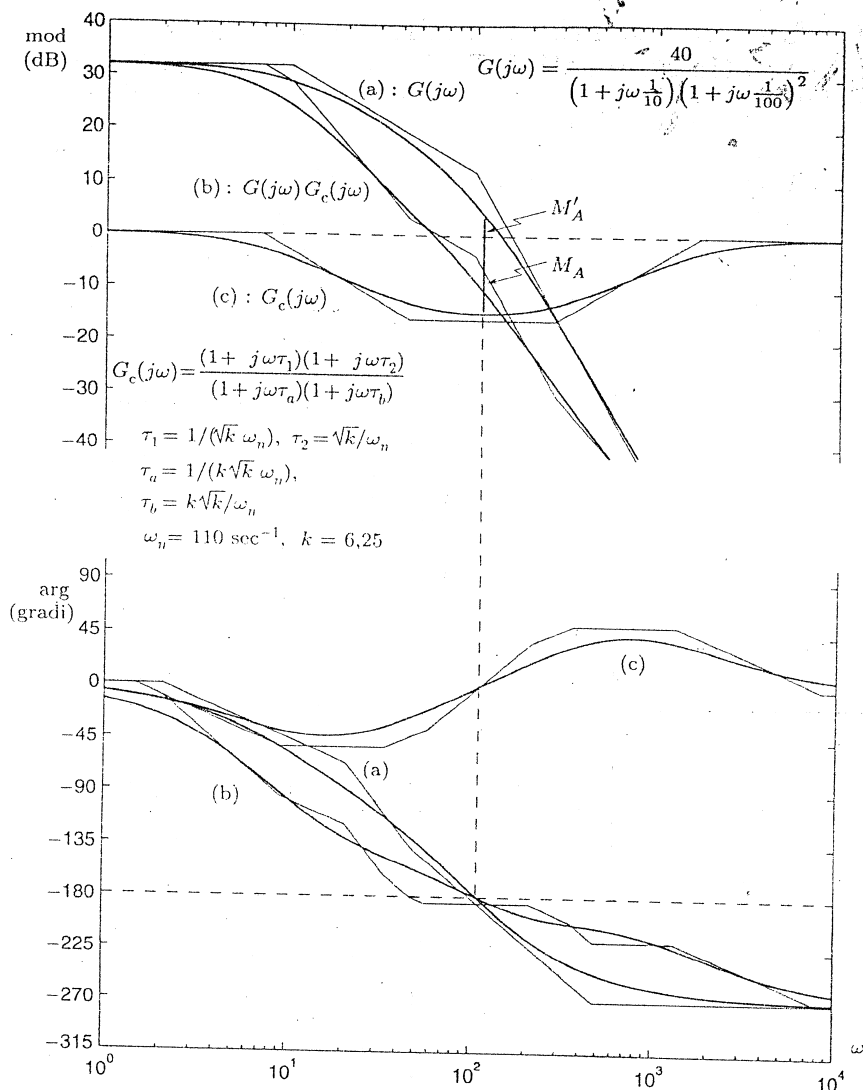


Figura 6.30
Stabilizzazione ottenuta mediante una rete a ritardo e anticipo (imposizione del margine di fase).

Figura 6.31

Stabilizzazione ottenuta mediante una rete a ritardo e anticipo (imposizione del margine di ampiezza).



ω_n . Basta progettare la rete scegliendo tali valori ω_n e α_n per la pulsazione alla quale la fase è nulla e per la corrispondente attenuazione perché la condizione di specifica sia soddisfatta. Non è pertanto necessario procedere per tentativi.

Analogamente, se è imposto un dato margine di ampiezza M_A , con riferimento alla Fig. 6.31, basta scegliere ω_n uguale alla pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta la fase $-\pi$ e α_n in modo che in corrispondenza di tale pulsazione l'ampiezza della funzione di risposta armonica del sistema corretto presenti il margine voluto.

Per la determinazione completa della rete corretttrice rimane da effettuare la scelta del rapporto fra le due costanti di tempo a numeratore (o a denominatore - i due rapporti sono fra loro legati) della funzione di trasferimento.

Guida per tale scelta possono essere il requisito che il margine di fase si mantenga abbastanza elevato anche per notevoli variazioni del guadagno rispetto al valore di progetto oppure specifiche riguardanti la banda passante o le proprietà filtranti del sistema.

ESEMPIO 6.6.1 Si consideri il sistema i cui diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 6.30, cui si vuole imporre il margine di fase $M_F = 48$ gradi. La procedura di sintesi si articola nei seguenti punti:

- i) si determinano la pulsazione ω_n alla quale il sistema non corretto presenterebbe il margine di fase voluto se questa fosse la pulsazione di incrocio e l'attenuazione $\alpha_n = 1/|G(j\omega_n)|$ da imporre alla rete;
- ii) si sceglie il rapporto $k = \tau_2/\tau_1$ fra le costanti di tempo degli zeri;
- iii) dalla (6.15) si ricava la relazione $\alpha_n = (k + 1)/(k/\alpha + \alpha)$, da cui l'equazione di secondo grado in α

$$\alpha^2 - \frac{1}{\alpha_n} (k + 1) \alpha + k = 0,$$

ESEMPIO 6.6.2 Si consideri il sistema i cui diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 6.31, cui si vuole imporre il margine di ampiezza $M_A = 3,6$. La procedura di sintesi è la stessa esposta per l'esempio precedente, tranne che per il primo punto, che viene sostituito da:

- i) si determinano la pulsazione ω_n alla quale il sistema non corretto presenta fase $-\pi$ e l'attenuazione $\alpha_n = 1/(|G(j\omega_n)| M_A)$ da imporre alla rete.

Nel caso dell'esempio si deduce $\omega_n = 110$ rad/sec, $\alpha_n = 0,185$. Per $k = 6,5$, si ottiene $\alpha = 0,160$ oppure, per $k = 1$, $\alpha = 0,093$ e per $k = 10$, $\alpha = 0,168$.

In Fig. 6.32 è riportato il diagramma di Nichols corrispondente ai diagrammi di Bode di Fig. 6.30.

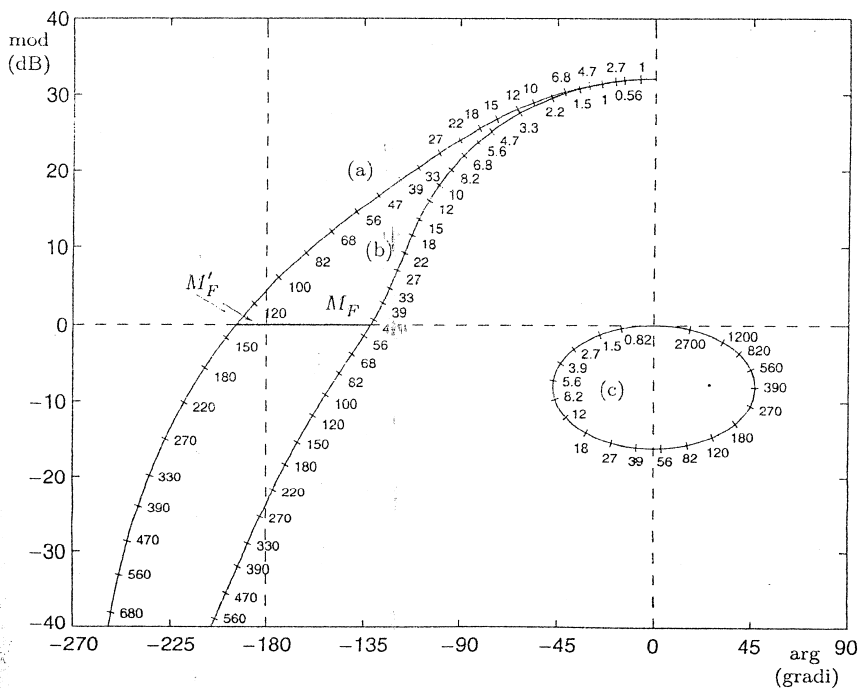


Figura 6.32
Diagrammi di Nichols corrispondenti ai diagrammi di Bode di Fig. 6.30.

Il progetto secondo i criteri precedentemente esposti corrisponde ad un uso della rete a ritardo e anticipo analogo a quello della rete ritardatrice, cioè in cui se ne sfrutta principalmente l'attenuazione, con il vantaggio, rispetto alla rete ritardatrice, di un minore taglio delle frequenze elevate.

Ovviamente la rete si può usare anche come anticipatrice, cioè sfruttando principalmente l'anticipo di fase che essa introduce per pulsazioni maggiori di ω_n : in tale impiego la rete a ritardo e anticipo rispetto alla rete anticipatrice presenta il vantaggio di non richiedere amplificazione ausiliaria, avendo guadagno statico unitario, ma non esalta le alte frequenze e quindi dà luogo a una risposta meno pronta.

Resta il fatto, comunque, che la rete a ritardo e anticipo consente un intervento sulla funzione di risposta armonica più articolato che non le semplici reti anticipatrice e ritardatrice. In alcuni casi, quando siano imposte specifiche riguardanti il guadagno o l'attenuazione a determinate frequenze, risulta utile l'impiego di reti analoghe, ma con guadagni diversi a frequenza zero e a frequenza infinita, come quelle illustrate in Fig. 6.33 e in Fig. 6.34.

Figura 6.33
Rete a ritardo e anticipo
con attenuazione delle
frequenze basse.

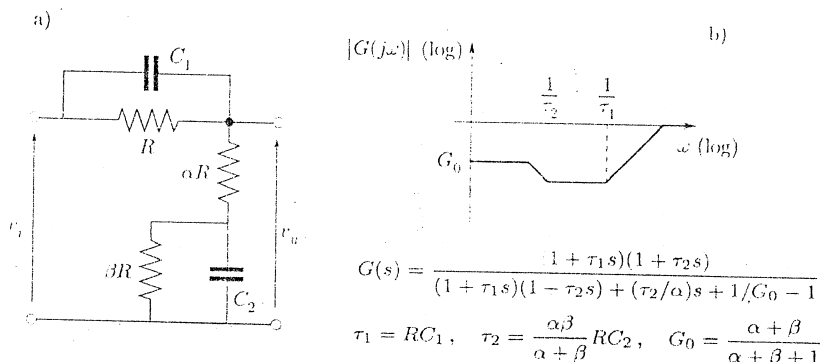
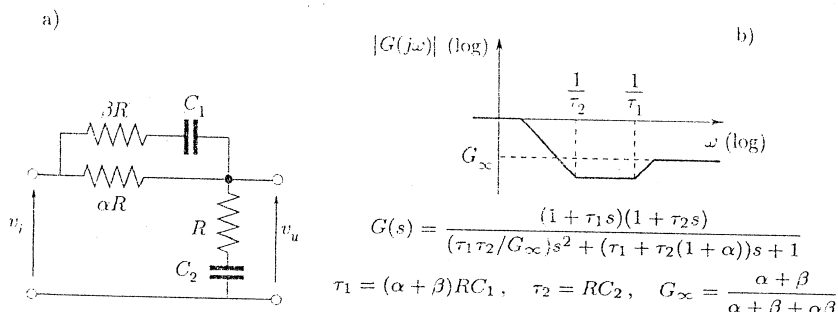


Figura 6.34
Rete a ritardo e anticipo
con attenuazione delle
frequenze alte.



Compensazione con reti a T

La compensazione mediante reti a T si impiega principalmente per compensare per cancellazione polo-zero sistemi che presentino una coppia di poli complessi coniugati, cioè un comportamento oscillatorio ad anello aperto. Facendo coincidere tali poli con gli zeri della rete a T, essi vengono sostituiti con i poli della rete, che sono reali, con notevole beneficio per la stabilità e la risposta del sistema. Se il coefficiente di smorzamento dei poli ad anello aperto è molto piccolo e la cancellazione non è perfetta, si può avere instabilità. Peraltro una scelta opportuna degli zeri della rete in rapporto ai poli del sistema può garantire stabilità robusta, come è mostrato dal seguente esempio.

ESEMPIO 6.6.3 Si considera il sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 0,02s + 1}$$

chiuso in retroazione unitaria da cui si vuole una risposta al gradino priva di sovraelongazione. Si sceglie una rete a T con $R=100 \text{ K}\Omega$, $C_2=0,1 \text{ }\mu\text{F}$, $C_1=1000 \text{ }\mu\text{F}$, la cui funzione di trasferimento è

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 0,02s + 1}{s^2 + 100s + 1}$$

che in presenza di cancellazione perfetta garantisce una risposta aperiodica. Se la cancellazione non è perfetta, il comportamento dipende fortemente dalla posizione degli zeri della rete in rapporto ai poli del sistema: se la loro pulsazione naturale è superiore, il luogo della radici presenta l'andamento indicato con 1 in Fig. 6.35, e, nel caso contrario, quello indi-

cato con 2. Tali andamenti corrispondono rispettivamente alle scelte $R=97 \text{ K}\Omega$ e $R=103 \text{ K}\Omega$. Una maggiore garanzia di stabilità in presenza di variazioni parametriche, cioè una maggiore robustezza della stabilità, si ottiene pertanto con la seconda scelta.

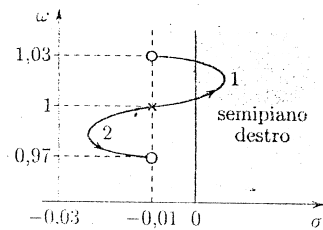


Figura 6.35 Imperfetta cancellazione polo-zero di una rete a T.

6.7. La retroazione tachimetrica

In alcuni casi la correzione non viene effettuata sul percorso di segnale diretto, ma su quello di retroazione. Ciò accade, in particolare, quando un segnale di correzione derivativo si può generare con un opportuno trasduttore sensibile alla derivata della variabile controllata, oppure misurando una grandezza diversa dalla variabile controllata e della quale tale derivata è funzione. Un'applicazione tipica di tale correzione è data dai servomeccanismi di posizione, in cui un segnale derivativo viene generato da una dinamo tachimetrica, collegata come è indicato in Fig. 6.36. Anche i servomeccanismi di posizione con motori in alternata (motori bifase) si possono facilmente stabilizzare con la retroazione tachimetrica, in quanto esistono tachimetri in alternata particolarmente semplici ed affidabili (privi di contatti striscianti).

Retroazione tachimetrica

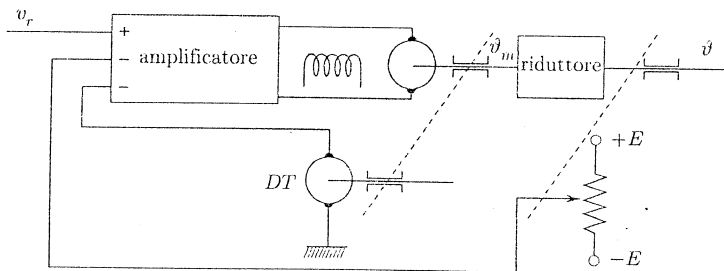


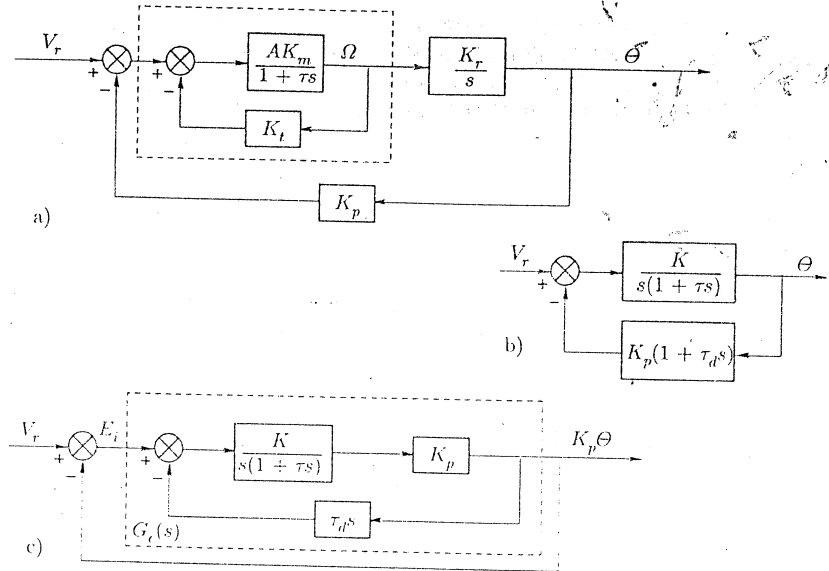
Figura 6.36 Servomeccanismo di posizione con retroazione tachimetrica.

Il generatore tachimetrico viene normalmente azionato direttamente dal motore, a monte del riduttore, ed è spesso coassiale col motore.

In Fig. 6.37a è rappresentato lo schema a blocchi del servomeccanismo di posizione con la retroazione tachimetrica: con A si indica il guadagno dell'amplificatore, con K_m la costante del motore, con τ la costante di tempo del motore, con K_r , K_t e K_p le costanti del riduttore, del generatore tachimetrico e del potenziometro. Si noti che la parte racchiusa entro la linea a

Figura 6.37

Schemi a blocchi relativi a un servomeccanismo di posizione con retroazione tachimetrica.



tratto equivale ad un unico blocco con funzione di trasferimento

$$\frac{AK_m}{1 + AK_m K_t} : \quad (6.27)$$

$$1 + \frac{\tau}{1 + AK_m K_t} s$$

la retroazione tachimetrica ha pertanto un effetto equivalente alla diminuzione, nello stesso rapporto, della costante del motore e della costante di tempo del motore.

Spostando a valle del riduttore il punto di prelievo della retroazione tachimetrica, si ottiene lo schema a blocchi di Fig. 6.37b, in cui si è posto

$$K := AK_m K_r, \quad \tau_d := \frac{K_t}{K_r K_p}, \quad (6.28)$$

che evidenzia la correzione di tipo derivativo introdotta entro l'anello: la presenza della retroazione tachimetrica comporta in sostanza la modifica della funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione, che in luogo della semplice costante reale K_p , diviene $H(s) = K_p(1 + \tau_d s)$.

Le costanti di velocità nei due casi di retroazione tachimetrica assente e presente, calcolate in base allo schema di Fig. 4.19, con l'errore riferito all'ingresso definito da $e_i(t) := v_r(t) - K_p \vartheta(t)$, per cui tale schema assume la forma indicata in Fig. 6.37c, e assumendo, per maggiore generalità, guadagni diversi K e K_1 , sono

$$K_v = K K_p, \quad K_v = \frac{K_1 K_p}{1 + K_1 K_p \tau_d}. \quad (6.29)$$

A parità di altre condizioni, cioè per $K_1 = K$, la costante di velocità risulta diminuita: ciò si spiega con il fatto che la presenza del generatore tachimetrico quando l'uscita non è costante influisce sul segnale di retroazione. Per eseguire un confronto corretto dell'effetto della retroazione tachimetrica con quello di altri sistemi di correzione la cui introduzione non modifica la costante di velocità, è necessario supporre di mantenere invariato il valore di tale costante, malgrado l'introduzione della retroazione tachimetrica, apportando un opportuno incremento al guadagno dell'amplificatore. Più pre-

cisamente, nei due casi di retroazione tachimetrica assente e presente, per uno stesso valore di K_v si ricavano i due valori

$$K = \frac{K_v}{K_p}, \quad K_1 = \frac{1}{K_p} \frac{K_v}{1 - K_v \tau_d}. \quad (6.30)$$

Il sistema privo di retroazione tachimetrica e con costante di guadagno del percorso di segnale diretto pari a K presenta la funzione di trasferimento

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s) + K K_p} = \frac{1/K_p}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

con

$$\omega_n := \sqrt{\frac{K K_p}{\tau}} = \sqrt{\frac{K_v}{\tau}}, \quad \delta := \frac{1}{2\sqrt{K K_p \tau}} = \frac{1}{2\sqrt{K_v \tau}}. \quad (6.31)$$

Il sistema con retroazione tachimetrica e con un diverso guadagno K_1 del percorso di segnale diretto presenta invece la funzione di trasferimento

$$G'_0(s) = \frac{K_1}{s(1 + \tau s) + K_1 K_p (1 + \tau_d s)} = \frac{1/K_p}{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega'_n} + \frac{s^2}{\omega'^2_n}},$$

con

$$\omega'_n := \sqrt{\frac{K_1 K_p}{\tau}}, \quad \delta' := \frac{1 + K_1 K_p \tau_d}{2\sqrt{K_1 K_p \tau}}. \quad (6.32)$$

Nel caso particolare in cui si ponga $K_1 = K'_1$, cioè si adotti il valore dato dalla seconda delle (6.30) al fine di mantenere invariata K_v , dalle (6.32) si ottiene

$$\omega'_n = \sqrt{\frac{K_v}{\tau(1 - K_v \tau_d)}}, \quad \delta' = \frac{1}{2\sqrt{K_v \tau(1 - K_v \tau_d)}}. \quad (6.33)$$

Dal confronto delle (6.31) con le (6.33) risulta che l'introduzione della retroazione tachimetrica porta, a parità di costante di velocità, ad un aumento, nello stesso rapporto, della pulsazione naturale e del coefficiente di smorzamento, cui conseguono, nel servomeccanismo di posizione, una maggiore prontezza di risposta e un maggior margine di stabilità. Si veda inoltre l'Esercizio C6.4.3, in cui l'effetto della retroazione tachimetrica è illustrato mediante il contorno delle radici.

6.8. I regolatori standard

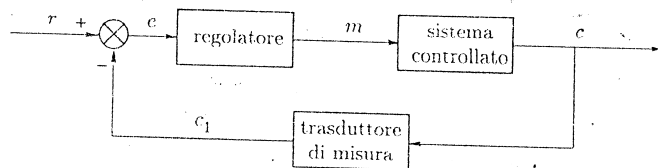
Nel controllo di molti processi industriali, come quelli relativi a impianti chimici e petrolchimici, le caratteristiche dinamiche dei sistemi controllati possono variare entro ampi limiti (ad esempio, un controllo di portata ha in generale una risposta molto più pronta di un controllo di temperatura), mentre d'altra parte risulta economicamente conveniente unificare gli apparati di controllo. Le variabili manipolabili di questi sistemi sono in genere le posizioni di steli di valvole, che vengono variate con attuatori pneumatici o elettropneumatici, collegati ad apparati di controllo standard, ad amplificazione pneumatica od elettronica; tali apparati sono provvisti di opportune manopole di regolazione, agendo sulle quali si possono modificare i valori

Regolatori standard

dei parametri che ne caratterizzano il comportamento, in modo da poterli facilmente adattare alla dinamica del sistema controllato ed ottenere così dal sistema complessivo in retroazione una risposta soddisfacente. In altre parole, si dispone di apparati di controllo standard, ma provvisti di dispositivi di correzione con parametri regolabili entro ampi limiti, così da poter essere adattati al particolare sistema di regolazione in cui vengono inseriti.

Figura 6.38

Schema a blocchi di un controllo in retroazione.



Se, con riferimento alla Fig. 6.38, si indica con $G_c(s) = M(s)/E(s)$ la funzione di trasferimento del regolatore, si distinguono i seguenti tipi standard:

1. *Regolatore proporzionale (P)*:

$$G_c(s) = K_p; \quad (6.34)$$

2. *Regolatore integrale (I)*:

$$G_c(s) = \frac{K_p}{T_i s}; \quad (6.35)$$

3. *Regolatore proporzionale-integrale (PI)*:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right); \quad (6.36)$$

4. *Regolatore proporzionale-derivativo (PD)*:

$$G_c(s) = K_p (1 + T_d s); \quad (6.37)$$

5. *Regolatore proporzionale-integrale-derivativo (PID)*:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right). \quad (6.38)$$

Sensibilità proporzionale
Costante di tempo dell'azione derivativa
Costante di tempo dell'azione integrale

La costante K_p si dice *sensibilità proporzionale*, T_d *costante di tempo dell'azione derivativa*, T_i *costante di tempo dell'azione integrale*.

Spesso nella funzione di trasferimento del regolatore si include anche quella del trasduttore di misura $K_t(s)$, ottenendo per il complesso $G'_c(s) = K_t(s) G_c(s)$: poiché $K_t(s)$ in genere è una costante, l'espressione di $G'_c(s)$ si ottiene da quella di $G_c(s)$ sostituendovi, in luogo della sensibilità proporzionale, la sensibilità proporzionale complessiva $K'_p := K_t K_p$.

L'inversa della sensibilità proporzionale complessiva si dice *banda proporzionale* e corrisponde all'escursione della variabile controllata necessaria per provocare una variazione unitaria della variabile manipolabile, in assenza di azione derivativa e integrale (non si definisce per i controlli esclusivamente integrali).

Nello schema di Fig. 6.39a è riportata la struttura a blocchi del regolatore più completo, il *PID*. Per evitare che una variazione a gradino del riferimento, quale si presenta di norma nei regolatori telecomandati, porti ad un'eccessiva perturbazione del sistema, in genere l'azione derivativa viene applicata solo al segnale di retroazione, come è mostrato in Fig. 6.39b.

Banda proporzionale

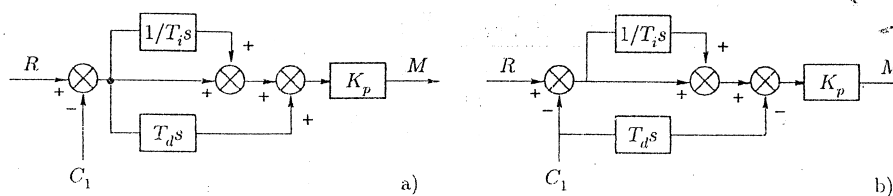


Figura 6.39.
Schemi a blocchi di regolatori *PD*.

Per ciò che riguarda i vantaggi relativi e le particolarità di impiego dei vari tipi di regolatori precedentemente citati, valgono considerazioni analoghe a quelle sviluppate per le reti correttrici.

Il regolatore *P* si impiega quando il processo consente un'elevata costante di guadagno di anello senza pregiudizio per la stabilità, come i sistemi aventi il comportamento dinamico di un integratore (ad esempio il controllo di un livello mediante la variazione di una portata) o caratterizzati dalla presenza di una sola costante di tempo predominante.

Il regolatore *I* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.40) si impiega per sistemi di tipo 0 di difficile stabilizzazione e per sistemi con ritardi finiti dominanti: in quest'ultimo caso infatti un regolatore *P* non si può utilizzare perché corrisponde a un errore a regime inaccettabile, come è stato notato al Paragrafo 4.7, mentre un controllo integrale con costante di velocità che soddisfi la (4.50) con buon margine di fase garantisce un comportamento stabile con errore statico nullo.

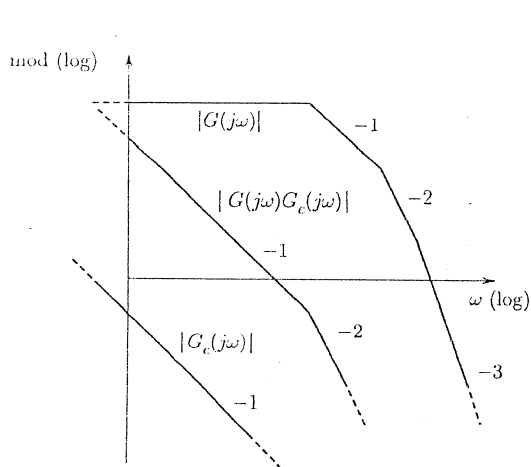


Figura 6.40 Effetto di un regolatore *I*.

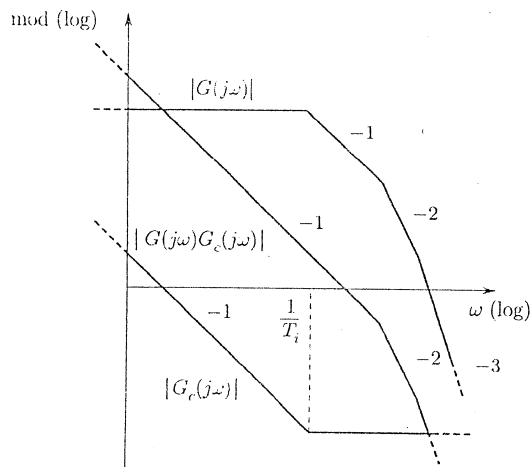
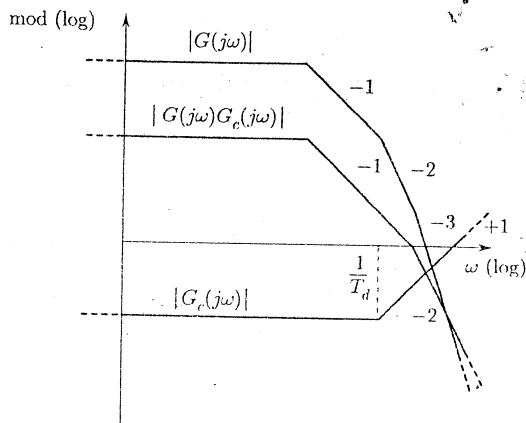


Figura 6.41 Effetto di un regolatore *PI*.

Il regolatore *PI* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.41) rispetto al regolatore *I* consente di conservare una maggiore banda passante e quindi una maggiore prontezza di risposta, per cui viene ad esso preferito, così come alla rete integratrice si preferisce la rete ritardatrice.

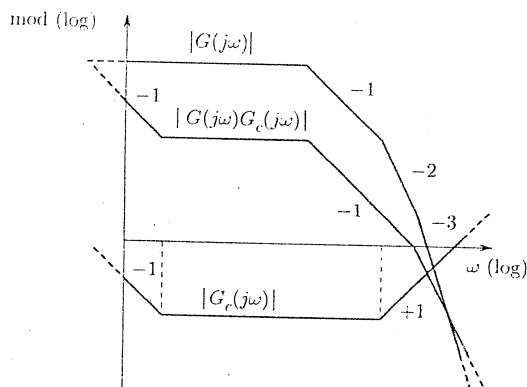
In corrispondenza del punto di rottura $1/T_i$ il regolatore *PI* presenta modulo $K_p \sqrt{2}$ e fase -45° . Pertanto per ottenere un dato margine di fase M_F si sceglie la pulsazione ω_n , alla quale la fase del sistema controllato vale $\varphi_n = -180^\circ + 45^\circ + M_F$ e si assume $T_i = 1/\omega_n$, $K_p = 1/(|G(j\omega_n)|\sqrt{2})$.

Il regolatore *PD* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.42) si impiega invece per sistemi già intrinsecamente di tipo 1 o per sistemi di tipo 0 per migliorarne la velocità di risposta: il suo intervento è del tutto analogo a quello di una rete anticipatrice.

Figura 6.42Effetto di un regolatore *PD*.

Il progetto in funzione del margine di fase M_F si può effettuare con la seguente procedura, del tutto simile a quella descritta per il regolatore *PI*: si sceglie la pulsazione ω_n alla quale la fase del sistema controllato vale $\varphi_n = -180^\circ - 45^\circ + M_F$ e si assume $T_d = 1/\omega_n$, $K_p = 1/(|G(j\omega_n)|\sqrt{2})$.

Il regolatore *PID* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.43) si può impiegare, in alternativa al *PD*, per i sistemi di tipo 0 e presenta, rispetto ad esso, il vantaggio di consentire, oltre a una buona prontezza di risposta, anche un errore statico nullo.

Figura 6.43Effetto di un regolatore *PID*.

Il regolatore a triplice azione è pertanto il più generale: scegliendo opportunamente i valori dei tre parametri che ne caratterizzano il comportamento dinamico si possono infatti ottenere, come casi particolari, le azioni di tutti i tipi di regolatori precedentemente presi in esame.

La sua funzione di trasferimento (6.38) può essere posta nella forma con costanti di tempo, atta a porre in maggior risalto le caratteristiche della coppia di zeri che la distingue. Infatti, riducendo a denominatore comune si ottiene

$$G_c(s) = \frac{K_p}{T_i} \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s} = \frac{K_p}{T_i} \frac{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{s}, \quad (6.39)$$

con

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}}, \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{T_d}}, \quad (6.40)$$

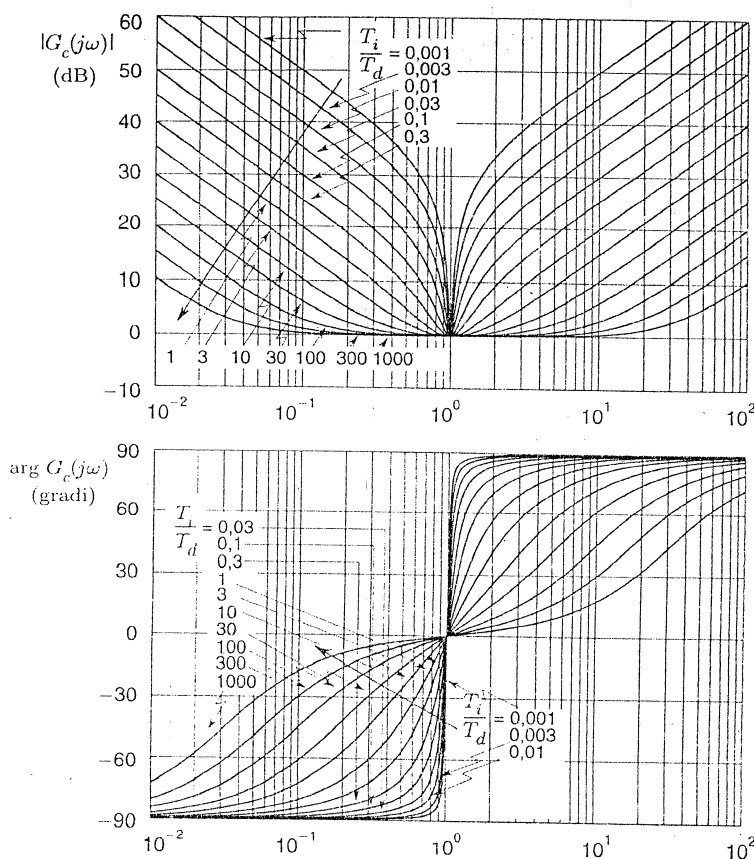


Figura 6.44
Diagrammi di Bode del
regolatore *PID* per vari
valori di T_i/T_d .

o, viceversa,

$$T_d = \frac{1}{2\delta\omega_n}, \quad T_i = \frac{2\delta}{\omega_n}. \quad (6.41)$$

Per $T_i/T_d < 4$ il regolatore *PID* presenta zeri complessi coniugati e pertanto, come la rete a T, si presta al controllo di sistemi con comportamento intrinsecamente oscillatorio. In Fig. 6.44 sono riportati i diagrammi di Bode delle ampiezze del regolatore *PID* per vari valori del rapporto fra le costanti di tempo dell'azione integrale e derivativa.

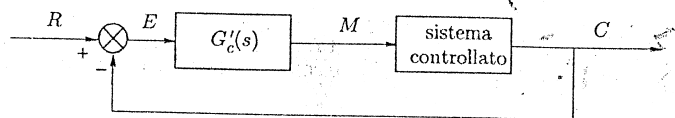
Il progetto per ottenere un dato margine di fase M_F è molto semplice, in quanto alla pulsazione di centro banda ω_n il regolatore non sfasa e presenta il guadagno K_p : si stabilisce pertanto di assumere come ω_n la pulsazione alla quale il sistema non corretto presenterebbe il margine di fase voluto se l'incrocio avvenisse a tale pulsazione. Fissato il rapporto $k = T_i/T_d$, si deduce $T_i = \omega_n \sqrt{k}$, $T_d = \omega_n / \sqrt{k}$, $K_p = 1/|G(j\omega_n)|$.

◆ Taratura dei regolatori standard

Lo studio dell'intervento sul diagramma di Bode dei regolatori passati in rassegna è utile per avere indicazioni di massima sulla scelta di un particolare tipo di azione, in relazione alle caratteristiche dinamiche del sistema controllato. I processi chimici e petrolchimici sono caratterizzati però da modelli fortemente nonlineari, per cui la scelta dei parametri dei regolatori si effettua in molti casi con metodi semiempirici.

Figura 6.45

Disposizione cui ci si riferisce per il metodo di Ziegler-Nichols.



Metodo di Ziegler-Nichols

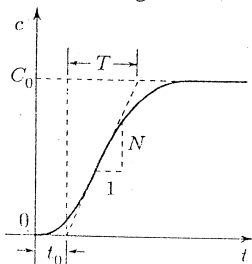


Figura 6.46

Risposta al gradino del sistema controllato.

Fra questi, di largo impiego è il *metodo di Ziegler-Nichols*,⁽²⁾ che fornisce i valori dei parametri del regolatore, che si suppone collegato al processo come è indicato in Fig. 6.45, in funzione di alcuni parametri della risposta al gradino del sistema controllato. Questa molto spesso è aperiodica, del tipo rappresentato in Fig. 6.46, e può considerarsi approssimata dalla risposta corrispondente alla funzione di trasferimento

$$\frac{K e^{-t_0 s}}{1 + T s} \quad (6.42)$$

in cui i valori dei parametri si ricavano come è indicato in Fig. 6.46, mandando la tangente alla curva di risposta al gradino nel punto di flesso. Con riferimento a tale costruzione, si definiscono i seguenti parametri caratteristici:

Tempo di ritardo
Costante di tempo
Rapporto di ritardo
Velocità di risposta
Guadagno statico

- t_0 : tempo di ritardo;
- T : costante di tempo;
- $R := t_0/T = N t_0/C_0$: rapporto di ritardo;
- $N := C_0/T$: velocità di risposta;
- $K := C_0/M_0$: guadagno statico (M_0 è l'ampiezza del gradino applicato).

Posto $G'_c(s) = M(s)/E(s)$, i valori dei parametri consigliati da Ziegler e Nichols, modificati da Cohen e Coon,⁽³⁾ sono:

1. Controllo P:

$$G'_c(s) = K'_p, \quad \text{con} \quad K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(1 + \frac{R}{3}\right);$$

2. Controllo I:

$$G'_c(s) = \frac{K'_p}{T_i s}, \quad \text{con} \quad \frac{K'_p}{T_i} = \frac{4 M_0}{N t_0^2} \frac{R^2}{1 + 5 R};$$

3. Controllo PI:

$$G'_c(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12}\right), \quad T_i = t_0 \frac{30 + 3 R}{9 + 20 R};$$

⁽²⁾ Ziegler, J.G. e Nichols, N.B., "Optimum settings for automatic controllers", *Trans. ASME*, vol. 64, pp. 759-768, 1942. In relazione alla taratura e all'autosintonia dei regolatori PID si consiglia il volume specifico di Åström e Hägglung, opera citata in bibliografia.

⁽³⁾ Vedi Cohen, G.H. e Coon, G.A., "Theoretical considerations of retarded control", *Trans. ASME*, vol. 75, pp. 827-834, 1953, ed Eckman, D.P., opera citata in bibliografia. La scelta dei parametri viene operata in modo da avere un transitorio ritenuto di buona qualità in base alla pratica di esercizio; ad esempio, per il controllo PD, il criterio seguito è quello di ottenere il minimo errore statico compatibile con il rapporto di 4 ad 1 fra le successive sovraelongazioni nelle oscillazioni dell'errore.

4. Controllo *PD*:

$$G'_c(s) = K'_p (1 + T_d s), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6} \right), \quad T_d = t_0 \frac{6 - 2R}{22 + 3R};$$

5. Controllo *PID*:

$$G'_c(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{R}{4} \right), \quad T_i = t_0 \frac{32 + 6R}{13 + 8R}, \quad T_d = t_0 \frac{4}{11 + 2R}.$$

Un metodo alternativo per la predisposizione dei valori dei parametri che caratterizzano le varie azioni di regolazione, in modo da ottenere una risposta soddisfacente da parte del sistema in retroazione, è basato sulla determinazione della cosiddetta "banda proporzionale di pendolazione": questa è definita come il valore della banda proporzionale $1/K_0$ che, in assenza delle azioni integrale e derivativa, porta il sistema di regolazione in condizione di stabilità limite, cioè in oscillazione permanente. In tale condizione si determina il periodo di oscillazione T_0 e si applicano le seguenti formule, pure dovute a Ziegler e Nichols:

Controllo *P*: $K'_p = 0,5 K_0$;

Controllo *PI*: $K'_p = 0,45 K_0$, $T_i = 0,85 T_0$;

Controllo *PD*: $K'_p = 0,5 K_0$, $T_d = 0,2 T_0$;

Controllo *PID*: $K'_p = 0,6 K_0$, $T_i = 0,5 T_0$, $T_d = 0,12 T_0$.

I regolatori *PID* commerciali più recenti, realizzati con tecnologia digitale, sono dotati di particolari accorgimenti e dispositivi, che ne migliorano il comportamento e ne rendono più agevole l'impiego. Fra questi sono degni di nota gli accorgimenti che evitano il cosiddetto "caricamento dell'integratore" (*integrator windup*), cioè che, durante transitori che comportino la saturazione dell'attuatore, quindi un comportamento anomalo dell'anello di retroazione, l'uscita dell'integratore assuma valori ben al di sopra di quello corrispondente alla saturazione, rendendo molto più lento e insicuro il ripristino delle condizioni normali di regolazione. L'accorgimento più semplice consiste nel disconnettere l'integratore quando la sua uscita raggiunge uno dei due livelli di saturazione, massimo o minimo, e l'ingresso risulta rispettivamente positivo o negativo.

◆ Cenni ai metodi di autosintonia

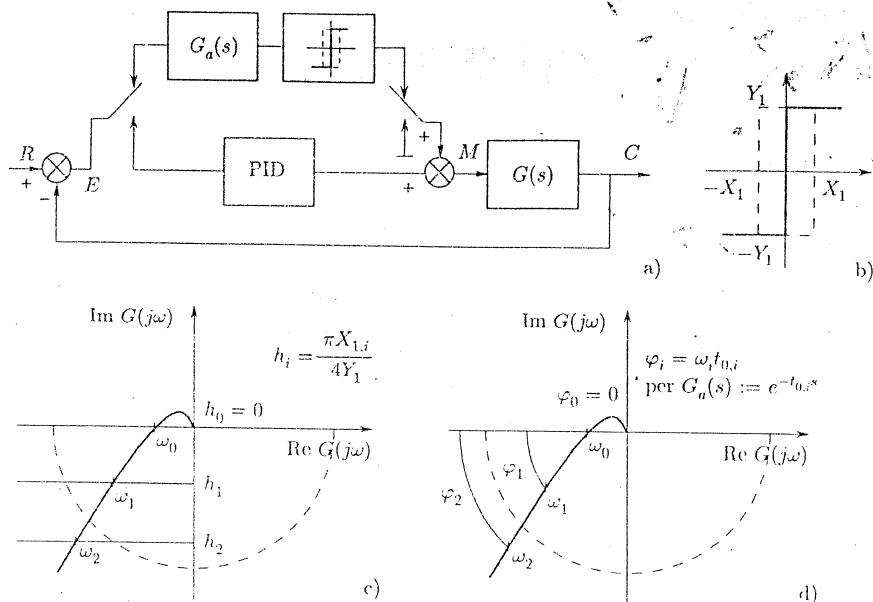
Un'altra possibilità è l'"autosintonia" (*self-tuning*), cioè l'aggiustamento automatico dei parametri, che viene operato a comando, premendo un apposito bottone sul pannello di comando del regolatore. Durante la fase di autosintonia, che deve essere eseguita a partire da una condizione di regime stazionario, il regolatore esegue sull'impianto esperimenti che ne identificano alcune caratteristiche dinamiche, in funzione delle quali i parametri del regolatore vengono automaticamente aggiustati. Ad esempio, entrambi i metodi di Ziegler e Nichols precedentemente presentati, quello basato sulla rilevazione dei parametri della risposta al gradino e quello basato sulla determinazione del guadagno limite e della corrispondente frequenza di pendolazione, possono essere facilmente automatizzati.

Banda proporzionale di pendolazione

Autosintonia dei regolatori PID

Figura 6.47

Procedure di autosintonia



Di particolare interesse è la realizzazione del secondo metodo, che può essere anche generalizzato, con la rilevazione di più valori della funzione di risposta armonica del sistema controllato e l'uso di un più articolato sistema di taratura, mediante tabelle o funzioni facilmente memorizzabili nel regolatore digitale, sulle quali peraltro i costruttori non forniscono informazioni.

Un procedimento largamente impiegato per l'autosintonia consiste nell'esclusione del regolatore (mantenendone però memorizzato lo stato interno e, quindi, bloccata l'uscita) e nella sua sostituzione temporanea con un sistema a relè (ideale o con isteresi), posto in cascata con un sistema lineare, la cui funzione di trasferimento $G_a(s)$ può essere arbitrariamente imposta in fase di autosintonia, come è indicato in Fig. 6.47a. La caratteristica del relè è riportata in Fig. 6.47b: il valore di Y_1 è predisposto prima di ogni esperimento, in genere tenendo conto del rapporto segnale-disturbo all'ingresso del regolatore.

1. *Esplorazione per variazione dell'isteresi del relè*: in questo caso si pone uguale ad uno la funzione di trasferimento $G_a(s)$ e si eseguono le rilevazioni come è indicato in Fig. 6.47c, cioè variando il rapporto X_1/Y_1 , a partire da zero. Siano $\bar{X}$ e $\bar{\omega}$ l'ampiezza e la pulsazione delle oscillazioni rilevate all'ingresso del relè. Applicando il metodo della funzione descrittiva (vedi Paragrafo 8.2), si ricava

$$|G(j\bar{\omega})| = \frac{\pi \bar{X}}{4 Y_1}, \quad \arg G(j\bar{\omega}) = -\pi + \arcsin \frac{X_1}{\bar{X}}.$$

2. *Esplorazione per variazione della funzione $G_a(s)$* : in questo caso si mantiene nulla l'isteresi del relè, e si varia la funzione di trasferimento dell'elemento posto in cascata al relè medesimo, introducendo diversi ritardi di fase. Utilizzando l'espressione della funzione descrittiva del relè ideale, si deduce

$$|G(j\bar{\omega})| = \frac{\pi \bar{X}}{4 Y_1 |G_a(j\bar{\omega})|}, \quad \arg G(j\bar{\omega}) = -\pi + \arg G_a(j\bar{\omega}).$$

La Fig. 6.47d si riferisce al caso, piuttosto frequente, in cui si assuma

una funzione $G_a(j\omega)$ di modulo identicamente unitario, come

$$G_a(j\omega) = e^{j\omega t_0}, \quad \text{oppure} \quad G_a(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau},$$

in cui argomenti alla pulsazione rilevata $\bar{\omega}$ sono rispettivamente $-\bar{\omega} t_0$ e $-2 \arctan \bar{\omega} \tau$.

6.9. Funzioni di sensibilità sui diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode, oltre a guidare il progetto attraverso l'imposizione dei margini di stabilità, consentono un agile confronto dei diversi tipi di compensatori o regolatori in rapporto alla loro capacità di modificare l'effetto dei vari ingressi, in particolare dei disturbi, sui diversi segnali presenti lungo l'anello di retroazione.

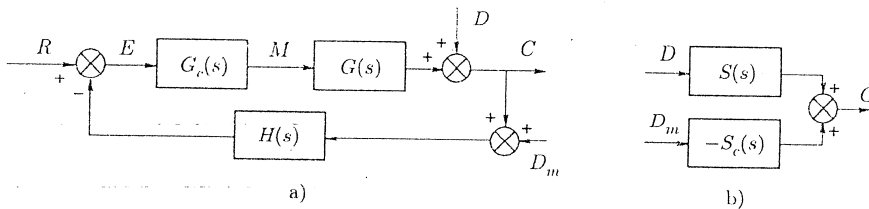


Figura 6.48
Schemi di riferimento per la sensibilità ai disturbi.

Con riferimento alla Fig. 6.48a, si pone $F(s) := G_c(s) G(s) H(s)$ (guadagno di anello) e si definiscono le funzioni di sensibilità e di sensibilità complementare, corrispondenti allo schema a blocchi ridotto di Fig. 6.48b, con le relazioni

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)}, \quad (6.43)$$

$$S_c(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}. \quad (6.44)$$

Tali funzioni rappresentano rispettivamente la sensibilità dell'uscita c ad un disturbo d applicato immediatamente a monte e ad un disturbo d_m applicato immediatamente a valle dell'uscita stessa. Talvolta si vuole conoscere la sensibilità della variabile di controllo m agli stessi disturbi, cioè determinare la *funzione di sensibilità del controllo*.

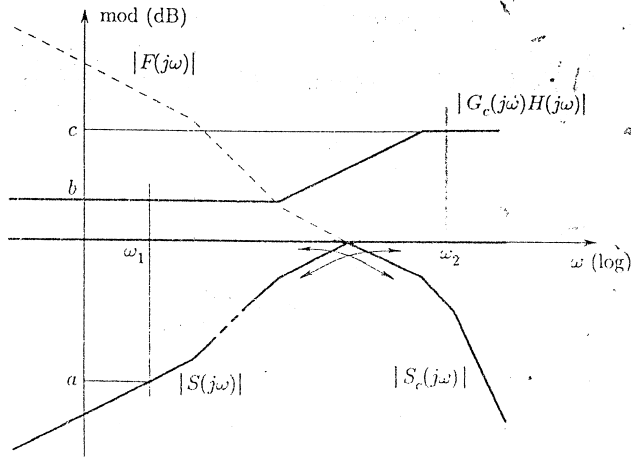
A tal fine basta completare la figura che riporta i diagrammi di Bode di $F(j\omega)$, $S(j\omega)$ ed $S_c(j\omega)$ con il diagramma di $G_c(j\omega) H(j\omega)$, come è indicato in Fig. 6.49. Essendo

$$\frac{M(s)}{D(s)} = \frac{M(s)}{D_m(s)} = \frac{G_c(s) H(s)}{1 + F(s)} = G_c(s) H(s) S(s), \quad (6.45)$$

si può ricavare graficamente la funzione di sensibilità del controllo alle varie pulsazioni: con riferimento alla figura, alla pulsazione ω_1 si somma il valore a al valore b (letti in dB) e alla pulsazione ω_2 leggendo semplicemente il valore c , in quanto a tale pulsazione la funzione di sensibilità vale 1 (0 dB). Risulta evidente che la rete anticipatrice (cui si riferisce la figura) produce una notevole sensibilità del controllo ai disturbi ad alta frequenza, e quindi notevole sollecitazione dell'attuatore e probabilità di saturazione. Una rete ritardatrice, a parità di guadagno statico, ridurrebbe invece tale sensibilità.

Funzione di sensibilità del controllo

Figura 6.49
Determinazione della
funzione di sensibilità del
controllo.

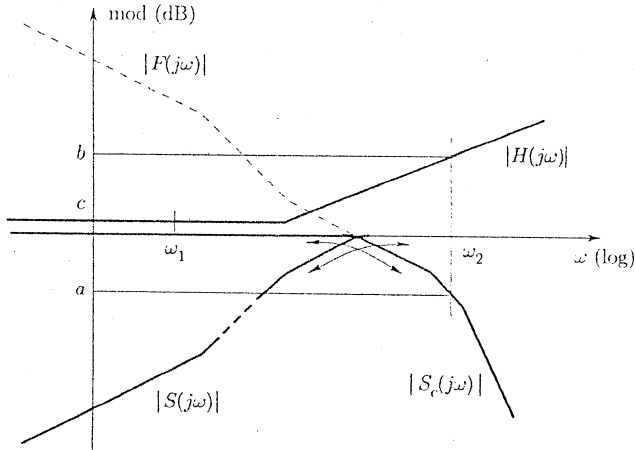


Costruzioni analoghe consentono di determinare, a partire dalla funzione di sensibilità o di sensibilità complementare, la sensibilità del controllo m all'ingresso r o dell'errore e ai vari ingressi, o dell'uscita c all'ingresso r . Ad esempio, in Fig. 6.50 è riportata la costruzione per la risposta armonica ad anello chiuso per un sistema con retroazione tachimetrica. Risulta

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s) G(s)}{1 + F(s)} = \frac{S_c(s)}{H(s)} \tag{6.46}$$

Alla pulsazione ω_1 la risposta armonica ad anello chiuso vale $-c$ dB e alla pulsazione ω_2 essa vale $a - b$ dB.

Figura 6.50
Determinazione del gua-
dagno ad anello chiuso
di un sistema con retroa-
zione tachimetrica.



6.10. Esercizi

6.10.1 Studiare la compensazione del sistema di Fig. 6.51.

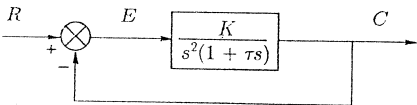


Figura 6.51 Sistema in retroazione.

Soluzione Applicando il criterio di Nyquist (diagrammā a tratto pieno in Fig. 6.52a), si deduce che il sistema non compensato è instabile per qualunque valore di K . Ciò è evidenziato anche dal luogo delle radici, rappresentato in Fig. 6.52b, o dai diagrammi di Bode di Fig. 6.52c (margine di fase sempre negativo) oppure ancora dall'applicazione del criterio di Routh all'equazione caratteristica

$$\tau s^3 + s^2 + K = 0, \tag{6.47}$$

che fornisce la tabella

3	τ	0
2	1	K
1	$-K\tau$	
0	K	

Dato l'andamento del diagramma di Nyquist, risulta evidente che la stabilizzazione si può ottenere solo mediante anticipo di fase, in quanto il diagramma deve modificarsi come è indicato a tratto discontinuo in Fig. 6.52a. Si può ad esempio utilizzare la retroazione tachimetrica o una rete anticipatrice.

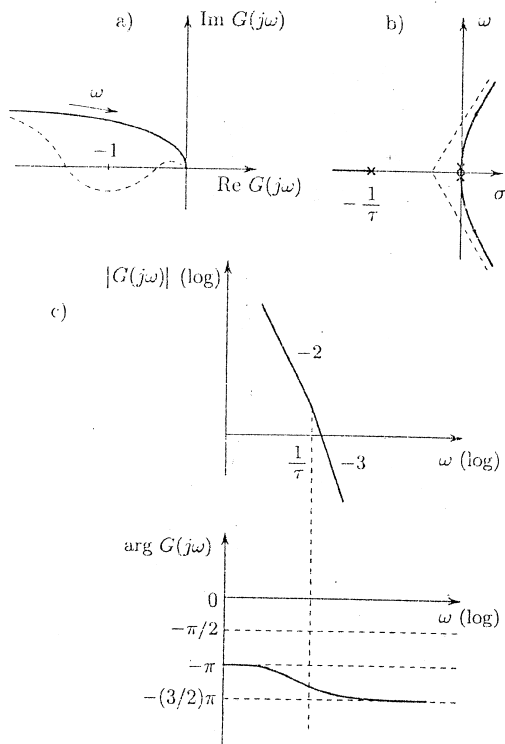


Figura 6.52 Diagrammi relativi al sistema di Fig. 6.51.

1. Retroazione tachimetrica. La funzione di trasferimento della correzione è

$$G_c(s) = 1 + \tau_d s.$$

L'equazione caratteristica e la tabella di Routh di-
vengono rispettivamente

$$\tau s^3 + s^2 + K\tau_d s + K = 0 \quad (6.48)$$

3	τ	$K\tau_d$
2	1	K
1	$K(\tau_d - \tau)$	
0	K	

Si deduce pertanto che il sistema è stabile per qualunque valore di K purché valga la disuguaglianza

$\tau_d > \tau$. Ciò è chiarito anche dall'andamento asintotico del luogo delle radici (Fig. 6.53a) e dall'andamento del diagramma di Bode delle fasi (Fig. 6.53b).

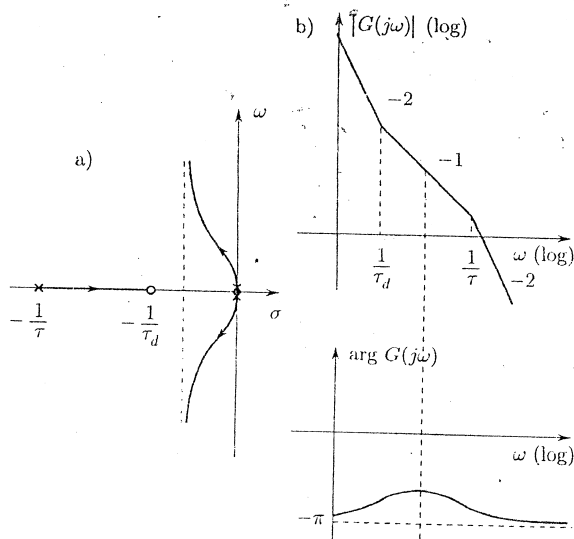


Figura 6.53 Diagrammi relativi alla retroazione tachimetrica.

2. Rete anticipatrice. La funzione di trasferimento della correzione è

$$G_c(s) = \frac{1 + \tau_d s}{1 + \alpha \tau_d s}$$

Osservando il luogo delle radici, riportato in Fig. 6.54a, e i diagrammi di Bode, riportati in Fig. 6.54b, si deduce che deve valere la condizione limite $\tau_d > \tau$. Pertanto non è possibile progettare la rete per cancellazione polo-zero. Si constata inoltre che, al contrario della retroazione tachimetrica, la stabilizzazione con rete anticipatrice è efficace solo in un campo limitato di valori di K .

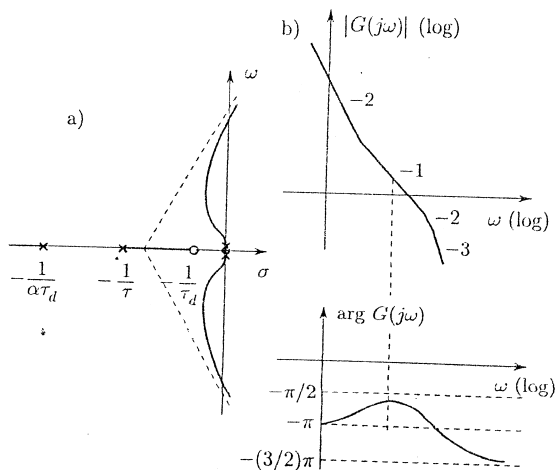


Figura 6.54 Diagrammi relativi alla rete anticipatrice.

6.10.2 Studiare la compensazione del sistema di Fig. 6.55.

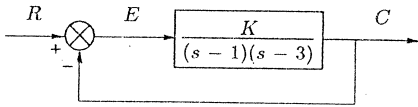


Figura 6.55 Sistema in retroazione.

Soluzione Il diagramma di Nyquist ha l'andamento rappresentato a tratto pieno in Fig. 6.56a: il sistema risulta instabile per qualunque valore di K .

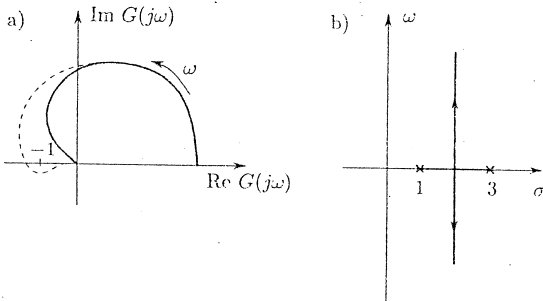


Figura 6.56 Diagrammi relativi al sistema di Fig. 6.55.

6.10.3 Dato un sistema in retroazione avente il diagramma di Bode delle ampiezze rappresentato in Fig. 6.58, scegliere e progettare una rete corretttrice che ne porti a 45° il margine di fase, senza diminuire la costante di guadagno.

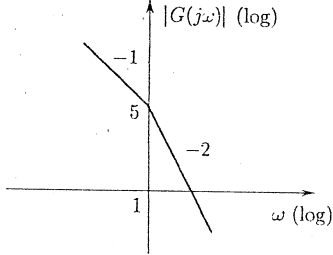


Figura 6.58 Diagramma di Bode delle ampiezze.

Soluzione Si noti che, in corrispondenza della pulsazione di rottura $\omega_0 = 1$ rad/sec, la fase vale $-3\pi/4$, per cui la compensazione voluta si può ottenere con una rete a ritardo e anticipo, con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}, \quad (6.49)$$

caratterizzata dai valori dei parametri

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{1}{5}, \quad \tau_1 \tau_2 = 1 \text{ sec}^2.$$

Tale rete modifica il diagramma di Bode come è indicato in Fig. 6.59a.

Per la stabilizzazione occorre deformare il diagramma in modo che venga a circondare in senso antiorario il punto critico. Ciò si può ottenere con la retroazione tachimetrica o con una rete anticipatrice: il luogo delle radici, che per il sistema non compensato ha l'andamento di Fig. 6.56b, si modifica rispettivamente come è indicato in Fig. 6.57a e in Fig. 6.57b.

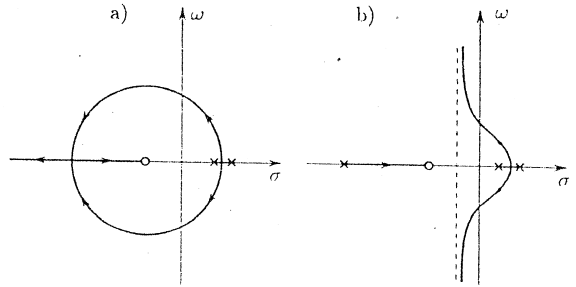


Figura 6.57 Diagrammi relativi alla compensazione del sistema di Fig. 6.55.

Si noti che il sistema compensato risulta stabile purché il valore di K sia sufficientemente elevato.

In alternativa, si può impiegare una rete anticipatrice, con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad (6.50)$$

caratterizzata dai valori dei parametri

$$\tau = 1 \text{ sec}, \quad \alpha \tau = 0,2 \text{ sec},$$

che modifica il diagramma di Bode come è indicato in Fig. 6.59b.

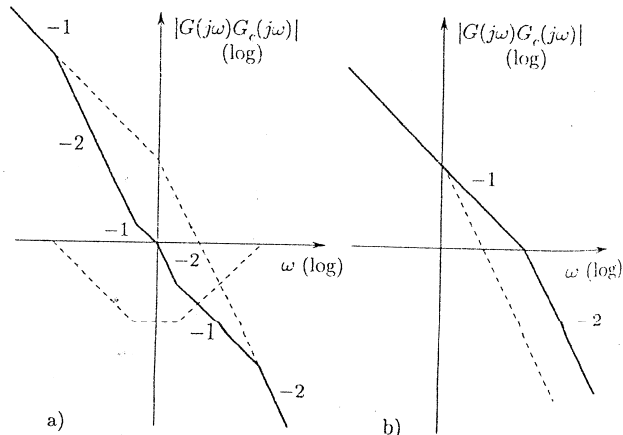


Figura 6.59 Possibili compensazioni del diagramma di Bode di Fig. 6.58.

6.10.4 Dato il sistema con retroazione unitaria il cui diagramma di risposta armonica ad anello aperto è rappresentato in Fig. 6.60, determinare:

1. Le funzioni di trasferimento ad anello aperto e ad anello chiuso, nell'ipotesi che il sistema sia a fase minima.
2. Il margine di fase.
3. La massima sovraelongazione nella risposta al gradino e il picco di risonanza del sistema ad anello chiuso.

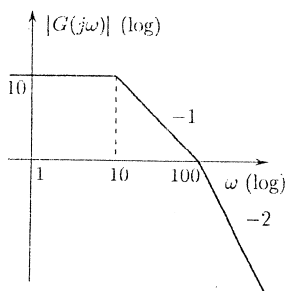


Figura 6.60 Diagramma di risposta armonica.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento di anello è

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 0,1s)(1 + 0,01s)}, \quad (6.51)$$

mentre la funzione di trasferimento del sistema

in retroazione si scrive

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{10}{0,001s^2 + 0,11s + 11} = \\ &= \frac{10}{11} \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

in cui è

$$\omega_n = 100 \sqrt{1,1} = 104,9 \text{ rad/sec},$$

$$\delta = 0,01 \frac{\omega_n}{2} = \frac{\sqrt{1,1}}{2} = 0,524.$$

2. Per ciò che riguarda il margine di fase, ferma restando l'ipotesi di approssimazione asintotica, il contributo alla fase dovuto al primo fattore del primo ordine, il cui punto di rottura dista di una decade dal punto di intersezione del diagramma con l'asse delle ascisse, si può dedurre utilizzando il grafico di Fig. 3.8 e risulta di circa -84° , mentre il contributo del secondo fattore è di -45° . Il margine di fase è pertanto $\beta_c \approx 180 - 84 - 45 = 51^\circ$.
3. La deduzione della massima sovraelongazione e del picco di risonanza si può effettuare utilizzando le relative espressioni in funzione del coefficiente di smorzamento, o, più rapidamente, mediante i grafici di Fig. 2.30 e di Fig. 3.11. Si ricava

$$S = 100 e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 14,5 \%,$$

$$M_R = \frac{1}{2\delta \sqrt{1-\delta^2}} = 1,12.$$

6.10.5 Con riferimento al sistema in retroazione rappresentato in Fig. 6.61, determinare:

1. Il valore minimo della costante di guadagno K del regolatore per cui l'errore a regime in risposta alla rampa unitaria sia non superiore a 0,05 e l'effetto del disturbo d alla pulsazione di 1 rad/sec sia ridotto almeno nel rapporto di 5 a 1 rispetto al caso di anello aperto.
2. I parametri α e τ di una rete anticipatrice che porti il margine di fase a 45° .

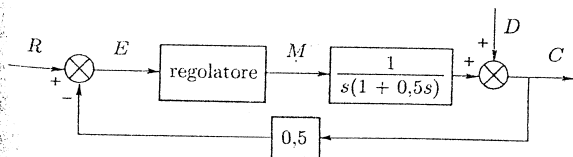


Figura 6.61 Sistema in retroazione.

Soluzione

1. Posto

$$G(s) := \frac{1}{s(1 + 0,5s)}, \quad h := 0,5, \quad (6.53)$$

il valore minimo del guadagno statico che soddisfa il primo dato di specifica si deduce dalla relazione

$$e_r = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)h}, \quad \text{cioè } 0,05 = \frac{1}{0,5K},$$

da cui si ottiene $K = 40 \text{ sec}^{-1}$.

Il valore minimo del guadagno statico che soddisfa il secondo dato di specifica si deduce dalla relazione

$$\left| \frac{1}{1 + K G(j)h} \right| = 0,2,$$

da cui

$$\left| \frac{-0,5 + j}{0,5(K-1) + j} \right| = 0,2, \quad \frac{0,5^2 + 1}{0,5^2(K-1)^2 + 1} = 0,2^2,$$

equazione in K che ammette come unica radice positiva $K = 12 \text{ (sec}^{-1}\text{)}$.

Per soddisfare entrambi i dati di specifica occorre pertanto assumere $K = 40 \text{ sec}^{-1}$.

2. Il margine di fase prescritto si può ottenere con una rete anticipatrice che riporti il punto di rottura del diagramma di Bode sull'asse delle ascisse, come è indicato in Fig. 6.62. Per la rete anticipatrice dal diagramma si deducono i valori dei parametri

$$\alpha = 0,1, \quad \tau = 0,5 \text{ sec.}$$

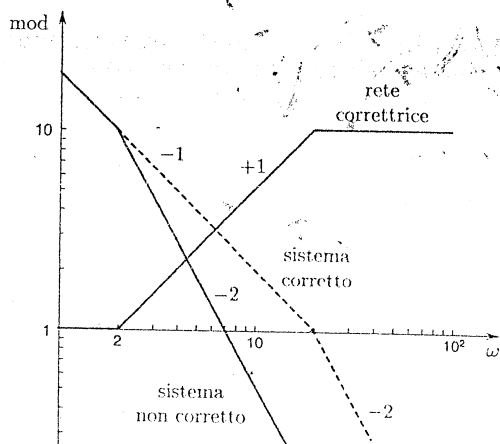


Figura 6.62 Correzione del sistema di Fig. 6.61.

Complementi al Capitolo 6

C6.1. Diagrammi polari a forma di circonferenza

Diagramma polare

I diagrammi polari di risposta armonica delle reti corretttrici passate in rassegna al Paragrafo 6.2 sono semicirconferenze o circonferenze. Ciò discende dalle seguenti due proprietà.

- PROPRIETÀ C6.1.1 Il diagramma polare della funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau'}{1 + j\omega\tau} \quad (6.54)$$

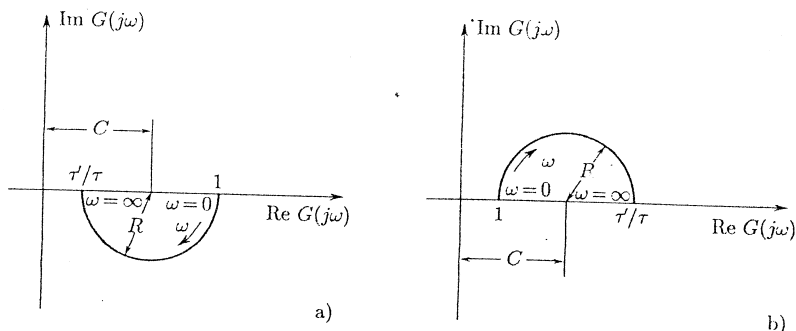
è una semicirconferenza di centro e raggio

$$C = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau'}{\tau} \right), \quad R = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\tau'}{\tau} \right|. \quad (6.55)$$

Dimostrazione Il diagramma è del tipo di Fig. 6.63a nel caso $\tau' < \tau$, del tipo di Fig. 6.63b nel caso $\tau' > \tau$.

Figura 6.63

Possibili andamenti del diagramma polare di risposta armonica relativo alla funzione (6.54).



Per provare l'asserto basta verificare che il vettore $G(j\omega) - C$ ha modulo costante e uguale a R e argomento che subisce una variazione di $-\pi$ per ω variabile da 0 a ∞ . Infatti è

$$G(j\omega) - C = \frac{1 + j\omega\tau'}{1 + j\omega\tau} - \frac{\tau + \tau'}{2\tau} = \frac{\tau - \tau' + j\omega(\tau' - \tau)\tau}{2\tau(1 + j\omega\tau)} = \frac{\tau - \tau'}{2\tau} \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

Come risulta dai diagrammi di Bode di Fig. 3.18, il numero complesso espresso dall'ultima frazione a secondo membro ha modulo unitario e argomento variabile da 0 a $-\pi$ per ω variabile da 0 a ∞ .

PROPRIETÀ C6.1.2. Il diagramma polare della funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j 2 \delta' \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n}} \quad (6.56)$$

è una circonferenza di centro e raggio

$$C = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta'}{\delta}\right), \quad R = \frac{1}{2} \left|1 - \frac{\delta'}{\delta}\right|. \quad (6.57)$$

Dimostrazione Il diagramma è del tipo di Fig. 6.64a nel caso $\delta' < \delta$, del tipo di Fig. 6.64b nel caso $\delta' > \delta$.

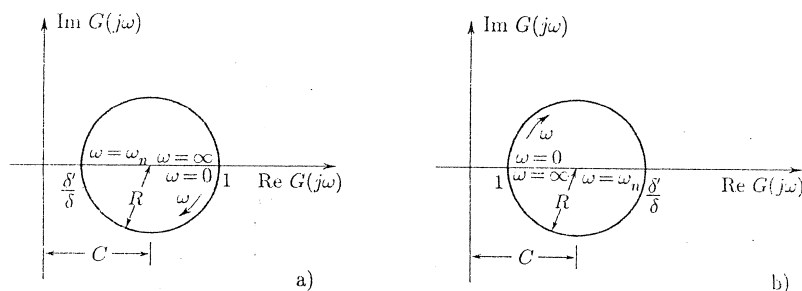


Figura 6.64

Possibili andamenti del diagramma polare di risposta armonica relativo alla funzione (6.56).

Per la dimostrazione di quanto asserito si svolgono i passaggi:

$$\begin{aligned} G(j\omega) - C &= \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j 2 \delta' \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n}} - \frac{\delta' + \delta}{2\delta} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2 \delta' \frac{\omega}{\omega_n}\right) 2\delta - \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n}\right) (\delta + \delta')}{2\delta \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)} \\ &= \frac{\delta - \delta' \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n}}{2\delta \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)} \end{aligned}$$

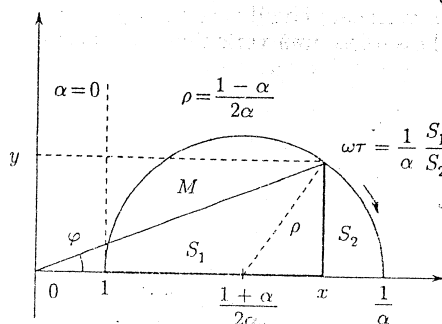
Il numero complesso espresso dall'ultima frazione a secondo membro ha modulo unitario e argomento variabile da 0 a -2π per ω variabile da 0 a ∞ .

C6.2. Dimostrazione delle formule di inversione

Con riferimento alla Fig. 6.65 in cui è $x = M \cos \varphi$, $y = M \sin \varphi$, ricordando che il diagramma polare corrispondente alla (6.24) è una semicirconferenza (vedi Paragrafo C6.1), si ha

$$\left(x - \frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1 - \alpha}{2\alpha}\right)^2,$$

Deduzione delle formule
di inversione della rete
anticipatrice.


$$\alpha = \frac{x-1}{x^2+y^2-x} = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}. \quad (6.58)$$
$$M^2(1 + \alpha^2(\omega\tau)^2) = 1 + (\omega\tau)^2, \text{ da cui } \omega\tau = \sqrt{\frac{M^2 - 1}{1 - M^2\alpha^2}}. \quad (6.59)$$
$$\begin{aligned} 1 - M^2 \alpha^2 &= 1 - \frac{(M \cos \varphi - 1)^2}{(M - \cos \varphi)^2} \\ &= \frac{M^2 - 2M \cos \varphi + \cos^2 \varphi - M^2 \cos^2 \varphi - 1 + 2M \cos \varphi}{(M - \cos \varphi)^2} \\ &= \frac{(M^2 - 1)(1 - \cos^2 \varphi)}{(M - \cos \varphi)^2} = \frac{(M^2 - 1) \sin^2 \varphi}{(M - \cos \varphi)^2}, \end{aligned}$$

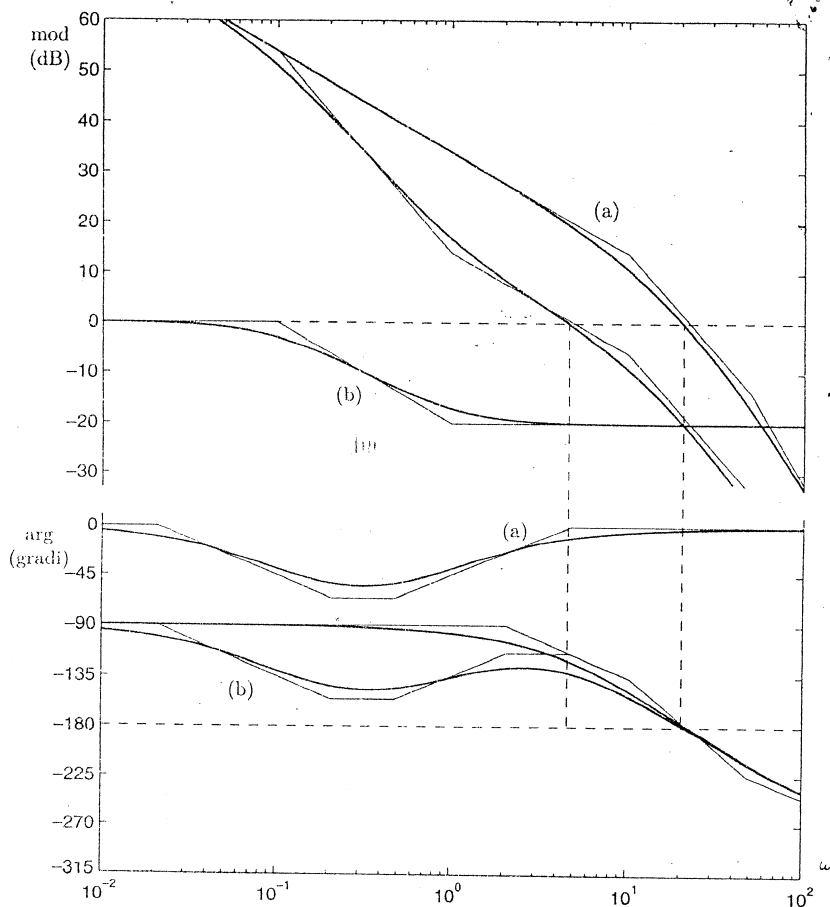
Nel caso limite $\alpha = 0$ la circonferenza degenera in una retta verticale di ascissa unitaria, indicata a tratto in figura, da cui $M \cos \varphi = 1$. Il valore massimo di φ risulta pertanto pari ad $\arccos(1/M)$. La graduazione del diagramma polare in termini di $\omega\tau$ è data da $1/\alpha$ per il rapporto S_1/S_2 fra le lunghezze dei segmenti evidenziati in figura; ciò discende dalla relazione $\alpha(\omega\tau) = (M \cos \varphi - 1)/(M \sin \varphi)$, ottenuta moltiplicando fra loro le (6.25).

$$\alpha = \frac{M(\cos \varphi - M)}{1 - M \cos \varphi}, \quad \omega \tau = \frac{1 - M \cos \varphi}{M \sin(-\varphi)}. \quad (6.60)$$

C6.3. Impiego del luogo e del contorno delle radici nel progetto delle reti correttrici

$$G(s)h = \frac{K}{s\left(1 + \frac{1}{10}s\right)\left(1 + \frac{1}{50}s\right)}, \quad (6.61)$$

Nel corso del confronto si farà riferimento anche ai luoghi e ai contorni delle radici, con l'obiettivo di illustrarne l'impiego e di sottolinearne l'utilità nella valutazione di diverse possibili scelte.

**Figura 6.66**

Studio sui diagrammi di Bode della correzione del sistema (6.61) con rete ritardatrice.

Si considera in primo luogo il caso della rete ritardatrice. Si suppone che le specifiche da soddisfare siano:

- costante di velocità $K_v = 50 \text{ sec}^{-1}$;
- margine di fase $M_F = 45^\circ$.

La prima specifica impone che sia $K = 50 \text{ sec}^{-1}$.

Si tracciano anzitutto i diagrammi di Bode del sistema non compensato, indicati con (a) in Fig. 6.66.

Dal diagramma delle fasi si vede che si è lontani dal margine di fase desiderato (il ritardo di fase corrispondente al modulo unitario è quasi 180°). Si calcola allora l'attenuazione che porterebbe a tale margine, determinando dapprima la pulsazione alla quale dovrebbe avvenire l'intersezione ($\omega_1 = 7 \text{ rad/sec}$) e quindi il guadagno a tale pulsazione ($G_1 \simeq 8$): l'attenuazione da introdurre è pertanto circa $1/8$. Questo è un limite superiore per il valore del parametro α che compare nella funzione di trasferimento della rete ritardatrice: si può in effetti assumere tale valore se la costante di tempo τ , che costituisce l'altro parametro libero, viene scelta sufficientemente grande, cosicché le due pulsazioni di rottura della rete cadano molto lontano dalla pulsazione di intersezione: in questo caso infatti il contributo di fase della rete alla stessa pulsazione risulta trascurabile.

Per non ridurre eccessivamente la banda passante del sistema conviene però assumere un valore di α un poco inferiore e determinare il valore minimo di τ che dia luogo al margine di fase prescritto. Ad esempio, si assume $\alpha = 0,1$ e si ricava $\tau = 10 \text{ sec}$.

In Fig. 6.66 sono indicati con (b) i diagrammi di Bode del sistema così compensato: si può verificare che la seconda specifica è soddisfatta.

Con riferimento allo stesso esempio, è interessante osservare come la rete corretttrice agisca sull'andamento del luogo delle radici. Il luogo relativo al sistema non compensato è riportato in Fig. 6.67; le posizioni dei poli corrispondenti al valore del guadagno imposto dalla prima specifica sono contrassegnate con asterischi.

Il luogo relativo al sistema compensato è riportato in Fig. 6.68 e in Fig. 6.69 (un particolare ingrandito): dalla graduazione risulta che il limite di stabilità è notevolmente aumentato. Si noti che la rete ritardatrice non influisce sensibilmente sull'andamento dei

Figura 6.67

Luogo delle radici del sistema con guadagno di anello (6.61).

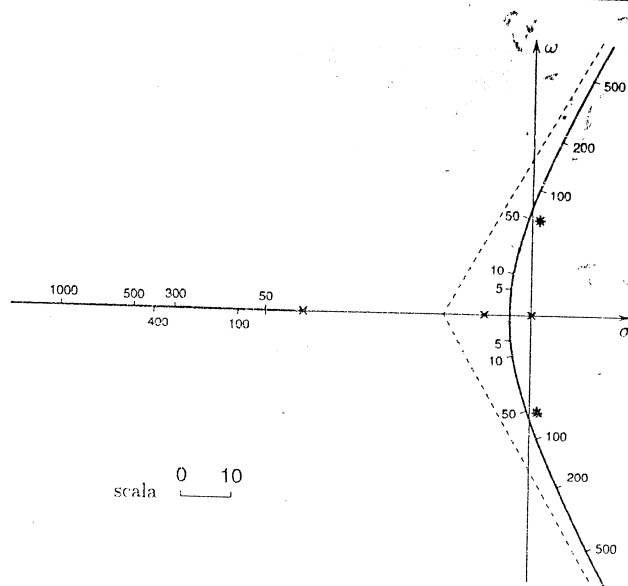
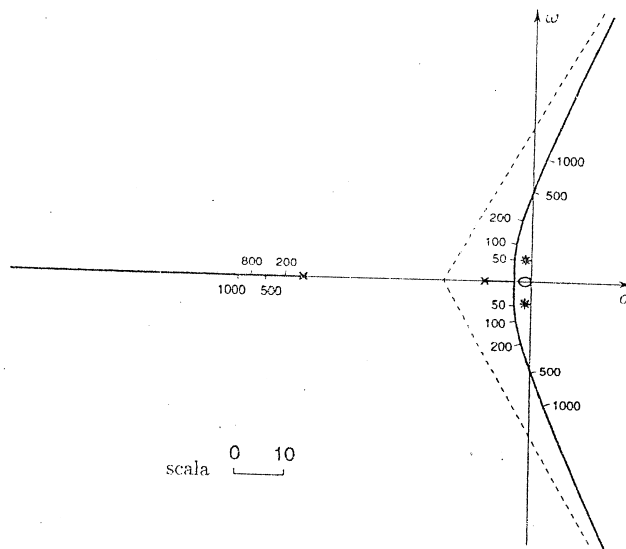


Figura 6.68

Correzione con rete ritardatrice del luogo delle radici di Fig. 6.67.



rami del luogo delle radici corrispondenti ai poli dominanti, ma sulla loro graduazione in funzione di K_1 ; ciò si spiega con il fatto che la funzione di trasferimento della rete in forma fattorizzata viene ad avere una costante K'_1 pari ad α , mentre il polo e lo zero della rete, relativamente vicini fra loro e lontani dai rami dominanti, danno contributi di fase che tendono ad elidersi fra loro.

Dal punto di vista della qualità della risposta, si può notare che i poli dominanti, a parità di guadagno statico, vengono spostati in modo che il coefficiente di smorzamento ad essi associato aumenta; infatti nella nuova posizione il segmento che li congiunge con l'origine forma con il semiasse reale negativo un angolo inferiore (si ricorda che il coefficiente di smorzamento è il coseno di tale angolo). Per contro, la pulsazione naturale diminuisce, il che comporta una risposta meno pronta.

Per aver chiaro come la scelta dei parametri della rete corretttrici influisca sulla posizione dei poli e poter agire di conseguenza in sede di progetto, è di notevole utilità anche il contorno delle radici. Come si è precedentemente notato, nella funzione di trasferimento della rete si hanno due parametri arbitrari: α e τ . Di solito si fissa il valore di α (dell'ordine di qualche decimo) e si sceglie di conseguenza il valore più opportuno per τ .

La costruzione del contorno delle radici in funzione di τ non presenta alcuna difficoltà, anche se non rientra nella casistica esaminata nel precedente capitolo, in quanto il parametro variabile compare sia a numeratore sia a denominatore della funzione di trasferimento.

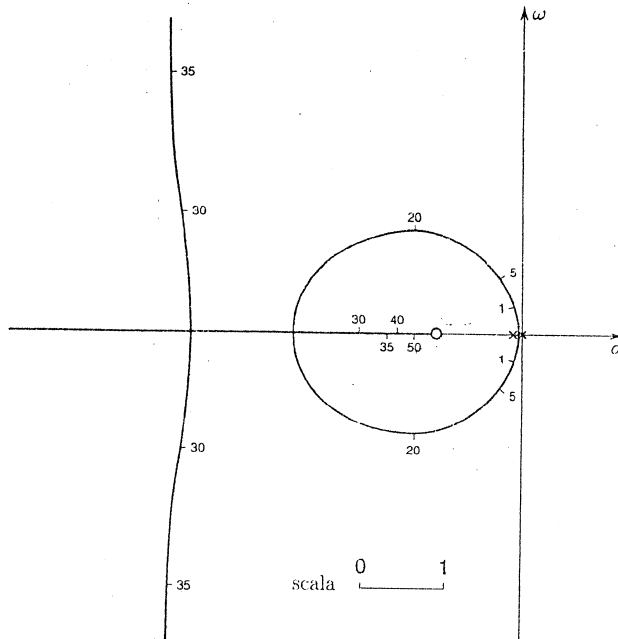


Figura 6.69
Particolare del luogo delle radici di Fig. 6.68.

Infatti l'equazione caratteristica

$$1 + \frac{K(1 + \alpha \tau s)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau s)} = 0, \quad \tau_1 = \frac{1}{50} \text{ sec}, \quad \tau_2 = \frac{1}{10} \text{ sec}, \quad (6.62)$$

si può scrivere anche

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau s) + K(1 + \alpha \tau s) = 0,$$

cioè, separando i termini aventi τ a fattore,

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K + \tau s(s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K\alpha) = 0,$$

da cui

$$1 + \frac{\tau s(s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K\alpha)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K} = 0. \quad (6.63)$$

Il contorno, per $K = 50 \text{ sec}^{-1}$, $\alpha = 0, 1$, è riportato in Fig. 6.70: con asterischi sono indicate le posizioni dei poli corrispondenti al valore di τ assunto (10 sec).

Si noti che valori di τ inferiori, entro un certo intervallo, peggiorano la stabilità del sistema, il che è naturale, perché il ritardo di fase introdotto dalla rete può diminuire il margine di fase.

Una proprietà interessante del contorno delle radici è che gli zeri, cui esso tende al tendere di τ all'infinito, sono l'origine e i punti del luogo delle radici di Fig. 6.67 corrispondenti al valore del guadagno $K_1 = K\alpha = 5 \text{ sec}^{-1}$; pertanto si possono facilmente dedurre dal luogo delle radici del sistema non compensato.

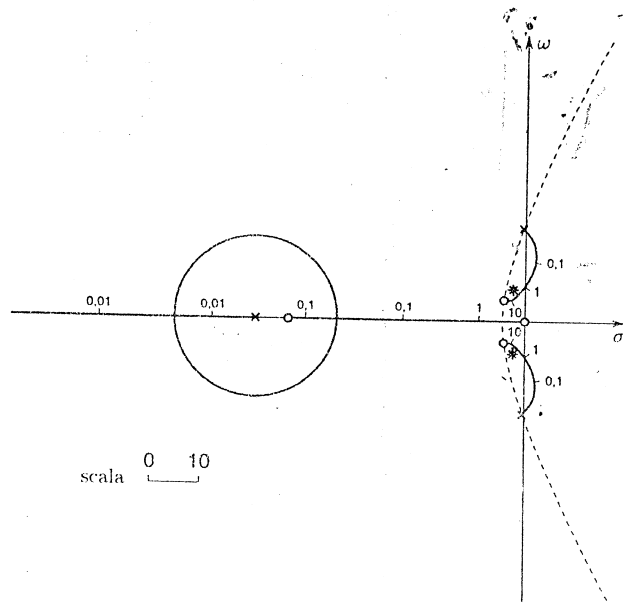
Si considera ora la compensazione del medesimo sistema con guadagno di anello (6.61) mediante una rete anticipatrice, nell'ipotesi che debbano essere soddisfatte le specifiche:

- costante di velocità $K_v = 50 \text{ sec}^{-1}$;
- margine di fase $M_F = 45^\circ$.

In Fig. 6.71 sono contrassegnati con (a) i diagrammi di Bode del sistema non compensato: si noti che essi sono stati spostati di una decade rispetto a quelli di Fig. 6.66, in quanto l'intervento della rete anticipatrice interessa frequenze più elevate di quello della rete ritardatrice.

Figura 6.70

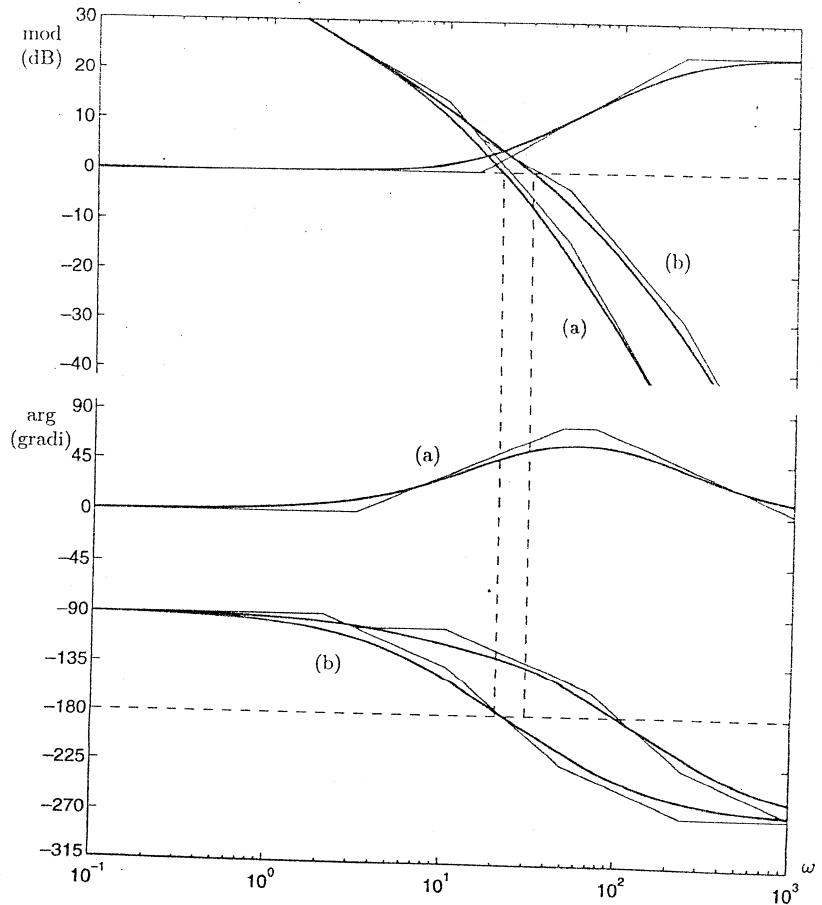
Contorno delle radici relativo alla correzione del sistema (6.61) con rete ritardatrice.



Per il progetto della rete, si fissa un valore di α di tentativo, per esempio $\alpha = 1/15$, che è più che sufficiente per fornire l'anticipo di fase richiesto, e si determina quindi un valore di τ che porti a soddisfare la seconda specifica: nel caso in esame $\tau = 1/15$ sec. Tali scelte portano a modificare i diagrammi di Bode come indicato con (b) in Fig. 6.71.

Figura 6.71

Studio sui diagrammi di Bode della correzione del sistema (6.61) con rete anticipatrice.



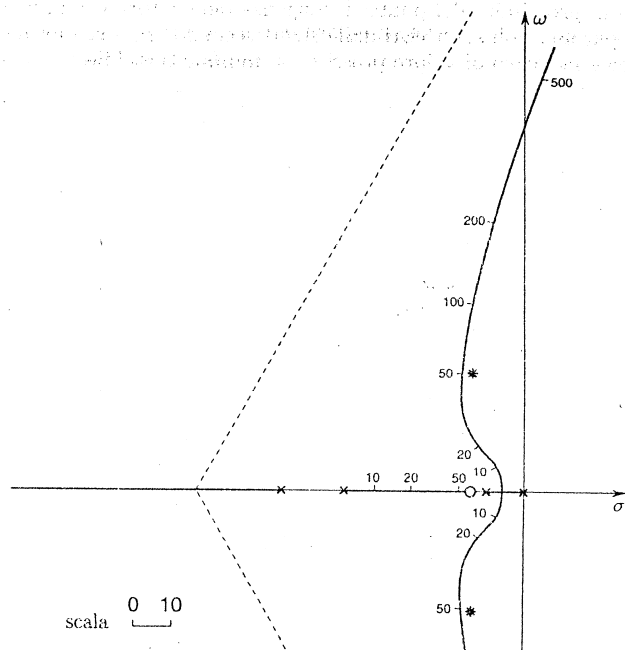


Figura 6.72

Correzione con rete anticipatrice del luogo delle radici di Fig. 6.67.

Per chiarire come la rete influisca sull'andamento del luogo delle radici, si faccia riferimento alla Fig. 6.72, relativa al sistema compensato, che va confrontata con la Fig. 6.67: si può notare che la rete anticipatrice tende a spostare i poli dominanti in modo che aumenti, oltre al coefficiente di smorzamento, anche la pulsazione naturale ad essi associata. Le posizioni dei poli del sistema compensato sono contrassegnate con asterischi.

Confrontando la graduazione del luogo di Fig. 6.72 con quella del luogo di Fig. 6.67, si può osservare come la rete porti ad un notevole aumento del limite di stabilità. Al contrario di quanto avveniva con la rete ritardatrice, i rami del luogo corrispondenti ai poli dominanti vengono notevolmente distorti verso sinistra, in quanto la presenza dello zero vicino al punto di emergenza influisce in modo determinante sulla condizione di fase.

L'intervento della rete è chiarito anche dal contorno delle radici in funzione di τ , per il cui tracciamento si parte dall'equazione caratteristica

$$1 + \frac{K(1 + \tau s)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \alpha \tau s)} = 0, \quad \tau_1 = \frac{1}{50} \text{ sec}, \quad \tau_2 = \frac{1}{10} \text{ sec}, \quad (6.64)$$

che si può scrivere anche

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \alpha \tau s) + K(1 + \tau s) = 0,$$

cioè, separando i termini aventi τ a fattore,

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K + \tau s(\alpha s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K) = 0.$$

Da questa si ottiene infine

$$1 + \frac{\tau s(\alpha s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K} = 0. \quad (6.65)$$

Il contorno, per $K = 50 \text{ sec}^{-1}$, $\alpha = 1/15$, è rappresentato in Fig. 6.73: con asterischi sono indicate le posizioni dei poli corrispondenti al valore di τ assunto.

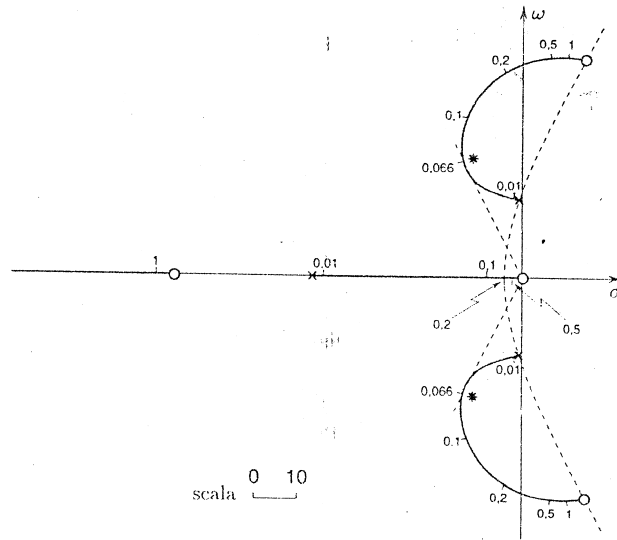
Si noti che gli zeri, cui il contorno delle radici tende al tendere di τ all'infinito, sono l'origine e i punti del luogo delle radici di Fig. 6.67 corrispondenti al valore del guadagno $K_2 = K/\alpha = 750 \text{ sec}^{-1}$.

Dalle posizioni degli asterischi sui rami del contorno che intersecano l'asse immaginario risulta che il valore della costante di tempo τ è stato scelto in modo ottimo, cioè in modo che ai poli dominanti sia associato il massimo coefficiente di smorzamento. Infatti

i poli sono situati in prossimità del punto di tangenza del contorno con rette passanti per l'origine; in altre parole i poli sono visti dall'origine secondo raggi che formano un angolo con il semiasse reale negativo di valore prossimo al minimo possibile.

Figura 6.73

Contorno delle radici relativo alla correzione del sistema (6.61) con rete anticipatrice.



C6.4. Esercizi

C6.4.1 Si consideri il sistema in retroazione negativa con funzione di trasferimento di anello

$$G(s)h := \frac{K}{1 - Ts}, \quad K > 0 : \quad (6.66)$$

1. Studiare, con il metodo del luogo delle radici, la possibilità di stabilizzare il sistema con una rete ritardatrice o con una rete anticipatrice.
2. Proporre un sistema di stabilizzazione specifico.

Soluzione

1. Come risulta dai luoghi delle radici di Fig. 6.74a e di Fig. 6.74b, le reti ritardatrice e anticipatrice non consentono la stabilizzazione del sistema.

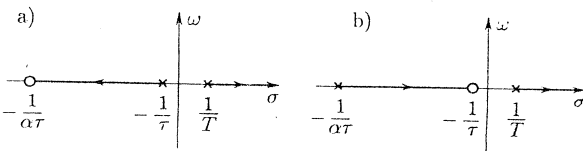


Figura 6.74 Intervento di una rete ritardatrice e di una rete anticipatrice sul sistema (6.66).

2. La stabilizzazione, per valori di K sufficientemente elevati, si può ottenere inserendo nell'anello il si-

stema di Fig. 6.75a, costituito da una rete anticipatrice amplificata e chiusa in retroazione positiva. La relativa funzione di trasferimento è

$$G_c(s) = \frac{K_1(1 + \tau s)}{1 - K_1 + (\alpha - K_1)\tau s},$$

e, assumendo $K_1 = (1 + \alpha)/2$,

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{1 + \tau s}{1 - \tau s}.$$

L'efficacia del sistema di correzione proposto è evidenziata dal luogo delle radici del sistema complessivo, riportato in Fig. 6.75b.

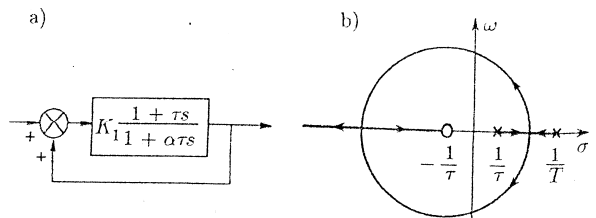


Figura 6.75 Sistema di correzione e suo intervento sul luogo delle radici.

C6.4.2 Si consideri il sistema in retroazione negativa con funzione di trasferimento di anello

$$G(s)h := \frac{K(1-s)}{(1+2s)(1+3s)}, \quad K > 0 : (6.67)$$

1. Determinare il limite superiore di stabilità in K .
2. Proporre un sistema di correzione che consenta di duplicare tale limite.

Soluzione

1. L'equazione caratteristica del sistema non compensato è

$$6s^2 + (5-K)s + 1 + K = 0;$$

da essa risulta immediatamente il valore limite

$$K_L = 5.$$

2. Si utilizza una rete ritardatrice, progettata con il procedimento di cancellazione polo-zero.

Sia la relativa funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Ponendo $\alpha\tau = 3$ sec, l'equazione caratteristica del sistema compensato si può scrivere

$$\frac{6}{\alpha} s^2 + \left(2 + \frac{3}{\alpha} - K_L\right)s + 1 + K_L = 0;$$

da essa risulta la condizione di stabilità

$$2 + \frac{3}{\alpha} - 10K_L > 0,$$

da cui

$$\alpha < \frac{3}{10K_L - 2} = \frac{1}{16}, \quad \tau = \frac{3}{\alpha} \text{ sec}.$$

C6.4.3 Dato il servomeccanismo di posizione il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 6.76 e in cui si suppone $h = 1$, $\tau = 1$ sec:

1. Determinare, in assenza di retroazione tachimetrica, il valore della costante di guadagno K necessario per avere un errore a regime in risposta alla rampa unitaria pari a 0,1 e calcolare il corrispondente valore della massima sovraelongazione nella risposta al gradino unitario.
2. Determinare il valore della costante di tempo $\tau_d := K_g/h$ di una retroazione tachimetrica che, mantenendo invariato il valore della costante di velocità K_v , porti la massima sovraelongazione nella risposta al gradino al 15%.
3. Tracciare i contorni delle radici relativi alla variazione di τ_d per K costante e per K_v costante, assumendo per K e K_v i valori in assenza di retroazione tachimetrica.

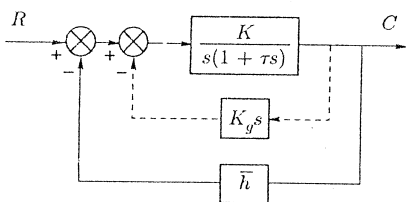


Figura 6.76 Schema a blocchi di un servomeccanismo di posizione.

Soluzione

1. Applicando le (4.30), (4.31), si deduce

$$K_v = Kh = 10 \text{ sec}^{-1}.$$

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$\frac{10}{s^2 + s + 10} = \frac{1}{1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{10}}, \quad (6.68)$$

cioè del tipo (2.79), con

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3,16 \text{ rad/sec},$$

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{10}} = 0,158.$$

Dalla relazione (2.84) o dal grafico di Fig. 2.30 si ricava $S = 60,46\%$.

2. In presenza di retroazione tachimetrica, si ha

$$K'_v = \frac{Kh}{1 + K K_g} = \frac{Kh}{1 + K h \tau_d},$$

da cui, posto $K'_v = K_v$, si ottiene

$$Kh = \frac{K_v}{1 - K_v \tau_d}.$$

L'equazione caratteristica si scrive

$$\frac{K_v(1 + \tau_d s)}{s(1 - K_v \tau_d)(1 + \tau s)} + 1 = 0,$$

da cui

$$\tau s^2(1 - K_v \tau_d) + s + K_v = 0, \quad (6.69)$$

cioè si ha ancora un sistema del secondo ordine con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_v}{\tau(1 - K_v \tau_d)}},$$

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{K_v \tau(1 - K_v \tau_d)}}.$$

Per soddisfare la specifica imposta, deve essere $\delta = 0,517$; dalla seconda delle precedenti relazioni si deduce

$$\tau_d = \frac{1}{K_v} \left(1 - \left(\frac{1}{2 \cdot 0,517} \right)^2 \frac{1}{K_v \tau} \right) = 9,06 \cdot 10^{-2} \text{ sec}.$$

3. Per K costante, l'equazione del contorno delle radici è

$$1 + \frac{\tau_d K h s}{\tau s^2 + s + K h} = 0. \quad (6.70)$$

Per K_v costante l'equazione si modifica in

$$1 - \frac{\tau_d K_v \tau s^2}{\tau s^2 + s + K_v} = 0. \quad (6.71)$$

I contorni relativi ai due casi sono tracciati insieme in Fig. 6.77, a trattini quello per K costante, a tratto e punto quello per K_v costante, mentre le parti comuni (parte negativa dell'asse reale) sono tracciate a tratto pieno. I punti di diramazione si ricavano ponendo uguali a zero le derivate rispetto ad s delle equazioni (6.70) e (6.71). Si deducono le relazioni

$$-\tau s^2 + K h = 0, \quad s + 2 K_v = 0,$$

da cui risultano rispettivamente i punti $-\sqrt{10}$ e -20 : i rami iniziali dei contorni sono archi di circonferenze centrate nell'origine e nel punto -10 .

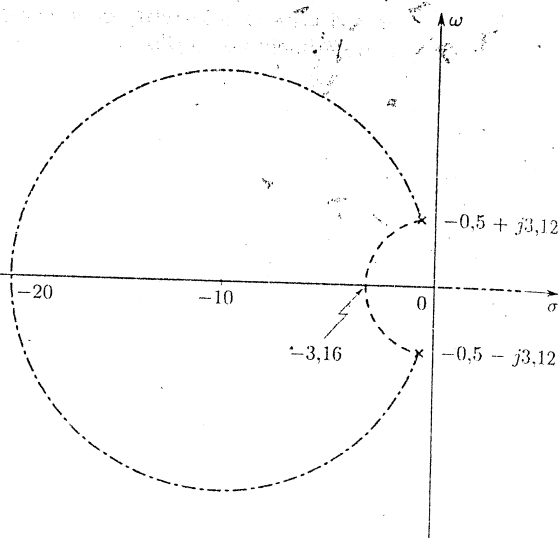


Figura 6.77 Contorni delle radici relativi al quesito 3.

Capitolo 7

Il progetto analitico dei regolatori

I procedimenti di sintesi per reti correttrici e i regolatori standard cui è stato dedicato il precedente capitolo presentano il vantaggio di basarsi sulla funzione di risposta armonica e quindi su un modello del sistema controllato non necessariamente strutturato, cioè non necessariamente espresso da una funzione di trasferimento completamente nota in relazione sia all'ordine sia ai valori dei parametri. Un progetto basato sull'imposizione dei margini di stabilità se da un lato presenta l'inconveniente di essere in pratica utilizzabile solo per sistemi stabili ad anello aperto, d'altro lato ha il vantaggio di poter affrontare in modo relativamente semplice il problema della robustezza imponendo che i margini rimangano sufficienti per diagrammi di Bode con opportune fasce di incertezza. Questo capitolo è invece dedicato al progetto analitico dei regolatori, applicabile quando la conoscenza relativamente accurata del modello matematico del sistema controllato consente il progetto diretto di regolatori che risolvano alcuni problemi che sfuggono alla sintesi nel dominio della frequenza, quali l'inseguimento di modello, cioè il progetto di un regolatore corrispondente ad un sistema in retroazione che si comporti esattamente come un modello di riferimento dato, scelto in modo da riprodurre il comportamento ideale voluto, la stabilizzazione di sistemi instabili ad anello aperto per allocazione, mediante la sintesi di un opportuno regolatore, di tutti i poli del sistema in retroazione, e l'inseguimento perfetto di segnali preconosciuti, ottenibile mediante regolatori a due gradi di libertà.

7.1. La sintesi diretta

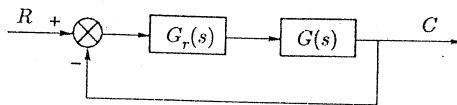
La *sintesi diretta* o *inseguimento di modello* consiste nella determinazione della funzione di trasferimento del regolatore con un calcolo diretto, senza dover operare alcuna scelta preliminare sulla sua modalità di intervento (ritardo di fase, anticipo di fase, attenuazione in un'opportuna banda di frequenze, ecc.). La sintesi diretta, rispetto a quella cosiddetta *per tentativi* considerata nei precedenti paragrafi, è conveniente qualora i dati di specifica siano pochi e schematici e la funzione di trasferimento del sistema controllato sia semplice e nota con precisione. Può convenire altresì per un orientamento preliminare a un progetto articolato per tentativi.

Sintesi diretta
Inseguimento di modello

Sintesi per tentativi

Figura 7.1

Schema di riferimento per la sintesi diretta.



L'essenza del procedimento è delineata da pochi semplicissimi passaggi algebrici. Si consideri dapprima un sistema con retroazione unitaria, come quello schematizzato in Fig. 7.1 e ci si proponga di determinare la funzione di trasferimento $G_r(s)$ di un regolatore che, collegato in cascata al sistema controllato avente la funzione di trasferimento $G(s) = P(s)/Q(s)$, che per il momento si suppone *stabile* e a *fase minima*, cioè con poli e zeri a parte reale negativa dia luogo, per il sistema complessivo in retroazione, ad un dato *modello di riferimento* o *funzione di trasferimento campione* $G_0(s) = P_0(s)/Q_0(s)$ scelto in base alle specifiche imposte.

Dalla

$$G_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} = \frac{G_r(s) G(s)}{1 + G_r(s) G(s)} \quad (7.1)$$

si deduce

$$G_0(s) (1 + G_r(s) G(s)) = G_r(s) G(s), \quad G_r(s) G(s) (1 - G_0(s)) = G_0(s),$$

quindi

$$G_r(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \frac{1}{G(s)} = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (7.2)$$

La (7.2) fornisce direttamente la funzione di trasferimento del regolatore in funzione di quella desiderata per il sistema complessivo e di quella del sistema controllato. La funzione di trasferimento di riferimento $G_0(s)$ è soggetta ai seguenti vincoli.

1. *Condizione per la realizzabilità fisica del regolatore*: affinché la $G_r(s)$ fornita dalla (6.35) sia fisicamente realizzabile, cioè presenti un grado relativo non negativo, è necessario che il grado relativo del modello di riferimento $G_0(s)$ sia non inferiore a quello del sistema controllato $G(s)$, cioè che il grado di $Q_0(s)$ superi quello di $P_0(s)$ di almeno tanto quanto il grado di $Q(s)$ supera quello di $P(s)$.

2. *Condizioni imposte dal comportamento a regime*: un sistema di tipo 1, in cui la funzione di guadagno di anello $G_r(s) G(s)$ presenta un polo nell'origine, è caratterizzato dal fatto che i polinomi $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ hanno i termini noti uguali: infatti affinché l'errore a regime nella risposta al gradino sia nullo deve risultare

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} (1 - G_0(s)) = 0, \quad (7.3)$$

il che appunto avviene se e solo se vale la condizione indicata. Analogamente, nel caso di un sistema di tipo 2 oltre alla (7.3) deve essere soddisfatta la

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} (1 - G_0(s)) = 0, \quad (7.4)$$

il che avviene se e solo se in $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ sono uguali sia i termini noti sia quelli di primo grado. In questo caso pertanto $G_0(s)$ deve avere almeno uno zero.

Se il sistema controllato non è asintoticamente stabile (come si è finora ipotizzato), ma presenta tutti i poli a parte reale negativa tranne un polo

semplice o multiplo nell'origine, occorre scegliere un modello di riferimento che soddisfi la condizione imposta dal comportamento a regime per un tipo di sistema non inferiore a quello corrispondente a tali poli; in tal modo nella (7.2) le radici nulle di $Q(s)$ si cancellano con radici nulle di $Q_0(s) - P_0(s)$ e si evita pertanto che il regolatore presenti degli zeri nell'origine.

Dalle (7.2), (7.1) si deducono le relazioni

$$G_r(s) G(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)}, \quad \frac{1}{1 + G_r(s) G(s)} = 1 - G_0(s), \quad (7.5)$$

che forniscono la funzione di trasferimento ad anello aperto e la funzione di sensibilità $S(s)$ quando sia dato il modello di riferimento. La funzione di sensibilità complementare coincide con la funzione di trasferimento del modello $G_0(s)$. Le (7.5) rendono relativamente semplice la verifica dei dati di specifica sui diagrammi di Bode durante la scelta del modello.

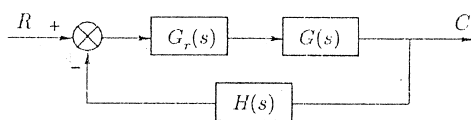


Figura 7.2

Schema per la sintesi diretta nel caso di retroazione non unitaria.

L'estensione al caso in cui la retroazione non sia unitaria, rappresentato dallo schema a blocchi di Fig. 7.2, non presenta difficoltà. In questo caso dalla

$$G_0(s) = \frac{G_r(s) G(s)}{1 + G_r(s) G(s) H(s)} \quad (7.6)$$

attraverso i passaggi

$$\begin{aligned} G_0(s) (1 + G_r(s) G(s) H(s)) &= G_r(s) G(s), \\ G_r(s) G(s) (1 - G_0(s) H(s)) &= G_0(s), \end{aligned}$$

si deduce

$$G_r(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s) H(s)} \frac{1}{G(s)} = \frac{G_0(s) H(s)}{1 - G_0(s) H(s)} \frac{1}{G(s) H(s)}, \quad (7.7)$$

o anche

$$G_r(s) = \frac{\bar{P}_0(s)}{\bar{Q}_0(s) - \bar{P}_0(s)} \frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)}, \quad (7.8)$$

in cui $\bar{P}_0(s)$ e $\bar{Q}_0(s)$ sono in questo caso il numeratore e il denominatore di $G_0(s) H(s)$, $\bar{P}(s)$ e $\bar{Q}(s)$ il numeratore e il denominatore di $G(s) H(s)$.

Per semplicità d'ora in avanti si farà riferimento al caso di un sistema con retroazione unitaria; il caso frequente in cui la retroazione sia puramente algebrica si riporta facilmente ad esso, introducendo un semplice fattore di scala sia in $G_0(s)$ sia in $G(s)$, come discende dalla (7.7).

Nei casi di sistemi di tipo 0 o di tipo 1 come funzione di trasferimento per il modello di riferimento si impiega, se possibile, quella del sistema elementare del secondo ordine, assumendo

$$G_0(s) := \frac{K_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}, \quad (7.9)$$

oppure quella di un sistema del terzo ordine con due poli complessi e uno reale, cioè

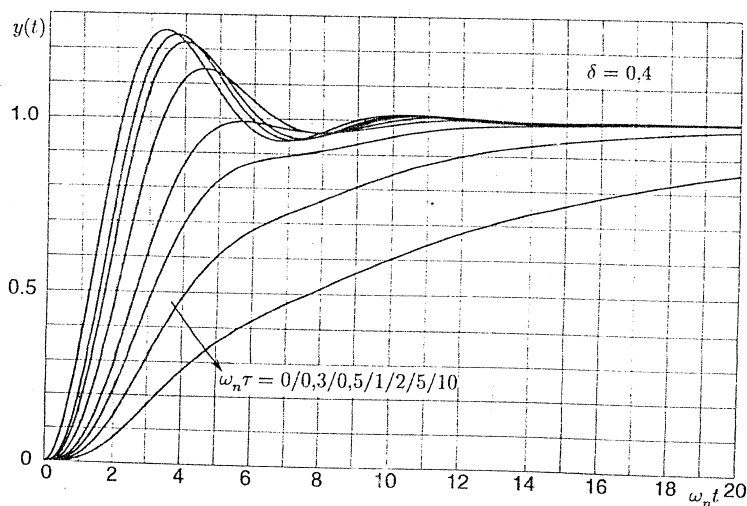
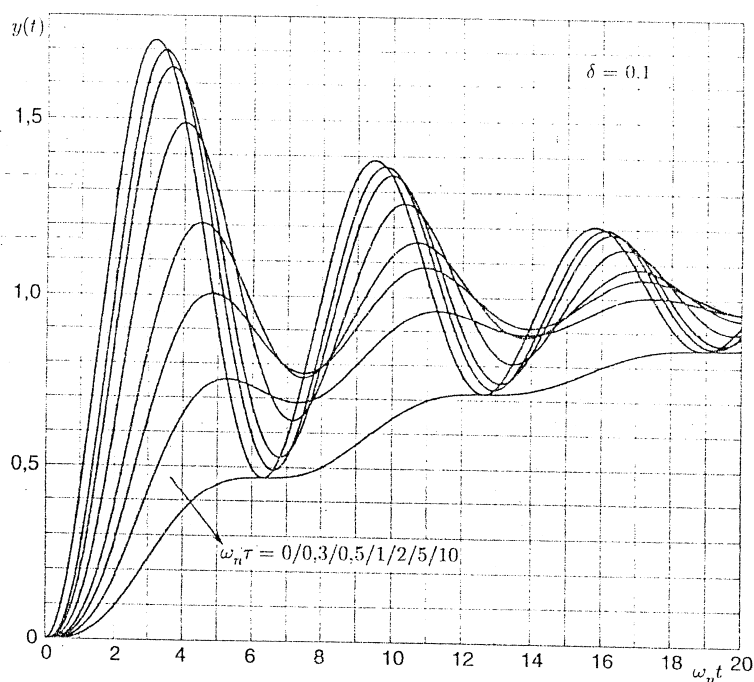
$$G_0(s) := \frac{K_0 \omega_n^2}{(1 + \tau s)(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)}, \quad (7.10)$$

oppure, se necessario per la realizzabilità fisica, la stessa con l'introduzione di un ulteriore polo reale, e così via. Se le costanti di tempo introdotte sono sufficientemente piccole in rapporto a $1/\omega_n$, le corrispondenti risposte al gradino e armonica non si discosteranno sensibilmente da quelle del sistema elementare del secondo ordine. In alternativa si possono utilizzare come modelli di riferimento quelle dei filtri di Butterworth e Bessel, che presentano una buona risposta al gradino, analoga a quella di un sistema elementare del secondo ordine ben smorzato: si sceglierà il filtro di ordine minimo che renda soddisfatta la condizione di realizzabilità fisica del regolatore. Una descrizione di tali filtri e le tabelle dei coefficienti delle relative funzioni di trasferimento fino all'ottavo ordine sono riportati al paragrafo seguente.

Per evitare di assumere un modello di riferimento di ordine eccessivo sarà bene trascurare, nel sistema controllato, i poli che risultano molto mag-

Figura 7.3

Risposte al gradino relative alla (7.10) per vari valori dei parametri.



giori in modulo (una decade o più) rispetto ad ω_n , perché influiscono in misura trascurabile sul comportamento dinamico del sistema in retroazione.

L'analisi che viene presentata nel seguito si riferisce esclusivamente alle (7.9) e (7.10), che coprono la maggior parte dei casi di interesse pratico (regolatori del primo e del secondo ordine); la sua estensione ai casi in cui siano necessari modelli di riferimento di ordine più elevato non presenta peraltro alcuna difficoltà, a parte, ovviamente, una maggiore complessità computazionale.

Nelle (7.9), (7.10) K_0 rappresenta il guadagno statico del sistema, che, essendosi supposta la retroazione unitaria, è minore o uguale a uno. Più precisamente, si assume $K_0 = 1$ se si vuole imporre un regolatore di tipo 1 o se il sistema controllato presenta un polo semplice nell'origine, mentre si assume $K_0 = K/(1+K)$ se si vuole imporre un regolatore di tipo 0 con un guadagno statico di anello pari a K .

I parametri K_0 , δ , ω_n e τ devono essere determinati in base ai dati di specifica: K_0 dipende dai dati riguardanti gli errori statici, δ è legato essenzialmente alla massima sovraelongazione nella risposta al gradino o al picco di risonanza, ω_n (e τ nel caso della (7.10)) al comportamento dinamico a regime, come l'errore di velocità o la banda passante.

Mentre nel caso della (7.9) sono già disponibili i grafici normalizzati della risposta al gradino (Fig. 2.28), della massima sovraelongazione in funzione di δ (Fig. 2.30), della risposta armonica (Fig. 3.13) e dal picco di risonanza in funzione di δ (Fig. 3.11), nel caso della (7.10) occorre provvedere grafici analoghi, che possono orientare il progettista, sensibilizzandolo alle variazioni introdotte dalla presenza del polo reale.

In Fig. 7.3 sono riportati gli andamenti della risposta al gradino per due diversi valori di δ (0,1 e 0,4) e per vari valori di $\omega_n\tau$: si può constatare che per valori di $\omega_n\tau$ inferiori a 0,5 la risposta varia di poco rispetto a quella del sistema elementare del secondo ordine, mentre valori di $\omega_n\tau$ superiori a 2 sono da evitare perché la risposta tende ad essere analoga a quella del sistema elementare del primo ordine, quindi relativamente lenta, ma con ondulazioni sovrapposte.

La famiglia di diagrammi di Fig. 7.4 generalizza il diagramma di Fig. 2.30 per valori di $\omega_n\tau$ rientranti nella gamma di maggiore interesse progettuale,

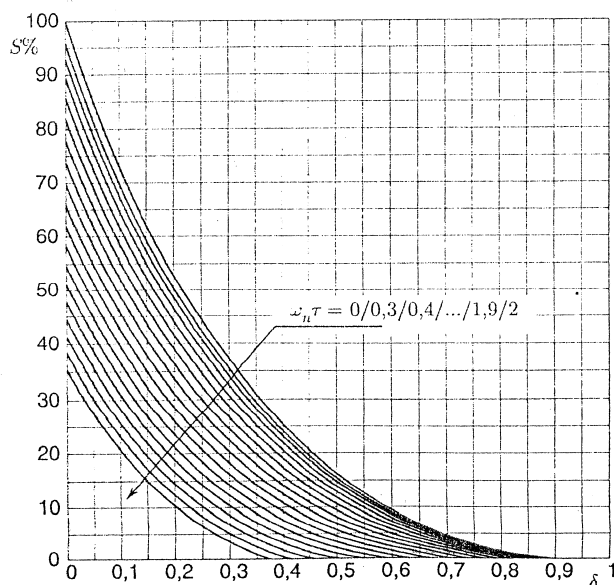
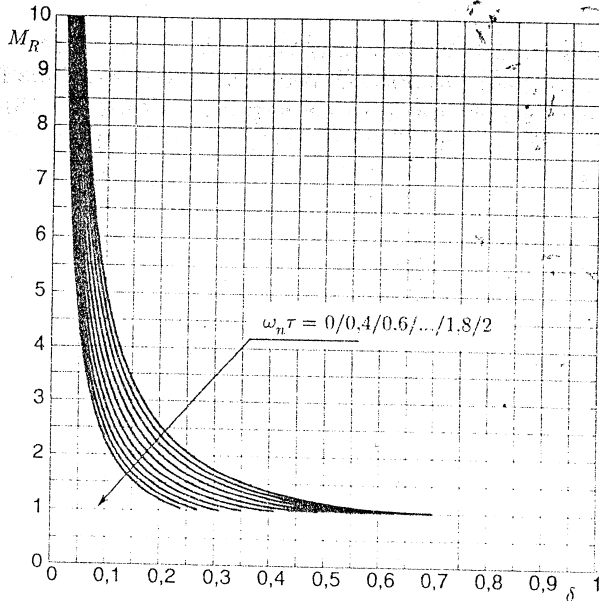


Figura 7.4

Legame fra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione in relazione alla (7.10).

Figura 7.5

Legame fra il coefficiente di smorzamento e il picco di risonanza in relazione alla (7.10).



mentre la famiglia di Fig. 7.5 costituisce l'analoga generalizzazione del diagramma di Fig. 3.11.

Per chiarire gli aspetti salienti della procedura si ritiene conveniente fare riferimento a un semplice esempio, qui di seguito riportato. Si vedano anche gli Esercizi 7.4.1 e 7.4.2.

ESEMPIO 7.1.1 Si vuole progettare un regolatore per il sistema controllato avente la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}, \quad (7.11)$$

chiuso in retroazione unitaria. I dati di specifica sono:

- costante di velocità $K_v = 10 \text{ sec}^{-1}$;
- picco di risonanza $M_R = 1,3$.

Si sceglie il modello di riferimento (7.9) con $K_0 = 1$ in quanto il sistema controllato presenta un polo nell'origine, per cui il sistema in retroazione sarà di tipo 1 o superiore; la prima specifica peraltro impone che sia di tipo 1. L'errore a regime in risposta alla rampa è

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} (1 - G_0(s)) = \frac{2\delta}{\omega_n},$$

da cui

$$K_v = \frac{1}{e_r} = \frac{\omega_n}{2\delta} = 10 \text{ sec}^{-1}.$$

La seconda specifica implica direttamente $\delta = 0,45$, per cui, sostituendo nella relazione precedente, si ricava $\omega_n = 9 \text{ sec}^{-1}$. Applicando la (7.2) si ha

$$G_r(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n)} \frac{s(1 + \tau s)}{K} = K_r \frac{1 + \tau s}{1 + Ts}, \quad (7.12)$$

con

$$K_r = \frac{\omega_n}{2\delta K} = \frac{K_v}{K} = \frac{10}{K},$$

$$\frac{1}{T} = 2\delta\omega_n = 8,1 \text{ sec}^{-1}.$$

Si noti che tali risultati sono identici a quelli già ottenuti per lo stesso problema nell'Esempio 6.4.2 al Paragrafo 6.4 con il procedimento di cancellazione polo-zero.

Il termine $P_0(s)/(Q_0(s) - P_0(s))$, che costituisce il primo fattore della funzione di trasferimento del regolatore, introduce i due poli mostrati in Fig. 7.6, uno dei quali, il polo nell'origine, si elide con lo zero nell'origine presente nell'altro fattore $1/G(s)$.

Il regolatore ottenuto presenta uno zero in $-1/\tau$, che coincide con il polo non nullo del sistema controllato, e un polo in $-1/T$. L'azione così ottenuta è anticipatrice o ritardatrice a seconda del valore di τ .

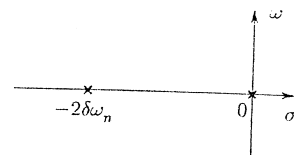
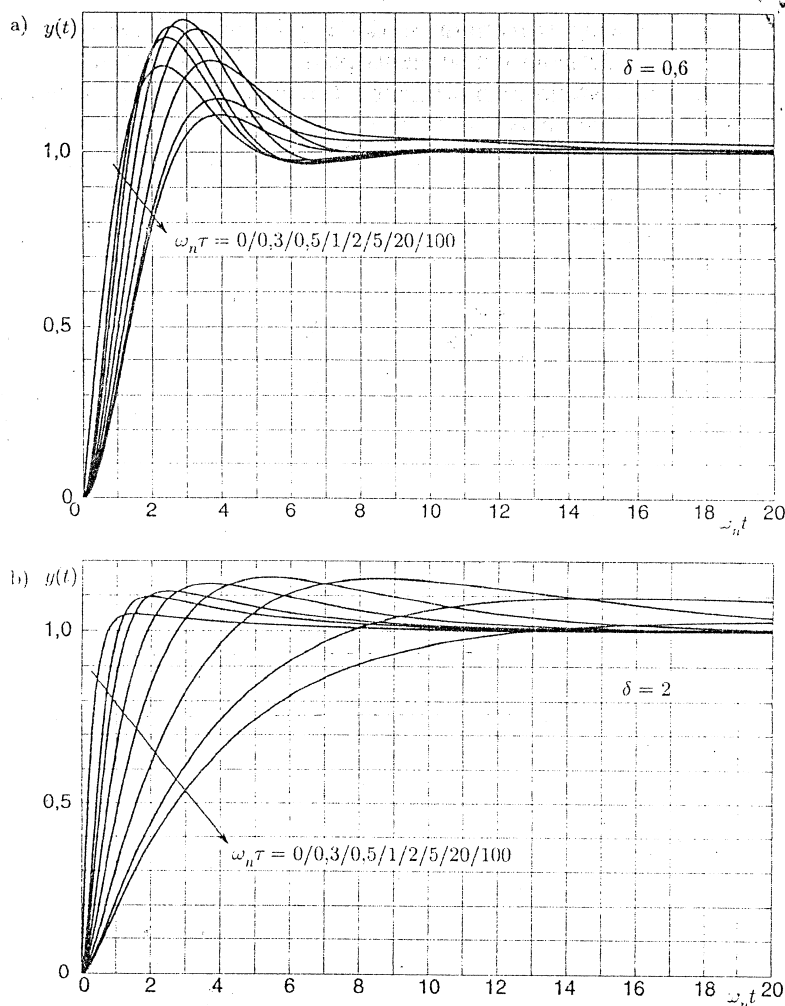


Figura 7.6 Disposizione dei poli del fattore $P_0(s)/(Q_0(s) - P_0(s))$ nel caso del regolatore (7.12).

**Figura 7.7**

Risposte al gradino relative alla (7.13) per vari valori dei parametri.

Nel caso si desideri ottenere un sistema di tipo 2, non si possono utilizzare come funzioni di trasferimento del modello di riferimento le (7.9) e (7.10), ma occorre una funzione il cui numeratore abbia il termine costante e quello di primo grado uguali a quelli del denominatore, come per esempio la

$$G_0(s) := \frac{(2\delta\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}{(1 + \tau s)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (7.13)$$

In Fig. 7.7 sono riportati gli andamenti della corrispondente risposta al gradino per due diversi valori di δ (0,6 e 2) e per vari valori di $\omega_n\tau$.

ESEMPIO 7.1.2 Si vuole progettare un regolatore per il sistema controllato avente la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau_1 s)}, \quad (7.14)$$

chiuso in retroazione unitaria. I dati di specifica sono:
 - errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
 - massima sovraelongazione nella risposta al gradino inferiore al 10 %;

- tempo di salita inferiore a 0,5 sec.

La prima specifica impone che il sistema sia di tipo 2: si sceglie il modello di riferimento (7.13) e, in base ai grafici di Fig. 7.7b, per soddisfare le altre specifiche si sceglie $\delta := 2$, $\omega_n := 1 \text{ sec}^{-1}$ e $\tau := 0,3 \text{ sec}$. Per il regolatore si deduce la funzione di trasferimento

$$G_r(s) = \frac{(2\delta\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}{(\tau s + 2\delta\omega_n\tau + 1)s} \frac{1 + \tau_1 s}{K} \quad (7.15)$$

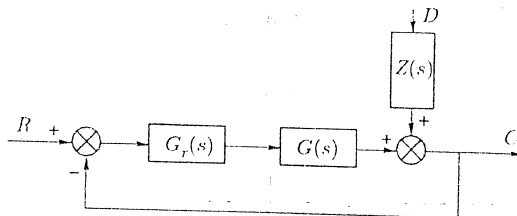
Riassumendo, il progetto analitico dei regolatori, delineato negli esempi sopra riportati, si articola nei seguenti passi:

- i) si sceglie un modello di riferimento, tenendo conto della differenza fra i numeri dei poli e degli zeri di quella del sistema controllato;
- ii) si determinano i parametri di essa in base ai valori limite corrispondenti ai dati di specifica;
- iii) si ricava la funzione di trasferimento del regolatore mediante la (7.2);
- iv) si cerca di semplificare tale funzione di trasferimento operando cancellazioni di poli con zeri, se i dati di specifica lo consentono.

Per ciò che riguarda il punto ii), negli esempi precedenti si è considerato un solo ingresso, mentre non è raro il caso in cui le specifiche si riferiscano anche ad un secondo ingresso, ad esempio un disturbo.

Figura 7.8

Schema per il progetto analitico nel caso di due ingressi.



L'estensione al caso di due o più ingressi non presenta peraltro alcuna difficoltà: si consideri ad esempio il caso dello schema a blocchi di Fig. 7.8, in cui è presente un secondo ingresso $D(s)$ e si indichi con $Z_0(s)$ la funzione di trasferimento ad anello chiuso ad esso relativa. Si può scrivere

$$Z_0(s) = \frac{Z(s)}{1 + G_r(s) G(s)}$$

e, tenendo conto della seconda delle (7.5),

$$Z_0(s) = Z(s) (1 - G_0(s)) = Z(s) \frac{Q_0(s) - P_0(s)}{Q_0(s)} \quad (7.16)$$

La (7.16) può essere utilizzata per dedurre i valori dei parametri di $G_0(s)$ direttamente da specifiche imposte su $Z_0(s)$ (ad esempio un limite per la sensibilità dell'uscita a un disturbo in una data banda di frequenze). È ovvio che, qualora alla determinazione di un parametro concorrano più dati di specifica, normalmente espressi da ineguaglianze, si opererà la scelta più restrittiva. Nel caso di retroazione non unitaria dalle (7.7), (7.6) si deducono le seguenti relazioni, che sostituiscono le (7.5)

$$G_r(s) G(s) H(s) = \frac{G_0(s) H(s)}{1 - G_0(s) H(s)},$$

$$\frac{1}{1 + G_r(s) G(s) H(s)} = 1 - G_0(s) H(s).$$

La seconda di esse fornisce la funzione di sensibilità. Si ha pertanto

$$Z_0(s) = Z(s) (1 - G_0(s) H(s)) = Z(s) \frac{\bar{Q}_0(s) - \bar{P}_0(s)}{\bar{Q}_0(s)}, \quad (7.17)$$

in cui $\bar{P}_0(s)$ e $\bar{Q}_0(s)$ indicano, come in precedenza, il numeratore e il denominatore di $G_0(s) H(s)$.

7.2. I filtri di Butterworth e di Bessel come modelli di riferimento

Per il progetto analitico dei regolatori è necessario disporre di un modello di riferimento che nel caso dei sistemi di tipo 0 o 1 in genere ha il numeratore costituito da una costante, ma che spesso ha il denominatore di grado relativamente elevato per soddisfare la condizione di realizzabilità fisica del regolatore.

Funzioni di trasferimento ben note, che possiedono i requisiti per essere adottate come modelli di riferimento nel progetto analitico dei regolatori di tipo 0 o 1 sono quelle dei filtri di Butterworth e di Bessel: come si vedrà tra breve, i primi presentano una risposta al gradino con una certa sovraelongazione, mentre la risposta al gradino dei secondi non presenta sovraelongazione.

Filtri di Butterworth

Si consideri la funzione

$$F_n(s) := \frac{1}{s^{2n} + (-1)^n}, \quad (7.18)$$

con n intero positivo, i cui poli sono le radici dell'equazione

$$s^{2n} + (-1)^n = 0, \quad (7.19)$$

date da

$$p_k = e^{j \frac{2k+n-1}{n} \frac{\pi}{2}} \quad (k=1, 2, \dots, 2n). \quad (7.20)$$

Essi risultano situati su una circonferenza di raggio unitario, distribuiti uniformemente a distanza angolare di π/n e in posizione simmetrica rispetto all'asse reale. Ovviamente $F_n(s)$ risulta instabile. Essa può essere fattorizzata come

$$F_n(s) = F_n^-(s) F_n^+(s), \quad (7.21)$$

in cui $F_n^+(s)$ è di ordine n con tutti i poli nel semipiano destro, mentre $F_n^-(s)$ è di ordine n con tutti i poli nel semipiano sinistro: quest'ultima costituisce la funzione di trasferimento del *Filtro di Butterworth* di ordine n e di banda unitaria. La funzione di trasferimento del filtro di Butterworth di ordine n e di banda ω_0 si ottiene mediante una messa in scala delle pulsazioni:

$$G_n(s) := F_n^-\left(\frac{s}{\omega_0}\right) = \omega_0^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - \omega_0 p_k}. \quad (7.22)$$

Avendo i poli in posizione simmetrica rispetto all'asse immaginario, $F^+(s)$ ed $F^-(s)$ presentano risposte armoniche identiche in modulo, cioè risulta

$$|F_n^-(j\omega)| = |F_n^+(j\omega)| = \sqrt{F_n(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}; \quad (7.23)$$

si ha quindi $G_n(j\omega_0) = 1/\sqrt{2}$, il che significa che in corrispondenza della pulsazione ω_0 l'attenuazione vale sempre 3 dB, indipendentemente dall'ordine del filtro.

Figura 7.9

Disposizione dei poli dei filtri di Butterworth (o) e di Bessel (x) di ordine 4 e 5.

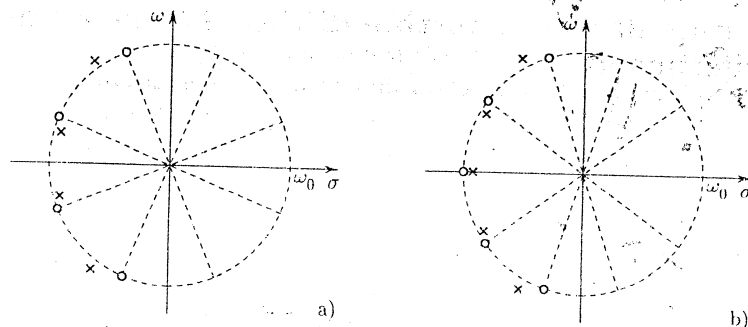
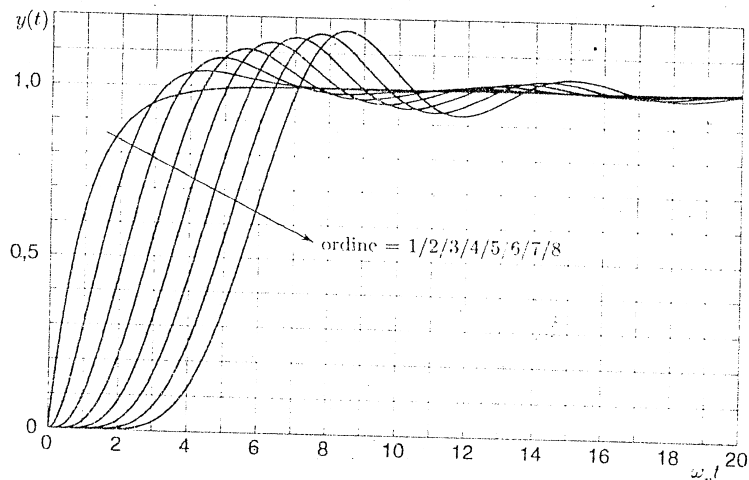


Figura 7.10

Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 ad 8 e tabella dei relativi coefficienti.



ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

In Fig. 7.9 sono rappresentate le disposizioni dei poli dei filtri di Butterworth di ordine 4 e 5, in Fig. 7.10 le risposte al gradino dei filtri di ordine da 1 ad 8 e i coefficienti dei corrispondenti polinomi a denominatore (detti *polinomi di Butterworth*).

◆ Filtri di Bessel

I filtri di Bessel nascono da una particolare approssimazione razionale della funzione di trasferimento del ritardo unitario. Si considerino le funzioni coseno e seno iperbolico:

$$\cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2} = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \dots, \quad (7.24)$$

$$\sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots; \quad (7.25)$$

da esse risulta

$$e^{-s} = \frac{1}{e^s} = \frac{1}{\cosh s + \sinh s} = \frac{1/\sinh s}{\cosh s/\sinh s + 1}. \quad (7.26)$$

Dagli sviluppi in serie (7.24) e (7.25) si deduce la seguente espressione della cotangente iperbolica come frazione continua:

$$\cotanh s = \frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{7}{s} + \dots}}} \quad (7.27)$$

troncando lo sviluppo al termine n -esimo si ricava una funzione razionale del tipo $P(s)/Q(s)$, in cui i polinomi $P(s)$ e $Q(s)$; a parte un termine costante b_0 uguale per entrambi, per n tendente all'infinito tendono rispettivamente agli sviluppi in serie di $\cosh s$ e $\sinh s$. Ad esempio, per $n=4$, cioè troncando all'ultimo termine indicato nella (7.27), si ha:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^4 + 45s^2 + 105}{10s^3 + 105s} \quad (7.28)$$

Sostituendo nella (7.26) in luogo di $\cosh s$ e $\sinh s$ i polinomi $P(s)$ e $Q(s)$ così ottenuti per troncamento, si deduce l'approssimazione

$$e^{-s} \simeq \frac{b_0}{P(s) + Q(s)} = \frac{b_{n,0}}{B_n(s)}, \quad (7.29)$$

in cui $B_n(s) := P(s) + Q(s)$ è, per definizione, il *polinomio di Bessel* di ordine n e $b_{n,0}$ il suo termine noto. Nel caso particolare della (7.28) si ha

$$B_4(s) = s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105, \quad b_0 = 105. \quad (7.30)$$

Una volta ricavati nel modo indicato due polinomi successivi, ad esempio $B_0(s)$ e $B_1(s)$, per dedurre ogni altro polinomio di Bessel si può impiegare la relazione ricorrente

$$B_n(s) = (2n-1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s). \quad (7.31)$$

Nella seguente tabella sono riportati i coefficienti da $b_{n,n}$ a $b_{n,0}$ dei polinomi di Bessel $B_n(s)$ per n da 0 ad 8.

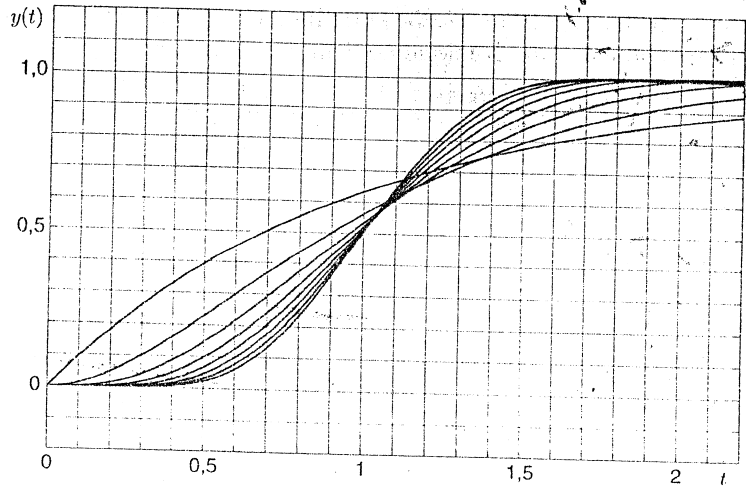
n	$b_{n,8}$	$b_{n,7}$	$b_{n,6}$	$b_{n,5}$	$b_{n,4}$	$b_{n,3}$	$b_{n,2}$	$b_{n,1}$	$b_{n,0}$
0									1
1								1	1
2							1	3	3
3						1	6	15	15
4					1	10	45	105	105
5				1	15	105	420	945	945
6			1	21	210	1.260	4.725	10.395	10.395
7		1	28	378	3.150	17.325	62.370	135.135	135.135
8	1	36	630	6.930	51.975	270.270	945.945	2.027.025	2.027.025

Le risposte al gradino delle corrispondenti funzioni di trasferimento (7.29), che approssimano il ritardo unitario, sono riportate in Fig. 7.11. Dal confronto di tali risposte con quelle di Fig. 4.36, relative alle approssimanti di Padé, risulta una convergenza al ritardo unitario molto più lenta; si noti peraltro che, mentre i filtri di Bessel sono sempre stabili, le approssimanti di Padé con $p=0$ possono risultare instabili.

Le funzioni di trasferimento (7.29) al variare di n non presentano tutte un'uguale pulsazione di rottura come quelle dei filtri di Butterworth, per cui è opportuno operare una messa in scala delle frequenze che ne renda unitaria

Figura 7.11

Risposte al gradino delle approssimazioni (7.29) del ritardo unitario per $n=1, 2, \dots, 8$.



la pulsazione di rottura. Ciò porta alla definizione di nuovi coefficienti $\alpha_{n,i}$ ($i=n, \dots, 0$), mediante le relazioni

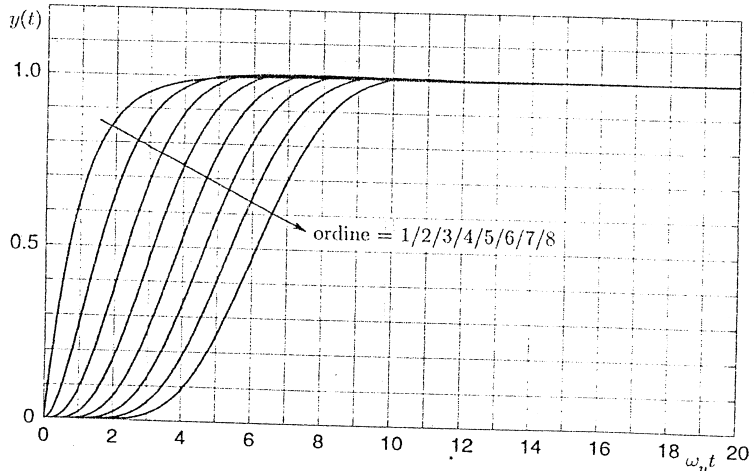
$$\alpha_{n,i} = \frac{b_{n,i}}{\omega_r^{n-i}} \quad (i=0, \dots, n-1), \quad \text{con } \omega_r := \sqrt[n]{b_{n,0}}; \quad (7.32)$$

tali coefficienti verranno assunti come quelli dei polinomi a denominatore dei *filtri di Bessel* di banda unitaria, mentre si porrà uguale ad uno il numeratore, come nel caso dei filtri di Butterworth. Una pulsazione di rottura ω_n arbitraria si potrà ottenere sostituendo s/ω_n ad s nella funzione di trasferimento.

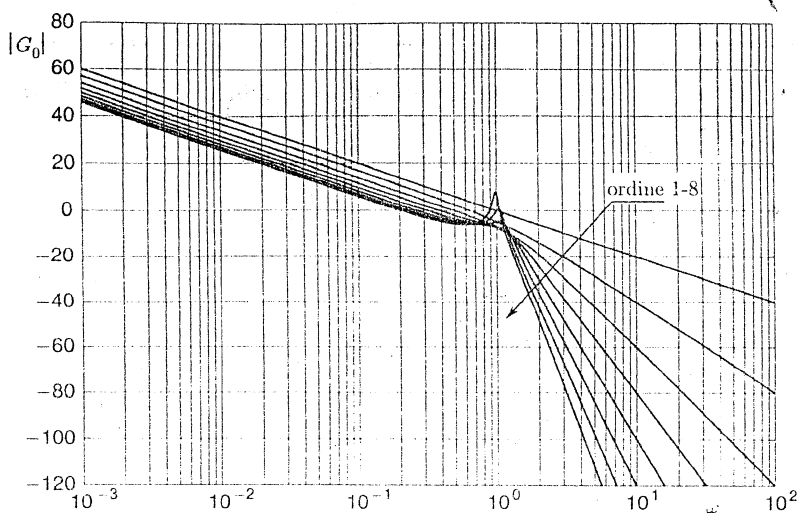
In Fig. 7.9 sono rappresentate le disposizioni dei poli dei filtri di Bessel di ordine 4 e 5, in Fig. 7.12 le risposte al gradino dei filtri di ordine da 1 ad 8 e tabella dei corrispondenti polinomi a denominatore.

Figura 7.12

Risposte al gradino dei filtri di Bessel di ordine da 1 ad 8 e tabella dei relativi coefficienti.

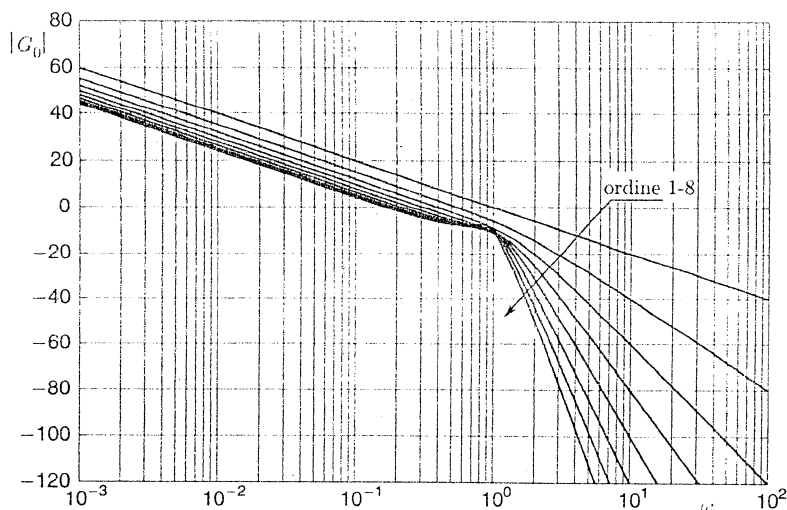


ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1									
2								1	1
3							1	1,732	1
4						1	2,433	2,466	1
5					1	3,124	4,392	3,201	1
6				1	3,811	6,777	6,886	3,936	1
7			1	4,495	9,622	12,36	9,920	4,672	1
8	1	5,861	5,178	12,93	19,93	20,27	13,49	5,407	1
			16,70	29,90	36,51	30,90	17,61	6,143	1

**Figura 7.13**

Risposte armoniche ad anello aperto corrispondenti ai filtri di Butterworth di ordine da 1 ad 8.

Per tener conto delle specifiche che si riferiscono alla risposta armonica, come la sensibilità ai disturbi a bassa frequenza o ad alta frequenza rispetto alla frequenza di incrocio sono utili i diagrammi relativi alla funzione di risposta armonica ad anello aperto data dalla prima delle (7.5), riportati in Fig. 7.13 e in Fig. 7.14 per i due tipi di filtri.

**Figura 7.14**

Risposte armoniche ad anello aperto corrispondenti ai filtri di Bessel di ordine da 1 ad 8.

La risposta dei filtri di Butterworth e di Bessel può essere “corretta” per ottenere un miglior smorzamento (ad esempio allontanando dall’asse immaginario la coppia di poli ad esso più vicina o assumendo inizialmente un filtro di ordine incrementato di due ed eliminando tale coppia).

Uno dei maggiori vantaggi dell’impiego dei filtri di Bessel e di Butterworth come modelli di riferimento consiste nel fatto che essi sono caratterizzati da un solo parametro, la pulsazione di rottura ω_n . Il seguente esempio mostra come tale parametro possa essere determinato in funzione dei dati di specifica imposti.

ESEMPIO 7.2.1 Si vuole progettare un regolatore utilizzando come modello di riferimento un filtro di Butterworth o di Bessel per il sistema controllato avente la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{400}{(s+1)(s+10)(s+40)} \quad (7.33)$$

chiuso in retroazione unitaria. I dati di specifica sono:

- errore a regime nullo in risposta al gradino;
- massima sovraelongazione $S \leq 10\%$;
- tempo di ritardo $t_r \leq 0,1$ sec;
- errore a regime in risposta alla rampa $e_r \leq 0,1 \text{ sec}^{-1}$;
- reiezione dei disturbi alla pulsazione

$$\omega_R = 0,5 \text{ sec}^{-1} \geq 20 \text{ dB}.$$

Essendo il grado relativo del sistema (7.33) pari a 3, si deve scegliere un filtro di ordine 3. La prima specifica impone semplicemente che il guadagno statico del filtro sia unitario, cioè che la costante a numeratore sia uguale al termine noto a denominatore. Un filtro di Butterworth di ordine 3 soddisfa la seconda specifica, come risulta dalle risposte al gradino riportate in Fig. 7.10. La funzione di trasferimento del filtro è pertanto

$$G_0(s) = \frac{1}{\alpha_3 \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + \alpha_2 \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \alpha_1 \frac{s}{\omega_n} + 1} \quad (7.34)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \frac{s}{\omega_n} + 1}.$$

Si deve determinare l'unico parametro libero ω_n in base alle altre specifiche.

Dalle risposte al gradino della Fig. 7.10 risulta $\omega_n t_r = 21,3$, che implica la condizione

$$\omega_n \geq \frac{2,13}{t_r} = 21,3, \quad (7.35)$$

affinché sia soddisfatta la specifica sul tempo di ritardo. Per ciò che riguarda la specifica sull'errore a regime in risposta alla rampa, si ha

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} (1 - G_0(s))$$

$$= \frac{1}{s} \frac{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \frac{s}{\omega_n}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \frac{s}{\omega_n} + 1} = \frac{2}{\omega_n} \quad (7.36)$$

affinché risulti $e_r \leq 0,1$, deve essere $\omega_n \geq 20$.

Per considerare il vincolo imposto dalla specifica riguardante la reiezione dei disturbi, ci si riferisce al diagramma di Bode del modulo della funzione di risposta armonica ad anello aperto $|G_a(j\omega)|$ del filtro di Butterworth di ordine 3 con pulsazione di rottura unitaria, disponibile in Fig. 7.13. Su tale diagramma si ricava la pulsazione ω_1 tale che $|G_a(j\omega_1)| = 20 \text{ dB}$ e si assume $\omega_n = \omega_R/\omega_1$: si ha così una traslazione del diagramma verso destra di ω_n che porta al soddisfacimento del vincolo sulla reiezione dei disturbi. Nel caso specifico dal diagramma di Fig. 7.13 si ricava $\omega_1 = 0,05$, per cui si ha $\omega_R/0,05 = 10$. Per soddisfare il dato di specifica, deve essere $\omega_n \geq 10$.

Per soddisfare tutti i dati di specifica nel regolatore, definito da

$$G_r(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^3 + 2 \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \frac{s}{\omega_n} + 1} \frac{1}{G(s)} \quad (7.37)$$

si deve assumere $\omega_n \geq 21,3 \text{ sec}^{-1}$.

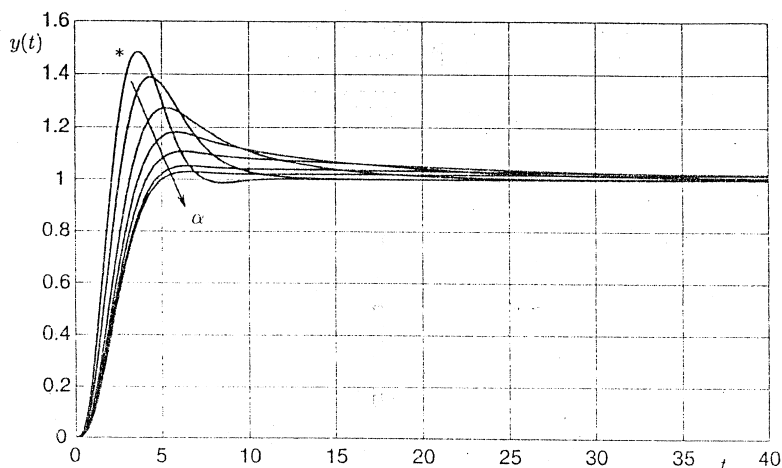
◆ Modelli per sistemi di tipo 2

Si possono ottenere modelli di riferimento per sistemi di tipo 2 o superiore, a partire da quelle dei filtri di Butterworth o di Bessel. Si ricorda che un sistema di tipo 2 con retroazione unitaria deve avere gli ultimi due termini del polinomio a numeratore della funzione di trasferimento ad anello chiuso uguali a quelli del denominatore. Quindi, se k è la differenza dei gradi imposta dalla condizione di realizzabilità fisica, si può assumere

$$G_0(s) = \frac{a_1 s + a_0}{a_{k+1} s^{k+1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (7.38)$$

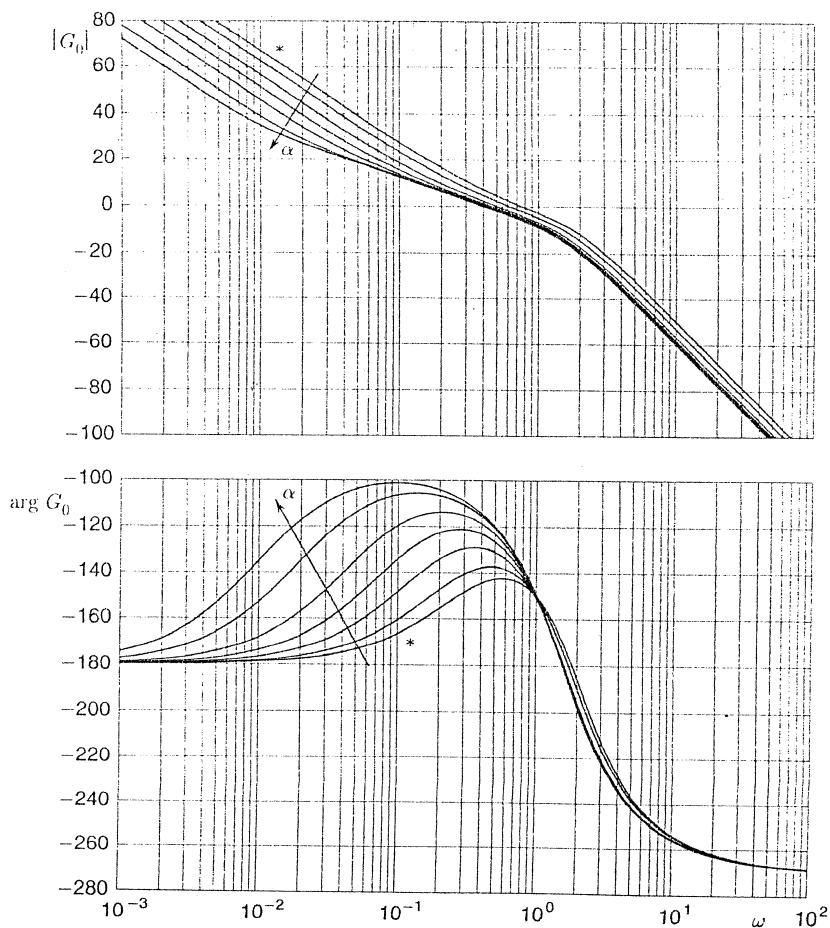
in cui il denominatore è costituito da un polinomio di Bessel o di Butterworth.

Tale scelta non è tuttavia consigliabile in quanto lo zero produce una notevole sovraelongazione nella risposta al gradino e, in genere, oscillazioni persistenti o poco smorzate in presenza di saturazione. Ad esempio, per $k=3$ e assumendo un filtro di Bessel di ordine 4 con $\omega_n=1$, la risposta al gradino unitario corrispondente alla (7.38) è la curva contrassegnata con un

**Figura 7.15**

Risposte al gradino unitario di vari modelli di riferimento di tipo 2.

asterisco in Fig. 7.15 e la risposta armonica ad anello aperto, cioè relativa alla $F(s) := G_0(s)/(1 - G_0(s))$, è riportata in Fig. 7.16, pure contrassegnata con un asterisco: si constata che il margine di fase diminuisce rapidamente al diminuire del guadagno.

**Figura 7.16**

Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi delle funzioni di trasferimento di anello corrispondenti alle risposte di Fig. 7.15.

Per ridurre la massima sovraelongazione e migliorare la stabilità relativa, a scapito, però, del tempo di assestamento, si può procedere in modo diverso:

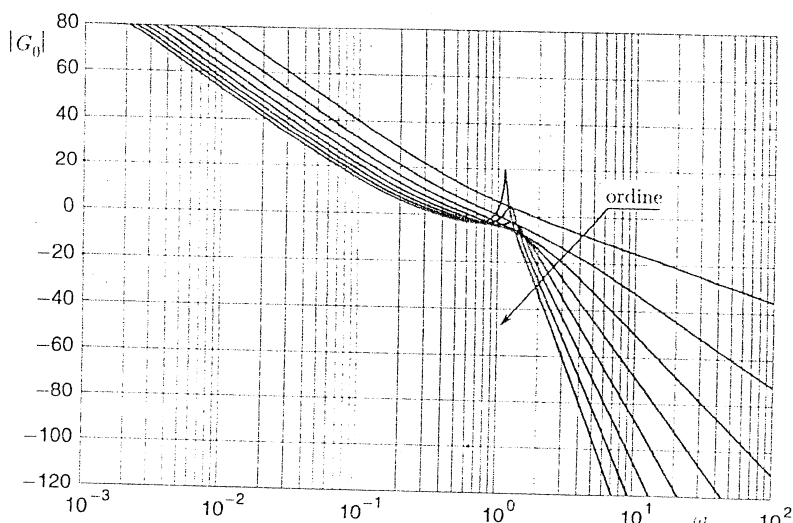
si introduce, nella funzione di trasferimento del filtro di ordine k , una coppia polo-zero, con lo zero più vicino all'origine, assumendone

$$G_0(s) = \frac{(a_1 + a_0 \frac{\alpha}{\omega_n}) s + a_0}{(a_k s^k + \dots + a_1 s + a_0) (1 + \frac{\alpha}{\omega_n} s)} \quad (7.39)$$

il parametro α viene variato fino ad ottenere il comportamento voluto. Per $\alpha = 2, 5, 10, 20, 50, 100$, $k = 3$ e $\omega_n = 1$ le risposte si modificano come è indicato in Fig. 7.15 e in Fig. 7.16: la massima sovraelongazione si riduce dal 50 al 2%, mentre il tempo di assestamento (quindi il tempo di ripristino della regolazione asintotica con errore trascurabile nell'inseguimento della rampa dopo un'eventuale perturbazione) aumenta in misura considerevole. Dai diagrammi di Fig. 7.16 risulta che il valore di α incide poco sul margine di fase, che risulta sempre di circa 60° . Si noti che, qualora si utilizzi la (7.39) per trasformare un filtro in un modello adatto per la progettazione di un sistema di controllo di tipo 2, una volta scelto il valore di α , che può essere imposto da una specifica sulla massima sovraelongazione o sul tempo di assestamento, l'unico parametro di progetto resta la pulsazione ω_n , per cui si può ancora utilizzare la procedura indicata nell'Esempio 7.2.1.

In Fig. 7.17 sono riportati i diagrammi di Bode delle ampiezze per i filtri ottenuti da quelli di Bessel aggiungendo uno zero come è indicato dalla (7.38), con gradi relativi compresi fra 1 e 8. Dall'esame dei diagrammi di Fig. 7.16 e di Fig. 7.17 risulta che, qualora si progetti un regolatore utilizzando come modello un filtro di Butterworth o di Bessel, si può aumentare il guadagno alle basse frequenze (e quindi migliorare la funzione di sensibilità) assumendo un sistema di tipo 2 o superiore indipendentemente dai requisiti imposti dall'errore di regolazione, e si può aumentare l'attenuazione alle alte frequenze (e quindi migliorare la funzione di sensibilità complementare) aumentando l'ordine del filtro, indipendentemente dal grado relativo del sistema controllato.

Figura 7.17
Risposte armoniche ad anello aperto corrispondenti ai filtri di Bessel di ordini da 2 a 9 con uno zero introdotto come è indicato nella (7.38).



7.3. Estensioni della sintesi diretta: sistemi a fase non minima, instabili e con ritardi finiti

Il procedimento di sintesi diretta descritto al Paragrafo 7.1 è soggetto alla limitazione di potersi applicare solo a sistemi controllati stabili e a fase mi-

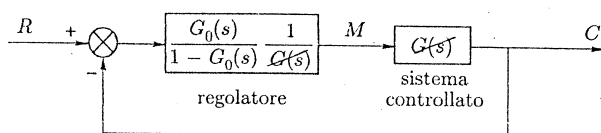


Figura 7.18
Cancellazione polo-zero
nella sintesi diretta.

nima, cioè privi di poli e zeri nel semipiano destro del piano complesso. La ragione di ciò è la seguente: si consideri la (7.2), che fornisce direttamente la funzione di trasferimento del regolatore: a parte possibili (ma poco probabili se non predisposte ad hoc) cancellazioni "interne" di fattori di $P_0(s)$ con fattori di $P(s)$ e di fattori di $P_0(s) - Q_0(s)$ con fattori di $Q(s)$, vi si ritrovano come zeri tutti i poli del sistema controllato e come poli tutti gli zeri del sistema controllato: il regolatore fornito dalla (7.2) opera infatti per cancellazione polo-zero, come risulta dallo schema a blocchi di Fig. 7.18.

Se la $G(s)$ presenta uno o più zeri nel semipiano destro, la $G_r(s)$ viene ad avere altrettanti poli nelle medesime posizioni che, per le inevitabili imprecisioni nella realizzazione fisica, non li cancellano perfettamente, per cui il sistema in retroazione presenta dei poli vicino ad ogni coppia polo-zero del sistema ad anello aperto e risulta pertanto instabile. L'unica possibilità di intervento per evitare questo consiste nello scegliere un modello di riferimento che presenti gli stessi zeri del sistema controllato: in tal modo si rendono possibili delle cancellazioni interne alla (7.2), che vengono operate prima della realizzazione del regolatore. Tale modo di procedere è perfettamente coerente, non essendo in effetti possibile eliminare dalla funzione di trasferimento del sistema complessivo gli zeri di quella del sistema controllato.

Infatti, considerando per semplicità il caso in cui lo zero nel semipiano destro sia unico, se è $G(s) = G'(s)(s - z_0)$ con $z_0 > 0$, assumendo un modello di riferimento con lo stesso zero, cioè esprimibile come $G_0(s) = G'_0(s)(s - z_0)$, si ottiene

$$\begin{aligned} G_r(s) &= \frac{G'_0(s)(s - z_0)}{1 - G'_0(s)(s - z_0)} \frac{1}{G'(s)(s - z_0)} \\ &= \frac{G'_0(s)}{(1 - G'_0(s)(s - z_0)) G'(s)} \end{aligned} \quad (7.40)$$

La cancellazione indicata nella (7.40) è lecita perché avviene entro il regolatore, prima della sua realizzazione, eliminando il polo che si cancellerebbe con lo zero del sistema controllato.

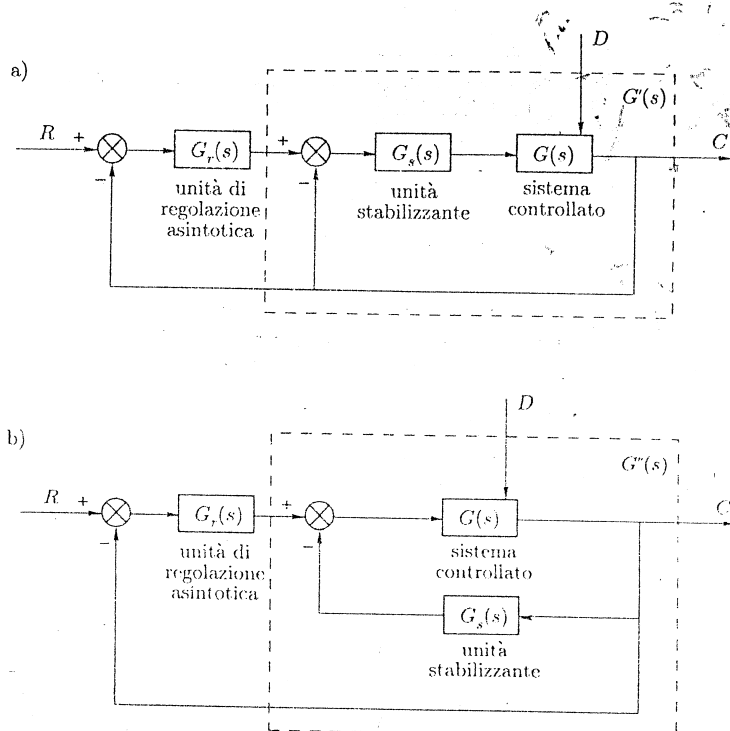
Se il sistema controllato è instabile, cioè presenta uno o più poli nel semipiano destro, la situazione è analoga, in quanto la $G_r(s)$ viene ad avere degli zeri nelle stesse posizioni e il sistema in retroazione presenta un polo instabile vicino ad ogni coppia polo-zero. In questo caso però non è necessario introdurre alcuno speciale vincolo sulla $G_0(s)$: basta stabilizzare preliminarmente il sistema controllato con un'opportuna retroazione a ciò dedicata e applicare poi il procedimento di sintesi del regolatore al nuovo sistema controllato così ottenuto.

Il regolatore viene così ad essere scomposto in due parti: un'*unità di regolazione asintotica* $G_r(s)$, contenente il modello interno, che può essere progettata per sintesi diretta come indicato in precedenza e necessariamente disposta sul percorso di segnale diretto, e un'*unità stabilizzante* $G_s(s)$, disposta in uno dei due modi indicati in Fig. 7.19. Questi due diversi collegamenti implicano una differenza sostanziale per ciò che riguarda gli zeri del

Unità di regolazione
asintotica
Unità stabilizzante

Figura 7.19

Impiego di un'unità stabilizzante.



sistema stabilizzato $G'(s)$ o $G''(s)$. Infatti nel caso di Fig. 7.19a si ottiene

$$G'(s) = \frac{G_s(s) G(s)}{1 + G_s(s) G(s)} = \frac{P_s(s) P(s)}{Q_s(s) Q(s) + P_s(s) P(s)}, \quad (7.41)$$

cioè gli zeri sono dati dall'unione degli zeri del sistema controllato e degli zeri dell'unità stabilizzante, mentre nel caso di Fig. 7.19b si ha

$$G''(s) = \frac{G(s)}{1 + G_s(s) G(s)} = \frac{P_s(s) Q_s(s)}{Q_s(s) Q(s) + P_s(s) P(s)}, \quad (7.42)$$

cioè gli zeri sono dati dall'unione degli zeri del sistema controllato e dei poli dell'unità stabilizzante. Nei casi più semplici, che fortunatamente sono anche i più frequenti, la scelta dell'unità stabilizzante si effettua utilizzando il luogo delle radici e nei casi più complessi utilizzando l'equazione diofantea che verrà presentata al prossimo paragrafo. In ogni caso la stabilizzazione avviene attirando verso il semipiano sinistro del piano complesso i rami del luogo delle radici che si originano dai poli nel semipiano destro, mediante coppie polo-zero disposte come nella rete anticipatrice.

ESEMPIO 7.3.1 Per i sistemi instabili

$$G_1(s) = \frac{-1}{s-1},$$

$$G_2(s) = \frac{2}{(s-1)(s-2)},$$

$$G_3(s) = \frac{-40}{(s+1)(s-1)(s+5)},$$

si possono scegliere le unità stabilizzanti

$$G_{s,1}(s) = -2,$$

$$G_{s,2}(s) = \frac{50(s+1)}{(s+14)},$$

$$G_{s,3}(s) = \frac{10(s+2)(s+3)}{(s+12)(s+14)},$$

il cui intervento è mostrato nei luoghi delle radici di Fig. 7.20a, di Fig. 7.20b e di Fig. 7.20c rispettivamente.

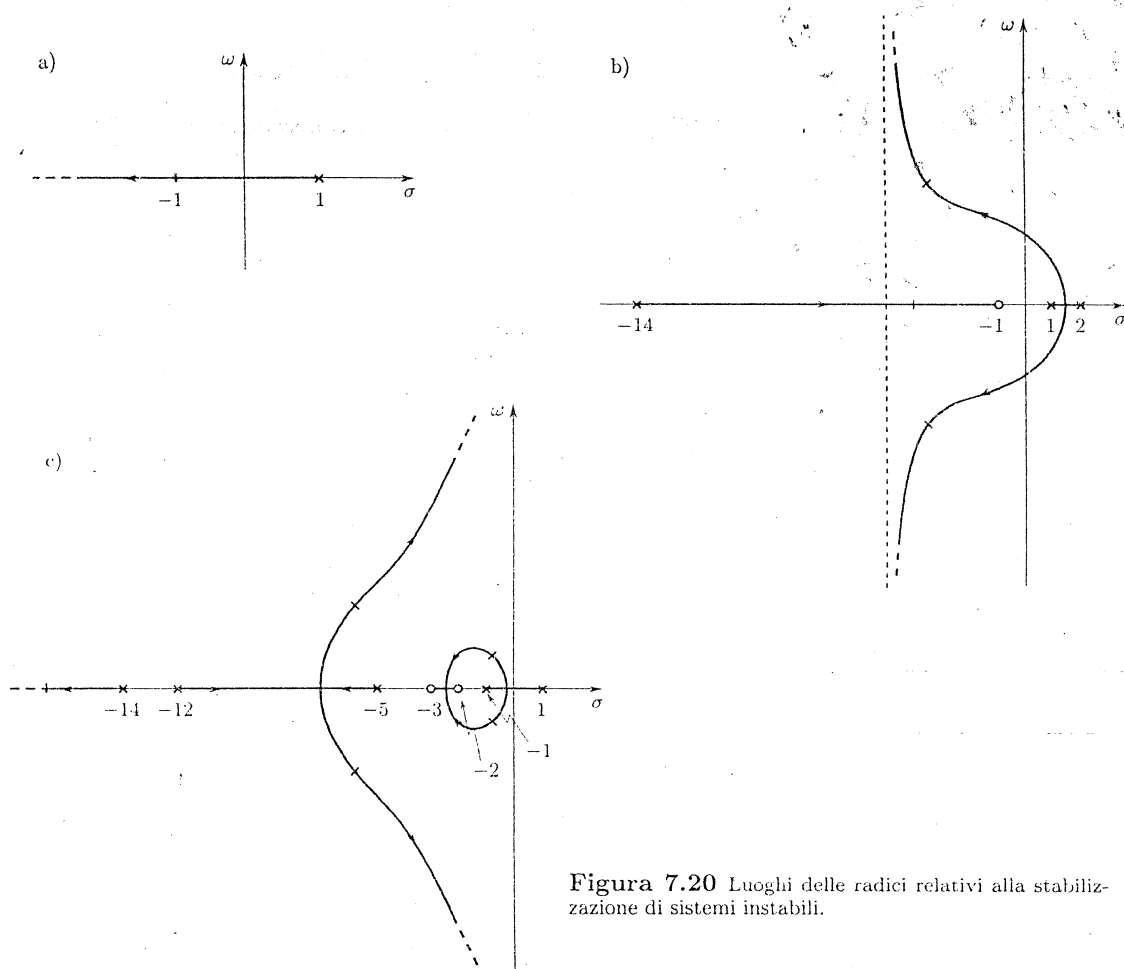


Figura 7.20 Luoghi delle radici relativi alla stabilizzazione di sistemi instabili.

Le funzioni di trasferimento dei sistemi stabilizzati secondo gli schemi di Fig. 7.19a e di Fig. 7.19b sono, nei tre casi

$$G'_1(s) = \frac{2}{s+1},$$

$$G''_1(s) = \frac{-1}{s+1},$$

$$G'_2(s) = \frac{100(s+1)}{(s+4)((s+3,5)^2 + 4,44^2)},$$

$$G''_2(s) = \frac{2(s+14)}{(s+4)((s+3,5)^2 + 4,44^2)},$$

$$G'_3(s) = \frac{400(s+2)(s+3)}{(s+17,9)((s+0,78)^2 + 1,20^2)((s+5,76)^2 + 3,02^2)},$$

$$G''_3(s) = \frac{-40(s+12)(s+14)}{(s+17,9)((s+0,78)^2 + 1,20^2)((s+5,76)^2 + 3,02^2)}.$$

Se si desidera stabilizzare un sistema conservandone un polo nell'origine occorre impiegare un'unità stabilizzante in retroazione con uno zero nell'origine, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 7.3.2 Dato il sistema instabile

$$G(s) = \frac{-1}{s(s-1)},$$

utilizzando l'unità stabilizzante in retroazione

$$G_s(s) = \frac{-8s}{s+5},$$

si ricava il sistema complessivo

$$G''(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_s(s)} = \frac{-(s+5)}{s(s+1)(s+3)},$$

che presenta ancora un polo nell'origine. Il luogo

delle radici è rappresentato in Fig. 7.21.

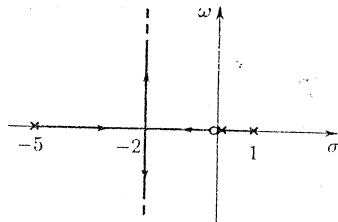
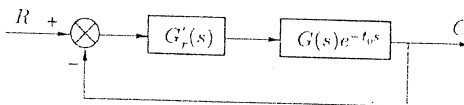


Figura 7.21 Luogo delle radici relativo alla stabilizzazione di un sistema con un polo nell'origine.

Figura 7.22

Schema di riferimento per la sintesi diretta in presenza di un ritardo finito.



Si prende ora in esame la sintesi diretta di regolatori per sistemi con ritardi finiti. Si consideri lo schema a blocchi di Fig. 7.22, analogo a quello di Fig. 7.1, ma con il sistema controllato avente funzione di trasferimento

$$G'(s) = G(s) e^{-t_0 s} = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}. \quad (7.43)$$

Dato che il sistema controllato risulta insensibile per il tempo di ritardo t_0 , è logico assumere un modello di riferimento con lo stesso ritardo. Il modello di riferimento è pertanto del tipo

$$G'_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} e^{-t_0 s};$$

la funzione di trasferimento del regolatore $G'_r(s)$ si può dedurre sostituendo, nella (7.2), $P(s)e^{-t_0 s}$ in luogo di $P(s)$ e $P_0(s)e^{-t_0 s}$ in luogo di $P_0(s)$. Si ottiene

$$G'_r(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s) e^{-t_0 s}} \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (7.44)$$

Se si dispone di un mezzo per riprodurre il ritardo finito⁽¹⁾, il regolatore $G'_r(s)$ si può realizzare secondo lo schema di Fig. 7.23, in cui $G_r(s)$ indica la funzione di trasferimento del regolatore, progettato prescindendo dal ritardo, data da

$$G_r(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \frac{1}{G(s)},$$

⁽¹⁾ Ciò è particolarmente semplice se il regolatore è digitale. Il dispositivo di Fig. 7.23 è detto *predittore di Smith*. Cfr. Smith, O.J.M., "Closer control of loops with dead time", *Chem. Eng. Progress*, vol. 53, n. 5, pp. 217-219, 1957; Smith, O.J.M., "A controller to overcome dead time", *ISA J.*, vol. 6, n. 1, pp. 28-39, 1959.

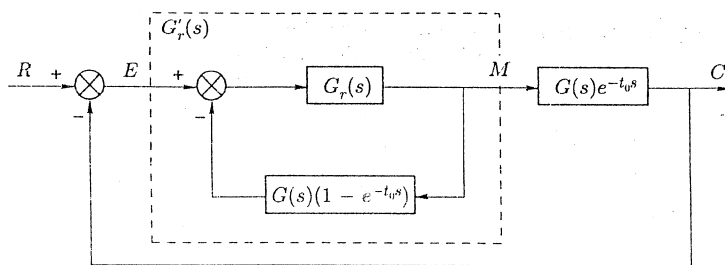


Figura 7.23

Una realizzazione del
regolatore per un sistema
con ritardo finito.

identica alla (7.2). Con riferimento al blocco evidenziato a tratto in figura, risulta infatti

$$\begin{aligned} G'_r(s) &= \frac{G_r(s)}{1 + G_r(s) G(s) (1 - e^{-t_0 s})} \\ &= \frac{P_0(s)}{(Q_0(s) - P_0(s)) G(s) + P_0(s) G(s) (1 - e^{-t_0 s})} \\ &= \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s) e^{-t_0 s}} \frac{1}{G(s)} = G'_r(s). \end{aligned}$$

Per realizzare la (7.44) si può ricorrere alle approssimanti di Padé. In genere conviene scegliere un'approssimante $P_d(s)/Q_d(s)$ con grado di $P_d(s)$ uguale a quello di $Q_d(s)$. Si ottiene

$$\begin{aligned} G'_r(s) &\simeq \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \frac{Q_d(s)}{P_d(s)} \frac{Q(s)}{P(s)} \\ &= \frac{P_0(s) Q_d(s)}{Q_0(s) Q_d(s) - P_0(s) P_d(s)} \frac{Q(s)}{P(s)}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Non occorre che l'ordine dell'approssimante sia eccessivamente elevato: l'ordine 3 è sufficiente nella maggior parte dei casi.

7.4. Esercizi

7.4.1 Si vuole progettare un regolatore per il sistema controllato avente la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad (7.46)$$

chiuso in retroazione unitaria. I dati di specifica sono:

- costante di errore di posizione $K_p = 100$;
- massima sovranelongazione $S = 10\%$;
- banda passante $\omega_f \geq 20 \text{ sec}^{-1}$.

Soluzione Si assume come modello di riferimento la (7.9). La prima specifica richiede che sia

$$K_0 = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101},$$

la seconda che sia $\delta = 0,6$, mentre la terza, considerata con il segno di uguaglianza, impone la condi-

zione

$$\sqrt{\frac{K_0^2 \omega_n^4}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + 4\delta^2 \omega_f^2 \omega_n^2}} = \frac{K_0}{\sqrt{2}}.$$

Da essa si ricava un'equazione di secondo grado in ω_n^2 , la cui unica soluzione positiva è $\omega_n^2 = 303,38$, da cui $\omega_n = 17,41 \text{ sec}^{-1}$. Applicando la (7.2) si ottiene

$$\begin{aligned} G_r(s) &= \frac{K_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - K_0 \omega_n^2} \\ &\quad \times \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{K} \\ &= K_r \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}; \end{aligned} \quad (7.47)$$

il discriminante dell'equazione polinomiale relativa al denominatore è

$$\Delta := (\delta \omega_n)^2 - \omega_n^2 (1 - K_0) = 106,21 \text{ sec}^{-1};$$

i valori dei parametri del regolatore risultano dalle relazioni

$$K_r := \frac{K_0}{K(1 - K_0)} = \frac{100}{K},$$

$$\frac{1}{T_1} := \delta \omega_n - \sqrt{\Delta} = 10,45 - 10,31 = 0,14 \text{ sec}^{-1}.$$

$$\frac{1}{T_2} := \delta \omega_n + \sqrt{\Delta} = 10,45 + 10,31 = 20,76 \text{ sec}^{-1}.$$

In questo caso il regolatore è del secondo ordine, con due poli e due zeri. Gli zeri si cancellano con i poli del sistema controllato. La disposizione dei poli residui è mostrata in Fig. 7.24.

Si noti peraltro che la specifica riguardante la banda passante (legata al valore di ω_n) fissa un limite inferiore per ω_f ; se almeno uno dei poli $-1/\tau_1$, $-1/\tau_2$ del

sistema controllato è situato a sinistra della coppia di poli di Fig. 7.24, si può aumentare ω_n in modo che si abbia sovrapposizione di uno di questi con tale polo e quindi cancellazione nella (7.46); si ottiene così un regolatore del primo ordine, che può essere a ritardo o ad anticipo a seconda che l'altro polo del sistema controllato cada a sinistra o a destra del polo residuo della coppia di Fig. 7.24.

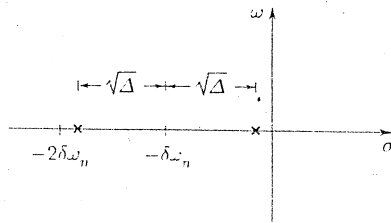


Figura 7.24 Disposizione dei poli del fattore $P_0(s)/(Q_0(s) - P_0(s))$ nel caso del regolatore (7.47).

7.4.2 Per il sistema controllato con funzione di trasferimento

$$\frac{1}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad \tau_1 = 1 \text{ sec}, \quad \tau_2 = 0.2 \text{ sec}, \quad (7.48)$$

chiuso in retroazione unitaria, con i dati di specifica:

- costante di velocità $K_v = 10 \text{ sec}^{-1}$.

- massima sovraelongazione $S = 10 \%$.

1. Si progetti per via analitica un regolatore.

2. Si esamini la possibilità di adottare un regolatore del primo ordine, con un polo e uno zero.

Soluzione Si adotta il modello di riferimento (7.10), con $K_0 = 1$, in quanto, essendo finita la costante di velocità, l'errore di posizione dovrà essere nullo. L'errore a regime in risposta alla rampa è

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} (1 - G_0(s)) = \frac{2\delta}{\omega_n} + \tau,$$

e la costante di velocità

$$K_v = \frac{1}{e_r} = \frac{\omega_n}{2\delta + \omega_n \tau}.$$

Si può scegliere ad arbitrio il prodotto $\omega_n \tau$, ad esempio $\omega_n \tau = 1$. Dalla famiglia di diagrammi di Fig. 7.4 si ricava $\delta = 0,47$ e, sostituendo nella relazione precedente,

$$\omega_n = 10(2\delta + 1) = 19,4 \text{ sec}^{-1},$$

$$\tau = 1/19,4 = 51,54 \text{ msec}.$$

Oppure, per $\omega_n \tau = 0,1$, valore che non incide sensibilmente sulla risposta al gradino, che resta praticamente identica a quella del sistema elementare del secondo ordine senza il polo reale, si ricava $\delta = 0,6$, quindi

$$\omega_n = 10(2\delta + 0,1) = 13 \text{ sec}^{-1},$$

$$\tau = 0,1/13 = 7,69 \text{ msec}.$$

Come risulterà tra breve, la prima scelta corrisponde ad un regolatore con poli complessi, la seconda ad uno con poli reali. La funzione di trasferimento del regolatore è

$$\begin{aligned} G_r(s) &= \frac{P_0(s)s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \\ &= \frac{\omega_n^2(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{\tau s^2 + (2\delta\omega_n\tau + 1)s + \omega_n(2\delta + \omega_n\tau)} \\ &= K_r \frac{\omega_r^2(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s^2 + 2\delta_r\omega_r s + \omega_r^2}, \end{aligned}$$

in cui si è posto

$$K_r := \frac{\omega_n}{2\delta + \omega_n \tau},$$

$$\delta_r := \frac{2\delta\omega_n\tau + 1}{2\sqrt{\omega_n\tau(2\delta + \omega_n\tau)}},$$

$$\omega_r := \omega_n \sqrt{\frac{2\delta + \omega_n\tau}{\omega_n\tau}};$$

si noti che i valori di τ_1 e τ_2 , specificati nell'enunciato, compaiono a numeratore nella funzione di trasferimento del regolatore, per cui questo opera una doppia cancellazione polo-zero, ma non influiscono sugli altri parametri.

I valori dei parametri in relazione alle due diverse scelte precedentemente esposte sono rispettivamente $K_r = 10 \text{ sec}^{-1}$, $\delta_r = 0,696$, $\omega_r = 27,02 \text{ sec}^{-1}$ e $K_r = 10 \text{ sec}^{-1}$, $\delta_r = 1,55$, $\omega_r = 46,87 \text{ sec}^{-1}$.

2. Indicando, come al solito, con $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ il numeratore e il denominatore del modello di riferimento, risulta che i poli del regolatore sono gli stessi

della funzione

$$\frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \quad (7.49)$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n) + \tau s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Il polo nell'origine si cancella con lo zero del fattore $1/G(s)$; gli altri due poli descrivono, al variare di τ , il contorno mostrato in Fig. 7.25.

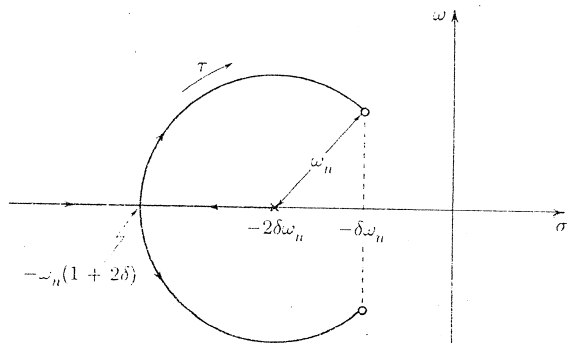


Figura 7.25 Contorno delle radici relativo ai poli del regolatore.

Sostituendo nell'equazione polinomiale ottenuta annullando il denominatore della (7.49) il valore corri-

spondente alla diramazione del contorno, cioè

$$s_d = -\omega_n(1 + 2\delta),$$

si ricava il valore di $\omega_n\tau$ alla diramazione:

$$(\omega_n\tau)_d = \frac{1}{2(1 + \delta)}.$$

Per valori di $\omega_n\tau$ inferiori i poli sono reali, per valori superiori essi sono complessi. Si noti che i valori del campo corrispondente a poli reali, all'incirca da 0 a 0,3, non alterano sensibilmente la risposta del sistema rispetto a quella del sistema elementare del secondo ordine.

In definitiva, un progetto per ottenere un regolatore del primo ordine si può articolare nei seguenti punti:

- i) si determinano ω_n e δ facendo riferimento alla funzione di trasferimento elementare del secondo ordine: il problema ammette soluzione se è possibile operare tale scelta in modo che uno dei poli del sistema controllato cada a sinistra del punto $-2\delta\omega_n$;
- ii) si risolve in τ l'equazione polinomiale ottenuta annullando il denominatore della (7.49), avendovi posto s uguale a tale polo;
- iii) si verifica se il valore di $\omega_n\tau$ corrispondente alla soluzione così ottenuta sia tanto basso da giustificare l'approssimazione introdotta nella scelta iniziale di ω_n , δ ; se ciò non è, si aggiusta per tentativi tale scelta.

Con i valori numerici presentati nell'enunciato la cancellazione non è possibile, essendo $-2\delta\omega_n = -14,4 \text{ sec}^{-1}$, $-1/\tau_2 = -5 \text{ sec}^{-1} < -1/\tau_1$.

Complementi al Capitolo 7

C7.1. Progetto per allocazione dei poli

È possibile, con un regolatore di ordine $n - 1$, allocare tutti i poli di un sistema di ordine n chiuso in retroazione. Questo consente di applicare il procedimento della sintesi diretta anche quando il sistema controllato sia instabile.

◆ Richiami sulla divisione dei polinomi

È noto dall'algebra (teorema sulla divisibilità dei polinomi) che, dati due polinomi generici

$$A(s) = a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_0,$$

$$B(s) = b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_0,$$

con $q \geq p$, esistono due polinomi $Q(s)$ e $R(s)$, rispettivamente di grado $q - p$ e di grado minore o uguale a $p - 1$, tali che

$$A(s) = B(s)Q(s) + R(s).$$

(7.50)

Divisione dei polinomi

Detti polinomi $Q(s)$ ed $R(s)$ sono rispettivamente il *quoziente* e il *resto* della divisione di $A(s)$ per $B(s)$. $A(s)$ si dice *divisibile per* $B(s)$ se $R(s) = 0$.

Il modo in cui si esegue praticamente la divisione è illustrato dal seguente esempio. Siano

$$A(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 4s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s + 1,$$

$$B(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 2s^2 + 4s + 1,$$

rispettivamente il dividendo e il divisore. Anzitutto si riportano i due polinomi a fianco, come si fa per la divisione di numeri:

$$\begin{array}{r|l} 4s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s + 1 & 2s^2 + 4s + 1 \\ 4s^4 + 8s^3 + 2s^2 & 2s^2 - \frac{3}{2}s + \frac{7}{2} \\ \hline -3s^3 + s^2 + 2s + 1 & \\ -3s^3 - 6s^2 - \frac{3}{2}s & \\ \hline 7s^2 + \frac{7}{2}s + 1 & \\ 7s^2 + 14s + \frac{7}{2} & \\ \hline -\frac{21}{2}s - \frac{5}{2} & \end{array}$$

Si determina quindi q_2 , coefficiente della massima potenza di s del quoziente, eseguendo il rapporto a_4/b_2 dei coefficienti delle massime potenze di s del dividendo e del divisore. Nel caso in esame è $a_4/b_2 = 4/2 = 2$.

Si scrive nella posizione del quoziente, sotto il divisore, il termine $q_2 s^2$ (cioè $2s^2$), si moltiplica per tale termine il divisore e si scrive il polinomio risultante ($4s^4 + 8s^3 + 2s^2$) sotto il dividendo, allineando i termini corrispondenti a uguali potenze di s ; si sottrae quindi tale polinomio dal dividendo, ottenendo un polinomio di grado inferiore di almeno un'unità rispetto al dividendo stesso.

Su quest'ultimo polinomio si ripete il procedimento, trovando il secondo termine del quoziente ($-3/2s$) e così via per i termini successivi, fino a q_0 .

Per il caso in esame il risultato della divisione è

$$Q(s) = 2s^2 - \frac{3}{2}s + \frac{7}{2}, \quad R(s) = -\frac{21}{2}s - \frac{5}{2}.$$

La divisione può essere proseguita anche per potenze negative di s , ottenendo una serie. Nel caso in esame questa è

$$\frac{A(s)}{B(s)} = 2s^2 - \frac{3}{2}s + \frac{7}{2} - \frac{21}{4}s^{-1} + \frac{37}{4}s^{-2} - \frac{127}{8}s^{-3} + \dots$$

Divisione dei polinomi per potenze decrescenti

La divisione descritta si dice *divisione per potenze decrescenti*. Si noti peraltro che, se si ordinano nel quadro i polinomi $A(s)$ e $B(s)$ a partire dal termine noto, si ottengono polinomi $Q(s)$ (con coefficienti ordinati anch'essi a partire dal termine noto) ed $R(s)$ (con coefficienti associati a potenze di s crescenti, fino al grado di $A(s)$) che soddisfano ancora la (7.46). Pertanto i polinomi $Q(s)$ ed $R(s)$ che soddisfano la (7.46) non sono unici (l'unicità nasce dalla condizione sui gradi). Infatti risulta

$$\begin{array}{r|l} 1 + 2s + 3s^2 + 5s^3 + 4s^4 & 1 + 4s + 2s^2 \\ 1 + 4s + 2s^2 & 1 - 2s + 9s^2 \\ \hline -2s + s^2 + 5s^3 + 4s^4 & \\ -2s - 8s^2 - 4s^3 & \\ \hline 9s^2 + 9s^3 + 4s^4 & \\ 9s^2 + 36s^3 + 18s^4 & \\ \hline -27s^3 - 14s^4 & \end{array}$$

Tale schema porta alla *divisione per potenze crescenti*: proseguendo il quadro si ottiene lo sviluppo in serie di potenze del rapporto dei polinomi⁽²⁾. Nel caso del precedente esempio lo sviluppo è

$$\frac{A(s)}{B(s)} = 1 - 2s + 9s^2 - 27s^3 + 94s^4 - 322s^5 + \dots$$

Un polinomio si dice *monico* se il coefficiente della potenza più elevata è l'unità. Due polinomi si dicono *primi fra loro* o *coprime* se non sono entrambi divisibili per uno stesso polinomio monico diverso dall'unità (cioè almeno di primo grado). Se si considerano i due polinomi dati in forma fattorizzata, segue che essi sono primi fra loro se e solo se non hanno radici in comune. Il polinomio monico dato dal prodotto di tutti i fattori comuni è il *massimo comun divisore* dei due polinomi. Vale il seguente teorema.

TEOREMA C7.1.1. Il massimo comun divisore $M(s)$ di due polinomi $A(s)$ e $B(s)$ si può esprimere come una combinazione lineare del tipo

$$M(s) = P_1(s)A(s) + P_2(s)B(s). \quad (7.51)$$

Dimostrazione Denominati i polinomi dati in modo che il grado di $A(s)$ sia non inferiore a quello di $B(s)$, si consideri la relazione ricorrente, analoga alla (7.50),

$$R_{i-1}(s) = R_i(s)Q_i(s) + R_{i+1}(s) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (7.52)$$

con $R_0(s) := A(s)$, $R_1(s) := B(s)$, che fornisce una successione di polinomi $R_i(s)$ di gradi strettamente decrescenti. Sia $R_k(s)$ l'ultimo elemento non nullo della successione: esso coincide con $M(s)$, a meno di una costante. Le (7.52) realizzano il noto *algoritmo euclideo delle divisioni successive* per la determinazione del massimo comun divisore. Ponendole nella forma

$$R_{i-1}(s) - R_i(s)Q_i(s) = R_{i+1}(s) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (7.53)$$

risulta, infatti, che qualunque fattore comune di due elementi consecutivi della successione, che si può raccogliere a fattore comune a primo membro, si ritrova anche nell'elemento successivo, e quindi in tutti gli elementi seguenti. Ciascuna delle (7.53) esprime un elemento della successione come combinazione lineare dei due precedenti: procedendo a ritroso per sostituzioni successive a partire da $R_k(s) = M(s)$ si ottiene pertanto la (7.51).

◆ L'equazione diofantea⁽³⁾

Dati i tre polinomi generici $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$, l'equazione

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s) \quad (7.54)$$

si dice *equazione di Diòfanto* o *equazione diofantea* nei due polinomi incogniti $X(s)$ ed $Y(s)$. Si noti che la (7.50) è un caso particolare della (7.54). La (7.54), se risolvibile, ammette infinite soluzioni; si verifica facilmente infatti che, se con $X_0(s)$, $Y_0(s)$ si indica una soluzione, i polinomi

$$\begin{aligned} X(s) &= X_0(s) + B(s)P(s), \\ Y(s) &= Y_0(s) - A(s)P(s), \end{aligned} \quad (7.55)$$

con $P(s)$ polinomio arbitrario, sono pure una soluzione. La condizione fondamentale per la risolubilità dell'equazione diofantea è enunciata nel seguente teorema.

TEOREMA C7.1.2. (risolvibilità dell'equazione diofantea) La (7.54) ammette soluzione se e solo se il massimo comun divisore di $A(s)$ e $B(s)$ è divisore di $C(s)$.

⁽²⁾ È in questo modo che si interpretano le approssimanti di Padé del ritardo finito presentate al Paragrafo 4.7.

⁽³⁾ Diòfanto, matematico della scuola alessandrina vissuto nel terzo secolo d.C., si occupò della soluzione dell'equazione (7.54) nel campo di numeri interi. La (7.54) per i polinomi fu poi studiata da Bézout nel settecento, per cui essa viene spesso denominata anche *equazione di Bézout*.

Divisione dei polinomi per potenze crescenti

*Polinomio monico
Polinomi primi fra loro o
coprimi*

Massimo comun divisore

Equazione diofantea

Dimostrazione Solo se. Detto $M(s)$ il massimo comun divisore di $A(s)$ e $B(s)$, la (7.54) si può scrivere

$$M(s) (A'(s) X(s) + B'(s) Y(s)) = C'(s),$$

ed ammette ovviamente soluzione solo se risulta $C(s) = M(s) C'(s)$.

Se. Una soluzione della (7.54) è chiaramente $X(s) := P_1(s) C'(s)$, $Y(s) := P_2(s) C'(s)$, in cui $P_1(s)$ e $P_2(s)$ sono definiti dalla (7.51).

Dividendo ambo i membri della (7.54) per $M(s)$, ci si può pertanto sempre ricondurre al caso in cui i polinomi $A(s)$ e $B(s)$ siano primi fra loro. Dell'equazione diofantea si può ottenere una soluzione particolare (detta *soluzione diretta*, per distinguerla da quella ottenuta con l'algoritmo iterativo euclideo precedentemente illustrato), imponendo, come nel caso della (7.50), condizioni sui gradi dei polinomi incogniti. Tali condizioni sono espresse nella seguente proprietà.

PROPRIETÀ C7.1.1. (grado della soluzione diretta dell'equazione diofantea) Con riferimento all'equazione (7.54), si indichino con n , m ed ℓ i gradi di $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$ e con k ed h quelli della soluzione diretta $X(s)$, $Y(s)$. Esiste una soluzione tale che

$$k \begin{cases} = \ell - n & \text{se } \ell \geq m + n \\ \leq m - 1 & \text{se } \ell < m + n \end{cases} \quad h \leq n - 1. \quad (7.56)$$

La proprietà discende dal seguente algoritmo, che fornisce la soluzione diretta dell'equazione diofantea riconducendola a quella di un sistema di equazioni algebriche lineari.

*Soluzione
dell'equazione diofantea*

ALGORITMO C7.1.1. (soluzione diretta dell'equazione diofantea) Con riferimento alla (7.54), si indicano con $(a_n, \dots, a_0)$, $(b_m, \dots, b_0)$ e $(c_\ell, \dots, c_0)$ i coefficienti dei polinomi dati, con $(x_k, \dots, x_0)$, $(y_h, \dots, y_0)$ quelli dei polinomi incogniti. Si suppone che $A(s)$ e $B(s)$ siano primi fra loro. Per non appesantire eccessivamente la notazione, ci si riferisce al caso particolare $n=3$, $m=2$, $\ell=8$, in cui i gradi dei polinomi incogniti specificati dalla (7.56) sono $k=5$, $h=2$. In questo caso il sistema di equazioni algebriche lineari cui si riconduce l'equazione diofantea è

$$\begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_8 \\ c_7 \\ c_6 \\ c_5 \\ c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}. \quad (7.57)$$

Se $\ell \geq m + n$, come nel caso dell'esempio in oggetto, la matrice dei coefficienti del sistema è $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$, con le prime $k + 1$ colonne che riportano i coefficienti di $A(s)$ traslati progressivamente verso il basso in modo da formare una sottomatrice banda come mostrato, e le ultime $h + 1$ che riportano quelli di $B(s)$ in una banda giustificata verso il basso, mentre la matrice colonna a secondo membro riporta i coefficienti di $C(s)$. Se $\ell < m + n$, la matrice dei coefficienti è $(m + n) \times (m + n)$, costruita nello stesso modo, mentre i termini a secondo membro corrispondenti a coefficienti non presenti nel polinomio $C(s)$ vengono posti uguali a zero. In ogni caso la matrice è una *matrice di Sylvester*, non singolare se e solo se $A(s)$ e $B(s)$ sono coprimi. Le condizioni sui gradi di $X(s)$ e $Y(s)$ espresse dalla (7.56) con il simbolo $\leq$ sono in realtà uguaglianze per valori generici dei coefficienti del polinomio $C(s)$. Si noti che nel caso $\ell \geq m + n$ il solo grado k di $X(s)$ cresce al crescere di ℓ , per cui si ottengono due soluzioni diverse scambiando fra loro $A(s)$ e $B(s)$.

Quando l'equazione diofantea viene utilizzata per l'allocatione dei poli dei sistemi in retroazione (applicazione oggetto del prossimo paragrafo), è fondamentale che la soluzione fornita non presenti cancellazioni di zeri/poli instabili del regolatore con poli/zeri instabili del sistema controllato. Ciò può essere escluso in base alla proprietà seguente, la cui dimostrazione viene omessa perché del tutto analoga a quella della parte "solo se" del Teorema C7.1.2.

■ PROPRIETÀ C7.1.2. I polinomi $X(s)$ e $Y(s)$, soluzione della (7.54), presentano divisori comuni a $B(s)$ e ad $A(s)$ rispettivamente se e solo se tali divisori sono comuni anche a $C(s)$.

È pertanto sufficiente scegliere $C(s)$ coprimo sia ad $A(s)$ sia a $B(s)$ o, comunque, stabile, per evitare le cancellazioni di cui sopra.

L'Algoritmo C7.1.1 viene facilmente realizzato in ambiente Matlab. Si riporta qui il relativo codice.

```
function [X,Y]=diopha(A,B,C)
%DIOPHA Soluzione dell'equazione diofantea
% [X,Y] = DIOPHA(A,B,C) risolve l'equazione polinomiale
%
%      A*X + B*Y = C
%
%
% L. Marconi - giugno 1996

n=length(A)-1; m=length(B)-1; l=length(C)-1;
if (l>=m+n)
    k=l-n;
else
    k=m-1;
end
h=n-1; o=k+h+2;
M=zeros(o,o);
for (ii=1:k+1)
    M(ii:ii+n,ii)=A';
end
for (ii=1:h+1)
    M(o-ii-m+1:o-ii+1,o-ii+1)=B';
end
Q=zeros(o,1); Q(o-l:o)=C'; XX=inv(M)*Q;
X=XX(1:k+1)'; if (isempty(X)), X=0; end
Y=XX(k+2:o)'; if (isempty(Y)), Y=0; end
% --- ultima riga di diopha ---
```

L'equazione diofantea viene utilizzata per la soluzione di numerosi problemi di controlli automatici, come l'allocazione dei poli cui è dedicato il seguente sottoparagrafo, e in procedimenti computazionali specifici del controllo digitale.

Allocazione dei poli dei sistemi in retroazione

Si consideri il semplice sistema in retroazione di Fig. 7.26, composto di un sistema controllato (assegnato) con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (7.58)$$

e di un regolatore (da progettare) con funzione di trasferimento

$$G_r(s) = \frac{P_r(s)}{Q_r(s)} = \frac{P'_r(s) P''_r(s)}{Q'_r(s) Q''_r(s)} \quad (7.59)$$

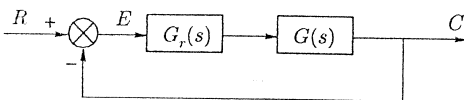


Figura 7.26
Il sistema in retroazione considerato.

Si indicano con m ed n i gradi dei polinomi $P(s)$ e $Q(s)$, che si suppongono primi fra loro. I polinomi $P_r(s)$, di grado m_r , e $Q_r(s)$, di grado n_r , devono soddisfare la condizione di realizzabilità fisica $m_r \leq n_r$. $P'_r(s)$ e $Q'_r(s)$ sono i polinomi da determinare, mentre con $P''_r(s)$ e $Q''_r(s)$ si indicano eventuali fattori dei polinomi del regolatore fissati a priori (ad

esempio, per introdurvi il modello interno), di gradi rispettivamente m_r'' ed n_r'' . Si suppone inoltre $m < n$ ⁽⁴⁾.

Tenendo conto di tale fattorizzazione della funzione di trasferimento del regolatore, l'equazione caratteristica del sistema di Fig. 7.26 si scrive

$$Q_r'(s) (Q_r''(s) Q(s)) + P_r'(s) (P_r''(s) P(s)) = 0,$$

e l'equazione diofantea che consente di assegnarne le radici è

$$Q_r'(s) (Q_r''(s) Q(s)) + P_r'(s) (P_r''(s) P(s)) = Q_\ell(s), \quad (7.60)$$

in cui $P_r'(s)$ e $Q_r'(s)$ sono i polinomi incogniti, mentre $Q_\ell(s)$ è il polinomio avente come radici i valori da assegnare.

La prima operazione da compiere quando si vuole progettare un regolatore stabilizzante $G_r(s)$ è la scelta della funzione di trasferimento $G_r''(s)$. Vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ C7.1.3. Nell'ipotesi che il sistema controllato non abbia alcuno zero uguale ad una radice di $Q_r''(s)$ e alcun polo uguale ad una radice di $P_r''(s)$, per ottenere un regolatore causale, cioè con $P_r(s) \leq Q_r(s)$, deve essere soddisfatta la relazione

$$\ell \geq 2n + m_r'' + n_r'' - 1. \quad (7.61)$$

in cui il significato dei simboli è

- ℓ grado di Q_ℓ (numero di poli da allocare);
- n grado di $Q(s)$ (ordine del sistema controllato);
- m_r'' grado di $P_r''(s)$ (numero degli zeri del regolatore fissati a priori);
- n_r'' grado di $Q_r''(s)$ (numero degli poli del regolatore fissati a priori).

Dimostrazione Si consideri l'equazione (7.60), con $Q_r'(s)$, $P_r'(s)$, rispettivamente di gradi k ed h , il cui primo membro è il polinomio caratteristico del sistema in retroazione considerato. Essa ammette soluzione, in quanto i polinomi dati $Q_r''(s)Q(s)$ e $P_r''(s)P(s)$, rispettivamente di gradi $n + n_r''$ ed $m + m_r''$, sono primi tra loro in conseguenza delle ipotesi introdotte. Detto ℓ_0 il valore del secondo membro della (7.61), si suppone dapprima $\ell = \ell_0$ e si applica la (7.56), in cui il valore di k è esattamente determinato, vigendo la condizione espressa nella prima riga: infatti l'ipotesi $m < n$ implica $\ell_0 = 2n + m_r'' + n_r'' - 1 \geq m + m_r'' + n + n_r''$. La relazione di causalità $m_r \leq n_r$, con $n_r = k + n_r''$ ed $m_r = h + m_r''$, è soddisfatta poiché $k = \ell_0 - n - n_r''$, $h \leq n + n_r'' - 1$, e quindi $n_r = \ell_0 - n = n + m_r'' + n_r'' - 1$, $m_r \leq n + m_r'' + n_r'' - 1$. Nel caso $\ell > \ell_0$, essendo ancora $n_r = \ell - n$, il grado del denominatore del regolatore viene incrementato di $\ell - \ell_0$, mentre quello del numeratore soddisfa ancora la relazione $m_r \leq n + m_r'' + n_r'' - 1$. La causalità è pertanto assicurata a maggior ragione.

ESEMPIO C7.1.1 Con riferimento allo schema di Fig. 7.26, dato il sistema controllato con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-20(s+5)}{(s+1)(s-2)(s+8)}, \quad (7.62)$$

si vuole progettare un regolatore $G_r(s)$ di tipo 2 allocando i poli ad anello chiuso mediante l'equazione diofantea.

Si procede anzitutto con il primo dei metodi precedentemente esposti, cioè senza imporre alcuna cancellazione fra il sistema controllato e il regolatore. In questo caso si ha $P_r''(s) = 1$, $Q_r''(s) = s^2$, $\ell_0 = 6 + 2 - 1 = 7$, per cui il polinomio monico arbitrario Q_ℓ deve essere almeno di grado 7 affinché il regolatore sia causale. Assumendo i poli ad anello chiuso $-2 \pm 2j$, $-4 \pm 3j$, -4 , -6 e -10 , si

ottiene l'equazione diofantea definita da

$$\begin{aligned} A(s) &= Q_r''(s) Q(s) = s^2(s+1)(s-2)(s+8), \\ B(s) &= P_r''(s) P(s) = -20(s+5), \\ C(s) &= Q_\ell(s) = ((s+2)^2 + 2^2) \\ &\quad \times ((s+4)^2 + 3^2)(s+4)(s+6)(s+10), \end{aligned}$$

la cui soluzione di grado minimo è

$$\begin{aligned} X(s) &= Q_r'(s) = (s+4,979)(s+20,02), \\ Y(s) &= P_r'(s) = -8,215((s+0,9219)^2 + 1,743^2) \\ &\quad \times (s+1,855)(s+8,099). \end{aligned}$$

Ad essa corrisponde il regolatore

$$G_r(s) = \frac{P_r'(s) P_r''(s)}{Q_r'(s) Q_r''(s)} = \frac{-8,215((s+0,9219)^2 + 1,743^2)(s+1,855)(s+8,099)}{s^2(s+4,979)(s+20,02)}. \quad (7.63)$$

⁽⁴⁾ Questa ipotesi esclude la presenza di un anello di retroazione algebrico quando si assuma un regolatore di ordine minimo, con grado relativo uguale a zero.

Il numero dei poli da allocare ad arbitrio può essere diminuito rispetto al valore minimo ℓ_0 corrispondente al secondo membro della (7.61) se nel procedimento di calcolo alcuni o tutti i poli e gli zeri del sistema controllato a parte reale non positiva vengono eliminati, per poi essere inseriti, scambiati fra loro, nel regolatore, in modo da realizzare la cancellazione con quelli effettivamente presenti.

PROPRIETÀ C7.1.4. Se si operano cancellazioni fra il regolatore e il sistema controllato per ottenere un regolatore causale deve essere soddisfatta la relazione

$$\ell \geq 2n + (m_r'' - 2m_\eta'') + (n_r'' - 2n_\eta'') - 1, \quad (7.64)$$

in cui il significato dei simboli è

- n grado di $Q(s)$ (ordine del sistema controllato);
- m_r'' grado di $P_r''(s)$ (numero degli zeri del regolatore fissati a priori);
- m_η'' numero delle radici di $P_r''(s)$ cancellabili con radici di $Q(s)$;
- n_r'' grado di $Q_r''(s)$ (numero dei poli del regolatore fissati a priori);
- n_η'' numero delle radici di $Q_r''(s)$ cancellabili con radici di $P(s)$.

ESEMPIO C7.1.2 Ci si riferisce ancora al sistema controllato (7.62) e si procede imponendo il massimo numero di cancellazioni fra il regolatore e il sistema controllato, assumendo

$$G_r''(s) = \frac{(s+1)(s+8)}{s^2(s+5)},$$

$$G_\eta''(s) = \frac{(s+1)(s+8)}{(s+5)}.$$

In base alla (7.64) il minimo numero di poli da allocare è

$$\ell_0 = 6 + (2 - 4) + (3 - 2) - 1 = 4.$$

Siano essi $-2 \pm 2j$, -4 e -6 ; l'equazione diofantea è de-

finita dai polinomi

$$A(s) = Q_r''(s)Q(s)/Q_\eta''(s) = s^2(s-2),$$

$$B(s) = P_r''(s)P(s)/P_\eta''(s) = -20,$$

$$C(s) = Q_\ell(s) = ((s+2)^2 + 2^2)(s+4)(s+6),$$

e fornisce

$$X(s) = s + 16,$$

$$Y(s) = -5, 2((s + 0,8462)^2 + 1,063^2).$$

Il regolatore corrispondente, in cui vengono aggiunti gli zeri e i poli che si sono prima cancellati con quelli del sistema controllato, è

$$G_r(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} G_\eta''(s) = \frac{-5, 2((s + 0,8462)^2 + 1,063^2)(s+1)(s+8)}{s^2(s+5)(s+16)}. \quad (7.65)$$

L'inconveniente maggiore del progetto per allocazione dei poli ad anello chiuso è la mancanza di un criterio sicuro ed affidabile per la loro scelta. La sola stabilità con buon margine non è infatti sufficiente a garantire un buon comportamento del sistema in retroazione, in particolare la robustezza in presenza di variazioni dei parametri del sistema controllato. Spesso si deve ricorrere all'ausilio del calcolatore per stabilire l'allocazione più conveniente con metodi numerici per l'ottimizzazione, ad esempio con la tecnica *minimax* (per un numero sufficientemente grande di scelte dei poli nel semipiano sinistro e dei parametri incerti, si determina il minimo valore di un parametro legato alla distanza del diagramma di Nyquist dal punto critico e si accetta la configurazione che corrisponde alla massima di tali distanze). Il seguente esempio mostra quanto sia precaria la robustezza quando il sistema da controllare presenti sia poli sia zeri a parte reale positiva.

Minimax

ESEMPIO C7.1.3 Dato il sistema controllato con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-20(s-5)}{s(s-8)}, \quad (7.66)$$

già intrinsecamente di tipo 1, ci si propone di allocare i poli ad anello chiuso con un regolatore di ordine minimo. Non essendo possibile operare alcuna cancellazione, in

questo caso si possono allocare $\ell_0 = 4 - 1 = 3$ poli con un regolatore di ordine 1. Assumendo i poli ad anello chiuso $-2 \pm 2j$ e -6 , si ottiene l'equazione diofantea definita da

$$A(s) = Q(s) = s(s-8),$$

$$B(s) = P(s) = -20(s-5),$$

$$C(s) = Q_\ell(s) = ((s+2)^2 + 2^2)(s+6),$$

la cui soluzione di grado minimo è

$$X(s) = (s - 43,87), \quad Y(s) = 3,093(s - 0,1552).$$

Ad essa corrisponde il regolatore

$$G_r(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{-3,093(s - 0,1552)}{s - 43,87}. \quad (7.67)$$

Il regolatore ottenuto è instabile e a fase non minima. Il diagramma di Nyquist del guadagno di anello è riportato, contrassegnato con (a) in Fig. 7.27. Una tecnica di ricerca di tipo minimax riferita al massimo della minima distanza dal punto critico lungo l'asse delle ascisse (senza considerare variazioni parametriche del sistema controllato) fornisce i poli ad anello chiuso $-0,4$, -8 e -200 , cui corrisponde il grafico contrassegnato con (b) nella stessa figura, che denota una maggiore robustezza rispetto a variazioni della costante di guadagno. A parte la robustezza della stabilità, se il regolatore (7.67) viene disposto in cascata al sistema come è indicato in Fig. 7.26, la risposta all'ingresso di riferimento r risulta non soddisfacente per la presenza di uno zero positivo in posizione dominante (cioè molto vicino all'origine), che rende molto lento il transitorio di regolazione.

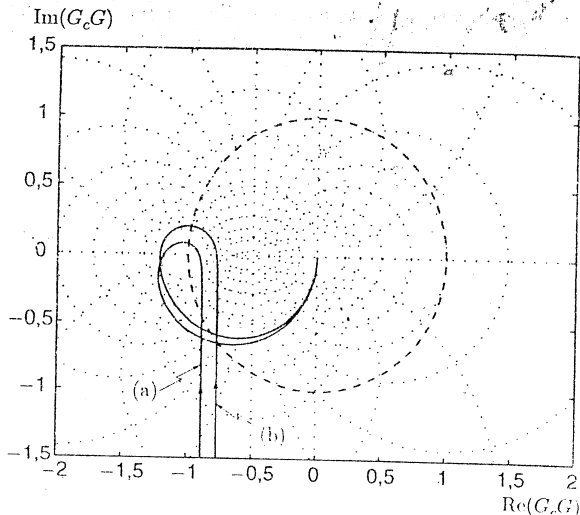


Figura 7.27 Diagrammi di Nyquist relativi all'Esempio C7.1.3.

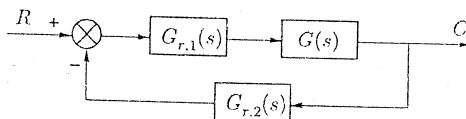
Per evitare la presenza di zeri non favorevoli sul percorso di segnale diretto si può fattorizzare il regolatore calcolato per allocazione dei poli come è indicato in Fig. 7.28. Le due unità $G_{r,1}(s)$ e $G_{r,2}(s)$ tali che $G_{r,1}(s)G_{r,2}(s) = G_r(s)$ sono scelti in base ai seguenti criteri.

- $G_{r,1}(s)$ contiene tutti i poli nell'origine, uniti a zeri con parte reale relativamente grande e, se necessario, a poli con parte reale relativamente piccola.
- $G_{r,2}(s)$ presenta guadagno statico unitario e contiene poli con parte reale relativamente grande e zeri con parte reale relativamente piccola.

Si ricorda infatti che gli zeri della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ sono dati dagli zeri di $G(s)$, da quelli di $G_{r,1}(s)$ e dai poli di $G_{r,2}(s)$. La scelta indicata tende ad escludere gli zeri vicini all'asse immaginario, che possono produrre notevole sovraelongazione nella risposta al gradino.

Figura 7.28

Fattorizzazione del regolatore.



ESEMPIO C7.1.4 Si considera la fattorizzazione di Fig. 7.28 in relazione ai tre esempi precedenti. Nel caso dell'Esempio C7.1.1 fattorizzando il regolatore (7.63) come

$$G_{r,1}(s) = \frac{-0,3204(s + 1,855)(s + 8,099)}{s^2},$$

$$G_{r,2}(s) = \frac{25,64((s + 0,9219)^2 + 1,743^2)}{(s + 4,979)(s + 20,02)},$$

la massima sovraelongazione della risposta al gradino si riduce dal 68% al 21%. Nel caso dell'Esempio C7.1.2 fattorizzando il regolatore (7.65) come

$$G_{r,1}(s) = \frac{-0,2(s + 1)(s + 8)}{s^2},$$

$$G_{r,2}(s) = \frac{43,33((s + 0,8462)^2 + 1,063^2)}{s^2(s + 5)(s + 16)},$$

la massima sovraelongazione della risposta al gradino si riduce dal 70% al 3,08%. Nel caso dell'Esempio C7.1.3 fattorizzando il regolatore (7.67) come

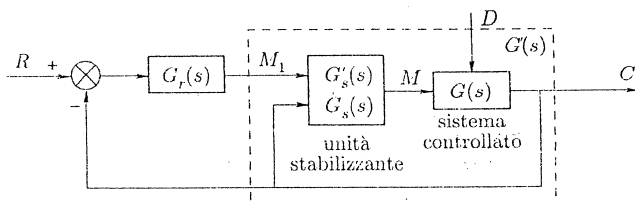
$$G_{r,1}(s) = -0,01094,$$

$$G_{r,2}(s) = \frac{282,7(s - 0,1552)}{s - 43,87},$$

la massima sovraelongazione della risposta al gradino si riduce dal 157% al 4,027% e la sottoelungazione dal 780% al 6,3%.

◆ Progetto di unità stabilizzanti per allocazione dei poli

L'equazione diofantea può essere utilizzata per progettare un'unità stabilizzante per gli schemi di Fig. 7.19a o di Fig. 7.19b, che nel caso in cui il sistema controllato sia a fase minima, consentono di assegnare completamente la funzione di trasferimento relativa all'inseguimento sotto le condizioni di grado relativo e di compatibilità con il modello interno già enunciate al Paragrafo 7.1 sulla sintesi diretta dei regolatori.



Unità stabilizzante

Figura 7.29

Connessione di un'unità stabilizzante a due ingressi.

Una soluzione alternativa, che rappresenta l'interpretazione più completa della sintesi diretta, è quella rappresentata in Fig. 7.29. Tale soluzione si differenzia da quella rappresentata in Fig. 7.19b in quanto l'unità stabilizzante presenta due ingressi indipendenti con una dinamica comune. Gli zeri relativi all'ingresso m_1 sono allocabili ad arbitrio, cosicché la funzione di trasferimento dell'anello interno ha tutti i poli allocati ad arbitrio, alcuni zeri non allocabili (quelli del sistema controllato) e un numero arbitrario di zeri non superiore all'ordine dell'unità stabilizzante allocabile ad arbitrio. Questo consente di progettare l'unità di regolazione asintotica per sintesi diretta, utilizzando un modello di riferimento soggetto ai soli vincoli imposti dal sistema controllato, sia per ciò che riguarda il grado relativo sia per ciò che riguarda la presenza di zeri a parte reale positiva.

L'unità stabilizzante a due ingressi può essere realizzata come in Fig. 2.57b, duplicando i rami relativi all'ingresso, o nella forma di Fig. 2.59. Essa è descritta dalla relazione

$$M(s) = G'_s(s) M_1(s) - G_s(s) C(s) = \frac{P'_s(s)}{Q_s(s)} M_1(s) - \frac{P_s(s)}{Q_s(s)} C(s), \quad (7.68)$$

o anche, per evidenziare la dinamica comune ai due ingressi,

$$Q_s(s) M(s) = P'_s(s) M_1(s) - P_s(s) C(s). \quad (7.69)$$

Quando il sistema controllato contiene il modello interno o una sua parte occorre che l'inverso di questo sia replicato nella funzione di trasferimento relativa al solo anello interno, affinché la retroazione non lo cancelli.

ESEMPIO C7.1.5 Si considera ancora il sistema (7.66), instabile e a fase non minima per progettare, utilizzando l'equazione diofantea, un'unità stabilizzante a due ingressi che presenti, rispetto all'ingresso m_1 un unico zero, quello del sistema controllato. Per prima cosa si calcola l'unità stabilizzante rispetto all'ingresso c , imponendo che essa abbia uno zero nell'origine per evitare la cancellazione del modello interno. Il minimo numero di poli da allocare è dato dal secondo membro della (7.64) come $\ell_0 = 4 + (1 - 2) + (0 - 0) - 1 = 2$. Si scelgono i valori $-0,5$, -8 e, dopo aver assunto $G''_r(s) = s$, $G''_r(s) = s$, operata la cancellazione, risolta l'equazione diofantea e ripristinato il fattore s a numeratore del regolatore e a denominatore del sistema controllato, si ottiene

$$G_r(s) = \frac{-2,267 s}{s - 28,83}. \quad (7.70)$$

L'unità stabilizzante a due ingressi viene realizzata come è indicato in Fig. 7.30. Rispetto all'ingresso c essa pre-

senta la funzione di trasferimento (7.70), mentre rispetto all'ingresso m_1 essa non presenta alcuno zero. Di conseguenza, la funzione di trasferimento del sistema controllato stabilizzato, indicata con $G'(s)$ in Fig. 7.29, risulta

$$G'(s) = \frac{-20(s - 5)}{s(s + 0,5)(s + 8)}, \quad (7.71)$$

e comprende pertanto i poli assegnati e il polo nell'origine che si è voluto conservare, e come unico zero quello del sistema controllato. Tale zero, essendo positivo, dovrà essere replicato nel modello di riferimento che si assumerà per la sintesi diretta dell'unità di regolazione asintotica.

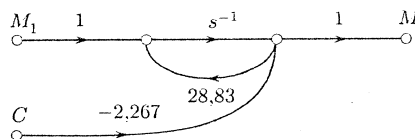


Figura 7.30 Unità stabilizzante a due ingressi per l'Esempio C7.1.5.

C7.2. Regolatori a due gradi di libertà

Si dice che un regolatore in retroazione è *a due gradi di libertà* quando consente di imporre la funzione di trasferimento relativa all'inseguimento indipendentemente da quelle relative alla reiezione dei disturbi. In particolare, gli schemi di Fig. 7.19 e quello di Fig. 7.29, a due anelli di retroazione, sono a due gradi di libertà perché, come si è mostrato, consentono di imporre un modello di riferimento per l'inseguimento del tutto indipendente dalla funzione di trasferimento della parte stabilizzante.

Questo paragrafo è dedicato alla descrizione di regolatori a due gradi di libertà di tipo diverso, in cui la parte relativa all'inseguimento, addirittura esterna all'anello di regolazione, si basa sull'azione diretta e, nel caso dei sistemi a fase non minima, sulla preconoscenza e sulla preazione. È opportuno fare precedere la trattazione da alcuni chiarimenti sulla classificazione dei segnali che pervengono ad un apparato di controllo:

1. *Segnali non misurabili*: segnali il cui effetto sulla variabile controllata può essere corretto solo attraverso la retroazione, come un generico disturbo.

2. *Segnali misurabili*: segnali accessibili al regolatore, cioè segnali dei quali al regolatore perviene informazione, come un disturbo misurabile o il riferimento r .

3. *Segnali preconosciuti*: segnali di cui perviene al regolatore informazione in anticipo rispetto alla variazione della variabile controllata da essi provocata.

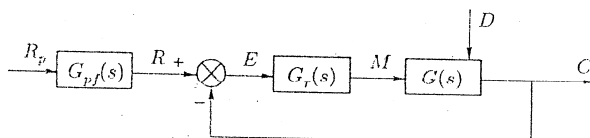
Un tipico segnale che spesso è preconosciuto è il riferimento r . Si usa la parola *preconoscenza* (in inglese *preview*) ad indicare la conoscenza dell'andamento del riferimento in un intervallo di tempo, detto *intervallo di preconoscenza* precedente l'istante in cui esso si presenta alla giunzione sommannte, e la parola *preazione* (in inglese *preaction*) ad indicare un'azione sul sistema controllato che implica preconoscenza. La preazione non si deve confondere con l'azione diretta o azione in avanti (in inglese *feedforward*), che, come specificato al Paragrafo 1.3, si riferisce al controllo senza preconoscenza che non utilizza la retroazione (in inglese *feedback*).

Il tipo più semplice di regolatore a due gradi di libertà è rappresentato in Fig. 7.31. Esso usa un filtro (spesso detto *prefiltro*) $G_{pf}(s)$, che ha lo scopo di attutire le variazioni brusche del segnale di riferimento e filtrare eventuali disturbi in ingresso.

Preconoscenza
Intervallo di
preconoscenza
Preazione
Azione diretta
Azione in avanti

Prefiltro

Figura 7.31
Regolatore con prefiltro.



Qualora il prefiltro presenti un grado relativo almeno uguale a quello del sistema controllato, si rende disponibile, a monte di esso, un segnale di "preconoscenza differenziale" (una combinazione lineare delle derivate del segnale r effettivamente applicato al sistema), che rende possibile l'inseguimento perfetto se il sistema controllato è a fase minima.

◆ Regolatori a due gradi di libertà per sistemi a fase minima e con ritardi finiti

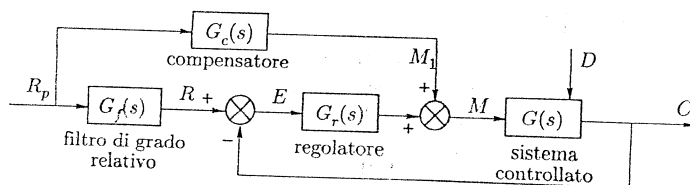
Regolatori a due
gradi di libertà

Lo schema di base del regolatore a due gradi di libertà per l'inseguimento perfetto nel caso dei sistemi a fase minima è rappresentato in Fig. 7.32. Siano

$$G_r(s) = \frac{P_r(s)}{Q_r(s)} \quad \text{e} \quad G(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (7.72)$$

rispettivamente la funzione di trasferimento del regolatore di retroazione, che si suppone includere il modello interno corrispondente al segnale tipico o di saggio che si vuole seguire con errore a regime nullo (proprietà robusta rispetto a variazioni dei parametri che non pregiudichino la stabilità dell'anello di retroazione), e quella del sistema controllato, che

Figura 7.32
Regolatore a due gradi
di libertà per l'insegui-
mento perfetto nel caso di
sistemi a fase minima.



si suppone a fase strettamente minima, cioè senza alcuno zero a parte reale nulla o positiva. Avendo introdotto il coefficiente reale K , si assume che i polinomi $P(s)$ e $Q(s)$ siano entrambi monici.

La parte ad azione diretta consiste in un *filtro di grado relativo* $G_f(s) = P_f(s)/Q_f(s)$, strettamente stabile e con grado relativo non inferiore a quello dal sistema controllato, e di un *compensatore* ad azione diretta $G_c(s)$. Il polinomio $Q_f(s)$ si suppone monico. L'inseguimento del segnale a valle del filtro è perfetto, cioè l'errore si mantiene nullo (quindi la retroazione non interviene) se e solo se vale la relazione

$$G_f(s) R_p(s) = G_c(s) G(s) R_p(s),$$

da cui si ricava la funzione di trasferimento del compensatore nella forma

$$G_c(s) = \frac{G_f(s)}{G(s)} = \frac{(1/K) P_f(s) Q(s)}{Q_f(s) P(s)} \quad (7.73)$$

Il compensatore è strettamente stabile se il filtro è strettamente stabile e il sistema controllato a fase strettamente minima, come in effetti si è supposto. Poiché l'errore è nullo rispetto al segnale a valle del filtro e questo deve soddisfare una condizione di grado relativo legata alla realizzabilità fisica del compensatore, il risultato è apparentemente identico a quello ottenuto utilizzando le relazioni della sintesi diretta.

In realtà, dal punto di vista della reiezione dei disturbi l'azione filtrante imposta attraverso la scelta di un filtro opportuno come modello di riferimento nella sintesi diretta e quella esplicita da un prefiltro disposto come è indicato in Fig. 7.31 sono alquanto diverse, in quanto la prima agisce sia sul disturbo di misura sia sul disturbo sovrapposto al segnale di riferimento, mentre il prefiltro agisce solamente su quest'ultimo disturbo, per cui in genere conviene utilizzare entrambe le tecniche in presenza di disturbi notevoli sul segnale di riferimento per non incidere eccessivamente sulla funzione di sensibilità, che viene ridotta se si sceglie come modello di riferimento per la sintesi diretta un filtro con frequenza di taglio eccessivamente bassa. Quindi un progetto analitico ben articolato deve prevedere e ben bilanciare entrambi gli interventi.

Nel caso di Fig. 7.32 il filtro di grado relativo $G_f(s)$ può essere progettato indipendentemente dal prefiltro $G_{pf}(s)$, che limita l'effetto dei disturbi sovrapposti al segnale di riferimento, e posto a valle di esso, in modo che i disturbi stessi vengano attenuati prima di essere applicati al compensatore, che li elabora e li inietta all'ingresso del sistema controllato.

ESEMPIO C7.2.1 Con riferimento allo schema di Fig. 7.31, si assumono per il sistema controllato e il regolatore le funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s+10)},$$

$$G_r(s) = \frac{2(s+0,5)(s+0,54)}{s(s+5,4)}.$$

Esse sono tipiche di un servomeccanismo di posizione di tipo 2, con regolatore ad azione integrale e rete anticipatrice. Come filtro si assume un filtro di Bessel di ordine 3 (pari al grado relativo del sistema controllato) e con pulsazione di rottura pari a 2 sec^{-1} , la cui funzione di trasferimento è

$$G_f(s) = \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8},$$

e si deduce la funzione di trasferimento del compensatore

$$G_c(s) = \frac{G_f(s)}{G(s)} = \frac{0,2s(s+1)(s+10)}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8},$$

che, con riferimento allo schema di Fig. 7.32, porta ad annullare identicamente l'errore e . Il controllo, pur essendo ad azione diretta, possiede una certa robustezza

perché qualunque scostamento da zero dell'errore viene automaticamente ripreso dal regolatore.

Nel caso in cui il sistema controllato presenti un ritardo finito, cioè abbia la funzione di trasferimento

$$G'(s) = G(s) e^{-t_0 s} = K \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s} \quad (7.74)$$

ma con $G(s)$ ancora a fase strettamente minima, si può usare lo schema di Fig. 7.33, che richiede un intervallo di pre conoscenza almeno pari a t_0 per poter operare una corrispondente preazione sul sistema controllato; ovviamente il compensatore viene determinato ancora con la (7.73), prescindendo dal ritardo.

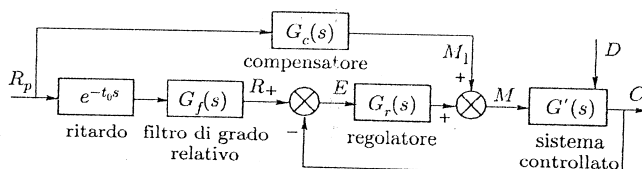


Figura 7.33 Regolatore a due gradi di libertà per l'inseguimento perfetto nel caso di sistemi a fase minima con ritardo finito.

◆ Regolatori a due gradi di libertà per sistemi a fase non minima

Si mostrerà ora come utilizzando la preconsocenza e la preazione si possa ottenere l'inseguimento perfetto anche nel caso in cui la funzione $G(s)$ sia a fase non minima⁽⁵⁾. L'unica ipotesi che si introduce è che essa sia priva di zeri immaginari. Si consideri nuovamente la funzione di trasferimento $G_c(s)$ definita dalla (7.73). Essa si può esprimere nella forma

$$G_c(s) = \frac{(1/K) P_f(s) Q(s)}{Q_f(s) P^-(s) P^+(s)} = K_1 + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = K_1 + \frac{A(s)}{Q_f(s) P^-(s)} + \frac{B(s)}{P^+(s)}, \quad (7.75)$$

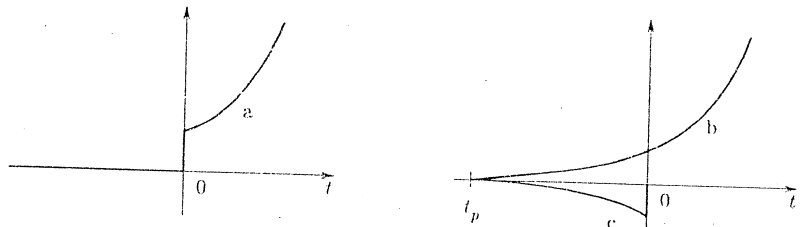
in cui si è introdotta la fattorizzazione $P(s) = P^-(s) P^+(s)$, con $P^-(s)$ e $P^+(s)$ rispettivamente strettamente stabile e strettamente instabile. La costante K_1 è diversa da zero se e solo se $G_c(s)$ non è strettamente propria; $P_1(s)/Q_1(s)$ è, pertanto, sempre strettamente propria. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ si possono dedurre mediante lo sviluppo in somma di fratti semplici o risolvendo l'equazione diofantea

$$A(s) [P^+(s)] + B(s) [Q_f(s) P^-(s)] = P_1(s). \quad (7.76)$$

Essendo il grado di $P_1(s)$ strettamente minore della somma di quelli di $P^+(s)$ e di $Q_f(s) P^-(s)$, in virtù della Proprietà C7.1.1 le funzioni di trasferimento di cui $A(s)$ e $B(s)$ sono i numeratori risultano strettamente proprie.

Figura 7.34

Segnale di compensazione relativo a uno zero instabile (a), segnale non applicato (b) e segnale di preazione (c).



Si immagini ora di applicare all'ingresso del compensatore instabile con funzione di trasferimento $G_c(s)$ un impulso di Dirac e di collegare l'uscita all'ingresso del sistema controllato. Si analizza, in particolare, la risposta all'impulso dell'ultimo termine a secondo membro della (7.75). Questa consiste in una combinazione lineare di tutti i modi corrispondenti agli zeri instabili del sistema controllato, del tipo indicato con (a) in Fig. 7.34. Dalla relazione

$$\frac{B(s)}{P^+(s)} \frac{K P(s)}{Q(s)} = \frac{K B(s) P^-(s)}{Q(s)} \quad (7.77)$$

risulta che la corrispondente risposta equivale a quella che si otterrebbe ponendo il sistema controllato in uno stato iniziale non nullo. Infatti il secondo membro della (7.77) è una funzione razionale strettamente propria con tutti i poli uguali a quelli del sistema controllato e può essere interpretato come la trasformata di Laplace di un moto libero del sistema controllato stesso. Si ponga

$$G_c^-(s) = K_1 + \frac{A(s)}{Q_f(s) P^-(s)}, \quad G_c^+(s) = \frac{B(s)}{P^+(s)}, \quad (7.78)$$

e si consideri il sistema in retroazione di Fig. 7.32, assumendo $G_c(s) = G_c^-(s)$. Con ciò viene ignorato il termine instabile $G_c^+(s)$, che si è mostrato essere equivalente ad uno stato

⁽⁵⁾Le pubblicazioni in cui, in un contesto più ampio e più complesso di quello qui presentato, viene affrontato il problema dell'inversione non causale sono: S. Devasia e B. Paden, "Exact output tracking for nonlinear time-varying systems", *Proc. IEEE Conf. Decision Contr.*, 1994, pp. 2346-2355, e L. R. Hunt, G. Meyer e R. Su, "Noncausal inverses for linear systems", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 41, n. 4, pp. 608-611, 1996. Si ricorda anche la pubblicazione: D. S. Kwon e W. J. Book, "An inverse dynamic method yielding flexible manipulator state trajectories" *Proceed. ACC'90*, pp. 186-193, San Diego, CA, 1990. In questi lavori, anziché usare il filtro (che dal punto di vista strettamente matematico implica un'approssimazione dell'ingresso e quindi del risultato dell'inversione), si definiscono classi particolari di ingressi rispetto ai quali il sistema è invertibile in modo esatto.

iniziale del sistema controllato, per cui si produce l'errore

$$E(s) = \frac{-K B(s) P^-(s)}{Q(s)} \frac{-1}{1 + G_c(s) G(s)} = \frac{K B(s) P^-(s) Q_c(s)}{Q_c(s) Q(s) + K P_c(s) P(s)}, \quad (7.79)$$

che si annulla asintoticamente per la stretta stabilità dell'anello di retroazione.

L'antitrasformata del termine $G_c^+(s)$, che ha l'andamento schematizzato nella curva (a) di Fig. 7.34, non si può in effetti applicare al sistema controllato perché, essendo a valori illimitati, porterebbe a saturazione sull'ingresso; essa peraltro si può scomporre nella somma delle funzioni indicate con (b) e (c) nella stessa figura, ottenute rispettivamente "prolungando" verso i tempi negativi la medesima antitrasformata e come l'opposta di quest'ultima per $t \leq 0$. Tali segnali, se applicati con il sistema nello stato zero a partire da un qualunque istante $t_p < 0$, porterebbero pertanto ad errore identicamente nullo. Il valore di $|t_p|$ viene detto *intervallo di preazione*. Immaginiamo di non applicare il segnale (b): si dimostra facilmente che l'errore conseguente a tale mancata applicazione diminuisce al crescere di $|t_p|$ e tende alla funzione identicamente nulla per $t_p \rightarrow -\infty$. Siano $z_1, \dots, z_{m'}$ gli zeri del sistema controllato a parte reale positiva, per cui la funzione (a) è esprimibile come combinazione lineare dei corrispondenti modi nella forma⁽⁶⁾

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B(s)}{P^+(s)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{h=1}^{m'} \frac{K_h}{s - z_h} \right] = \sum_{h=1}^{m'} K_h e^{z_h t}. \quad (7.80)$$

La stessa combinazione lineare estesa ai tempi negativi porta alla definizione del segnale (b), che, riferito all'origine dei tempi traslata in t_p , ha la trasformata di Laplace

$$\frac{B_0(s)}{P^+(s)} = \sum_{h=1}^{m'} \frac{K_h e^{z_h t_p}}{s - z_h}. \quad (7.81)$$

Essa risulta dello stesso tipo di quella del segnale (a), ma con il polinomio a numeratore $B_0(s)$ avente coefficienti molto minori di quelli di $B(s)$, in quanto ottenuti moltiplicando i coefficienti dello sviluppo in somma di fratti semplici di $B(s)/P^+(s)$ per esponenziali tendenti a zero per $t_p \rightarrow -\infty$. L'errore dovuto alla mancata applicazione del segnale (b) si calcola ancora con la (7.79), sostituendovi $B_0(s)$ a $B(s)$ e risulta trascurabile se l'intervallo di preazione $|t_p|$ è sufficientemente elevato. Grosso modo, l'errore diminuisce nel rapporto di 1 ad $e^{\sigma t_p}$, in cui σ indica la parte reale dello zero instabile più vicino all'asse immaginario, per cui i tempi di preazione di 5σ e 7σ riducono rispettivamente l'errore a meno dell'1% e dello 0,1%. In conclusione si è dimostrato che, qualora si definisca il compensatore di Fig. 7.32 con $G_c(s) = G_c^-(s)$ e si applichi all'ingresso un impulso di Dirac all'istante $t = 0$, cioè si ponga $r_p(t) = \delta(t)$, l'errore di inseguimento del segnale $r(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_f(s)]$ (uscita del filtro) si può ridurre tanto quanto si vuole con l'applicazione all'ingresso del sistema controllato di un segnale di preazione $g_c^+(t)$ definito dalla relazione

$$g_c^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_p \\ -\sum_{h=1}^{m'} K_h e^{z_h t} & \text{per } t_p \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{per } t > 0 \end{cases}. \quad (7.82)$$

Ovviamente tale segnale non può essere generato in modo preciso dalla libera evoluzione di un sistema instabile. Invertendo l'asse dei tempi, tale sistema diventa però strettamente stabile. Si procede pertanto alla registrazione del segnale ottenuto con asse dei tempi invertito e alla sua riproduzione con asse dei tempi nuovamente invertito. Più precisamente, si deduce la funzione del tempo $\gamma(t)$ con la relazione

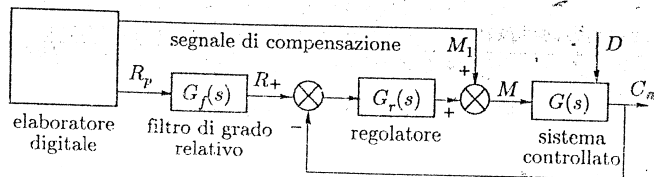
$$\gamma(t) = -\sum_{h=1}^{m'} K_h e^{-z_h t} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B(-s)}{P^+(-s)} \right], \quad (7.83)$$

in cui l'ultima eguaglianza discende immediatamente dalla (7.80), e si pone $g_c^+(t) = \gamma(-t)$, $t \leq 0$. L'applicazione del segnale di preazione richiede quindi l'ausilio di un elaboratore digitale, che viene collegato al sistema in retroazione come è mostrato in Fig. 7.35. In tale

⁽⁶⁾ Il caso in cui gli zeri a parte reale positiva siano multipli si traduce solo in una maggiore complicazione formale, che viene qui evitata.

Figura 7.35

Generazione del segnale di compensazione con elaboratore digitale.



schema si suppone che l'elaboratore generi l'intero segnale di compensazione corrispondente ad entrambi i termini nella cui somma è stata scomposta la $G_c(s)$ nella (7.78), cioè alla funzione di risposta all'impulso $g_c(t) = g_c^+(t) + g_c^-(t)$, in cui $g_c^-(t)$ è l'antitrasformata di Laplace di $G_c^-(s)$, definita per $t \geq 0$. Si noti che, in conseguenza della (7.82), la funzione $g_c(t)$ è identicamente nulla per $t < t_p$.

Dal caso $r_p(t) = \delta(t)$ si può facilmente passare al caso di un segnale $r_p(t)$ arbitrario applicando gli integrali di convoluzione. Si distinguono due casi:

Orizzonte infinito

a) *Intervallo di prenoscenza infinito (orizzonte infinito)*

Se il segnale $r_p(t)$ è completamente noto a priori, come ad esempio nel caso del controllo di una macchina utensile, il segnale di preazione è dato da

$$m_1^+(t) = \int_t^\infty r_p(\tau) g_c(t - \tau) d\tau. \quad (7.84)$$

In questo caso l'errore di inseguimento è diverso da zero durante un transitorio iniziale immediatamente successivo all'istante t_p e, quindi, si mantiene identicamente nullo. Scegliendo opportunamente il valore di t_p si può far sì che esso praticamente si annulli prima dell'istante $t = 0$, in cui inizia l'inseguimento.

Orizzonte recedente

b) *Intervallo di prenoscenza finito (orizzonte recedente)*

Se l'intervallo di prenoscenza del segnale $r_p(t)$ è finito e si mantiene costante nel tempo, conviene assumere l'intervallo di preazione $|t_p|$ ad esso uguale. Il segnale di compensazione è dato da

$$m_1(t) = \int_t^{t+|t_p|} r_p(\tau) g_c(t - \tau) d\tau = \int_t^\infty r_p(\tau) g_c'(t - \tau) d\tau, \quad (7.85)$$

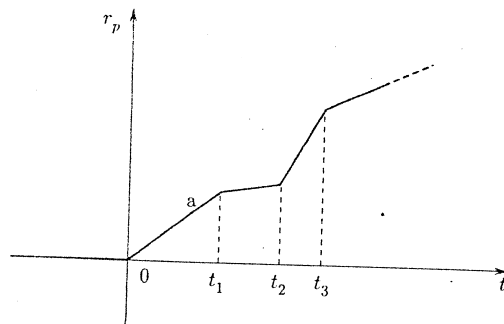
in cui è

$$g_c'(t) = \begin{cases} g_c(t) & \text{per } t \leq |t_p| \\ 0 & \text{per } t > |t_p| \end{cases} \quad (7.86)$$

In questo caso si ha un errore di inseguimento che permane nel tempo, ma tende uniformemente a zero al crescere di $|t_p|$.

Figura 7.36

Ingresso di riferimento a monte del filtro.



L'elaboratore fornisce, oltre al segnale di compensazione m_1 , il segnale r_p , che, filtrato, costituisce il riferimento per l'inseguimento perfetto. Per rendere più agevole la generazione di m_1 , il segnale r_p può essere approssimato con una spezzata, come indicato in Fig. 7.36. In tal caso infatti gli integrali di convoluzione presenti nelle (7.84) e (7.85) si riconducono a sommatorie di un numero finito di termini, uno per ogni istante di discontinuità. Si indicano con $t_0 = 0, t_1, \dots, t_N$ gli istanti di discontinuità e con α_i , i valori della derivata

negli intervalli $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i=1, \dots, N$), con $g_c(t)$ il segnale di compensazione relativo alla rampa unitaria, che si può calcolare adattando opportunamente il procedimento sopra riportato in relazione all'impulso di Dirac. In virtù della proprietà di sovrapposizione degli effetti, il segnale di compensazione è dato da

$$m_1(t) = \alpha_1 g_c(t) + \sum_{i=1}^N (\alpha_{i+1} - \alpha_i) g_c(t - t_i), \quad (7.87)$$

oppure, nel caso di orizzonte recedente,

$$m_1(t) = \alpha_1 g'_c(t) + \sum_{i=1}^N (\alpha_{i+1} - \alpha_i) g'_c(t - t_i), \quad (7.88)$$

cioè si ottiene moltiplicando per opportune costanti e traslando una stessa funzione del tempo, calcolata preliminarmente e memorizzata nell'elaboratore digitale.

Il seguente esempio numerico illustra il procedimento e mostra i vantaggi della preazione nel caso dei sistemi a fase non minima.

ESEMPIO C7.2.2 Con riferimento allo schema di Fig. 7.35, si considerano il sistema controllato e il regolatore con funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{-4(s-2)}{s(s+1)(s+10)}, \quad (7.89)$$

$$G_r(s) = \frac{4(s+0,5)(s+0,2)}{s(s+3,8)}.$$

Si assume che il segnale $r_p(t)$ sia del tipo rappresentato in Fig. 7.36. La condizione di grado relativo richiede un filtro del primo ordine. Si assume

$$G_f(s) = \frac{4}{s+4}. \quad (7.90)$$

Indicando con $G_c(s)$ la funzione di trasferimento di un ipotetico compensatore instabile per una rampa di pendenza unitaria, si deduce

$$G_c(s) G(s) = \frac{1}{s^2} G_f(s), \quad (7.91)$$

da cui

$$G_c(s) = \frac{G_f(s)}{s^2 G(s)} = \frac{-(s+1)(s+10)}{s(s+4)(s-2)}. \quad (7.92)$$

Sviluppando in somma di fratti semplici, si ottiene

$$G_c(s) = \frac{1,25}{s} + \frac{0,75}{s+4} - \frac{3}{s-2},$$

da cui la scomposizione

$$G_c^-(s) = \frac{1,25}{s} + \frac{0,75}{s+4} = \frac{2(s+2,5)}{s(s+4)}, \quad (7.93)$$

$$G_c^+(s) = \frac{-3}{s-2}.$$

Il nucleo del segnale di preazione con asse dei tempi inverso è dato da

$$\mathcal{L}^{-1}[G_c^+(-s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2}\right] = 3e^{-2t},$$

e quindi, con asse dei tempi diretto,

$$g_c^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t > 0 \\ 3e^{2t} & \text{per } t \leq 0. \end{cases} \quad (7.94)$$

Il segnale di compensazione complessivo si ottiene sommando a tale segnale quello corrispondente a $G_c^-(s)$, dato da

$$g_c^-(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1,25 + 0,75e^{-4t} & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (7.95)$$

Si illustrano ora i risultati di una simulazione: in Fig. 7.37 sono riportati, indicati con (a), il segnale di riferimento $r(t)$ a valle del filtro e, a tratto, quello a monte del filtro $r_p(t)$ e, indicata con (b), l'uscita del sistema controllato in assenza di compensazione: l'errore di inseguimento risulta notevole ed è evidente la controtenenza iniziale, dovuta al fatto che il sistema è a fase non minima.

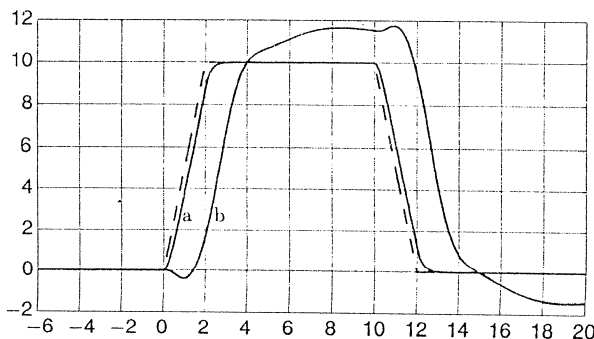


Figura 7.37 Esempio C7.2.2: ingresso di riferimento e uscita non compensata.

In Fig. 7.38 è rappresentato il segnale $g_c(t)$ di compensazione per una rampa unitaria applicata in $t=0$. Esso è dato dalla somma delle funzioni (7.94) e (7.95).

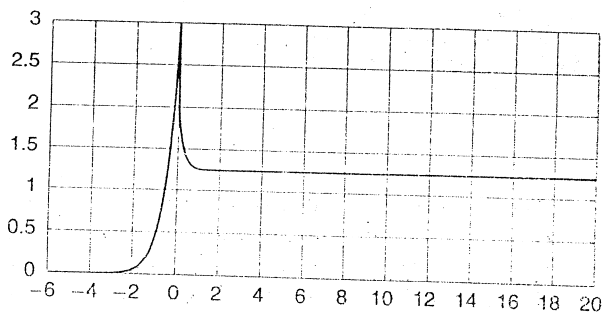


Figura 7.38 Esempio C7.2.2: segnale di compensazione per una rampa unitaria in $t=0$.

In Fig. 7.39 è rappresentato il segnale di compensazione complessivo, ottenuto applicando la (7.87) alla somma di rampe riportata a tratto in Fig. 7.37.

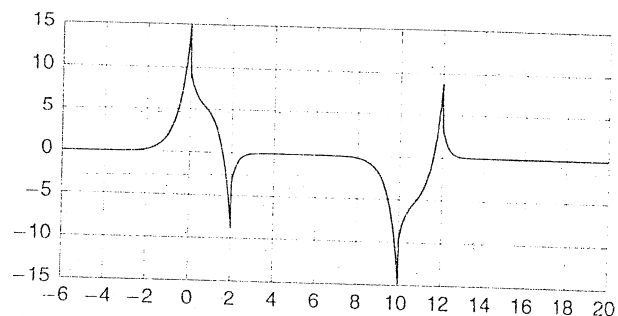


Figura 7.39 Esempio C7.2.2: segnale di compensazione complessivo.

In Fig. 7.40 sono rappresentati gli errori di inseguimento nel caso in cui l'orizzonte di preconsenza sia infinito, ma il segnale di correzione venga applicato a partire dall'istante $t_p = -6$ sec (a) e nel caso in cui esso sia recedente e pari a 6 sec, come l'intervallo di preazione (b). Si noti che l'inseguimento è praticamente perfetto (errore dell'ordine di qualche parte per centomila).

Qualche informazione sul calcolo dell'errore. L'errore è dovuto al fatto che il segnale di preazione, indicato con (c) in Fig. 7.34, viene applicato a partire da t_p anziché da $-\infty$. All'istante t_p all'ingresso del sistema controllato perviene un segnale la cui trasformata di La-

place è $-G_c^+(s)$, con $G_c^+(s)$ definita dalla seconda delle (7.93). Nel caso del segnale di correzione rappresentato in Fig. 7.38 questo produce sull'uscita del sistema controllato un segnale la cui trasformata di Laplace è

$$E(s) = \frac{G(s)}{1 + G_r(s)G(s)} \frac{3e^{2t_p}}{s-2}, \quad (7.96)$$

che deve essere riferito ad un'origine dei tempi traslata in t_p . La risposta è stabile, in quanto il termine $s-2$ si cancella con il termine identico presente a numeratore di $G(s)$.

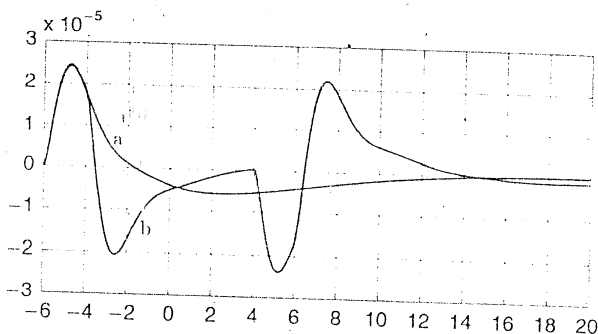


Figura 7.40 Esempio C7.2.2: errori di inseguimento con compensazione (orizzonte infinito e orizzonte recedente).

Nel caso in cui il segnale di correzione sia quello complessivo, rappresentato in Fig. 7.39, e l'orizzonte di preconsenza sia infinito, l'ultimo fattore a secondo membro della (7.96) va sostituito con

$$\frac{5 \cdot 3 (e^{2t_p} - e^{2(t_p-2)} - e^{2(t_p-10)} + e^{2(t_p-12)})}{s-2},$$

in quanto tutti i segnali di correzione delle rampe di cui $g_c^+(t)$ è la somma vengono troncati in t_p (il fattore 5 si riferisce alla variazione di pendenza delle rampe), mentre il caso in cui l'orizzonte sia recedente si tratta considerando il segnale errore la cui trasformata di Laplace è

$$5E(s)(1 - e^{-2s} - e^{-10s} + e^{-12s}),$$

cioè il segnale di correzione per la rampa unitaria traslato in corrispondenza degli istanti di applicazione delle rampe e moltiplicato per la loro variazione di pendenza, sempre riferito ad un'origine dei tempi traslata in t_p .

Capitolo 8

Sistemi in retroazione non lineari

Questo capitolo è dedicato alla presentazione di alcuni dei più importanti metodi per lo studio del comportamento dei sistemi in retroazione in presenza di non linearità: il metodo della funzione descrittiva, per analizzare la possibilità di insorgere di oscillazioni autosostenute, il criterio del cerchio e il criterio di Popov, che forniscono condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale, di notevole utilità per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione con una non linearità situata in un punto dell'anello. Peraltro non sempre la non linearità dei sistemi va vista come un fenomeno dannoso, necessariamente da evitare: spesso si costruiscono sistemi intenzionalmente non lineari, come i sistemi a relè, in cui l'amplificazione, per motivi economici, tecnologici o di rendimento, viene eseguita con apparati che in uscita danno un segnale la cui ampiezza non è variabile con continuità, ma per incrementi finiti. Data la grande diffusione di apparati di questo tipo, ne verranno esaminate le più importanti caratteristiche ed applicazioni, nonché i principali procedimenti di analisi e di correzione del comportamento dinamico.

8.1. Stati di equilibrio e stabilità

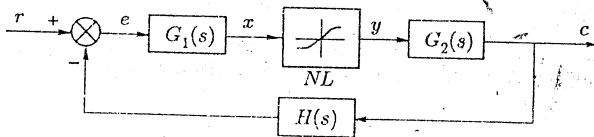
Lo studio di sistemi non lineari del tutto generali esula dai limiti della presente trattazione, che vuole esporre i metodi di analisi più semplici e di impiego più corrente in relazione ai sistemi di controllo in retroazione. Ci si limiterà pertanto a considerare sistemi aventi la struttura rappresentata nello schema a blocchi di Fig. 8.1⁽¹⁾, cioè sistemi in retroazione in cui, in un punto generico della catena di amplificazione diretta, è presente un blocco non lineare di tipo algebrico, cioè rappresentabile con una funzione ingresso-uscita, mentre il resto del sistema è composto di blocchi lineari, ciascuno rappresentabile con una funzione di trasferimento.

Si suppone che al segnale di riferimento sia assegnato un valore costante, che si indica con r_1 : per l'analisi del comportamento del sistema

⁽¹⁾ Si noti che in Fig. 8.1, come in tutti gli altri schemi a blocchi di questo capitolo, in cui sono presenti blocchi algebrici non lineari e blocchi dinamici lineari, i segnali sono indicati con lettere minuscole (funzioni del tempo), anziché maiuscole (trasformate di Laplace). È ovvio che la moltiplicazione di un segnale per una funzione di trasferimento deve intendersi preceduta dalla trasformazione e seguita dall'antitrasformazione di Laplace.

Figura 8.1

Sistema in retroazione non lineare.



Punto di equilibrio

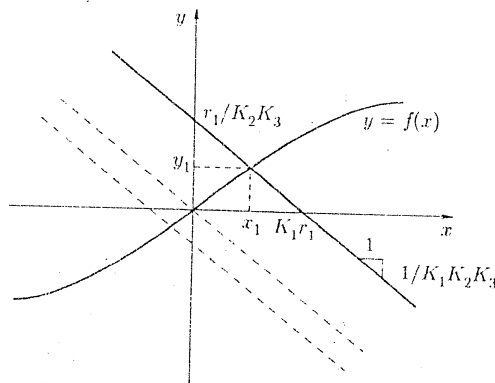
di Fig. 8.1 in presenza di perturbazioni, occorre conoscere il corrispondente punto di equilibrio (x_1, y_1) sulla caratteristica dell'elemento non lineare. A tale scopo, se la caratteristica è data in forma grafica, si può impiegare la costruzione indicata in Fig. 8.2: il punto di equilibrio viene determinato come intersezione della caratteristica dell'elemento non lineare, di equazione $y = f(x)$, con la retta di equazione

$$x = K_1 r - K_1 K_2 K_3 y, \quad (8.1)$$

in cui con $K_1 = G_1(0)$, $K_2 = G_2(0)$, $K_3 = H(0)$ si sono indicati i guadagni statici dei tre blocchi lineari.

Figura 8.2

Costruzione grafica per la determinazione del punto di equilibrio.



La costruzione grafica di Fig. 8.2 consente di stabilire come il punto di equilibrio si sposti, lungo la caratteristica dell'elemento non lineare, al variare dell'ingresso r : esso si può pensare individuato dall'intersezione della caratteristica stessa con una famiglia di rette parallele, ciascuna corrispondente ad un diverso valore di r .

La costruzione si riferisce al caso in cui i guadagni statici K_1 , K_2 e K_3 siano finiti. Qualora il sistema in retroazione sia di tipo 1, $G_1(s)$ o $G_2(s)$ presentano un polo nell'origine e quindi il corrispondente guadagno statico è infinito. Se il polo nell'origine è in $G_1(s)$, all'equilibrio risulta $e = 0$, cioè

$$r = K_2 K_3 y, \quad (8.2)$$

da cui

$$y = \frac{1}{K_2 K_3} r$$

in luogo della costruzione grafica di Fig. 8.2 si può utilizzare quella riportata in Fig. 8.3.

Se invece il polo nell'origine è in $G_2(s)$, all'equilibrio risulta $y = 0$, cioè, qualunque sia il valore di r_1 , si ha sempre $x_1 = y_1 = 0$.

È evidente che il comportamento locale (cioè per piccole perturbazioni rispetto a una data condizione di equilibrio) del sistema di Fig. 8.1 dipende in genere dal particolare punto di equilibrio considerato e quindi dal valore di r_1 : infatti, se si opera una linearizzazione locale della caratteristica dell'elemento non lineare, cioè se si approssima la curva con la tangente in x_1 ,

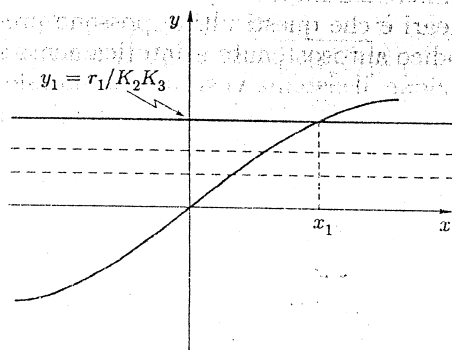


Figura 8.3

Modifica della costruzione grafica di Fig. 8.2 per il caso in cui $G_1(s)$ presenti un polo nell'origine.

y_1 , si definisce un "guadagno locale" del blocco non lineare, che, in genere, dipende dal valore r_1 e, anche quando tale linearizzazione sia accettabile, cioè per piccole perturbazioni, il comportamento del sistema linearizzato, i suoi poli, la stabilità, dipendono evidentemente dal particolare punto di equilibrio considerato.

Si giustifica così quanto asserito al Paragrafo 4.1, cioè che nel caso dei sistemi non lineari si deve parlare di stabilità di un punto di equilibrio e non di stabilità del sistema; nel caso dei sistemi lineari invece il comportamento è identico in qualunque punto di equilibrio.

Nello stesso Paragrafo 4.1 si è notato inoltre che la stabilità in presenza di perturbazioni di un particolare punto di equilibrio di un sistema non lineare può dipendere dall'entità della perturbazione.

Nel caso dei dispositivi di controllo si richiede in generale che qualunque punto di equilibrio in cui il sistema si possa portare al variare dell'ingresso o degli ingressi sia asintoticamente stabile per perturbazioni di qualunque entità, cioè *globalmente asintoticamente stabile*: in questo caso si può dire che il sistema non lineare è globalmente asintoticamente stabile.

Stabilità asintotica globale

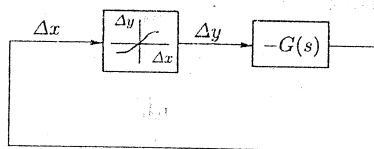


Figura 8.4

Schema per lo studio di un sistema in retroazione in rapporto a un dato punto di equilibrio.

Agli effetti dello studio della stabilità di un punto di equilibrio, corrispondente a un dato valore costante r_1 della variabile di ingresso, dallo schema della figura 8.1 ci si può ricondurre a quello della figura 8.4, in cui è $G(s) = G_1(s) G_2(s) H(s)$. Si è posto $\Delta x = x - x_1$, $\Delta y = y - y_1$ e l'origine delle coordinate Δx , Δy è stata situata, sulla caratteristica dell'elemento non lineare, nel punto x_1 , y_1 : infatti, operando nel sistema di Fig. 8.1 tale cambiamento di origine e ponendo inoltre $\Delta r = r - r_1$, nella condizione in esame risulta $\Delta r = 0$, il che significa che l'ingresso, nello schema a blocchi, può essere eliminato.

Lo studio della stabilità del sistema in retroazione non lineare di Fig. 8.1 quando r sia costante o lentamente variabile si può ricondurre a quello di una famiglia di sistemi autonomi (privi di ingresso) del tipo di Fig. 8.4, che differiscono l'uno dall'altro solo per il fatto che l'origine delle coordinate Δx , Δy è situata in un punto diverso della curva che rappresenta la caratteristica del blocco non lineare, punto che si può determinare facilmente, in funzione del valore di r , utilizzando la costruzione grafica di Fig. 8.2 o quella di Fig. 8.3. Criteri per la stabilità asintotica globale saranno presentati al Paragrafo 8.4.

Sistema autonomo

Ciclo limite

Un'altra notevole differenza fra il comportamento dei sistemi lineari e quello dei sistemi non lineari è che questi ultimi possono presentare anche condizioni di moto periodico autosostenuto asintoticamente stabili, nel senso che, dopo una perturbazione, il sistema vi si riporta; un tale comportamento non si verifica nei sistemi lineari⁽²⁾. Nel caso dei sistemi non lineari pertanto, oltre alla stabilità di un punto di equilibrio, si pone il problema di considerare la stabilità o meno di una soluzione periodica o *ciclo limite*.

Lo studio dei cicli limite è importante anche in relazione ai sistemi di controllo poiché quando, aumentando il guadagno di anello, questi sono portati in condizioni di instabilità, assumono in genere un moto periodico stabile, dovuto al fatto che le inevitabili saturazioni limitano le escursioni delle diverse variabili e impediscono quindi l'esaltazione indefinita delle oscillazioni autosostenute.

8.2. Il metodo della funzione descrittiva

Lo sviluppo di metodi di analisi e sintesi basati sulle ipotesi di linearità e di stazionarietà, quali i metodi descritti in dettaglio nei precedenti capitoli, è determinante per la conduzione del progetto dei sistemi in retroazione mediante procedimenti efficienti e relativamente semplici. L'ipotesi di linearità è peraltro giustificata solo quando tutte le variabili del sistema subiscono variazioni sufficientemente piccole; infatti, in maggiore o minore estensione, tutti i sistemi fisici sono in realtà non lineari e si comportano approssimativamente come sistemi lineari solo per piccoli segnali. Nei sistemi in retroazione, caratterizzati da un elevato guadagno di anello, si possono avere per contro variazioni notevolissime e saturazioni dei vari segnali, che possono portare, appunto per la presenza della retroazione, a comportamenti instabili, che si manifestano in genere con l'innescò di oscillazioni persistenti: ciò può accadere anche in sistemi che risulterebbero stabili per piccole variazioni dei segnali. Naturalmente un comportamento di questo genere è da evitare.

Il metodo della funzione descrittiva costituisce un utile strumento per verificare se l'innescò di oscillazioni autosostenute in un sistema di controllo progettato sotto l'ipotesi di linearità è possibile o meno; esso risulta non rigoroso, ma semplice, intuitivo e soddisfacente nella maggior parte dei casi di interesse pratico.

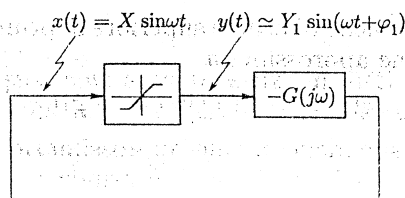
Nella sua forma più semplice, il metodo si applica a sistemi del tipo di Fig. 8.1, cioè composti di elementi dinamici lineari, il cui comportamento è descritto da funzioni di trasferimento, e un elemento non lineare puramente algebrico, caratterizzato da una relazione ingresso-uscita indipendente dalla frequenza⁽³⁾, completamente individuato da una caratteristica statica.

La possibilità di innescò di oscillazioni nel sistema di Fig. 8.1 verrà studiata sotto le seguenti ipotesi, che più avanti verranno rimosse a scapito della semplicità del procedimento:

- i) l'ingresso r è identicamente nullo;
- ii) la caratteristica dell'elemento non lineare è simmetrica rispetto all'origine.

⁽²⁾ Un esempio tipico di sistemi che presentano un comportamento del genere è dato dagli oscillatori elettronici.

⁽³⁾ Il metodo della funzione descrittiva è stato esteso anche al caso in cui la risposta della parte non lineare del sistema dipenda dalla frequenza, ma in questo caso esso perde la semplicità che ne distingue e ne giustifica l'applicazione.

**Figura 8.5**

Schema per l'applicazione
del metodo della funzione
descrittiva.

Essendosi supposto $r(t) = 0$, il sistema di Fig. 8.1 può essere rappresentato con il semplice anello di Fig. 8.5, in cui si è posto $G(s) = G_1(s) G_2(s) H(s)$: i due blocchi dello schema si riferiscono rispettivamente alla parte non lineare puramente algebrica, che verrà caratterizzata dalla funzione descrittiva, e alla parte lineare dinamica, caratterizzata dalla funzione di risposta armonica.

Si supponga che il sistema di Fig. 8.5 sia sede di un'oscillazione persistente e che all'ingresso del blocco non lineare tale oscillazione sia sinusoidale: in questa ultima ipotesi, che verrà più avanti giustificata, consiste la approssimazione che si introduce applicando il metodo della funzione descrittiva. All'uscita del blocco non lineare si ha un segnale periodico avente lo stesso periodo della sinusoide in ingresso, sviluppabile in serie di Fourier. Si noti che nello sviluppo manca il termine costante per l'ipotesi di simmetria della caratteristica.

Esprimendo il segnale di ingresso nella forma

$$x(t) = X \sin \omega t, \quad (8.3)$$

il segnale di uscita può essere rappresentato dalla relazione

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (8.4)$$

in cui è

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos n\omega t d\omega t, \quad (8.5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin n\omega t d\omega t. \quad (8.6)$$

Si può scrivere anche

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (8.7)$$

avendo posto

$$Y_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}. \quad (8.8)$$

I valori di a_n , b_n e quindi quelli di Y_n , φ_n sono in genere funzioni dell'ampiezza X del segnale di ingresso.

Si definisce *funzione descrittiva* dell'elemento non lineare il numero complesso, funzione dell'ampiezza X del segnale sinusoidale applicato all'ingresso, il cui modulo è uguale al rapporto fra l'ampiezza della fondamentale del segnale d'uscita e quella del segnale d'ingresso e il cui argomento è uguale allo sfasamento della fondamentale del segnale d'uscita rispetto al segnale d'ingresso. Indicando la funzione descrittiva con $F(X)$, si può scrivere

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1(X) + j a_1(X)) = \frac{1}{X} Y_1(X) e^{j\varphi_1(X)}. \quad (8.9)$$

Funzione descrittiva

Trascurando le armoniche di ordine superiore al primo nell'espressione (8.7), si ottiene la relazione approssimata

$$y(t) \simeq Y_1(X) \sin(\omega t + \varphi_1(X)). \quad (8.10)$$

Entro i limiti corrispondenti a tale approssimazione, la funzione descrittiva è analoga alla funzione di risposta armonica, salvo che essa dipende dall'ampiezza anziché dalla pulsazione del segnale di ingresso.

Una giustificazione dell'ipotesi di poter trascurare le armoniche di ordine superiore al primo è data dalle seguenti considerazioni:

- i) la loro ampiezza di solito è minore di quella della fondamentale;
- ii) la parte lineare del sistema, comportandosi in genere come un filtro passa basso, tende a ridurre l'ampiezza rispetto alla fondamentale.

Caso per caso si potrà peraltro verificare a posteriori se tale ipotesi è effettivamente giustificata.

Supponendo quindi che le armoniche di ordine superiore al primo vengano perfettamente filtrate, affinché il sistema di Fig. 8.5 sia sede di un'oscillazione persistente, che all'ingresso del blocco non lineare si presenta nella forma (8.3), deve essere soddisfatta la condizione

$$F(X) G(j\omega) = -1, \quad (8.11)$$

equivalente alle due relazioni

$$|F(X)| |G(j\omega)| = 1, \quad (8.12)$$

$$\varphi_1(X) + \arg G(j\omega) = (1 + 2\nu)\pi, \quad \nu \text{ intero}. \quad (8.13)$$

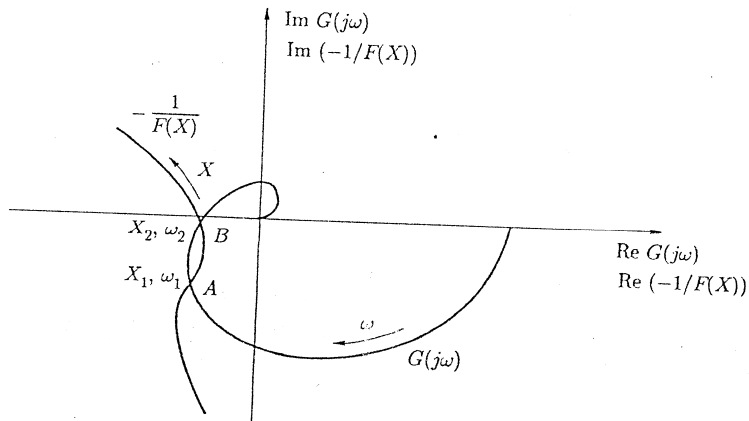
La (8.11) è un'equazione in X , ω , che coinvolge funzioni a valori complessi (la funzione descrittiva e la funzione di risposta armonica): le sue soluzioni corrispondono alle ampiezze e alle pulsazioni di possibili oscillazioni autosostenute.

L'equazione può essere risolta graficamente come è indicato in Fig. 8.6: si tracciano, riferendoli allo stesso sistema di assi, i diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$, il primo graduato in valori di ω e il secondo in valori di X : gli eventuali punti di intersezione (A e B in Fig. 8.6) corrispondono a valori (ω_1 e ω_2 , X_1 e X_2 in Fig. 8.6) per i quali è evidentemente soddisfatta la condizione (8.11), quindi caratterizzanti possibili oscillazioni autosostenute.

Si passeranno ora in rassegna le funzioni descrittive di alcune non linearità particolarmente significative e frequenti e si illustreranno nel contempo, facendo ad esse riferimento, alcuni esempi di applicazione del metodo.

Figura 8.6

Determinazione delle ampiezze e delle pulsazioni di possibili oscillazioni autosostenute col metodo della funzione descrittiva.



◆ Saturazione

La saturazione, per la sua inevitabile presenza in tutti i sistemi fisici, costituisce una nonlinearietà tipica, che ricorre assai spesso nelle applicazioni del metodo della funzione descrittiva.

La sua importanza deriva anche dal fatto che, come risulterà chiaro nel seguito, la determinazione delle funzioni descrittive di molte altre nonlinearietà, cioè quelle approssimabili con caratteristiche a forma di spezzata, simmetriche rispetto all'origine e a un sol valore, si può eseguire rapidamente conoscendo la funzione descrittiva della saturazione.

In Fig. 8.7a è riportata la caratteristica ingresso-uscita della saturazione nel caso particolare, che per semplicità si prenderà in esame per primo, in cui la pendenza del tratto inclinato della caratteristica sia unitaria. Le corrispondenti forme d'onda dell'ingresso e dell'uscita sono rappresentate in Fig. 8.7b.

La funzione descrittiva della saturazione si ricava applicando alla funzione $y(t)$ di Fig. 8.7b le relazioni (8.5), (8.6), scritte per $n=1$, e sostituendo nella (8.9). Con gli sviluppi illustrati in dettaglio al Paragrafo C8.1 si ottiene

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= \frac{2X}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha), \end{aligned} \quad (8.14)$$

in cui è

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{per } \frac{X_1}{X} \geq 1, \\ \arcsin \frac{X_1}{X} & \text{per } \frac{X_1}{X} < 1. \end{cases} \quad (8.15)$$

Posto

$$\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{X_1}{X} + \frac{X_1}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} \right), \quad (8.16)$$

la funzione descrittiva della saturazione nel caso di guadagno unitario si può scrivere

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \begin{cases} 1 & \text{per } X \leq X_1, \\ \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (8.17)$$

Nel caso specifico la funzione descrittiva è reale; il suo andamento è rappresentato in Fig. 8.8. Nel diagramma è riportato anche l'andamento del rapporto fra le ampiezze della terza armonica e della fondamentale, al fine di rendere più agevole la verifica della validità dell'ipotesi di poter trascurare le armoniche di ordine superiore al primo: il modo di effettuare tale verifica verrà descritto più avanti.

Nel caso più generale, in cui la caratteristica della saturazione sia del tipo rappresentato in Fig. 8.9, cioè con guadagno nel tratto centrale avente il valore generico $m = Y_1/X_1$, è evidente che la funzione descrittiva è

$$F(X) = \begin{cases} m & \text{per } X \leq X_1, \\ m \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & \text{per } X \geq X_1, \end{cases} \quad (8.18)$$

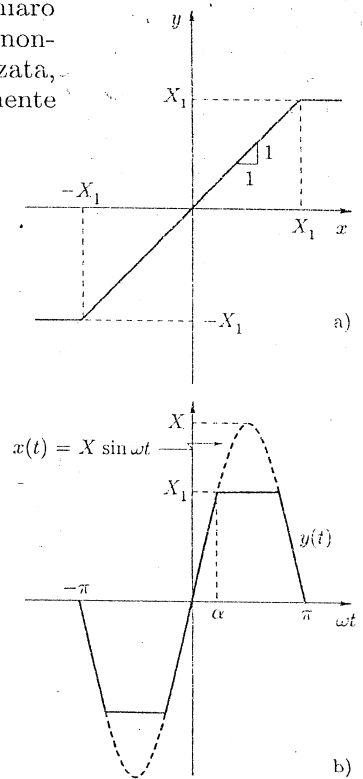
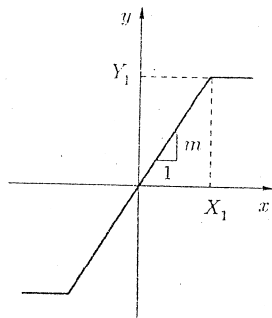
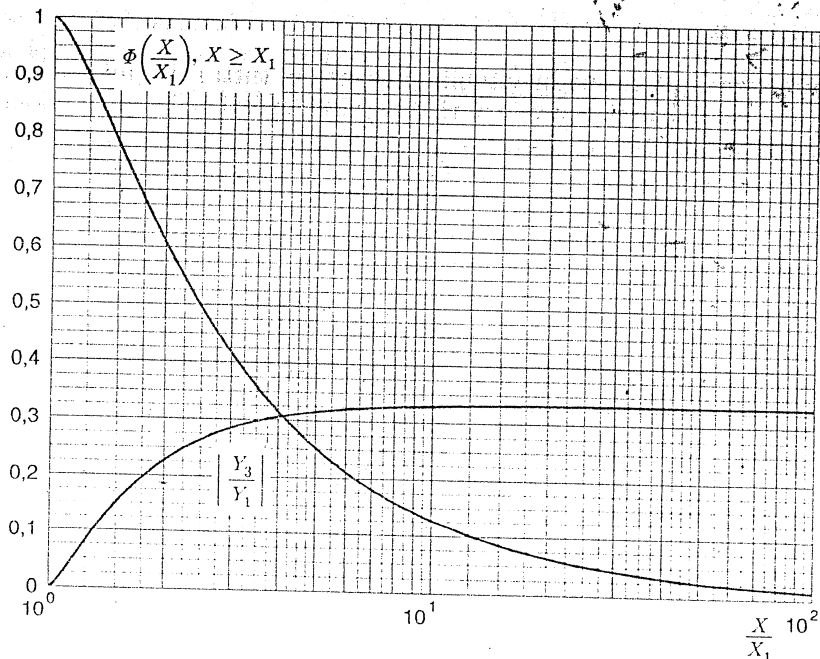


Figura 8.7
Saturazione con guadagno unitario.

Funzione descrittiva della saturazione

Figura 8.8

Diagramma della funzione descrittiva della saturazione.

**Figura 8.9**

Saturazione con guadagno generico m .

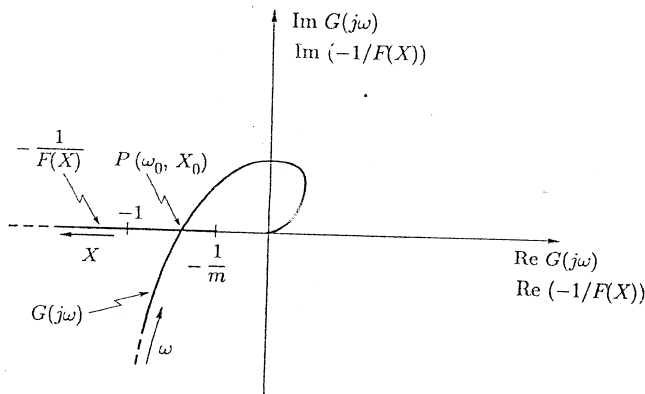
e il suo grafico si ottiene semplicemente moltiplicando per m quello di Fig. 8.8.

A titolo di esempio di applicazione della funzione descrittiva della saturazione, si consideri il sistema lineare in retroazione il cui diagramma di Nyquist è riportato in Fig. 8.10 e che si suppone stabile ad anello aperto: il sistema in retroazione risulta stabile, non essendo il punto critico circondato dal diagramma.

Se si varia la costante di guadagno nel rapporto di 1 ad m ($m > 1$), per m sufficientemente grande il sistema diventa instabile. Per verificare la stabilità per un dato valore di m , anziché moltiplicare per m le lunghezze di tutti i segmenti che congiungono ciascun punto del diagramma di Nyquist con l'origine e vedere se il nuovo diagramma così costruito circonda o meno il punto critico, conviene tenere invariato il diagramma di Nyquist e considerare un nuovo punto critico, $-1/m$: tale procedura è stata illustrata anche alla fine del Paragrafo 4.5. Nel caso esemplificato in Fig. 8.10 in effetti il nuovo punto critico è circondato dal diagramma di Nyquist, per cui il sistema, per il nuovo valore della costante di guadagno, risulta instabile.

Figura 8.10

Studio di oscillazioni autosostenute in presenza di saturazione.



Se lungo l'anello si verifica una saturazione, come è indicato in Fig. 8.5, l'instabilità si manifesta sotto forma di oscillazioni persistenti, la cui ampiezza X_0 e la cui pulsazione ω_0 si possono calcolare con il metodo della funzione descrittiva, applicando il procedimento grafico illustrato in Fig. 8.6: basta riportare sul medesimo piano di Gauss sul quale è tracciato il diagramma di Nyquist anche il diagramma della funzione $-1/F(X)$: se i due diagrammi vengono graduati in valori di ω e di X , i valori corrispondenti ai punti di intersezione definiscono i valori della pulsazione e dell'ampiezza di possibili oscillazioni autosostenute.

Poiché la funzione descrittiva della saturazione è reale, il diagramma della funzione $-1/F(X)$ si svolge su una porzione dell'asse reale negativo, come risulta dalla Fig. 8.10: nel caso in esame l'intersezione è unica (punto P) e denuncia la presenza di un *ciclo limite stabile*: il ciclo limite è stabile in quanto un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0 tende a spostare il "punto critico" $-1/F(X)$ all'esterno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist e produce pertanto un effetto stabilizzante, che fa diminuire l'ampiezza delle oscillazioni e la riporta al valore X_0 ; analogamente, una diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0 , producendo uno spostamento del punto $-1/F(X)$ verso l'interno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist, provoca una reazione tendente a ripristinare per l'ampiezza il valore X_0 .

A un punto di intersezione dei diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$ corrisponde un ciclo limite stabile quando, all'aumentare di X , il punto $-1/F(X)$ tende a uscire dal dominio la cui frontiera è costituita dal diagramma polare completo di $G(j\omega)$, un ciclo limite instabile nel caso opposto.

Ciclo limite stabile

Ciclo limite instabile

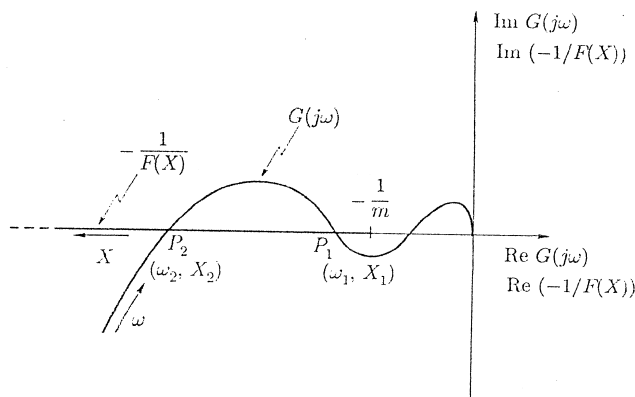


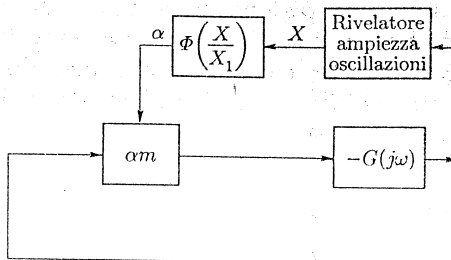
Figura 8.11
Cicli limite in un sistema a stabilità condizionata con saturazione.

Ad esempio, il sistema a stabilità condizionata i cui diagrammi polari sono rappresentati in Fig. 8.11 per effetto della saturazione presenta un ciclo limite instabile (corrispondente al punto P_1) e un ciclo limite stabile (corrispondente al punto P_2). Ciò significa che il sistema per piccoli segnali è stabile, ma, qualora esso venga portato in saturazione, vi si possono innescare oscillazioni di pulsazione ω_2 e di ampiezza X_2 .

L'intervento della saturazione, così come quello di ogni altro elemento non lineare cui si possa applicare il metodo della funzione descrittiva, è schematizzato in Fig. 8.12: immaginando che il diagramma polare di $G(j\omega)$ abbia l'andamento indicato in Fig. 8.10, il sistema risulta instabile e nascono delle oscillazioni divergenti, per la presenza di due poli complessi coniugati a parte reale positiva. Finché l'ampiezza delle oscillazioni si mantiene inferiore a X_1 , risulta $\alpha = 1$ e non si ha alcun intervento sul sistema; non appena

Figura 8.12

Sistema di regolazione automatica del guadagno approssimativamente equivalente a una saturazione.



l'ampiezza supera il valore X_1 , il valore di α diminuisce secondo il grafico di Fig. 8.8, finché non raggiunge il valore corrispondente, al limite di stabilità del sistema in retroazione: in questa condizione i poli dominanti hanno parte reale nulla e le oscillazioni risultano persistenti.

L'applicazione del metodo della funzione descrittiva equivale pertanto a considerare il sistema in retroazione ancora lineare, ma con una costante di guadagno variabile in funzione dell'ampiezza delle eventuali oscillazioni sinusoidali presenti all'uscita del blocco con funzione di trasferimento $-G(j\omega)$.

Si è già notato che il metodo della funzione descrittiva è approssimato, essendo basato sull'ipotesi che le armoniche di ordine superiore al primo siano trascurabili. Si può peraltro verificare la liceità dell'ipotesi in quanto, dopo che si è individuata la pulsazione ω_0 delle oscillazioni autosostenute, si può facilmente determinare, sul diagramma di Nyquist, l'attenuazione che subiscono le varie armoniche rispetto alla fondamentale. In molti casi, per la simmetria della caratteristica dell'elemento non lineare, sono presenti solo le armoniche dispari, fra le quali, in particolare, ha influenza predominante la terza: un'attenuazione della terza armonica rispetto alla fondamentale dell'ordine di $1/10 - 1/20$ dà già una buona attendibilità al procedimento.

In Fig. 8.8 è riportata l'ampiezza relativa della terza armonica in funzione di X/X_1 nel caso della saturazione.

Il calcolo delle funzioni descrittive dei tre elementi non lineari che verranno successivamente esaminati (soglia, soglia con saturazione e saturazione non netta) si riconduce immediatamente a quello della saturazione.

◆ Soglia o zona morta

La caratteristica dell'elemento non lineare cui si dà il nome di *soglia* o *zona morta* è rappresentata in Fig. 8.13a. Come è mostrato in Fig. 8.13b la funzione che la rappresenta si può considerare la somma delle caratteristiche di un blocco lineare e di un elemento tipo saturazione, nel senso che il segnale d'uscita si può esprimere come somma dei segnali d'uscita dei due blocchi, collegati in parallelo; poiché le fondamentali dei due segnali hanno la stessa pulsazione, i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della somma sono dati dalla somma dei coefficienti degli sviluppi relativi alle uscite dei due blocchi e la funzione descrittiva del complesso risulta uguale alla somma delle funzioni descrittive dei due blocchi.

Si può scrivere pertanto

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ m \left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) \right) & \text{per } X \geq X_1, \end{cases} \quad (8.19)$$

in cui $\Phi(X/X_1)$ è la funzione (8.16).

Funzione descrittiva
della soglia

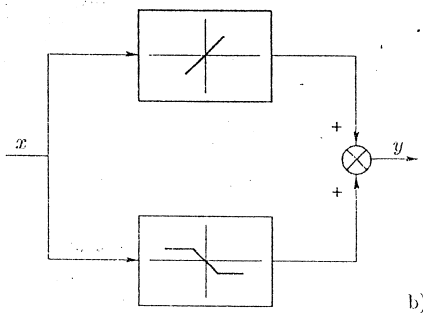
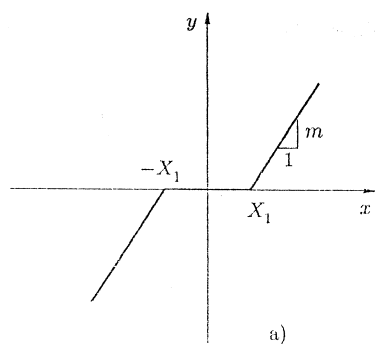


Figura 8.13
Soglia o zona morta.

◆ Soglia con saturazione

La caratteristica di tale elemento non lineare è rappresentata in Fig. 8.14a e si può scomporre nella differenza di due saturazioni, come è indicato in Fig. 8.14b.

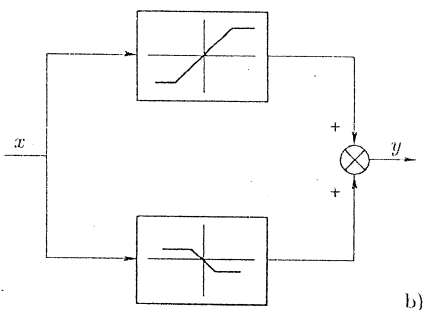
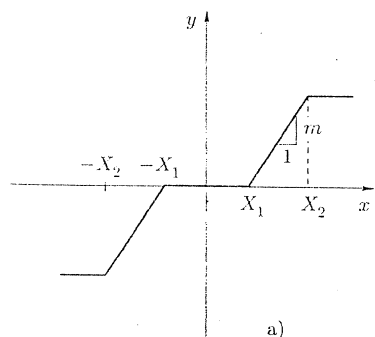


Figura 8.14
Soglia con saturazione.

La corrispondente funzione descrittiva è data pertanto dalla relazione

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ m \left(1 - \Phi \left(\frac{X}{X_1} \right) \right) & \text{per } X_1 \leq X \leq X_2, \\ m \left(\Phi \left(\frac{X}{X_2} \right) - \Phi \left(\frac{X}{X_1} \right) \right) & \text{per } X \geq X_2. \end{cases} \quad (8.20)$$

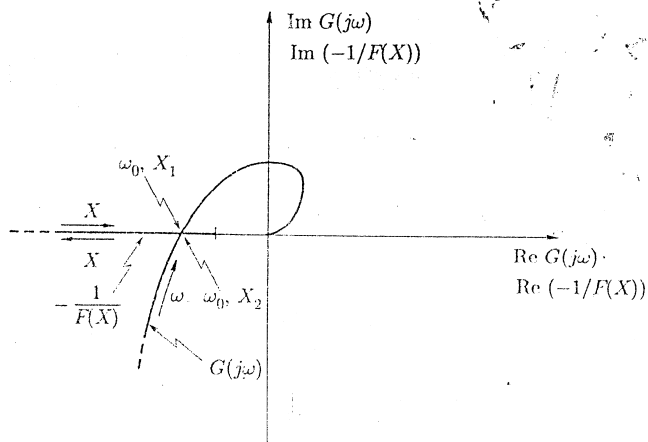
Funzione descrittiva della soglia con saturazione

Si noti che la funzione descrittiva, che anche in questo caso è reale, è nulla per piccoli segnali, quindi aumenta, raggiunge un massimo e, per X tendente all'infinito, tende nuovamente a zero. Il diagramma di $-1/F(X)$ corrisponde a una semiretta sull'asse reale negativo: a ciascun punto del diagramma corrispondono due valori di X . Come si vede in Fig. 8.15, il punto di intersezione dei diagrammi di $G(j\omega)$ e di $-1/F(X)$ è unico, ma corrisponde a due cicli limite caratterizzati dalla medesima pulsazione e da due diverse ampiezze X_1 e X_2 ; il primo di essi è instabile, l'altro è stabile.

Il caso cui si riferisce la Fig. 8.15 è analogo a quello di Fig. 8.11, in quanto il sistema in ambedue i casi è stabile per piccoli segnali, ma può essere sede di oscillazioni autosostenute se viene fortemente perturbato.

Figura 8.15

Cicli limite in un sistema con soglia e saturazione.

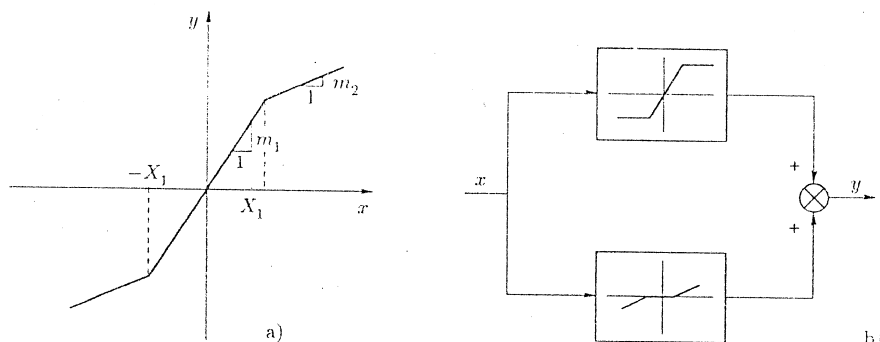


◆ Saturazione non netta

La caratteristica di tale elemento non lineare è rappresentata in Fig. 8.16a e si può scomporre, come mostrato in Fig. 8.16b, nella somma delle caratteristiche di elementi già presi in esame in precedenza.

Figura 8.16

Saturazione non netta.



La funzione descrittiva si può ottenere per somma e risulta espressa dalla relazione

$$F(X) = \begin{cases} m_1 & \text{per } X \leq X_1, \\ (m_1 - m_2) \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + m_2 & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (8.21)$$

◆ Elementi non lineari con caratteristica a forma di spezzata

La funzione descrittiva di un elemento non lineare con caratteristica a forma di spezzata, continua e simmetrica rispetto all'origine, come ad esempio quella rappresentata in Fig. 8.17, si può ricondurre a una somma di funzioni descrittive dei tipi precedentemente presi in esame, e quindi alla funzione descrittiva della saturazione.

Poiché qualunque caratteristica non lineare continua può essere approssimata con una spezzata a lati non verticali, la funzione descrittiva della saturazione, il cui diagramma è riportato in Fig. 8.8, risulta di importanza fondamentale per la determinazione di numerose altre funzioni descrittive.

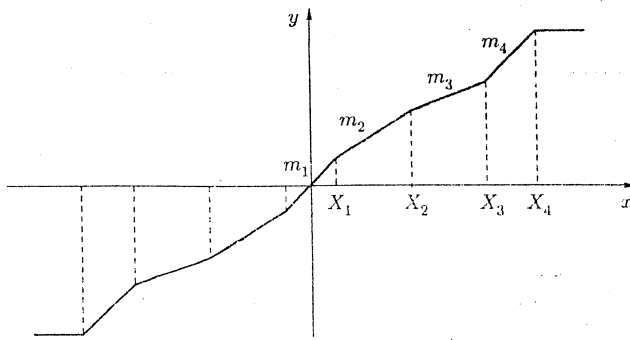


Figura 8.17
Caratteristica a forma di spezzata.

La caratteristica di Fig. 8.17 si può scomporre nella somma di:

- una saturazione con guadagno m_1 fino a X_1 ;
- una soglia con saturazione con guadagno m_2 da X_1 a X_2 ;
- una soglia con saturazione con guadagno m_3 da X_2 a X_3 ;
- una soglia con saturazione con guadagno m_4 da X_3 a X_4 .

La funzione descrittiva è data dalla relazione

$$F(X) = \begin{cases} m_1 & \text{per } X \leq X_1, \\ (m_1 - m_2)\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + m_2 & \text{per } X_1 \leq X \leq X_2, \\ (m_1 - m_2)\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + (m_2 - m_3)\Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) + m_3 & \text{per } X_2 \leq X \leq X_3, \\ (m_1 - m_2)\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + (m_2 - m_3)\Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) + (m_3 - m_4)\Phi\left(\frac{X}{X_3}\right) + m_4 & \text{per } X_3 \leq X \leq X_4, \\ (m_1 - m_2)\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + (m_2 - m_3)\Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) + (m_3 - m_4)\Phi\left(\frac{X}{X_3}\right) + m_4\Phi\left(\frac{X}{X_4}\right) & \text{per } X \geq X_4. \end{cases}$$

Funzione descrittiva della
generica spezzata

◆ Relè ideale

La caratteristica del *relè ideale*, rappresentata in Fig. 8.18a, consiste in una funzione discontinua. Essa rappresenta il tipico legame ingresso-uscita degli amplificatori a relè, largamente impiegati nei sistemi di controllo più semplici e diffusi, che, in effetti, forniscono in uscita un segnale discontinuo, che può assumere solo due valori distinti (o tre valori distinti, nel caso del relè con soglia, che verrà preso in esame più avanti): per questa ragione tali sistemi si dicono anche *sistemi di controllo a due posizioni* o *a tre posizioni*.

In Fig. 8.18b sono rappresentate le forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita. Le componenti della fondamentale si possono dedurre applicando le relazioni (8.5), (8.6) per $n=1$. Risulta

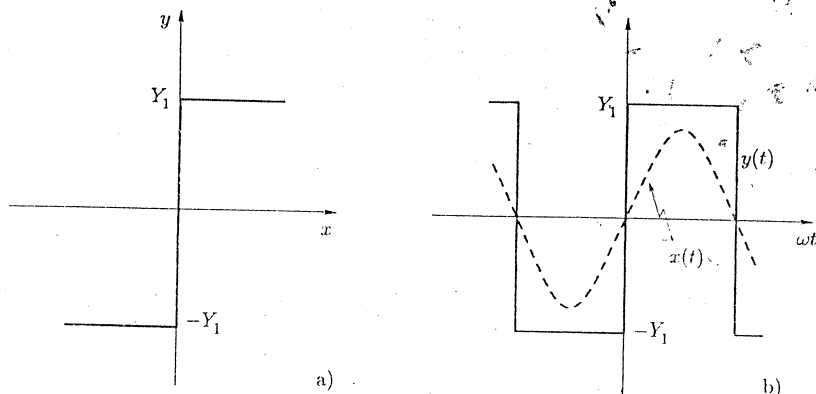
$$a_1 = 0, \quad (8.22)$$

$$b_1 = \frac{4Y_1}{\pi}, \quad (8.23)$$

Sistemi di controllo a
due posizioni
Sistemi di controllo a tre
posizioni

Figura 8.18

Relè ideale.



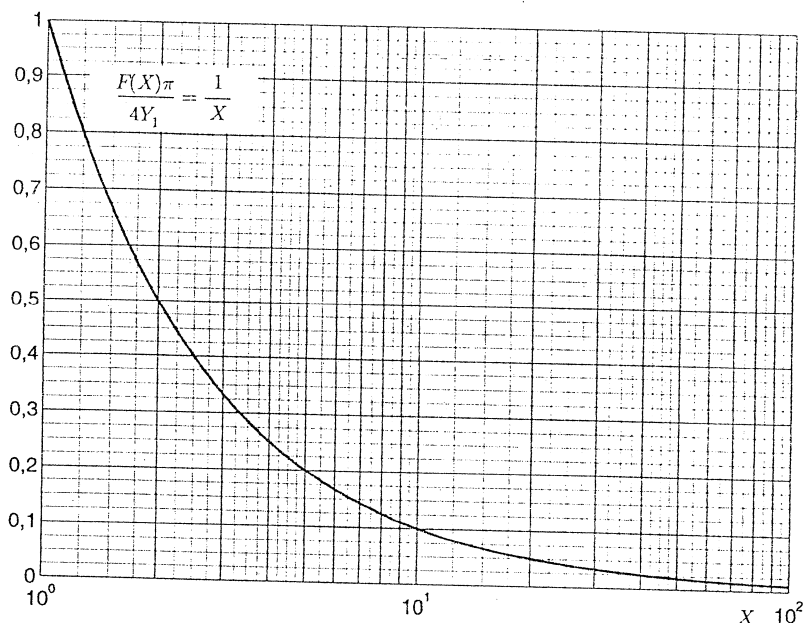
per cui l'espressione della funzione descrittiva è

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \frac{4 Y_1}{\pi X} \quad (8.24)$$

La funzione descrittiva è a valori reali; il suo grafico, costituito da una iperbole, è riportato in Fig. 8.19.

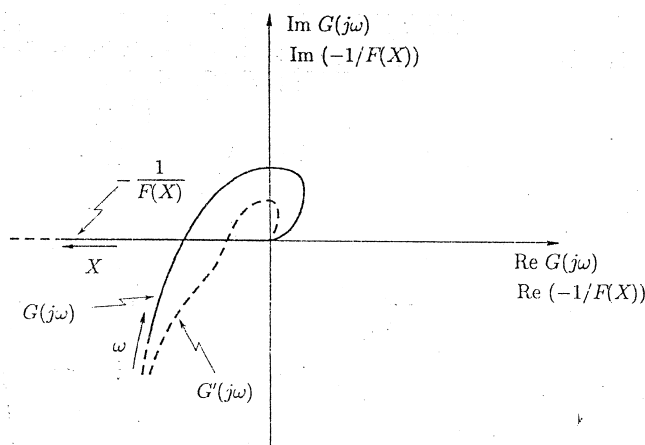
Figura 8.19

Diagramma della funzione descrittiva del relè ideale.



Come è indicato in Fig. 8.20, il diagramma polare di $-1/F(X)$ è l'intero semiasse reale negativo, a dimostrazione del fatto che i sistemi in retroazione a due posizioni sono intrinsecamente autooscillanti: infatti, a seconda del segno dell'errore, la variabile manipolabile viene portata all'uno o all'altro degli estremi del suo campo di variazione, senza la possibilità di raggiungere una condizione di equilibrio. Perché il comportamento del sistema sia accettabile, occorre che l'ampiezza delle oscillazioni all'uscita del sistema controllato sia contenuta entro limiti relativamente modesti; ciò normalmente avviene, date le caratteristiche filtranti - tipo "passa basso" - del sistema controllato stesso.

Per aumentare la frequenza delle oscillazioni autosostenute e, di conseguenza, diminuirne l'ampiezza all'uscita del sistema controllato, si possono

**Figura 8.20**

Studio delle oscillazioni autosostenute di un sistema a relè col metodo della funzione descrittiva.

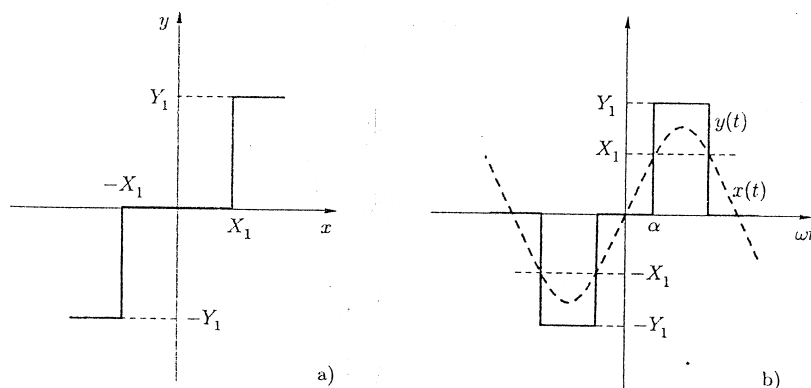
impiegare reti correttrici: una modifica del diagramma polare di risposta armonica del tipo indicato in Fig. 8.20 (curva a tratto) porta evidentemente ad una diminuzione dell'ampiezza X dell'oscillazione.

◆ Relè con soglia

La caratteristica della nonlinearietà *relè con soglia* e le forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita sono rappresentate rispettivamente in Fig. 8.21a e in Fig. 8.21b. Risulta

$$a_1 = 0, \quad (8.25)$$

$$b_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{4Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (8.26)$$

**Figura 8.21**
Relè con soglia.

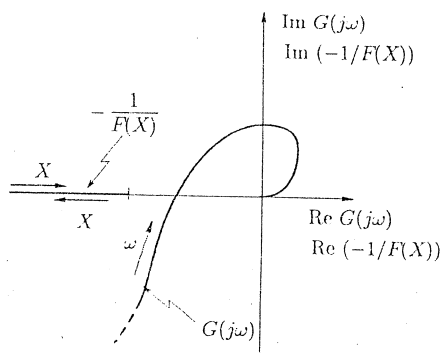
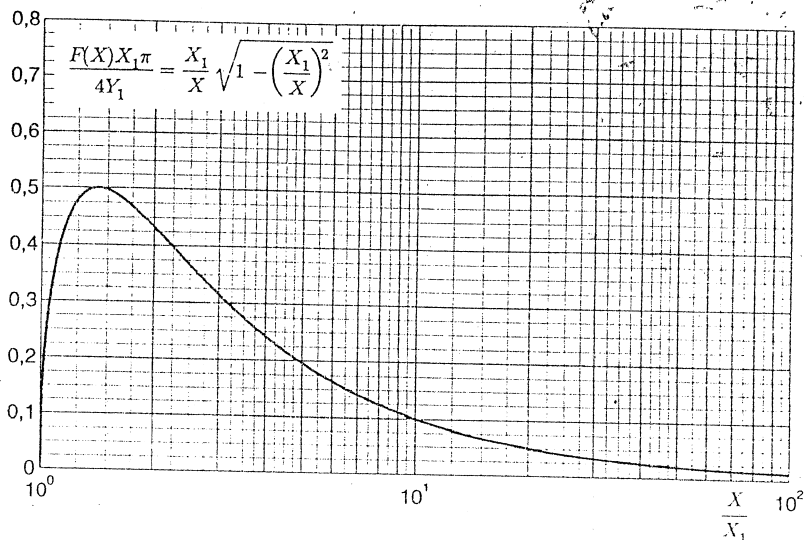
L'espressione della funzione descrittiva è pertanto

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{4Y_1}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (8.27)$$

Il grafico normalizzato della funzione è riportato in Fig. 8.22. Poiché la funzione descrittiva ha andamento dapprima crescente, poi decrescente, è

Figura 8.22

Diagramma della funzione descrittiva del relè con soglia.



possibile che un sistema comprendente un relè con soglia non presenti oscillazioni, come nel caso di Fig. 8.23.

◆ Relè con isteresi

La caratteristica del relè con isteresi è rappresentata in Fig. 8.24a, le forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita in Fig. 8.24b.

Si noti che la caratteristica non è espressa da una funzione ad un sol valore. Il relè con isteresi è un tipico elemento non lineare la cui funzione descrittiva è complessa; infatti è chiaro dalla Fig. 8.24b che la fondamentale del segnale di uscita è sfasata in ritardo rispetto al segnale di ingresso.

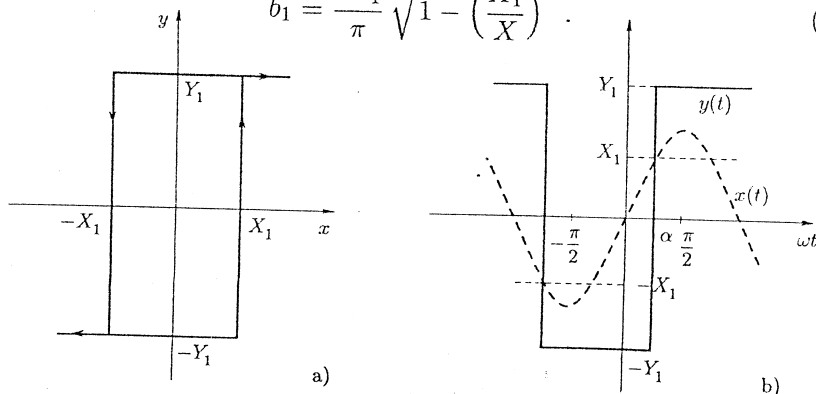
Nell'ipotesi che sia $X \geq X_1$, applicando le consuete relazioni si deduce⁽⁴⁾

$$a_1 = -\frac{4 Y_1 X_1}{\pi X}, \quad (8.28)$$

$$b_1 = \frac{4 Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2}. \quad (8.29)$$

Figura 8.24

Relè con isteresi.



⁽⁴⁾Tale ipotesi è necessaria perché il valor medio dell'uscita deve essere nullo. Per $X < X_1$ l'uscita è una costante non definita, quindi la funzione descrittiva non è definita.

La funzione descrittiva è

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1)$$

$$= \frac{4 Y_1}{\pi X} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X} \right)^2} - j \frac{X_1}{X} \right) = \frac{4 Y_1}{\pi X} e^{-j \arcsin \frac{X_1}{X}} \quad (8.30)$$

I grafici relativi al modulo e all'argomento della funzione descrittiva sono riportati, in forma normalizzata, in Fig. 8.25.

Funzione descrittiva del relè con isteresi.

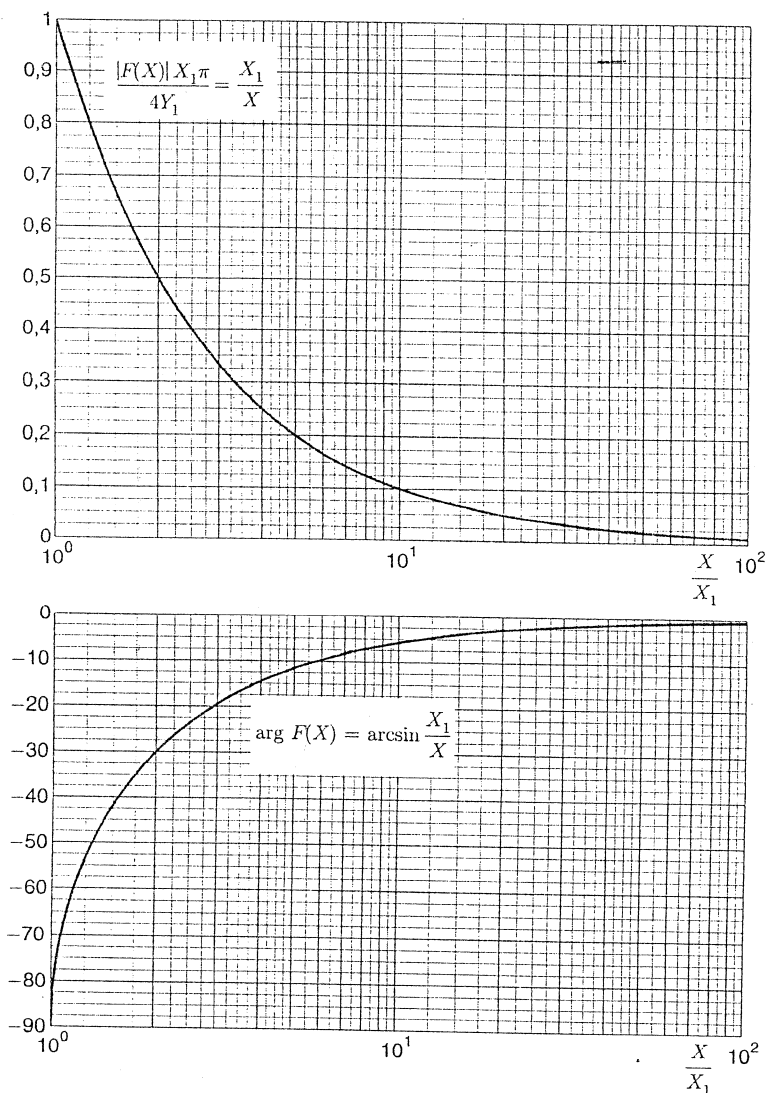


Figura 8.25
Diagrammi della funzione descrittiva del relè con isteresi.

Il diagramma polare di $-1/F(X)$ consiste in una semiretta parallela all'asse reale, disposta come è indicato in Fig. 8.26.

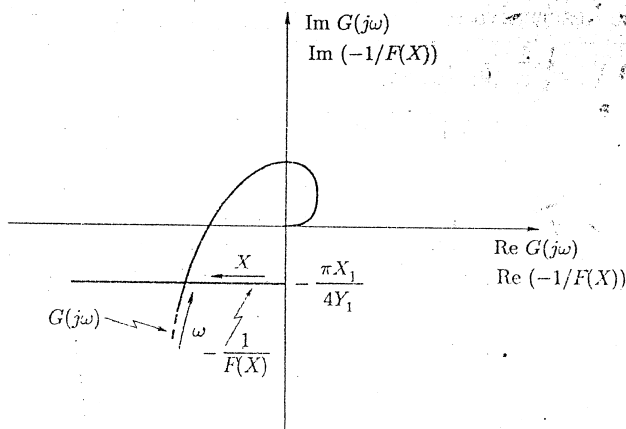
Infatti, essendo

$$-\frac{1}{F(X)} = -\frac{\pi X}{4 Y_1} e^{j \arcsin \frac{X_1}{X}} = \frac{\pi X}{4 Y_1} \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X} \right)^2} - j \frac{X_1}{X} \right),$$

la parte immaginaria di $-1/F(X)$ è costante.

Figura 8.26

Studio delle oscillazioni autosostenute in un sistema a relè.

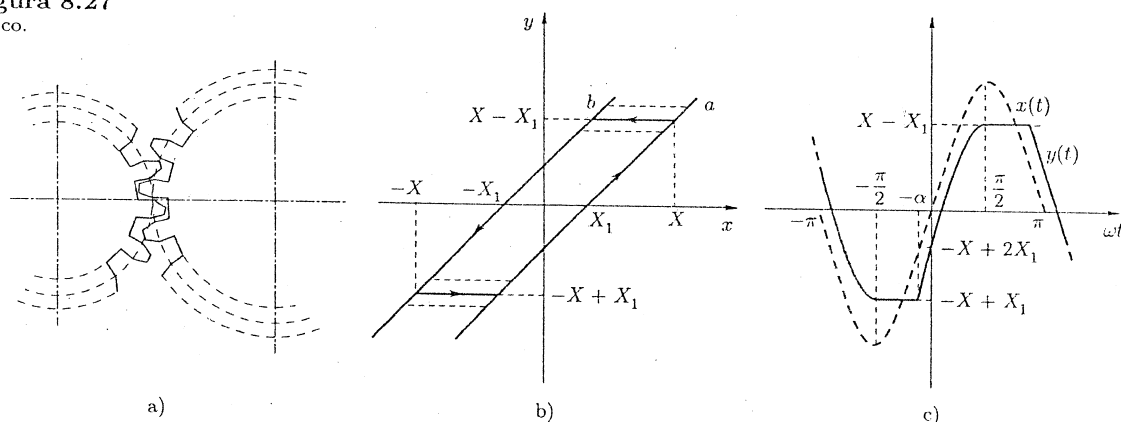


◆ Gioco

Il *gioco* è la nonlinearietà tipica degli ingranaggi (Fig. 8.27a). La relativa caratteristica di Fig. 8.27b si interpreta nel modo seguente: per $x(t)$ crescente, l'uscita $y(t)$ ha l'andamento corrispondente alla retta a ; quando $x(t)$, raggiunto il valore massimo X , comincia a diminuire, $y(t)$ rimane costante al valore raggiunto fino a che $x(t)$ non abbia subito una variazione di $-2X_1$ e quindi segue la retta b ; un comportamento del tutto analogo si riscontra quando, dopo che $x(t)$ ha raggiunto il valore minimo $-X$, avviene il passaggio dalla retta b alla retta a . Per semplicità si considera un rapporto di riduzione unitario.

Figura 8.27

Gioco.



I segnali di ingresso e di uscita sono rappresentati in Fig. 8.27c. Si noti che è

$$y(t) = \begin{cases} -X + X_1 & \text{per } -\pi/2 \leq \omega t \leq -\alpha, \\ X \sin \omega t - X_1 & \text{per } -\alpha \leq \omega t \leq \pi/2, \end{cases} \quad (8.31)$$

in cui è

$$-\alpha = \arcsin \frac{-X + 2X_1}{X}, \quad \text{cioè } \alpha = \arcsin \frac{X - 2X_1}{X}.$$

La fondamentale del segnale di uscita nel caso in esame è data dalle relazioni

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{1}{\pi} \frac{4 X_1 (X_1 - X)}{X} & \text{per } X \geq X_1, \end{cases} \quad (8.32)$$

$$b_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{X}{2} \left(1 + \Phi \left(\frac{X}{X - 2 X_1} \right) \right) & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (8.33)$$

Si noti che nell'ultima espressione compare la funzione definita dalla (8.16) e riportata nei grafici di Fig. 8.8.

La funzione descrittiva del gioco è

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \Phi \left(\frac{X}{X - 2 X_1} \right) \right) + j \frac{4 X_1 (X_1 - X)}{\pi X^2} & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.34)$$

I grafici relativi sono riportati in Fig. 8.28.

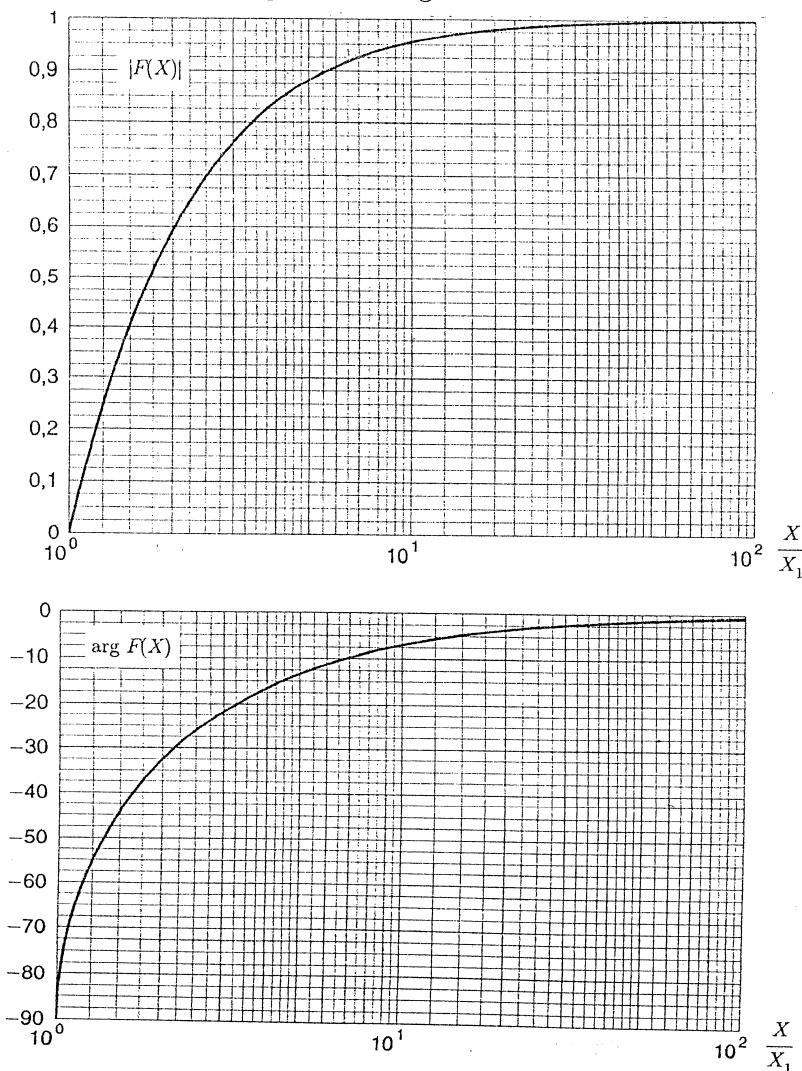


Figura 8.28
Diagrammi della funzione descrittiva del gioco.

8.3. Estensioni del metodo della funzione descrittiva

Nell'applicazione del metodo della funzione descrittiva si sono considerate finora solamente nonlinearità aventi caratteristiche simmetriche rispetto all'origine. Quando la caratteristica non è simmetrica, l'analisi si complica notevolmente, in quanto in genere è presente all'uscita una componente continua, dipendente dall'ampiezza delle oscillazioni, la quale viene riportata all'ingresso per la presenza della retroazione e pertanto influisce a sua volta sulla fondamentale della componente alternata del segnale di uscita.

Il fenomeno è chiarito dagli esempi di Fig. 8.29 e Fig. 8.30, che si riferiscono alle caratteristiche di circuiti rettificatori: in assenza di componente continua sull'ingresso, si genera una componente continua sull'uscita, per cui il dispositivo, in presenza di un'oscillazione sull'ingresso, presenta un "guadagno" infinito per la continua. Viceversa, se in ingresso si ha una componente continua di valore superiore all'ampiezza dell'oscillazione, il dispositivo funziona in zona lineare e presenta un guadagno unitario sia per la componente continua sia per l'alternata.

Per poter applicare il metodo della funzione descrittiva anche nel caso in cui la caratteristica dell'elemento non lineare non sia simmetrica rispetto all'origine, si devono definire due funzioni descrittive.

Con riferimento alla Fig. 8.31, del tutto analoga alla Fig. 8.5, ma relativa a una nonlinearità con caratteristiche non simmetriche, si suppone che il segnale di ingresso dell'elemento non lineare sia esprimibile nella forma

$$x(t) = E + X \sin \omega t, \quad (8.35)$$

in cui E rappresenta il valore della componente continua: il segnale di uscita viene approssimato, trascurando le armoniche di ordine superiore al primo, con l'espressione

$$y(t) = Y_0(E, X) + Y_1(E, X) \sin(\omega t + \varphi_1(E, X)). \quad (8.36)$$

Si possono così definire le due funzioni descrittive

$$F_0(E, X) = \frac{Y_0(E, X)}{E}, \quad (8.37)$$

$$F_1(E, X) = \frac{Y_1(E, X)}{X} e^{j\varphi_1(E, X)}. \quad (8.38)$$

Sia le componenti continue sia quelle alternate si devono bilanciare lungo l'anello: in luogo dell'unica equazione (8.12) si hanno ora le

$$F_0(E, X) G(j0) = -1, \quad (8.39)$$

$$F_1(E, X) G(j\omega) = -1, \quad (8.40)$$

che si possono utilizzare per determinare i valori dei parametri E , X e ω che caratterizzano le possibili oscillazioni autosostenute.

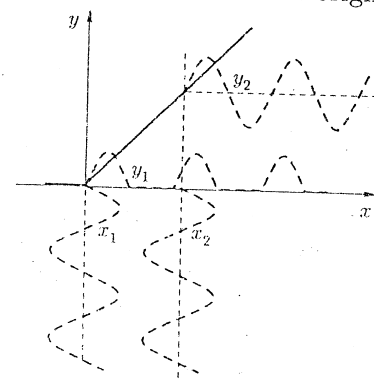
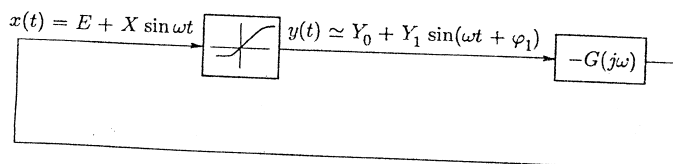


Figura 8.29
Rettificatore a semionda.

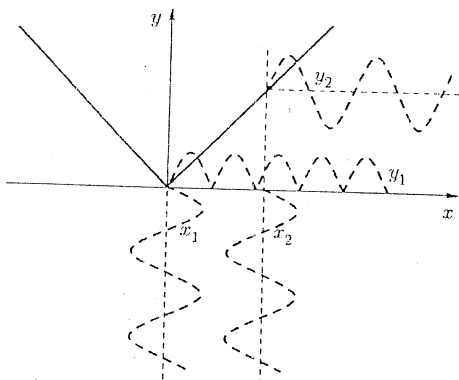


Figura 8.30
Rettificatore a doppia semionda.

Figura 8.31
Applicazione del metodo della funzione descrittiva quando la caratteristica dell'elemento non lineare non è simmetrica.

Si noti che le (8.39), (8.40) rappresentano in effetti tre equazioni nelle tre incognite menzionate, essendo la (8.40) relativa a funzioni complesse.

L'analisi si complica notevolmente rispetto ai casi in cui la caratteristica della nonlinearietà è simmetrica, dato che in genere le tre equazioni si devono risolvere per tentativi.

Si ricorda che nell'utilizzazione del metodo della funzione descrittiva per lo studio dei sistemi in retroazione si è finora sempre supposto che il segnale di riferimento r sia nullo (Figg. 8.5 e 8.31): la presenza di un segnale di riferimento diverso da zero, anche se costante o lentamente variabile, influisce infatti sulle oscillazioni, in quanto equivale ad un'asimmetrizzazione della caratteristica non lineare.

Infatti, in base alle considerazioni svolte nel Paragrafo 8.1, agli effetti dello studio delle oscillazioni autosostenute, un sistema non lineare con non-linearità algebrica, del tipo rappresentato in Fig. 8.1, soggetto ad un ingresso r costante, si può ricondurre allo schema di Fig. 8.4, in cui però la caratteristica dell'elemento non lineare viene riferita ad un'origine dipendente da r , corrispondente al punto di equilibrio del sistema, la cui posizione sulla caratteristica medesima si può determinare con la costruzione grafica di Fig. 8.2 o con quella di Fig. 8.3.

Se il segnale di ingresso $r(t)$ è costante o lentamente variabile (rispetto al periodo delle oscillazioni), si può applicare ancora il metodo della funzione descrittiva, utilizzando però ambedue le funzioni descrittive precedentemente definite $F_0(E, X)$ e $F_1(E, X)$.

In luogo delle (8.39), (8.40), si scrivono le equazioni

$$F_0(E, X) G(j0) = \frac{r}{E} - 1, \quad (8.41)$$

$$F_1(E, X) G(j\omega) = -1, \quad (8.42)$$

che rappresentano i bilanci delle componenti continue, incluso il segnale di riferimento r , e delle componenti alternate lungo l'anello.

8.4. I criteri del cerchio e di Popov

Il metodo della funzione descrittiva, precedentemente preso in esame, serve per la ricerca di eventuali soluzioni periodiche delle equazioni differenziali che descrivono il moto libero dei sistemi non lineari in retroazione: il metodo consente di determinare, sia pure approssimativamente, anche i parametri che definiscono quantitativamente tali soluzioni periodiche (ampiezza e frequenza delle oscillazioni quasi sinusoidali all'ingresso dell'elemento non lineare).

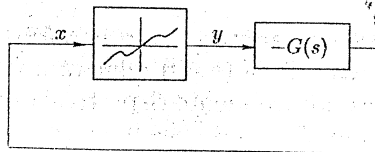
Nei normali sistemi di controllo, con l'eccezione dei sistemi a relè, un regime di oscillazioni autosostenute corrisponde di regola ad un comportamento anomalo, da evitare; d'altronde un tale regime, pur essendo la manifestazione più frequente dell'instabilità, non rappresenta la sola forma di instabilità che interessi rilevare ed evitare. Eventuali instabilità aperiodiche sfuggono all'analisi condotta con il metodo della funzione descrittiva.

Convien allora affrontare il problema della stabilità da un punto di vista più diretto ed usare criteri che garantiscano il comportamento che normalmente si richiede ai sistemi di controllo, cioè la stabilità asintotica per perturbazioni di qualunque entità (stabilità asintotica globale).

Il criterio del cerchio e quello di Popov forniscono condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale dei sistemi in retroazione non lineari au-

Figura 8.32

Sistema in retroazione non lineare.



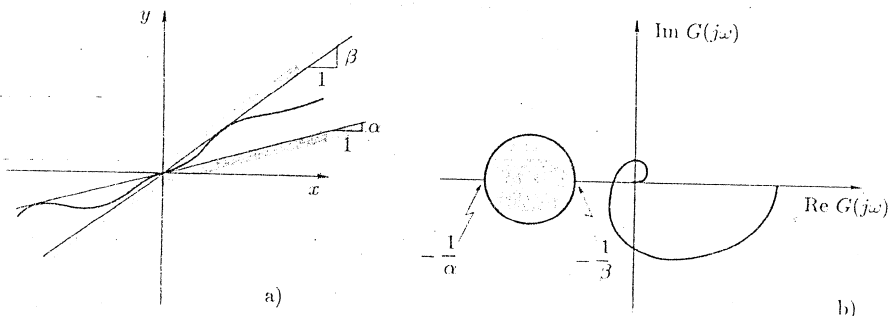
tonomi del tipo rappresentato in Fig. 8.32, cioè costituiti da un anello in cui risultano disposte in cascata una parte non lineare puramente algebrica e una parte lineare dinamica. Come si è notato al Paragrafo 8.1, a tale schema ci si riconduce quando il segnale di riferimento r si possa considerare costante.

◆ Il criterio del cerchio

Si suppone che la caratteristica dell'elemento non lineare sia a un sol valore e contenuta in un settore del tipo rappresentato in Fig. 8.33a, delimitato da due rette passanti per l'origine e aventi rispettivamente pendenze α e β , che si suppongono entrambe positive.

Figura 8.33

Il criterio del cerchio.



Noti i parametri α e β , si può costruire il “cerchio critico” rappresentato in Fig. 8.33b. Vale il seguente teorema.

◆ **Criterio del cerchio.** *Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente perché il sistema in retroazione di Fig. 8.32 sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(jw)$ non circonda né tocchi il cerchio critico⁽⁵⁾.*

Il criterio del cerchio, almeno nella sua enunciazione semplificata sopra riportata, risulta di applicazione molto semplice e si presenta come un'estensione del criterio di Nyquist, cui si riconduce, almeno per ciò che riguarda la sufficienza della condizione, quando, essendo l'elemento puramente algebrico lineare, risulta $\alpha = \beta = m$ e il cerchio si riduce a un punto sull'asse reale di ascissa $-1/m$.

È frequente il caso in cui, tendendo la caratteristica dell'elemento non lineare ad un asintoto orizzontale, come ad esempio in presenza di satura-

⁽⁵⁾ Al criterio del cerchio si può dare una formulazione più estesa. In particolare, se $G(s)$ è instabile e presenta n_p poli a parte reale positiva, condizione sufficiente per la stabilità asintotica globale è che il diagramma polare completo di $G(jw)$ circonda il cerchio n_p volte in senso antiorario. Se la pendenza α è negativa, il sistema in retroazione è asintoticamente globalmente stabile qualora il diagramma polare sia completamente contenuto all'interno del cerchio (che, in questo caso, contiene l'origine).

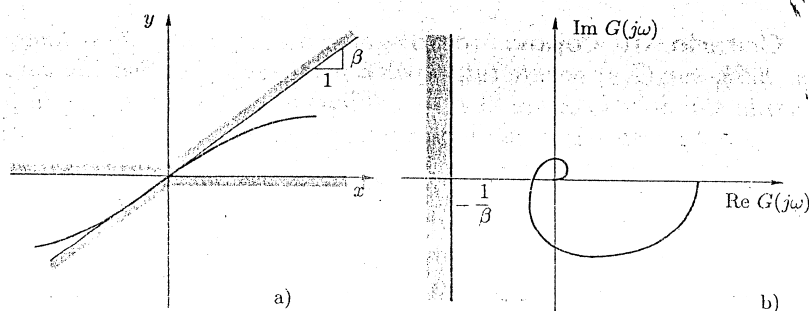


Figura 8.34
Caso degenerare del criterio
del cerchio.

zione netta, occorre assumere $\alpha = 0$ (Fig. 8.34a): il cerchio allora degenera nel semipiano a sinistra della retta verticale per il punto $-1/\beta$ (Fig. 8.34b).

Il criterio di Popov

Il criterio di Popov fornisce, come il criterio del cerchio, condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale.

Esso ha l'inconveniente di non riferirsi al normale diagramma polare di risposta armonica, bensì a un diagramma diverso (*diagramma di Popov*), ma fornisce un campo di stabilità più ampio di quello corrispondente al criterio del cerchio, cioè garantisce la stabilità di sistemi che non soddisferebbero il criterio del cerchio. Si ricorda che ambedue i criteri forniscono condizioni sufficienti, la cui violazione non implica necessariamente l'instabilità.

Diagramma di Popov

Per ciò che riguarda la funzione di trasferimento $G(s)$ della parte lineare, si considerano due casi:

1. *Caso principale*: $G(s)$ è strettamente stabile, cioè ha tutti i poli a parte reale negativa.
2. *Caso particolare*: $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa, tranne un polo semplice nell'origine.⁽⁶⁾

Per ciò che riguarda la caratteristica della parte nonlineare $f(x)$, si suppone che essa sia a un sol valore e compresa in un settore del tipo rappresentato in Fig. 8.34a. Più precisamente, si richiede che esista un numero reale positivo per cui sia

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta \quad \text{per ogni } x, \quad (8.43)$$

nel caso principale, oppure

$$0 < \epsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta \quad \text{per ogni } x, \quad (8.44)$$

nel caso particolare. Nel caso particolare si richiede pertanto che il grafico di $f(x)$ non abbia punti in comune con l'asse delle ascisse oltre l'origine e che non abbia tangente orizzontale nell'origine.

Il sistema rappresentato in Fig. 8.32 si dice *assolutamente stabile* nel settore $[0, \beta]$ o nel settore $[\epsilon, \beta]$ se esso è globalmente asintoticamente stabile per tutte le funzioni $f(x)$ che soddisfano le ineguaglianze (8.43) nel caso generale o le ineguaglianze (8.44) nel caso particolare.

Stabilità assoluta

In relazione alla stabilità assoluta, si riportano i seguenti enunciati.

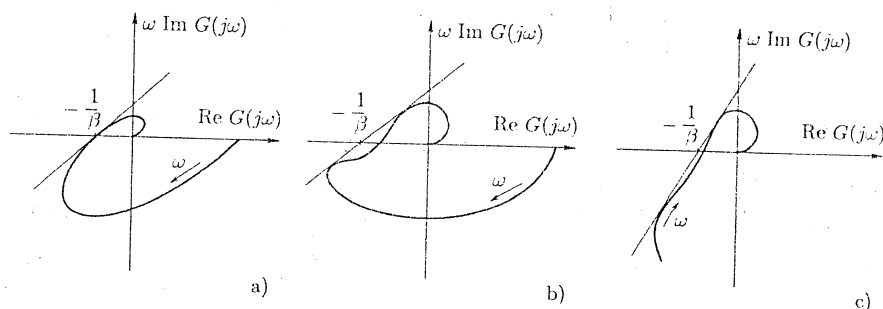
⁽⁶⁾ Nell'enunciazione originale il criterio si applica anche in casi particolari in cui siano presenti poli immaginari generici, non necessariamente nulli, di ordine di molteplicità uno o due. Per non appesantire eccessivamente la trattazione, si prescinde da questi casi, peraltro assai rari nella pratica.

◆ **Criterio di Popov: caso generale.** Affinché il sistema di Fig. 8.32, con $G(s)$ avente tutti i poli a parte reale negativa, sia assolutamente stabile nel settore $[0, \beta]$, è sufficiente che esista una retta passante per il punto $-1/\beta$ che non intersechi né tocchi il diagramma polare della funzione complessa $G_p(j\omega) = \text{Re } G(j\omega) + j\omega \text{Im } G(j\omega)$, tracciato per ω variabile da 0 all'infinito.

◆ **Criterio di Popov: caso particolare.** Affinché il sistema di Fig. 8.32, con $G(s)$ avente un polo semplice nell'origine e i rimanenti poli a parte reale negativa, sia assolutamente stabile nel settore $[\epsilon, \beta]$, $\epsilon > 0$, è sufficiente che esista una retta passante per il punto $-1/\beta$ che non intersechi né tocchi il diagramma polare della funzione complessa $G_p(j\omega) = \text{Re } G(j\omega) + j\omega \text{Im } G(j\omega)$, tracciato per ω variabile da 0 all'infinito e che valga inoltre la condizione $\lim_{\omega \rightarrow 0+} \omega \text{Im } G(j\omega) < 0$.

La condizione $\lim_{\omega \rightarrow 0+} \omega \text{Im } G(j\omega) < 0$ significa che il diagramma polare di $G_p(j\omega)$ deve originarsi in un punto situato al di sotto dell'asse delle ascisse, come in Fig. 8.35c.

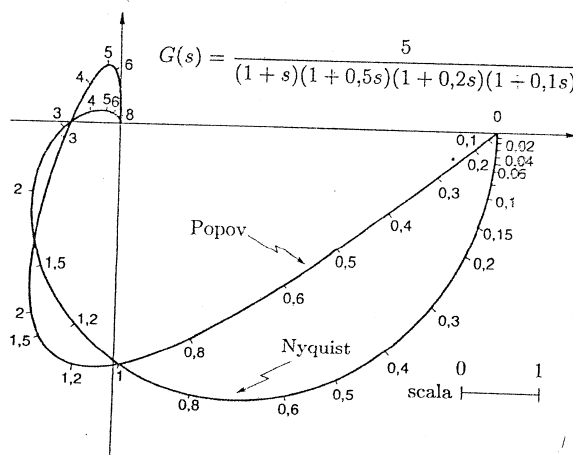
Figura 8.35
Esempio di applicazione
del criterio di Popov.



Data una $G(s)$, il criterio di Popov consente di determinare, come è indicato in Fig. 8.35a-c, il valore limite di β per il quale è garantita la stabilità assoluta. L'intervallo di stabilità è aperto (non contiene tale valore).

Per confrontare gli andamenti dei diagrammi di Nyquist e di Popov, in Fig. 8.36 sono riportati i diagrammi relativi a un sistema di tipo 0, in Fig. 8.37 quelli relativi a un sistema di tipo 1. Si noti che nel caso di Fig. 8.37 il diagramma di Popov, al contrario di quello di Nyquist, non presenta punti all'infinito.

Figura 8.36
Diagrammi di Nyquist e
di Popov di un sistema di
tipo 0.



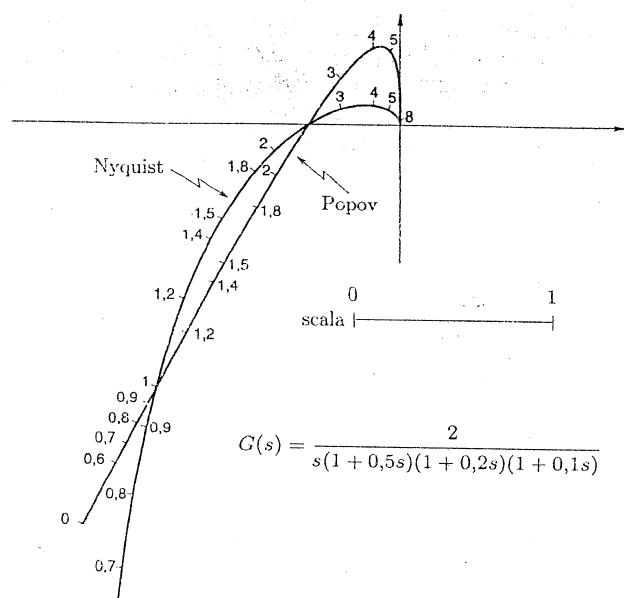


Figura 8.37
Diagrammi di Nyquist e di Popov di un sistema di tipo 1.

In ambedue i casi, potendosi mandare una retta che non interseca il diagramma per punti arbitrariamente vicini a quello di incontro del diagramma stesso con l'asse delle ascisse, il valore limite di β risulta uguale a quello del guadagno limite, facilmente deducibile (per esempio applicando il criterio di Routh).

Sulla scorta di osservazioni sperimentali, si può asserire che i casi di diagrammi di Popov non convessi sono molto rari, per cui il valore limite di β coincide quasi sempre con il guadagno limite. Un esempio, relativo a una famiglia di diagrammi di Popov non tutti convessi, è riportato in Fig. 8.38: la concavità nasce dalla presenza di una rete a T, che nei diagrammi di Nyquist e di Popov può produrre addirittura un coppia.

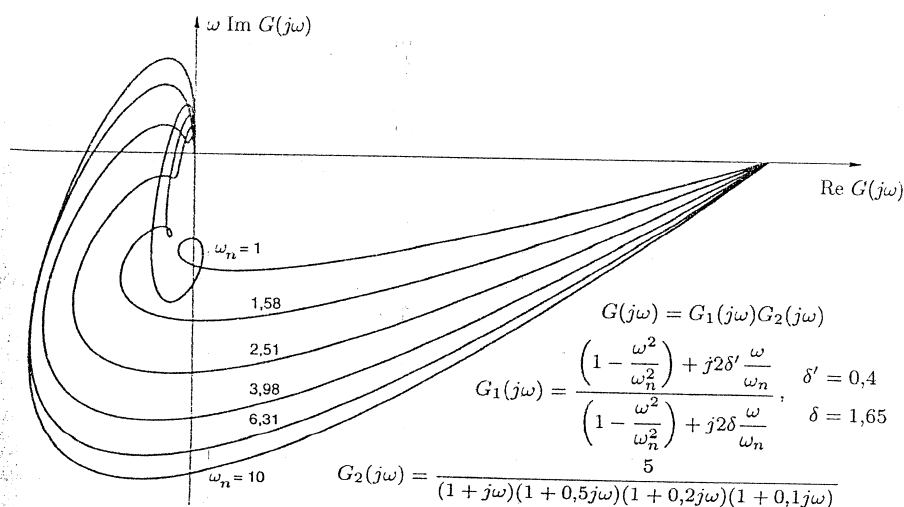
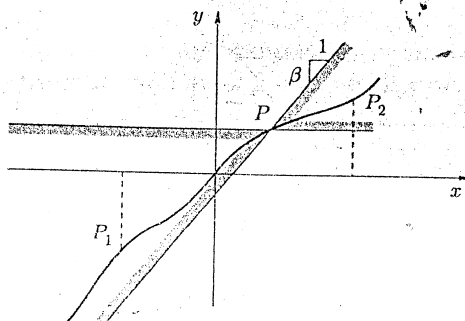


Figura 8.38
Diagrammi di Popov non convessi.

Il criterio di Popov è stato presentato con riferimento a sistemi in retroazione autonomi, cioè con ingresso nullo. Poiché la presenza di un segnale di ingresso costante equivale ad uno spostamento del punto di equilibrio lungo la caratteristica dell'elemento non lineare, il criterio di Popov può essere

Figura 8.39

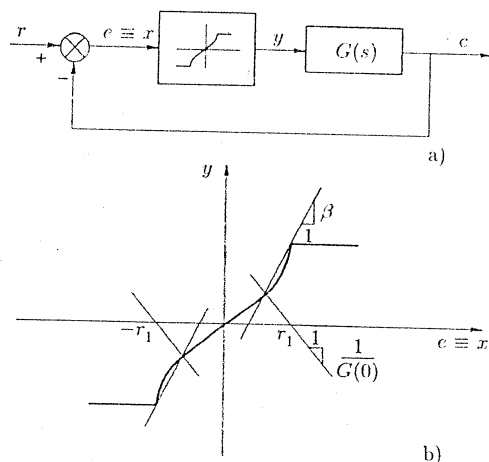
Studio della stabilità in relazione a un insieme di punti di equilibrio.



utilizzato per garantire la stabilità asintotica globale anche in presenza di variazioni (lente) della variabile di riferimento: basta infatti che la caratteristica $y = f(x)$ rimanga entro il settore tratteggiato in Fig. 8.39, al variare del punto P lungo il tratto compreso fra i punti P_1 e P_2 , corrispondenti agli estremi dell'intervallo in cui varia, spostandosi sulla caratteristica, il punto di equilibrio al variare di r . Tali punti si possono determinare mediante la costruzione di Fig. 8.2 o con quella di Fig. 8.3, a seconda del comportamento a regime della parte lineare.

ESEMPIO 8.4.1 Con riferimento al sistema in retroazione di Fig. 8.40a, con un elemento non lineare la cui caratteristica è riportata in Fig. 8.40b, si vuole determinare il campo di variazione dell'ingresso r compatibile con la stabilità. A tal fine, anzitutto si ricava il valore limite di β , il che si può fare senza difficoltà sul diagramma polare di $G_p(j\omega)$; applicando quindi la semplice costruzione grafica illustrata in Fig. 8.40b, si deduce immediatamente il valore r_1 che individua l'intervallo $-r_1 < r < r_1$ entro il quale il sistema è asintoticamente stabile. Se la parte lineare del sistema fosse di tipo 1, basterebbe verificare la condizione di Popov nell'origine, in quanto in tal caso, anche al variare di r , il punto $e = 0$, $y = 0$ rimane il solo punto di equilibrio possibile.

Figura 8.40 Applicazione del criterio di Popov nel caso di un sistema non autonomo.



Nel caso, più generale, dello schema a blocchi di Fig. 8.1, la determinazione del campo di r sicuramente compatibile con la stabilità si può eseguire, senza alcuna difficoltà, in base alle considerazioni sulla ricerca del punto di equilibrio svolte al Paragrafo 8.1.

8.5. Metodo grafico per l'analisi dei sistemi a relè

Si dà il nome di *sistemi a relè* ai sistemi di controllo in retroazione che, nella catena di amplificazione diretta, comprendono un particolare elemento non lineare, che viene detto *relè*, caratterizzato dal fatto che il suo segnale d'uscita può assumere solo due valori (sistemi di controllo a due posizioni) o tre valori (sistemi di controllo a tre posizioni).

La denominazione nasce dal fatto che tale caratteristica discontinua è tipica dei relè elettromeccanici. Lo schema a blocchi del tutto generale di un sistema di controllo a relè è riportato in Fig. 8.41.

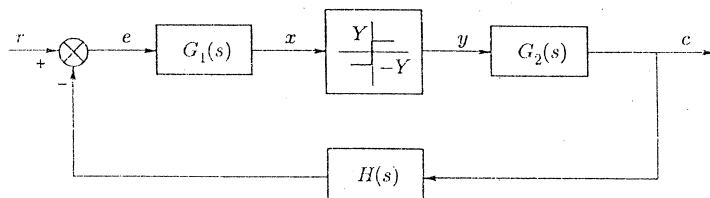


Figura 8.41 Sistema a relè.

I sistemi a relè a due posizioni presentano in genere delle oscillazioni autosostenute: con riferimento alla Fig. 8.41, si osservi infatti che, per la presenza della retroazione, la variabile y passa continuamente dall'uno all'altro dei due valori consentiti; quando è $y = Y$, la variabile controllata c tende a superare il valore di riferimento e la variabile errore e tende ad assumere valori negativi, per cui si ha la commutazione del relè, che porta alla condizione $y = -Y$: in questa condizione però la variabile controllata tende ad essere inferiore al valore corrispondente al riferimento e l'errore tende ad essere positivo. Se il sistema controllato ha caratteristiche filtranti, le corrispondenti oscillazioni della variabile controllata intorno al valore che comporta errore nullo possono risultare di ampiezza tollerabile.

Come si vedrà in seguito, i sistemi a tre posizioni possono invece tendere a condizioni di equilibrio del tutto stazionarie, senza l'oscillazione continua propria dei sistemi a due posizioni.

I sistemi a relè peraltro, rispetto ai sistemi lineari, presentano due vantaggi:

- i) gli amplificatori a relè sono costruttivamente più semplici degli amplificatori lineari;
- ii) gli amplificatori di potenza a due posizioni hanno un rendimento maggiore degli amplificatori lineari: se sono realizzati con dispositivi elettronici, questi funzionano o in saturazione o in interdizione, quindi in condizioni di bassa dissipazione.

L'elemento "relè" può essere di vari tipi: a due posizioni con caratteristica simmetrica rispetto all'origine (Fig. 8.42a) o asimmetrica (Fig. 8.42b), a due posizioni con isteresi con caratteristica simmetrica (Fig. 8.42c) o asimmetrica (Fig. 8.42d), a tre posizioni (Fig. 8.42e), a tre posizioni con isteresi (Fig. 8.42f).

Il problema principale che si presenta nello studio dei sistemi a relè è quello della determinazione dell'ampiezza e della frequenza delle oscillazioni: in sede di progetto è infatti necessario controllare se l'ampiezza delle oscillazioni della variabile controllata è veramente tollerabile in tutte le condizioni di funzionamento; infatti, essendo il sistema non lineare, l'ampiezza e la frequenza delle oscillazioni possono modificarsi al variare del valore dell'ingresso di riferimento r .

Si è visto al Paragrafo 8.2 come il metodo della funzione descrittiva si possa applicare all'analisi dei sistemi di controllo a relè. Traendo vantaggio dal fatto che in tali sistemi il segnale d'uscita del blocco non lineare è scomponibile nella somma di più gradini, appunto perché costante a tratti, i sistemi a relè si possono però analizzare anche con un procedimento grafico che, pur essendo in genere più laborioso, è spesso preferibile in quanto

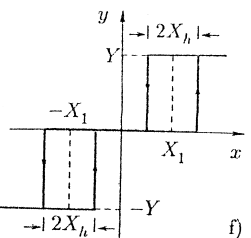
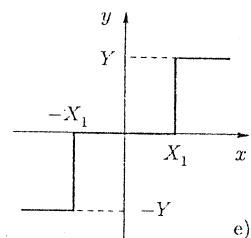
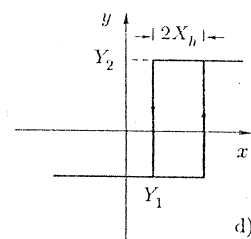
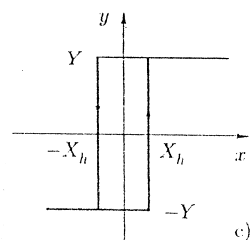
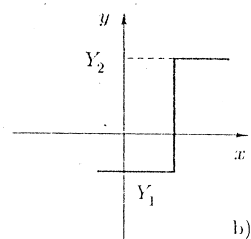
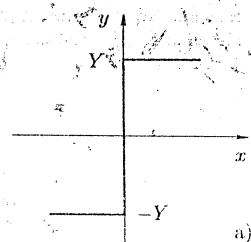
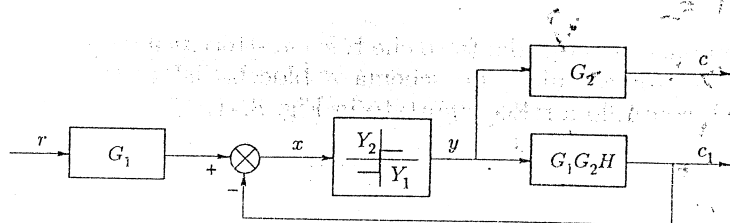


Figura 8.42
Caratteristiche di vari tipi di relè.

Figura 8.43

Sistema equivalente al sistema di Fig. 8.41.

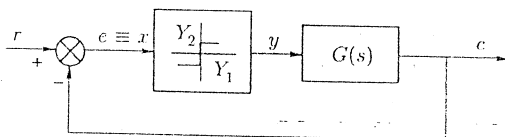


consente una precisione più elevata e si applica anche nel caso generale in cui la variabile di riferimento r vari in modo noto in funzione del tempo.

Si noti che il sistema di Fig. 8.41 è del tutto equivalente a quello rappresentato in Fig. 8.43, che presenta un anello di retroazione comprendente il relè e un solo elemento lineare: poiché, come si vedrà tra breve, si può facilmente determinare la risposta di qualunque sistema lineare al segnale $y(t)$, costante a tratti e quindi scomponibile nella somma di più gradini, il limitarsi all'analisi del sistema in retroazione elementare di Fig. 8.44 non lede la generalità.

Figura 8.44

Sistema al quale ci si può ricondurre per lo studio delle oscillazioni autosostenute.



La funzione $y(t)$, essendo a due soli valori, ha l'andamento rappresentato in Fig. 8.45b ed è completamente determinata quando vengano assegnati gli istanti di commutazione $t_1, t_2, \dots$. Essa si può scomporre nella somma di gradini

$$y(t) = Y_2 u(t) - (Y_2 - Y_1) u(t - t_1) + (Y_2 - Y_1) u(t - t_2) - \dots \quad (8.45)$$

Si supponga di conoscere la risposta al gradino della parte lineare del sistema (Fig. 8.45a), determinata analiticamente o sperimentalmente: per il momento si fa l'ipotesi che la risposta tenda ad un valore asintotico K , il che avviene se la parte lineare del sistema è di tipo 0 e asintoticamente stabile.

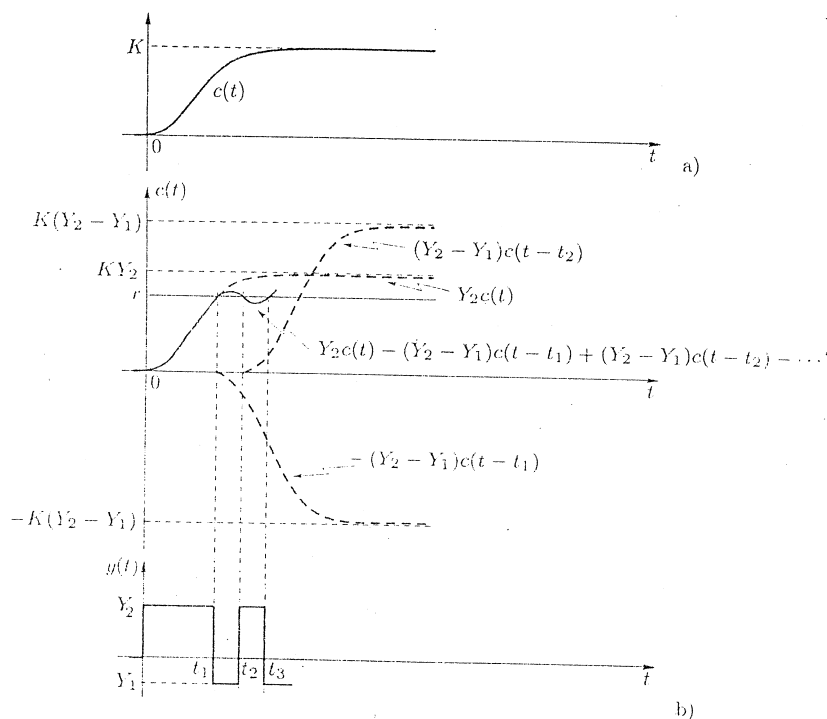
Gli istanti $t_1, t_2, \dots$ vengono determinati, insieme alla risposta $c(t)$, mediante la costruzione grafica indicata in Fig. 8.45b, cioè sommando le risposte a tali gradini, deducibili facilmente dal diagramma della risposta al gradino unitario rappresentato in Fig. 8.45a e determinando via via gli istanti di commutazione in corrispondenza dell'intersezione della curva $c(t)$ con la $r(t)$. Per semplicità, in Fig. 8.45b si è supposta la $r(t)$ costante, ma evidentemente non si è vincolati a tale ipotesi.

Quando la parte lineare del sistema presenta una risposta al gradino che, anziché tendere ad un valore asintotico come quella di Fig. 8.45a, cresce continuamente nel tempo come quella riportata in Fig. 8.46a (caso che si verifica quando la parte lineare del sistema presenta un polo nell'origine) conviene operare la scomposizione della funzione $c(t)$ nella somma di due funzioni: una funzione lineare $Ktu(t)$ e una funzione $c'(t)$ che tende asintoticamente ad un valore costante. La costruzione di Fig. 8.45b si può applicare anche in questo caso, sommando indipendentemente le due funzioni: in tal modo si evitano gli errori che potrebbero nascere nell'eseguire la differenza di funzioni crescenti al crescere del tempo. La relativa costruzione grafica è riportata in Fig. 8.46b.

La costruzione grafica indicata si può estendere facilmente al caso in cui l'elemento non lineare sia un relè con isteresi o al caso di un elemento a tre posizioni. Per esempio, in Fig. 8.47 è riportata la costruzione relativa

Figura 8.45

Applicazione del metodo grafico nel caso di un sistema di tipo 0.



a questo ultimo caso, per un sistema di tipo 1: si noti che viene raggiunta una condizione di equilibrio stabile, senza oscillazioni persistenti. Ciò è in accordo con quanto dedotto mediante il procedimento della funzione descrittiva, a proposito del relè con soglia.

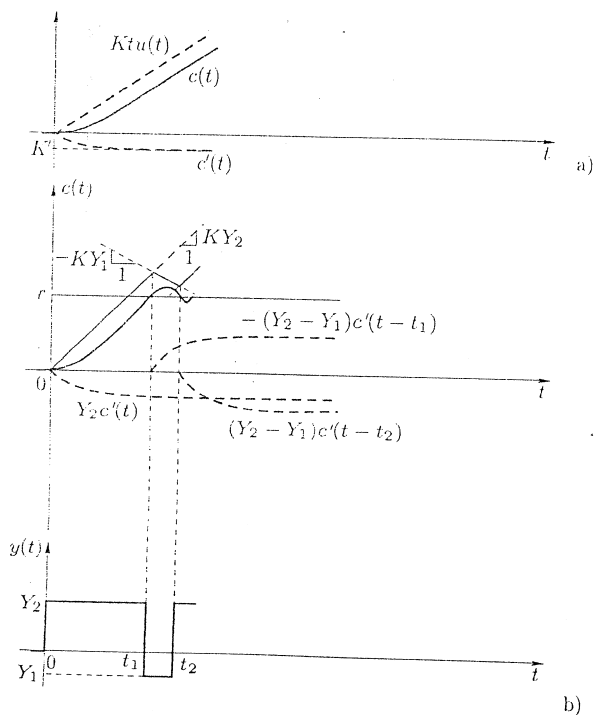
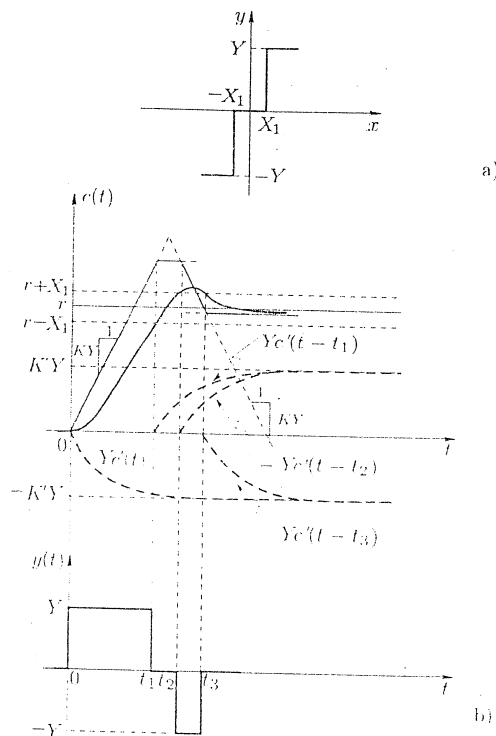


Figura 8.46

Applicazione del metodo grafico nel caso di un sistema di tipo 1.

Figura 8.47

Applicazione del metodo grafico nel caso di un sistema di tipo 1 con amplificatore a relè con soglia.



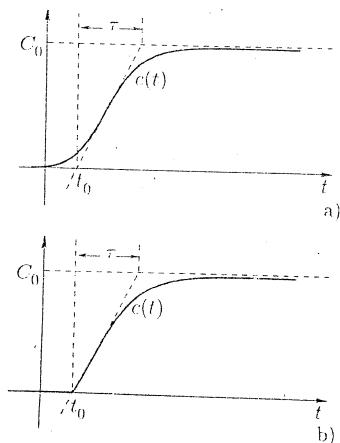
Determinazione analitica delle oscillazioni autosostenute.

Il procedimento ora esaminato ha l'inconveniente di richiedere una costruzione grafica relativamente complessa, in quanto ogni curva deve essere tracciata per punti. Per la determinazione dell'ampiezza e del periodo delle oscillazioni autosostenute nei casi, relativamente frequenti, in cui il sistema controllato non abbia poli nell'origine e presenti una risposta al gradino aperiodica, si può ricorrere ad una traduzione in formule dei risultati del metodo grafico. Se la risposta al gradino della parte lineare del sistema presenta un andamento analogo a quello mostrato in Fig. 8.48a ed Y_0 è l'ampiezza del gradino applicato, si può approssimare la funzione di trasferimento della parte lineare stessa con la funzione

$$G(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{1 + \tau s}, \quad (8.46)$$

i cui parametri si possono dedurre tracciando la tangente al diagramma nel punto di flesso, come è indicato in Fig. 8.48a e assumendo $K = C_0/Y_0$. In Fig. 8.48b è riportata la risposta al gradino relativa alla funzione di trasferimento approssimata.

Tale approssimazione consente di determinare l'ampiezza e il periodo delle oscillazioni autosostenute per via analitica, in funzione dei valori Y_1 , Y_2 , X_h , K , t_0 , τ , parametri che determinano completamente il sistema a relè cui ci si riconduce, schematizzato in Fig. 8.49: per maggiore generalità si è considerato il caso di un relè con isteresi.

**Figura 8.48**

Determinazione dei parametri della funzione di trasferimento (8.44).

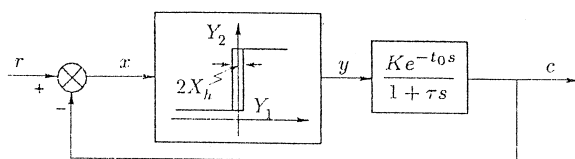


Figura 8.49
Modello per lo studio
delle oscillazioni autosostenute.

Applicando il procedimento grafico a tale sistema, si ottiene una curva di risposta avente l'andamento riportato in Fig. 8.50.

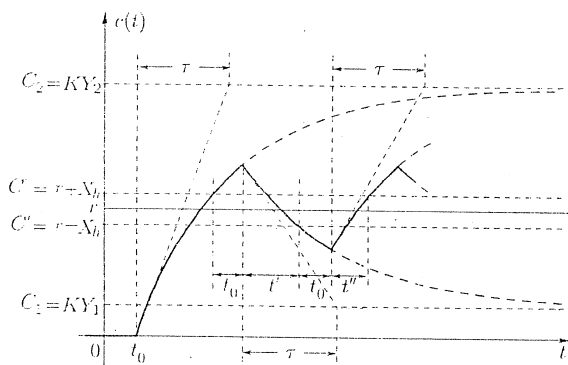


Figura 8.50
Applicazione del procedi-
mento grafico al sistema
di Fig. 8.49.

Analizzando la costruzione grafica, per l'ampiezza delle oscillazioni si deduce l'espressione

$$\begin{aligned} A_0 &= 2X_h + (C_2 - C'') \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) + (C' - C_1) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) \\ &= (C_2 - C_1) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) + 2X_h e^{-\frac{t_0}{\tau}} \\ &= K(Y_2 - Y_1) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) + 2X_h e^{-\frac{t_0}{\tau}}. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Il periodo è dato da

$$T_0 = 2t_0 + t' + t'', \quad (8.48)$$

in cui t' e t'' , indicati in Fig. 8.50, si possono calcolare come segue.

Dall'espressione

$$\left((C_2 - C'') \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) + C'' - C_1\right) e^{-\frac{t'}{\tau}} = C' - C_1$$

si deduce

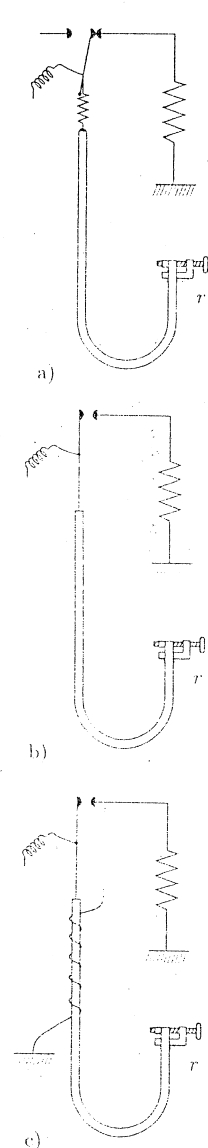
$$\left(C_2 - C_1 - (C_2 - C'') e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) e^{-\frac{t'}{\tau}} = C' - C_1,$$

da cui

$$\begin{aligned} t' &= \tau \ln \frac{C_2 - C_1 - (C_2 - C'') e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{C' - C_1} \\ &= \tau \ln \frac{K(Y_2 - Y_1) - (KY_2 - r - X_h) e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{r - X_h - KY_1}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Analogamente, dalla

$$\left(C_2 - C' + (C' - C_1) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right)\right) e^{-\frac{t''}{\tau}} = C_2 - C''$$



si deduce

$$(C_2 - C_1 - (C' - C_1)e^{-\frac{t_0}{\tau}})e^{-\frac{t''}{\tau}} = C_2 - C''$$

da cui

$$\begin{aligned} t'' &= \tau \ln \frac{C_2 - C_1 - (C' - C_1)e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{C_2 - C''} \\ &= \tau \ln \frac{K(Y_2 - Y_1) - (r - X_h - KY_1)e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{KY_2 - r - X_h} \end{aligned} \quad (8.50)$$

Si noti che A_0 non dipende da r , mentre T_0 dipende da r .

I sistemi a relè sono largamente impiegati nei controlli di temperatura, specie quando la sorgente di calore utilizzata è un resistore elettrico. Il trasduttore di misura è spesso un termometro a lamina bimetallica, che agisce direttamente sui contatti che interrompono il flusso di corrente nel riscaldatore. Un tale apparato di controllo è molto semplice ed economico: in Fig. 8.51a è rappresentato un dispositivo con isteresi comprendente un microinterruttore (vedi descrizione nell'Esercizio 8.7.8), in Fig. 8.51b un dispositivo privo di isteresi.

Spesso, per la presenza del ritardo finito t_0 , si hanno oscillazioni di ampiezza eccessiva anche se si rende nulla l'isteresi.

Nei controlli di temperatura a relè per diminuire l'ampiezza delle oscillazioni si ricorre talvolta alla cosiddetta *isteresi negativa*: se, come è indicato in Fig. 8.51c, si pone a contatto del termometro bimetallico un riscaldatore ausiliario di piccola potenza, la temperatura alla quale il contatto viene aperto o chiuso si abbassa, quando il riscaldatore ausiliario è inserito, rispetto al valore che essa ha quando il riscaldatore è disinserito. Il riscaldatore ausiliario viene alimentato in parallelo con la resistenza di riscaldamento principale: il suo disinserimento o inserimento equivalgono a variazioni, rispettivamente in più o in meno, della variabile di riferimento, come è indicato in Fig. 8.52. Tali variazioni naturalmente non sono immediate, per i ritardi associati con i fenomeni di propagazione termica, presenti ovviamente anche nel riscaldatore ausiliario. Se questi ritardi agiscono come è indicato in Fig. 8.52, si riesce ad ottenere una riduzione dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore corrispondente ad isteresi nulla.

Figura 8.51
Schemi di apparati termostatici.

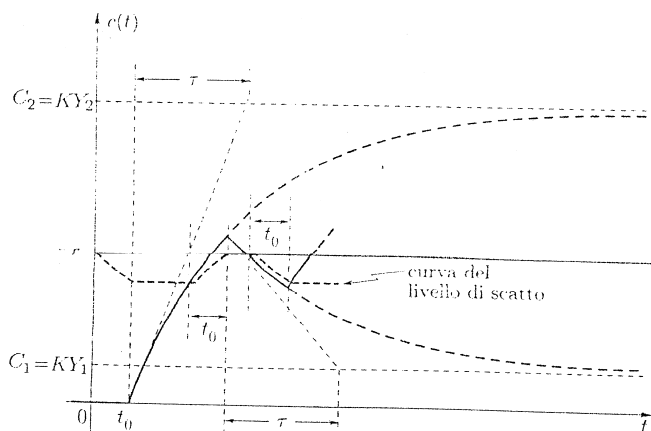


Figura 8.52
Risposta di un sistema a relè con isteresi negativa.

8.6. Linearizzazione dei sistemi a relè mediante vibrazione imposta (parzializzazione)

Quando l'ampiezza delle oscillazioni autosostenute sull'uscita dei sistemi a relè è troppo grande, in rapporto alla precisione che si vuole ottenere, si può cercare di ridurla, aumentando nel contempo la frequenza, con opportune reti correttive: si modifica così l'andamento del diagramma di Nyquist della parte lineare del sistema. L'effetto di tali modifiche sulla frequenza e sull'ampiezza delle oscillazioni si può studiare applicando il metodo della funzione descrittiva. In questo modo si possono ottenere però in genere variazioni relativamente modeste.

Un altro metodo è quello di "forzare" le oscillazioni del sistema, imponendone la frequenza: se infatti, come è indicato in Fig. 8.53, all'ingresso del relè si applica, oltre al segnale errore e , un segnale periodico di frequenza elevata, maggiore di quella delle oscillazioni autosostenute del sistema, si verifica il fenomeno, tipicamente non lineare, del trascinamento della frequenza: il sistema si porta ad oscillare sulla nuova frequenza. I controlli a relè con vibrazione imposta si basano su questo fenomeno.

Vibrazione imposta

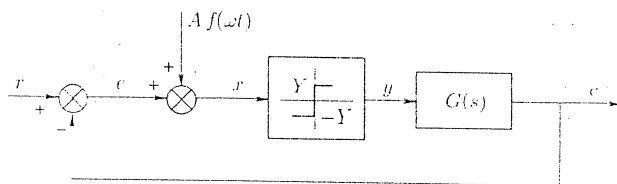


Figura 8.53

Linearizzazione di un sistema a relè con vibrazione imposta.

Facendo riferimento allo schema a blocchi di Fig. 8.53, con $f(\omega t)$ si indica una funzione avente le seguenti proprietà:

- i) variabile nel campo $[-1, 1]$: $-1 \leq f(\omega t) \leq 1$;
- ii) periodica: $f(\omega t) = f(\omega t + 2k\pi)$, k intero;
- iii) tale che sia $f(0) = 0$ (ciò si può sempre ottenere con un'opportuna scelta dell'origine dell'asse dei tempi);
- iv) alternativa: $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$;
- v) con semiperiodi sinmetrici: $f(\omega t) = f(\pi - \omega t)$, $0 \leq \omega t \leq \pi$.

In Fig. 8.55a-c sono riportate le forme d'onda di alcuni segnali che soddisfano le summenzionate proprietà.

Si suppone che la pulsazione sia sufficientemente elevata, così da essere in pratica completamente filtrata, insieme alle sue armoniche, dalla parte lineare del sistema. È evidente allora che il valor medio y_m del segnale $y(t)$ è nullo se è nullo il segnale errore e (Fig. 8.54a). Se invece e è differente da zero ed è lentamente variabile, così da potersi ritenere costante in un periodo della vibrazione imposta, y_m è legato ad e da una funzione facilmente deducibile.

Con riferimento alla Fig. 8.54b, si può scrivere infatti

$$y_m = \frac{4Y \Delta t}{2\pi/\omega} \quad (8.51)$$

Nella (8.51) Δt è funzione di e . Più precisamente, se è $-A \leq e \leq A$, Δt è la più piccola radice positiva dell'equazione

$$A f(\omega \Delta t) = e,$$

che, essendo $f(\omega t)$ periodica, ammette infinite radici, mentre, se è $e > A$, si ha $\Delta t = \pi/2\omega$ e, se è $e < -A$, $\Delta t = -\pi/2\omega$.

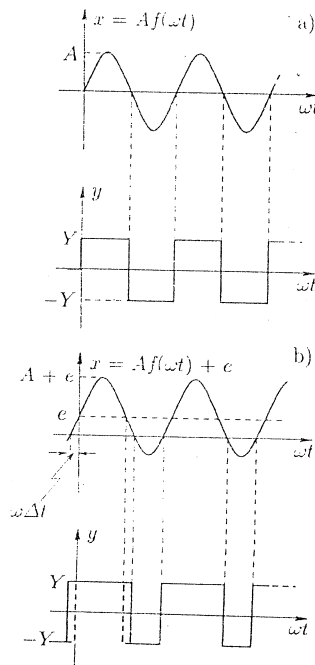


Figura 8.54

Segnali di ingresso e uscita del relè nei casi $e = 0$ ed $e > 0$.

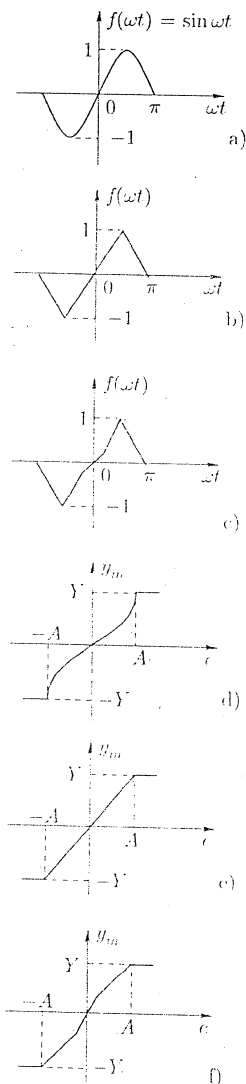


Figura 8.55

Forme d'onda di vibrazioni (a, b, c) e corrispondenti caratteristiche equivalenti (d, e, f).

Sostituendo nella (8.51), si ottiene

$$y_m = \begin{cases} Y & \text{per } e > A, \\ \frac{2Y}{\pi} f^{-1}\left(\frac{e}{A}\right) & \text{per } -A \leq e \leq A, \\ -Y & \text{per } e < -A, \end{cases} \quad (8.52)$$

in cui con $f^{-1}(y)$ si è indicata la funzione inversa della $f(x)$, che, date le caratteristiche precedentemente elencate, è definita per $-1 \leq x \leq 1$.

In Fig. 8.55d-f sono riportate le funzioni che rappresentano gli andamenti di $y_m(e)$ per le vibrazioni aventi le forme d'onda di Fig. 8.55a-c.

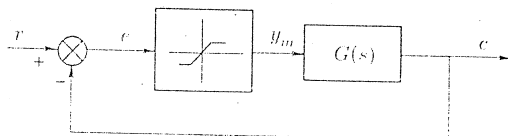


Figura 8.56 Sistema equivalente al sistema di Fig. 8.53.

Avendo supposto che la parte lineare del sistema si comporti come un filtro passa basso che filtra la pulsazione ω e le sue armoniche, il sistema con vibrazione imposta può essere rappresentato con lo schema a blocchi di Fig. 8.56 e risulta praticamente linearizzato nel caso di vibrazione con forma d'onda triangolare, linearizzato per piccoli segnali nel caso di vibrazione con forma d'onda sinusoidale.

Alla tecnica di variare il valor medio della grandezza di ingresso di un sistema con caratteristiche filtranti variando il tempo relativo di mantenimento dell'uno o dell'altro di due valori ammissibili si dà il nome di *parzializzazione*. Tale tecnica è frequentemente adottata nella realizzazione di stadi finali di potenza di amplificatori elettronici per servomeccanismi, in quanto è caratterizzata da un elevato rendimento.

Un sistema in retroazione a relè linearizzato con vibrazione imposta si può anche considerare un sistema lineare avente uno stadio di potenza realizzato con la tecnica della parzializzazione.

Per evitare la commutazione continua anche in condizioni di riposo, la parzializzazione viene realizzata spesso con il sistema di Fig. 8.57a, mediante un relè con soglia e una vibrazione triangolare la cui ampiezza A_1 è uguale ad A , la metà dell'intervallo di soglia.

La caratteristica equivalente è riportata in Fig. 8.57b e corrisponde a una linearizzazione perfetta, a parte l'inevitabile saturazione.

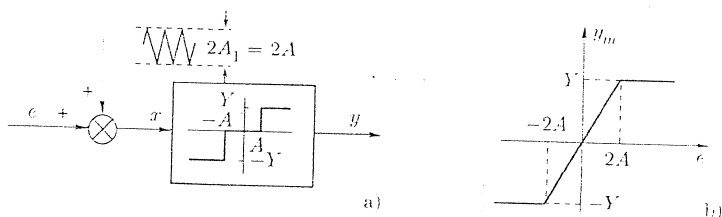


Figura 8.57

Linearizzazione di un relè con soglia.

Occorre tener presente peraltro che l'ampiezza della vibrazione triangolare difficilmente potrà essere perfettamente identica a metà dell'intervallo di soglia: per mostrare l'effetto di un mancato soddisfacimento di tale condizione, in Fig. 8.58a è riportata la caratteristica equivalente relativa alla situazione $A_1 < A$, in Fig. 8.58b quella relativa alla situazione $A_1 > A$.

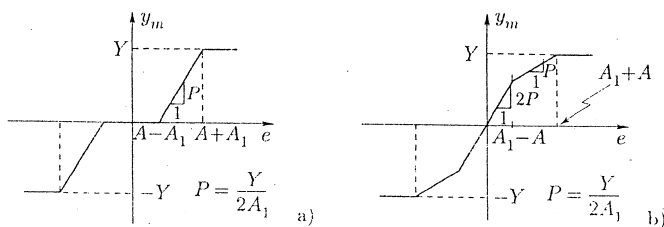


Figura 8.58

Caratteristiche equivalenti del sistema di Fig. 8.56a nei casi in cui l'ampiezza della vibrazione sia scarsa o eccessiva.

ESEMPIO 8.6.1 Una tipica applicazione della tecnica della parzializzazione è costituita dai servomeccanismi di posizione con motore elettrico pilotato da un amplificatore elettronico funzionante a due posizioni (saturo o interdetto): una vibrazione imposta con frequenza dell'ordine del KHz viene pratica-

mente filtrata per l'inerzia del rotore, oltre che per l'induttanza degli avvolgimenti, mentre l'amplificatore, essendo continuamente commutato dalla completa conduzione alla completa interdizione, funziona con rendimento molto elevato.

ESEMPIO 8.6.2 La linearizzazione dei sistemi a relè con vibrazione imposta viene spesso impiegata anche nei controlli di temperatura: facendo riferimento al solito trasduttore a lamina bimetallica, si consideri il sistema di Fig. 8.59a: la camma, azionata da un piccolo motore elettrico, produce una continua oscillazione di uno dei contatti, mentre l'altro contatto si sposta al variare della temperatura. Si può così ottenere una variazione della variabile manipolabile (potenza dissipata nel riscaldatore) che, pur oscillando come è indicato in Fig. 8.59b, come valor medio è proporzionale alla variazione di temperatura, ottenendo così in pratica un controllo lineare, rappresentabile con lo schema a blocchi di Fig. 8.56.

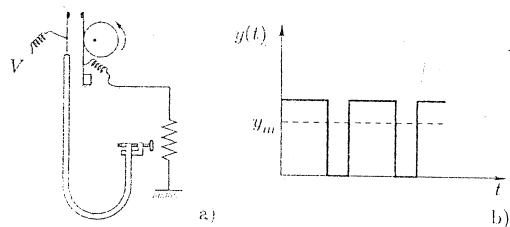


Figura 8.59 Sistema termostatico con vibrazione imposta.

Questo tipo di controllo è presente anche nei termostati elettronici più moderni, in cui l'elemento sensibile alla temperatura è di tipo a semiconduttore ed è presente una logica a stato solido: quando si raggiunge una temperatura pari a quella desiderata meno quattro decimi di grado, viene disinserito il sistema di riscaldamento per un minuto ogni dieci, a meno tre decimi di grado esso viene disinserito per due minuti ogni dieci, e così via, finché alla temperatura desiderata il disinserimento è effettuato per cinque minuti ogni dieci, alla temperatura desiderata più quattro decimi di grado per nove minuti ogni dieci. Al di sotto del suddetto intervallo di temperatura il sistema di riscaldamento è sempre inserito e al di sopra sempre disinserito.

Molti sistemi termici sono però caratterizzati dalla presenza di ritardi finiti di notevole entità e risul-

tano pertanto stabili solo se si esplica un'azione di controllo di tipo integrale. Questa si può ottenere come è indicato in Fig. 8.60a: la lamina bimetallica con i relativi contatti costituisce un sistema a relè a tre posizioni, che pilota un piccolo motore elettrico fortemente demoltiplicato, che a sua volta varia la posizione x di uno dei contatti che inseriscono il riscaldatore, mentre l'altro contatto viene fatto vibrare da un piccolo motore sincrono come nel caso di Fig. 8.59a, in modo che la potenza dissipata nel riscaldatore sia proporzionale ad x .

Il sistema può essere rappresentato con lo schema a blocchi di Fig. 8.60b e studiato graficamente con il metodo illustrato in Fig. 8.47. L'adattamento di questo sistema ad un controllo elettronico di tipo digitale è relativamente semplice: l'integratore si realizza con un contatore bidirezionale cui pervengono impulsi di conta in avanti o di conta all'indietro a seconda del segno dell'errore di temperatura rispetto al riferimento e l'azione proporzionale con l'inserimento periodico del sistema di riscaldamento per un tempo proporzionale al contenuto del contatore, che deve essere bloccato quando è a fondo scala, con un dispositivo anti-windup. La regolazione del periodo degli impulsi che pervengono al contatore equivale alla regolazione della costante di tempo dell'azione integrale nello schema di Fig. 8.60b.

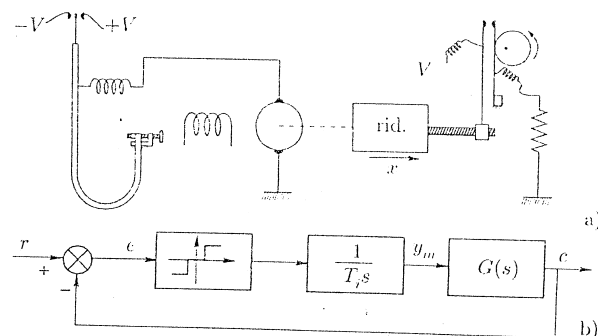


Figura 8.60 Sistema termostatico con vibrazione imposta ed azione integrale.

8.7. Esercizi

8.7.1 Nello schema a blocchi di Fig. 8.61 il blocco 2 è lineare e ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2} \quad (8.53)$$

con $T_1 = 1 \text{ sec}$, $T_2 = 0.2 \text{ sec}$.

1. Determinare, col metodo della funzione descrittiva, l'ampiezza della fondamentale e il rapporto fondamentale/terza armonica delle oscillazioni all'uscita.
2. Proporre un sistema di correzione che, senza modificare il guadagno statico, riduca l'ampiezza delle oscillazioni nel rapporto di 1 a 0.2.

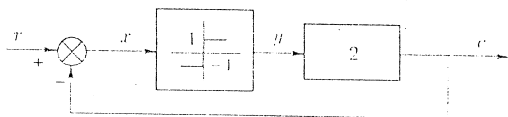


Figura 8.61 Sistema in retroazione non lineare.

Soluzione

1. Si nota anzitutto che, essendo il sistema di tipo 1, l'ampiezza e la frequenza delle oscillazioni non dipendono dal segnale di ingresso r , purché esso sia costante o lentamente variabile.

L'ampiezza e la pulsazione della fondamentale si possono determinare applicando il criterio di Routh: sia K_0 il valore del guadagno statico corrispondente al limite di stabilità: essendo in effetti il guadagno statico unitario, il diagramma di Nyquist interseca l'asse reale nel punto $-1/K_0$, come è indicato in Fig. 8.62.

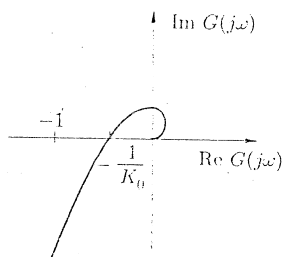


Figura 8.62 Diagramma di Nyquist della funzione (8.53).

L'equazione caratteristica è

$$0.04 s^4 + 0.44 s^3 + 1.4 s^2 + s + K = 0 \quad (8.54)$$

Dalla tabella di Routh

4	0,04	1,4	K
3	0,44	1	
2	0,572	0,44 K	
1	$0,572 - (0,44)^2 K$		
0	0,44 K		

si deduce

$$K_0 = \frac{0,572}{(0,44)^2} = 2,95$$

Sostituendo nella tabella tale valore in luogo di K , si ottiene una riga di tutti zeri: la riga immediatamente superiore permette di scrivere un'equazione ausiliaria che fornisce la pulsazione delle oscillazioni. Da essa si ricava

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{0,44}} = 1,51 \text{ rad/sec}$$

Al sistema lineare è applicata un'onda rettangolare di ampiezza unitaria e di pulsazione ω_0 , il cui sviluppo in serie di Fourier è

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

Le ampiezze della fondamentale e della terza armonica in uscita valgono rispettivamente

$$C_1 = \frac{4}{\pi} |G(j\omega_0)| = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1,51 \sqrt{1+2,25(1+0,09)}} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2,95}$$

$$C_3 = \frac{4}{3\pi} |G(j3\omega_0)| = \frac{4}{3\pi} \frac{1}{4,52 \sqrt{1-20,5(1+0,82)}} = \frac{4}{3\pi} \frac{1}{38,0}$$

Il rapporto richiesto fra l'ampiezza della fondamentale e l'ampiezza della terza armonica vale pertanto

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{3 \cdot 38}{2,95} = 38,5$$

2. La riduzione dell'ampiezza delle oscillazioni si può ottenere con una rete a ritardo e anticipo progettata in modo che l'attenuazione a centro banda sia pari a 1/5 e la pulsazione di centro banda coincida con ω_0 . Con riferimento alla Fig. 6.9c, deve essere

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{1}{5}, \quad \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\omega_0}$$

Se si vuole che il rapporto fondamentale/terza armonica non vari, occorre che anche la terza armonica cada nella banda di frequenze in cui la rete attenua, per cui deve essere

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} > 9$$

8.7.2 Nel sistema schematizzato in Fig. 8.63 il blocco 2 è lineare ed ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}, \quad (8.55)$$

con $T_1 = 2 \text{ sec}$, $T_2 = 1 \text{ sec}$, $K > 0$.

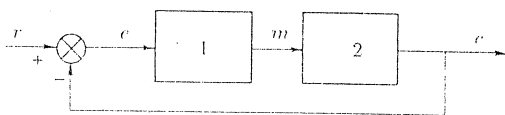


Figura 8.63 Sistema in retroazione.

1. Posto $m = c$, determinare il valore K_0 del guadagno statico corrispondente al limite di stabilità.

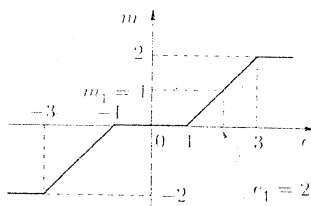


Figura 8.64 Caratteristica del blocco 1 del sistema di Fig. 8.63.

2. Posto $K = K_0/2$ e nell'ipotesi che il legame fra i segnali e ed m sia espresso dalla caratteristica di

8.7.3 Dato il sistema a relè linearizzato con vibrazione imposta rappresentato in Fig. 8.65, in cui i valori delle costanti di tempo sono

$$T_1 = 1 \text{ sec}, T_2 = 2 \text{ sec}, T_3 = 3 \text{ sec},$$

si pongono i seguenti quesiti:

1. Determinare il valore K_0 di K corrispondente al limite di stabilità del sistema, considerando escluso l'elemento non lineare (cioè per $y = x$).
2. Determinare il campo di variabilità di r per il quale, assumendo $K = K_0/2$, è garantita, secondo il criterio di Popov, la stabilità del sistema (si specifica che il dominio circondato dal diagramma di Popov è convesso).

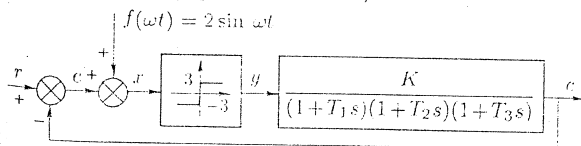


Figura 8.65 Sistema linearizzato con vibrazione imposta.

Soluzione

1. All'equazione caratteristica

$$6s^3 + 11s^2 + 6s + 1 + K = 0 \quad (8.57)$$

corrisponde la tabella di Routh

3	6	6
2	11	1 + K
1	66 - 6(1 + K)	
0	1 + K	

Fig. 8.64, determinare il valore r_1 di r per cui a regime è $m = m_1 = 1$.

Soluzione

1. L'equazione caratteristica è

$$K + (1 + 2s)(1 + 2s + s^2) = 0,$$

cioè

$$2s^3 + 5s^2 + 4s + 1 + K = 0. \quad (8.56)$$

Dalla tabella di Routh

3	2	4
2	5	1 + K
1	20 - 2(1 + K)	
0	1 + K	

si deduce

$$K_0 = 9.$$

2. Con riferimento alla Fig. 8.64, si verifica che ad $m = m_1 = 1$ corrisponde $c = c_1 = 2$, per cui, dovendo essere

$$c_1 = r_1 - K_0 \frac{m_1}{2},$$

si deduce

$$r_1 = 2 + 4,5 = 6,5.$$

da cui si deduce $K_0 = 10$.

2. Il relè linearizzato con vibrazione imposta equivale ad un elemento non lineare la cui caratteristica è espressa dalla relazione

$$y_m = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{e}{2} \quad (8.58)$$

ed è rappresentata graficamente in Fig. 8.66.

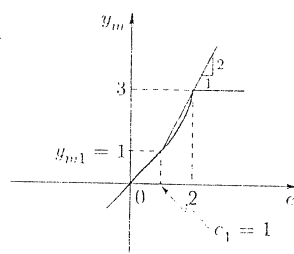


Figura 8.66 Caratteristica equivalente del relè con vibrazione imposta.

L'assumere $K = K_0/2$ equivale ad imporre il valore $\beta = 2$ nell'applicazione del criterio di Popov: la non-linearità deve essere compresa fra la retta di coefficiente angolare 2 e l'asse delle ascisse. In base alla costruzione di Fig. 8.40b, il punto limite dell'intervallo di variabilità di e è $e = e_1 = 1$, cui corrisponde $y_m = y_{m1} = 1$.

Dovendo essere $e_1 = r_1 - K_0 y_{m1}/2$, si deduce $r_1 = 6$. L'intervallo compatibile con la stabilità risulta pertanto $-6 < r < 6$.

8.7.4 Nel sistema a relè di Fig. 8.67 è stata introdotta la retroazione contrassegnata a tratto per provocare l'oscillazione autosostenuta del relè. Supponendo che la frequenza di tale oscillazione sia sufficientemente elevata (il che si può ottenere con un'opportuna scelta della costante di tempo τ), si realizza una linearizzazione dello stesso tipo di quella che si può ottenere col metodo della vibrazione imposta. Determinare il legame fra e ed y_m .

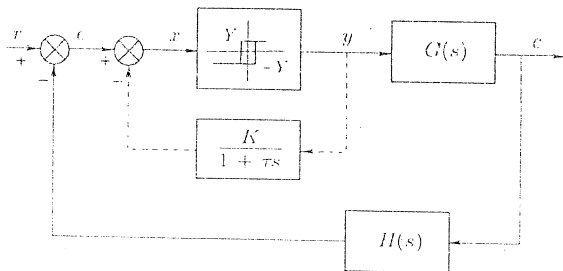


Figura 8.67 Sistema a relè autooscillante.

Soluzione In Fig. 8.68 sono rappresentate le forme d'onda del segnale x e del segnale y nell'ipotesi che il segnale e sia costante e positivo.

Indicando con X_h la metà dell'ampiezza dell'isteresi, i due intervalli di tempo t' e t'' si possono ricavare risolvendo le equazioni

$$KY - X_h + e = (KY + X_h + e)e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

$$KY - X_h - e = (KY + X_h - e)e^{-\frac{t''}{\tau}}$$

Si deduce rispettivamente

$$t' = \tau \ln \frac{KY + X_h + e}{KY - X_h + e}, \quad (8.59)$$

$$t'' = \tau \ln \frac{KY + X_h - e}{KY - X_h - e}. \quad (8.60)$$

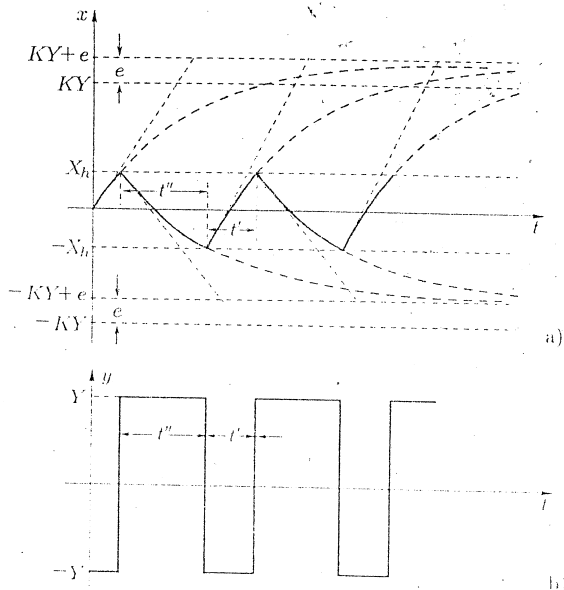


Figura 8.68 Forme d'onda relative al sistema di Fig. 8.67.

La funzione che lega y_m ad e si può dedurre notando che è

$$y_m = Y \frac{t'' - t'}{t'' + t'}$$

ed è rappresentata da un diagramma avente l'andamento qualitativo di Fig. 8.69.

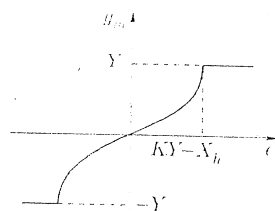


Figura 8.69 Caratteristica equivalente del relè autooscillante.

8.7.5 Determinare la caratteristica equivalente e la corrispondente funzione descrittiva del relè con isteresi di Fig. 8.70a, fatto vibrare con il segnale periodico triangolare di Fig. 8.70b.

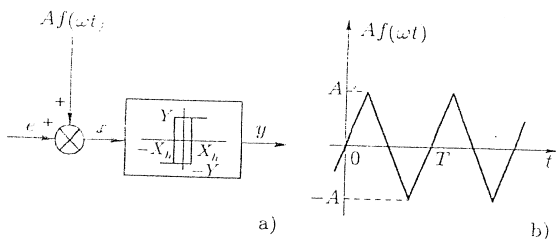


Figura 8.70 Relè con isteresi e vibrazione imposta.

Soluzione Occorre distinguere i seguenti due casi:

i) $A < X_h$: in questo caso la caratteristica equivalente è del tipo rappresentato in Fig. 8.71. In altri termini la vibrazione imposta ha il solo effetto di diminuire l'isteresi del relè.

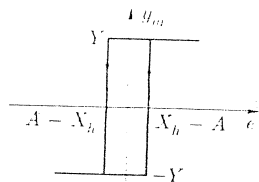


Figura 8.71 Caratteristica equivalente nel caso $A < X_h$.

La funzione descrittiva corrispondente alla caratteristica equivalente risulta espressa dalla seguente relazione, in cui con E si indica l'ampiezza della sinusoide $e(t)$:

$$F(E) = \begin{cases} \text{non definita} & \text{per } E < X_h - A, \\ \frac{4Y}{\pi E} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{X_h - A}{E} \right)^2} + \arcsin \left(\frac{X_h - A}{E} \right) \right) & \text{per } E \geq X_h - A. \end{cases} \quad (8.61)$$

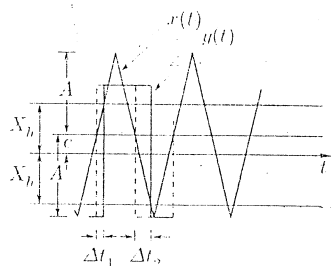


Figura 8.72 Forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita del relè nel caso $A \geq X_h$.

ii) $A \geq X_h$: in questo caso, facendo riferimento alla Fig. 8.72, si nota anzitutto che è

$$y_m = y = \begin{cases} Y & \text{per } e > A - X_h, \\ -Y & \text{per } e < -(A - X_h), \end{cases}$$

mentre, per $-(A - X_h) \leq e \leq (A - X_h)$ vale la relazione

$$y_m = \frac{2Y}{T} (\Delta t_2 - \Delta t_1),$$

con

$$\Delta t_1 = \frac{T}{4A} (X_h - e), \quad \Delta t_2 = \frac{T}{4A} (X_h + e).$$

La caratteristica equivalente è rappresentata nella Fig. 8.73 e la funzione descrittiva, che si ottiene come somma delle funzioni descrittive di una saturazione e di un relè con soglia, è

$$F(E) = \begin{cases} \frac{Y}{A} & \text{per } E \leq A - X_h, \\ \frac{2Y(A + X_h)}{\pi EA} \sqrt{1 - \left(\frac{A - X_h}{E} \right)^2} + \frac{2Y}{\pi A} \arcsin \left(\frac{A - X_h}{E} \right) & \text{per } E > A - X_h. \end{cases} \quad (8.62)$$

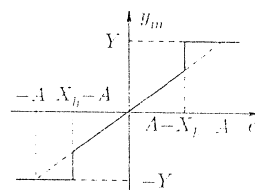


Figura 8.73 Caratteristica equivalente nel caso $A \geq X_h$.

8.7.6 È dato il sistema in retroazione di Fig. 8.74.

1. Determinare il valore di c corrispondente all'equilibrio per $r=2$.
2. Determinare se nelle condizioni specificate al punto precedente il sistema è stabile per piccole perturbazioni.

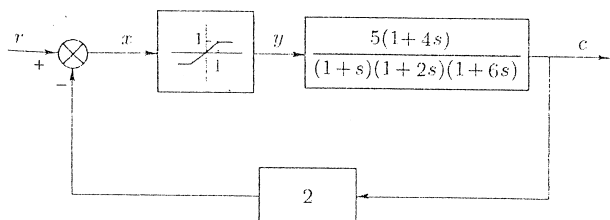


Figura 8.74 Sistema in retroazione non lineare.

Soluzione

1. Nel caso in esame la costruzione di Fig. 8.2 si esegue come è indicato in Fig. 8.75. Da essa si deduce $x_1 = y_1 \simeq 0,18$.

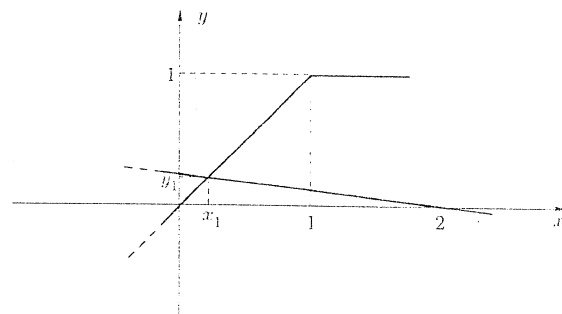


Figura 8.75 Costruzione grafica per la determinazione del punto di equilibrio.

Una verifica analitica si basa sulle equazioni

$$x = 2 - 10y$$

$$y = x,$$

da cui si ottiene $x_1 = y_1 = 0,181$.

2. Per piccole perturbazioni l'elemento non lineare equivale a un elemento lineare di guadagno unitario. La stabilità si può pertanto studiare mediante il criterio di Routh. L'equazione caratteristica è

$$10(1 + 4s) + (1 + s)(1 + 2s)(1 + 6s) = 0.$$

o anche

$$12s^3 + 20s^2 + 49s + 11 = 0,$$

da cui

3	12	49
2	20	11
1	848	20
0	11	

Il sistema è stabile per piccole perturbazioni.

8.7.7 Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig. 8.76.

1. Posto $r=4$, si determinino i valori di e , e' , x , y a regime.
2. Supposto che, rispetto alla condizione di equilibrio di cui al punto precedente, ad r si faccia subire una variazione a gradino, ponendo $r=3$, si calcolino le conseguenti massime variazioni di e' ed x .

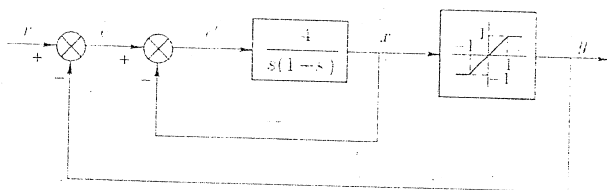


Figura 8.76 Sistema in retroazione non lineare.

Soluzione

1. Essendo il primo blocco di tipo 1, a regime sarà $e'=0$ e quindi $x=e$.

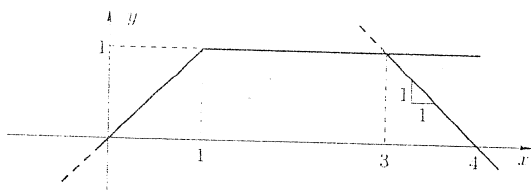


Figura 8.77 Costruzione grafica per la determinazione del punto di equilibrio.

8.7.8 In relazione al sistema di Fig. 8.78, determinare i punti di equilibrio e studiare il comportamento dinamico al variare (lento in rapporto a τ) dell'ingresso r .

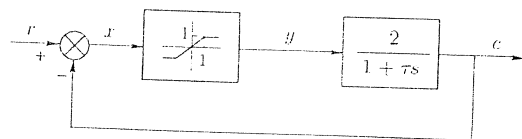


Figura 8.78 Sistema in retroazione positiva con saturazione.

Soluzione I punti di equilibrio si possono determinare con il procedimento grafico illustrato al Paragrafo 4.1, che nel caso in esame si traduce nella costruzione di Fig. 8.79.

Per $r=0$ si hanno tre punti di equilibrio: l'origine 0 e i punti A e B.

La costruzione grafica che fornisce il punto di equilibrio è riportata in Fig. 8.77. Da essa risulta $x_1=3$, $y_1=1$.

2. Si noti che, rispetto alla condizione di equilibrio precedentemente determinata, una variazione di x non inferiore a -2 non produce alcuna influenza su y . L'applicazione ad r di una variazione a gradino da 4 a 3 produce una variazione a gradino da 3 a 2 sull'ingresso e del sistema in retroazione interno che, qualora la conseguente variazione di x rientri nei limiti sopra specificati, non viene avvertita nel collegamento di retroazione interno. La funzione di trasferimento del sistema in retroazione interno è

$$G_1(s) = \frac{4}{s(1-s)+4} = \frac{1}{\frac{s^2}{4} + \frac{s}{4} + 1}$$

Tale sistema è pertanto un sistema del secondo ordine con $\omega_n=2$, $\delta=0,25$.

Dal diagramma di Fig. 2.30 si deduce una massima variazione di x pari a $-1,45$, mentre e' subisce, rispetto alla condizione iniziale, una variazione massima negativa pari a -1 e una variazione massima positiva pari a $0,45$.

A posteriori, si verifica che la variabile y non risente del gradino applicato all'ingresso e che pertanto gli sviluppi sopra riportati, validi in tale ipotesi, sono esatti.

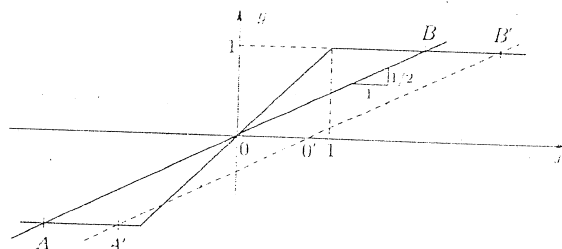


Figura 8.79 Determinazione dei punti di equilibrio del sistema di Fig. 8.78.

L'origine è un punto di equilibrio instabile: infatti per piccoli spostamenti nell'intorno dell'origine il sistema è lineare e presenta la funzione di trasferimento

$$\frac{2}{\tau s - 1}$$

L'andamento nel tempo dell'uscita conseguente ad un'eventuale perturbazione è dato dalla relazione

$$c(t) = K e^{\frac{t}{\tau}},$$

in cui K dipende dall'entità della perturbazione, e risulta pertanto divergente.

I punti A e B sono di equilibrio stabile: infatti una piccola perturbazione non viene avvertita attraverso il collegamento di retroazione, per la presenza della saturazione. La conseguente evoluzione dell'uscita dipende dalla funzione di trasferimento del solo secondo blocco, che è stabile.

Al variare di r , i punti di equilibrio si spostano lungo la caratteristica dell'elemento non lineare: a titolo di esempio, in Fig. 8.79 sono indicate con A' , O' e B' le loro posizioni per $r=0.7$. Si noti che, per $r > 1$ o per $r < -1$ rimane un solo punto di equilibrio e che questo è stabile.

Se il sistema si trova, per $r=0$, in un dato punto di equilibrio, ad esempio A , al variare lento di r rimane su un punto di equilibrio vicino, senza che y e c subiscano variazioni rispetto ai valori in A (rispettivamente -1 e -2), finché r non supera il valore 1: a questo punto il sistema si porta sull'unico punto di equilibrio stabile, in cui y e c assumono gli stessi valori che hanno in B (rispettivamente 1 e 2). Se ci si riporta, facendo diminuire il valore di r , alla condizione $r=0$, il sistema viene ora a trovarsi in B .

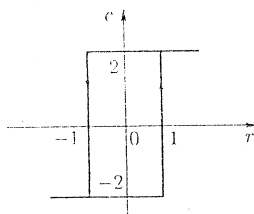


Figura 8.80 Caratteristica statica del sistema di Fig. 8.78.

La caratteristica statica ingresso-uscita è riportata in Fig. 8.80 ed è del tipo *relè con isteresi*: l'uscita scatta dall'uno all'altro dei due valori ammissibili in condizioni di equilibrio: la rapidità dello scatto dipende dalla costante di tempo τ .

Per $-1 < r < 1$ il sistema è *bistabile*, cioè presenta due stati di equilibrio stabili: il passaggio dall'uno all'altro di tali stati si può ottenere facendo assumere momentaneamente ad r rispettivamente un valore minore di -1 o un valore maggiore di 1.

Caratteristiche tipo relè con isteresi sono normalmente associate a schemi funzionali del tipo di

Fig. 8.78, cioè sono proprie di sistemi con retroazione positiva.

Dispositivi tipici sono il *microinterruttore* e il *relè*, rappresentati in Fig. 8.81a e in Fig. 8.81b.

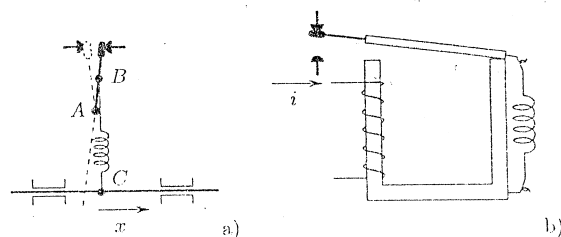


Figura 8.81 Dispositivi a scatto: microinterruttore e relè.

Nel microinterruttore un contatto mobile solidale con una lamina impernata in A può commutare fra due posizioni: una molla funzionante in trazione è impernata in B e C : il perno C è solidale con un elemento in moto traslatorio, la cui posizione x costituisce la variabile di ingresso. La posizione della lamina rimane quella illustrata in figura finché il perno C si trova a destra della linea congiungente A e B ; se, per una variazione in meno di x , tende a spostarsi a sinistra di tale linea, la forza esercitata dalla molla viene ad assumere una componente che provoca la rotazione della lamina in senso antiorario: appena la lamina si sposta, tale componente aumenta, per cui si verifica l'azione rigenerativa e lo scatto.

È evidente che lo scatto in senso opposto avviene per un diverso valore di x , dovendo trovarsi il perno C allineato con la nuova posizione della lamina, per cui il sistema presenta isteresi.

Nel caso del relè, costituito da un circuito magnetico chiuso da un'ancora mobile mantenuta in posizione sollevata da una molla, in presenza di corrente nell'avvolgimento si produce una forza tendente a chiudere il circuito magnetico proporzionale al quadrato dell'induzione al traferro: non appena l'ancora si sposta, diminuisce il traferro, quindi la riluttanza del circuito magnetico, per cui, a parità di corrente, si rinforza l'induzione, e, di conseguenza, anche la forza tendente a chiudere il circuito magnetico: di qui l'azione rigenerativa e lo scatto.

Il dispositivo presenta isteresi per la variazione del traferro dovuta allo scatto: la corrente corrispondente all'apertura è inferiore a quella necessaria per la chiusura del relè, essendo la riluttanza del circuito magnetico con ancora attratta notevolmente inferiore a quella con ancora non attratta.

8.7.9 È dato il sistema in retroazione di Fig. 8.82a, in cui la vibrazione imposta ha la forma d'onda rappresentata in Fig. 8.82b.

1. Tracciare la caratteristica equivalente $y_m(e)$ e si esprimano le coordinate dei vertici in funzione di A e Y .
2. Determinare la funzione descrittiva corrispondente a tale caratteristica, esprimendola in funzione di A e Y .
3. Posto $A=1$, $Y=3$, $G(0)=2.5$, $r=6$, determinare il punto di equilibrio in e , y_m .

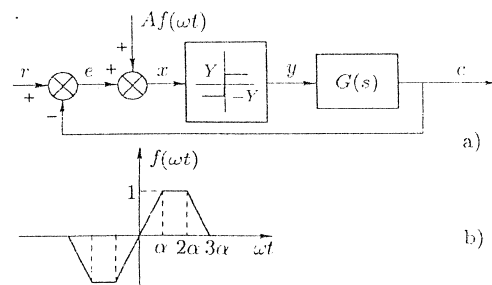


Figura 8.82 Sistema a relè e vibrazione imposta.

Soluzione

1. La caratteristica equivalente richiesta è rappresentata in Fig. 8.83.

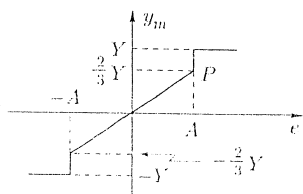


Figura 8.83 Caratteristica equivalente del relè linearizzato.

2. La funzione descrittiva richiesta si determina sommando le funzioni descrittive di una saturazione e di un relè con soglia: indicando con E l'ampiezza dell'oscillazione sinusoidale all'ingresso del blocco

non lineare equivalente, si ricava

$$F(E) = \begin{cases} \frac{2Y}{3A} & \text{per } E < A \\ \frac{2Y}{3A} \Phi\left(\frac{E}{A}\right) + \frac{4Y}{3\pi E} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{E}\right)^2} & \text{per } E \geq A \end{cases}$$

3. Il punto di equilibrio richiesto si determina per intersezione della caratteristica di Fig. 8.83, tracciata per i valori specificati di A e Y , con la retta di pendenza $-1/2.5 = -2/5$ intersecante l'asse delle ascisse nel punto $e = r = 6$. L'intersezione avviene nel punto P di Fig. 8.83, le cui coordinate sono $e = A = 1$, $y_m = 2Y/3 = 2$.

Complementi al Capitolo 8

C8.1. Deduzione di alcune funzioni descrittive

Per non appesantire eccessivamente l'esposizione, nel corso del Paragrafo 8.2 non si sono riportati i passaggi relativi alla deduzione delle funzioni descrittive che venivano via via elencate. La conoscenza di tali passaggi può essere peraltro utile per l'estensione a quei casi in cui occorra calcolare la funzione descrittiva di elementi non lineari per i quali essa non risulta tabulata. Si ritiene pertanto utile passare in rassegna i calcoli relativi alla determinazione delle funzioni descrittive fondamentali.

1 Saturazione

Si applicano alla funzione $y(t)$ di Fig. 8.7b le relazioni (8.5) e (8.6) scritte per $n = 1$. Si ricava immediatamente

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = 0$$

in quanto l'argomento dell'integrale è una funzione dispari.

Quindi si deduce:

$$\text{- per } X \leq X_1: \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = X;$$

$$\text{- per } X \geq X_1: \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d\omega t$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} X \sin^2 \varphi d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi/2} X_1 \sin \varphi d\varphi \right)$$

$$(\text{ed essendo } \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi} \left(X \int_0^\alpha \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + X_1 \int_\alpha^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \right) \\
&= \frac{4}{\pi} \left(X \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} - X_1 \cos \varphi \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right)
\end{aligned}$$

(ed essendo $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$)

$$= \frac{4}{\pi} \left(\frac{X\alpha}{2} - \frac{X}{2} \sin \alpha \cos \alpha + X_1 \cos \alpha \right)$$

(ed essendo $X_1 = X \sin \alpha$)

$$= \frac{2X}{\pi} \left(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha \right).$$

Si sono così ritrovate le (8.14), (8.15).

2 Relè ideale

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 8.18b, si può scrivere

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = 0,$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Y_1 \sin \varphi d\varphi \\
&= -\frac{2Y_1}{\pi} \cos \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{4Y_1}{\pi} :
\end{aligned}$$

si ritrovano così le (8.22), (8.23).

3 Relè con soglia

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 8.21b, risulta

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = 0 ;$$

- per $X \leq X_1$: $b_1 = 0$;

- per $X \geq X_1$: $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_\alpha^{\pi/2} Y_1 \sin \varphi d\varphi$

$$= -\frac{4Y_1}{\pi} \cos \varphi \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} = \frac{4Y_1}{\pi} \cos \alpha \quad (\text{ed essendo } X_1 = X \sin \alpha)$$

$$= \frac{4Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X} \right)^2}.$$

Tali relazioni corrispondono alle (8.25), (8.26).

4 Relè con isteresi

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 8.24b, si sviluppano i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t \, d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \cos \omega t \, d\omega t \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-Y_1 \int_{-\pi/2}^{\alpha} \cos \varphi \, d\varphi + Y_1 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \right) \\
 &= \frac{2Y_1}{\pi} \left(-\sin \varphi \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\alpha} + \sin \varphi \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right) \\
 &= \frac{2Y_1}{\pi} (-(\sin \alpha + 1) + (1 - \sin \alpha)) \\
 &= -\frac{4Y_1}{\pi} \sin \alpha \quad (\text{ed essendo } X_1 = X \sin \alpha) \\
 &= -\frac{4Y_1 X_1}{\pi X} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t \, d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \sin \omega t \, d\omega t \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-Y_1 \int_{-\pi/2}^{\alpha} \sin \varphi \, d\varphi + Y_1 \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi \right) \\
 &= \frac{2Y_1}{\pi} \left(-(-\cos \varphi) \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\alpha} + (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right) \\
 &= \frac{2Y_1}{\pi} (\cos \alpha + \cos \alpha) \\
 &= \frac{4Y_1}{\pi} \cos \alpha \quad (\text{ed essendo } X_1 = X \sin \alpha) \\
 &= \frac{4Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} .
 \end{aligned}$$

Le relazioni ottenute corrispondono alle (8.28), (8.29).

5 Gioco

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 8.27b, si sviluppano i seguenti passaggi:

- per $X \leq X_1$: $a_1 = 0$;

$$\begin{aligned}
 \text{- per } X \geq X_1 : a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t \, d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \cos \omega t \, d\omega t \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{-\alpha} (-X + X_1) \cos \varphi \, d\varphi + \int_{-\alpha}^{\pi/2} (X \sin \varphi - X_1) \cos \varphi \, d\varphi \right) \\
 &\quad (\text{ed essendo } \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((-X + X_1) \sin \varphi \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=-\alpha} - X \frac{\cos 2\varphi}{4} \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} - X_1 \sin \varphi \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((-X + X_1) (1 - \sin \alpha) + X \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\alpha}{4} \right) - X_1 (1 + \sin \alpha) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((X - 2X_1) \sin \alpha - \frac{X}{2} - \frac{X}{2} \sin^2 \alpha \right) \\
 &\quad (\text{ed essendo } X - 2X_1 = X \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2X}{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) = \frac{X}{\pi} \left(-1 + \frac{(X - 2X_1)^2}{X} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{4X_1(X_1 - X)}{X};$$

- per $X \leq X_1$: $b_1 = 0$;

$$\text{- per } X \geq X_1: b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d\omega t$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{-\alpha} (-X + X_1) \sin \varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^{\pi/2} (X \sin \varphi - X_1) \sin \varphi d\varphi \right)$$

$$(\text{ed essendo } \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2})$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-(-X + X_1) \cos \varphi \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=-\alpha} + X \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} + X_1 \cos \varphi \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-(-X + X_1) \cos \alpha + \frac{X}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - X_1 \cos \alpha \right)$$

$$(\text{ed essendo } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left((X - 2X_1) \cos \alpha + \frac{X}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \frac{X}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right)$$

$$(\text{ed essendo } X - 2X_1 = X \sin \alpha)$$

$$= \frac{X}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \right) = \frac{X}{2} \left(1 + \phi \left(\frac{X}{X - 2X_1} \right) \right).$$

Le espressioni ricavate corrispondono ai risultati espressi in forma compatta nelle (8.32), (8.33).

C8.2. Forma estesa del criterio del cerchio

L'enunciato del criterio del cerchio riportato al Paragrafo 8.4 rappresenta una forma semplificata di uso relativamente esteso, ma, come si è allora notato, corrispondente ad una condizione sufficiente molto più restrittiva rispetto al criterio di Popov: il suo interesse risiede principalmente nel fatto che si applica direttamente al diagramma polare di risposta armonica e non, come il criterio di Popov, ad un diagramma modificato.

In una versione più estesa, però di difficile applicazione pratica perché si riferisce non ad un unico cerchio, ma ad una famiglia di cerchi che deve essere determinata per tentativi, il criterio del cerchio comprende quello di Popov come caso particolare (corrispondente alla situazione $\alpha = 0$). Si ritiene di interesse riportare l'enunciato del criterio del cerchio nel caso generale e il passaggio da questo al criterio di Popov, per illustrare come l'impiego dei diagrammi di Popov in luogo di quelli di risposta armonica non sia in effetti che un valido artificio per rendere praticamente realizzabile l'applicazione del criterio del cerchio nella forma più estesa, eliminando la necessità di pesanti procedure per tentativi.

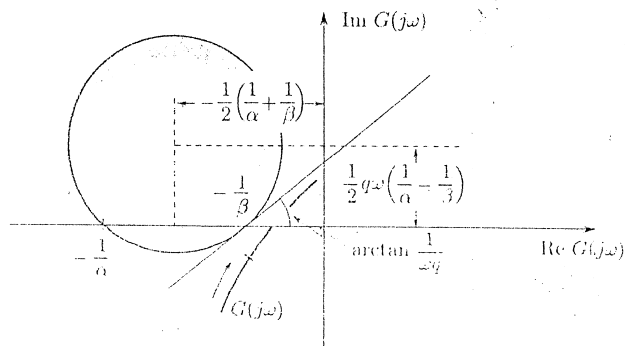
◆ **Criterio del cerchio in forma estesa.** Con riferimento al sistema in retroazione di Fig. 8.32, in cui si suppone che la funzione di trasferimento della parte lineare $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente per la stabilità asintotica è che esista un numero reale q tale che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ non circonda il punto critico e che per ogni $\omega > 0$ il punto $G(j\omega)$ sia esterno al cerchio avente il centro nel punto

$$C(q, \omega) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + jq\omega \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \quad (8.63)$$

e intersecante l'asse reale nei punti $-1/\alpha$ e $-1/\beta$.

Figura 8.84

Il criterio del cerchio in forma estesa.



Si noti che i cerchi della famiglia (8.63), pur intersecando tutti l'asse reale nei medesimi due punti, e quindi avendo tutti il centro sulla stessa retta verticale, presentano l'ordinata del centro funzione lineare della pulsazione ω , secondo un coefficiente di proporzionalità arbitrario, per la presenza del parametro arbitrario q .

Il criterio del cerchio nella forma semplificata enunciata al Paragrafo 8.4 corrisponde al caso particolare $q = 0$.

Si supponga ora che sia $\alpha = 0$: la famiglia di cerchi degenera in una stella di rette con centro nel punto $-1/\beta$, con coefficienti angolari $1/(q\omega)$.

Con riferimento alla Fig. 8.84, in cui è rappresentata la tipica posizione relativa del generico punto $G(j\omega)$ e della retta corrispondente alla pulsazione ω , vale la relazione

$$\frac{1}{\omega q} \left(\operatorname{Re} G(j\omega) + \frac{1}{\beta} \right) > \operatorname{Im} G(j\omega) \quad \text{per ogni } \omega > 0.$$

Moltiplicando ambo i membri per ω si ottiene

$$\frac{1}{q} \left(\operatorname{Re} G(j\omega) + \frac{1}{\beta} \right) > \omega \operatorname{Im} G(j\omega) \quad \text{per ogni } \omega > 0. \quad (8.64)$$

relazione che esprime il criterio di Popov: si noti che nel piano di Popov la retta al di sotto della quale deve svolgersi il diagramma di $G_p(j\omega)$, pur passando ancora per il punto $-1/\beta$, ha coefficiente angolare $1/q$ arbitrario, ma non più dipendente dalla pulsazione.

Capitolo 9

Sistemi di controllo digitali

Questo capitolo è dedicato allo studio dei sistemi di controllo digitali, cioè dei sistemi in retroazione comprendenti un elaboratore digitale entro l'anello. Molti dei concetti e delle procedure di uso corrente per lo studio di tali sistemi, detti anche a dati campionati o a tempo discreto, in quanto la trasmissione e l'elaborazione dei segnali vi avvengono per campioni espressi da dati numerici inviati in sequenza, sono modifiche od estensioni di quelli per l'analisi e la sintesi dei sistemi in retroazione a tempo continuo già studiati nei capitoli precedenti. Per lo studio dei sistemi a segnali campionati si impiega la trasformata $\mathcal{Z}$, che riveste un ruolo analogo a quello della trasformata di Laplace per i segnali a tempo continuo, in quanto consente la definizione e l'elaborazione delle funzioni di trasferimento discrete, l'introduzione della funzione di risposta armonica discreta e l'estensione al tempo discreto dei più importanti procedimenti di sintesi nel dominio delle frequenze, come quelli basati sul criterio di Nyquist (margini di stabilità e diagrammi di Bode). Anche il progetto analitico si estende facilmente ai sistemi a dati campionati e per tali sistemi risulta particolarmente conveniente, in quanto la realizzazione via software di funzioni di trasferimento di ordine elevato non comporta alcun onere di rilievo.

9.1. Generalità sul controllo digitale

I sistemi di controllo digitali o *controlli digitali* o *sistemi a segnali campionati* o *sistemi di controllo a tempo discreto* si differenziano da quelli a tempo continuo, detti anche *sistemi di controllo a tempo continuo* appunto per la natura dell'elaborazione di segnale che avviene entro il regolatore. In un sistema di controllo a tempo continuo il regolatore comprende in genere un *nodo comparatore*, in cui il segnale proveniente dal trasduttore di misura viene sottratto da quello di riferimento, ottenendo così un *segnale errore* e , un *amplificatore di segnale*, che include normalmente anche gli elementi dinamici per la correzione della risposta (reti correttrici), cui pure può pervenire il segnale di retroazione consistente nella misura della variabile controllata (unito eventualmente ad altri segnali di retroazione), un *amplificatore di potenza* e un *attuatore*, dispositivo in grado di provocare variazioni della variabile manipolabile; se ad esempio questa è la portata di un fluido, l'attuatore è costituito da un motore (elettrico o pneumatico) e

Controlli digitali
Sistemi a segnali campionati
Sistemi di controllo a tempo discreto

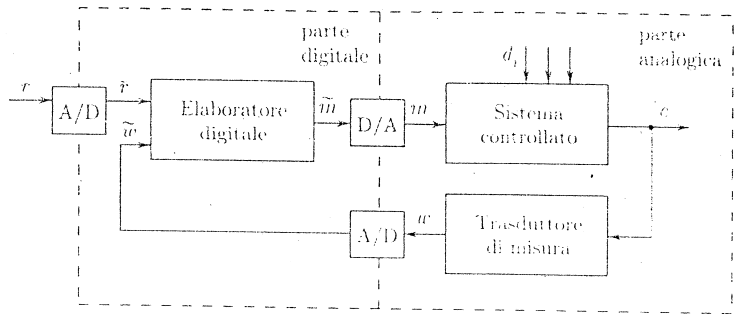
Segnale errore
Amplificatore di segnale

Amplificatore di potenza
Attuatore

da una valvola da esso azionata. Per una migliore schematizzazione del problema di regolazione, spesso l'amplificatore di potenza e l'attuatore, che di regola vengono scelti in una gamma relativamente ristretta di tipi unificati, possono essere considerati come facenti parte del sistema controllato: si assume così come nuova variabile manipolabile l'ingresso dell'amplificatore di potenza, riservando al regolatore la sola funzione di elaborazione di segnale.

Figura 9.1

Sistema di controllo digitale o a tempo discreto.

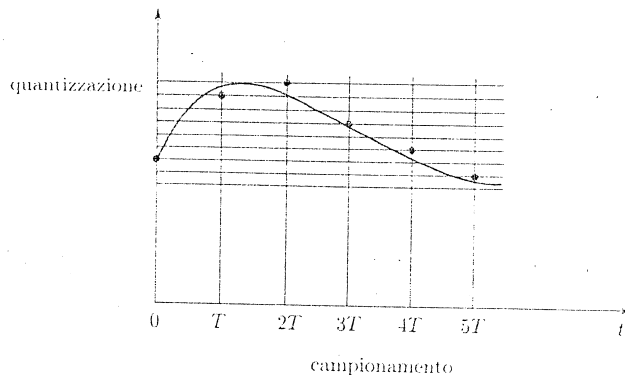


Un tipico sistema di controllo digitale o a tempo discreto può essere schematizzato come in Fig. 9.1. Esso comprende un elaboratore digitale entro l'anello di retroazione, che esplica le funzioni che nel sistema a tempo continuo sono svolte dal nodo comparatore, dall'amplificatore di segnale e dalle reti correttici. Lungo l'anello sono presenti segnali di natura diversa: segnali analogici r , w , m e c , espressi da funzioni del tempo a valori reali che, come nei controlli tradizionali, si assumono continue a tratti, e segnali digitali $\hat{r}$, $\tilde{w}$ e $\tilde{m}$, espressi da sequenze di valori numerici opportunamente codificati⁽¹⁾: il passaggio dall'uno all'altro dei due tipi di segnali viene realizzato mediante convertitori analogico-digitale o convertitori A/D e digitale-analogico o D/A.

Convertitore
analogico-digitale
Convertitore A/D
Convertitore
digitale-analogico
Convertitore D/A

Figura 9.2

Campionamento e quantizzazione di un segnale analogico.



Campionamento

Periodo di
campionamento

Quantizzazione

Un segnale analogico viene convertito in digitale attraverso l'operazione di *campionamento*, rappresentata schematicamente in Fig. 9.2: i vari campioni vengono trasmessi, opportunamente codificati, distanziati nel tempo in genere in modo uniforme: il tempo T fra un campione e il successivo si dice *periodo di campionamento*. Poiché il numero di cifre di ogni campione è limitato (ad esempio 8, 10 o 12 bit, corrispondenti rispettivamente a 256, 1024 e 4096 livelli di discretizzazione), al campionamento è sempre associata la *quantizzazione* del segnale analogico, cioè l'approssimazione del suo

⁽¹⁾ Si conviene di indicare con la notazione $\tilde{f}(k)$, abbreviabile in $\tilde{f}$, una generica successione corrispondente ad un segnale a tempo discreto, mantenendo la notazione $f(t)$, abbreviabile in f , per il corrispondente segnale a tempo continuo.

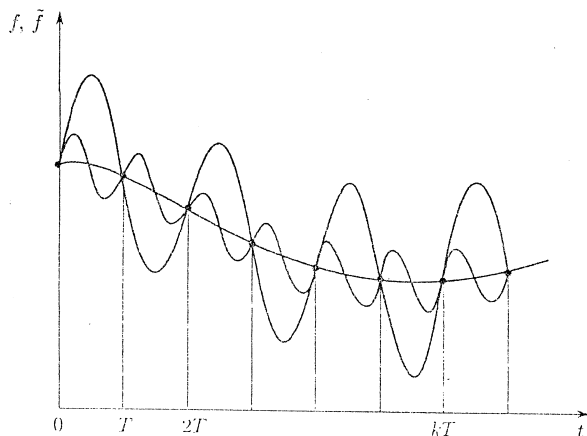


Figura 9.3
Funzioni continue corrispondenti alla stessa successione di campioni.

valore, appartenente all'insieme dei reali, con quello corrispondente ad un numero di cifre limitato, che appartiene invece ad un sottoinsieme finito dell'insieme degli interi. Nella trattazione che segue la quantizzazione non verrà considerata: ciò si giustifica dal punto di vista tecnico, poiché essa equivale all'introduzione di un disturbo aleatorio di effetto generalmente trascurabile.

Il problema della conversione inversa, cioè della *ricostruzione* di un segnale analogico dai suoi campioni, in genere non ammette una soluzione unica. Ad esempio, in Fig. 9.3 sono riportati alcuni segnali a tempo continuo corrispondenti alla medesima sequenza di campioni: oltre al segnale che opera l'interpolazione più "liscia" dei campioni, sono presenti componenti di pulsazioni Ω e 2Ω , che non possono essere ricostruite dal segnale campionato. La ricostruzione è univoca se e solo se sono soddisfatte le condizioni del seguente teorema.

Ricostruzione di un segnale a tempo continuo

TEOREMA 9.1.1. TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO O DI SHANNON
Una funzione $f(t)$ con spettro limitato da 0 ad ω_s , cioè con trasformata di Fourier $F(j\omega)$ nulla per $\omega \geq \omega_s$, si può ricostruire dalla sequenza di campioni $\tilde{f}(k) = f(kT)$ se e solo se la pulsazione di campionamento $\Omega = 2\pi/T$ è non inferiore a $2\omega_s$.

*Teorema del campionamento
Teorema di Shannon*

Se si campiona un segnale a tempo continuo la cui trasformata di Fourier abbia valori significativi a pulsazioni superiori alla metà della pulsazione di campionamento si presenta il fenomeno di *aliasing*, consistente nella generazione di immagini delle componenti ad alta frequenza, dette *alias*, che disturbano la ricostruzione del segnale e, nei sistemi in retroazione, possono dare luogo a derive del punto di equilibrio, influenzando anche sulla precisione statica (in particolare, un disturbo a pulsazione Ω si riflette in un alias a pulsazione zero). Per un'analisi in termini frequenziali del fenomeno dell'aliasing si rimanda al Paragrafo 9.4.

*Aliasing
Alias*

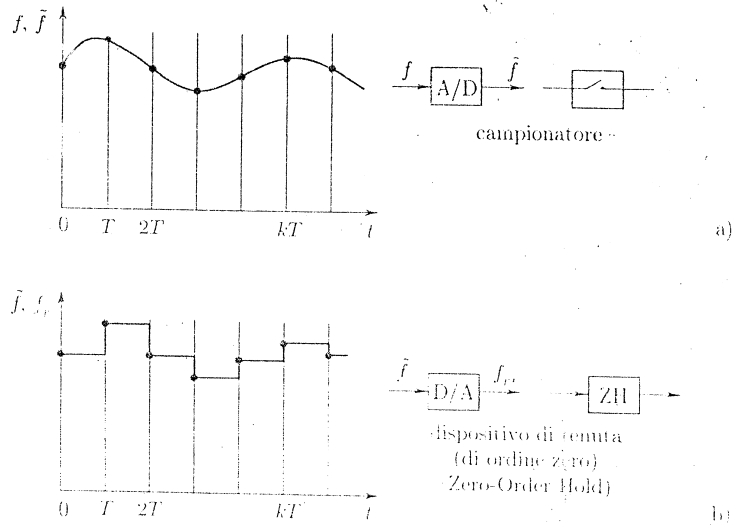
Per evitare derive (fluttuazioni del punto di equilibrio) nei sistemi in retroazione, dovute al ritorno di disturbi di misura ad alta frequenza conviene pertanto filtrare il segnale analogico da campionare qualora siano presenti disturbi ad alta frequenza, mediante un *filtro anti-aliasing*, del tipo passa basso, di Butterworth o di Bessel. Tale filtro costituisce parte integrante di ogni regolatore digitale.

Filtro anti-aliasing

Il grafico di Fig. 9.4a si riferisce all'operazione di campionamento (senza quantizzazione) con la quale da una funzione del tempo a valori reali $f(t)$ si ottiene una successione a valori reali $\tilde{f}(k) = f(kT)$; a fianco del grafico sono

Figura 9.4

Campionatore e dispositivo di tenuta di ordine zero.



Dispositivo di tenuta
di ordine zero

riportati i simboli con i quali si indicano negli schemi i campionatori, mentre il grafico e i simboli di Fig. 9.4b si riferiscono all'operazione di ricostruzione di un segnale analogico $f_r(t)$ dalla sequenza $\tilde{f}(k)$ nel caso particolare in cui si impieghi un *dispositivo di tenuta di ordine zero* ("zero-order hold"), che mantiene costante ed uguale al valore corrispondente all'ultimo campione pervenuto il segnale di uscita fra due campioni successivi. Per la sua semplicità costruttiva il dispositivo di tenuta di ordine zero è quello di impiego più frequente; peraltro si possono usare anche altre tecniche di ricostruzione, corrispondenti ad interpolazioni più raffinate e complesse, come quella operata dal dispositivo di tenuta di ordine uno, descritto al Paragrafo 2.4, o di ordine maggiore.

Vantaggi ed inconvenienti dei controlli digitali

I principali vantaggi dei sistemi di controllo digitali rispetto a quelli analogici sono:

1. Maggiore precisione dell'elaborazione: infatti l'elaborazione numerica dei segnali consente l'utilizzazione di algoritmi più sofisticati, praticamente senza alcun limite per la complessità dei programmi, che possono comprendere anche verifiche, messaggi all'operatore, registrazione continua dei dati; non vi sono inoltre limiti per il numero di cifre significative dei dati se non quello della velocità di elaborazione.
2. Maggiore flessibilità: mentre nel caso dei sistemi analogici è necessario modificare fisicamente il regolatore a seconda del particolare sistema controllato (pur ottenendo una buona adattabilità con i regolatori standard PID; nel caso digitale è sufficiente modificare il programma (cioè intervenire sul software), mantenendo lo stesso elaboratore.
3. Maggiore affidabilità e ripetibilità: l'elaborazione numerica è sempre identica, mentre quella analogica può variare per modifiche delle caratteristiche elettriche dei componenti, dovute a fattori ambientali o a deterioramento.
4. Maggiore sensibilità e trasmissibilità dei segnali: la sensibilità è concentrata nel codificatore; l'elaborazione digitale non presenta soglie o saturazioni; la trasmissione a distanza è priva di errori essendo i segnali codificati; vengono eliminati i disturbi, in particolare quelli a frequenza di rete provenienti da apparati di potenza.

Per contro i sistemi digitali presentano i seguenti inconvenienti:

1. Progettazione più difficile e articolata: infatti vi si richiede una doppia competenza, cioè sui sistemi dinamici ad evoluzione continua e sugli elaboratori digitali.
2. Stabilizzabilità più precaria: la discontinuità nella trasmissione dell'informazione legata al campionamento implica ritardi negli interventi di regolazione e, quindi, maggiore difficoltà nella stabilizzazione degli anelli di regolazione, per cui si può affermare che il problema più importante nel progetto di un apparato di controllo digitale è la scelta del periodo di campionamento, che implica un compromesso fra la bontà della regolazione e l'impegno dell'elaboratore.
3. Possibilità di arresti non previsti dovuti a disturbi: se la programmazione non è così accurata da prevedere il superamento di tutte le situazioni anomale provocate da eventuali disturbi, il calcolatore si può bloccare, interrompendo improvvisamente la regolazione, per cui è necessario che tutti i transitori del sistema digitale, anche quelli corrispondenti a stati iniziali non di routine, vengano analizzati e controllati con cura.
4. Necessità di utilizzare energia elettrica: i sistemi digitali sono sempre elettronici, mentre quelli analogici standard (tipo PID) possono essere di tipo pneumatico e spesso preferibili in ambienti ad alto rischio di esplosione ed incendio.

9.2. La trasformata Z

Si consideri una successione $\tilde{f}(k)$ a valori reali o complessi limitati e nulla per $k < 0$; la *trasformata Z* di $\tilde{f}(k)$ e la corrispondente *antitrasformata Z* si definiscono con le relazioni

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(k) z^{-k}, \quad (9.1)$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz. \quad (9.2)$$

$F(z)$ è una funzione di variabile complessa definita in un dominio (detto *dominio di convergenza*), costituito dalla porzione di piano complesso esterna ad una circonferenza il cui raggio ρ_c , detto *raggio di convergenza*, dipende dalla successione $\tilde{f}(k)$. L'integrale curvilineo (9.2) si intende riferito ad una qualsiasi curva chiusa Γ appartenente al dominio di convergenza di $F(z)$, percorsa in senso antiorario.

Per indicare le operazioni di trasformazione ed antitrasformazione si usano le notazioni, analoghe a quelle impiegate per la trasformata di Laplace,

$$F(z) = \mathcal{Z}[\tilde{f}(k)] \quad \text{e} \quad \tilde{f}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)];$$

assumono significato anche le notazioni

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t), T] \quad \text{e} \quad F(s) = \mathcal{Z}[F(s), T],$$

ad indicare la trasformata $\mathcal{Z}$ della successione ottenuta per campionamento uniforme con periodo T della funzione $f(t)$ o dell'antitrasformata di Laplace di $F(s)$; sotto l'ipotesi che siano soddisfatte le condizioni del teorema del campionamento, che ne implicano l'unicità, per l'antitrasformata si può scrivere analogamente $f(t) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z), T]$ e $F(s) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z), T]$.

Trasformata Z
Antitrasformata Z

Dominio di convergenza
Raggio di convergenza

Le corrispondenze sono evidenziate nel seguente schema:

$$F(s) \xrightleftharpoons[\mathcal{L}]{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \xrightleftharpoons[(t=kT)]{k=t/T} \tilde{f}(k) \xrightleftharpoons[\mathcal{Z}^{-1}]{\mathcal{Z}} F(z),$$

in cui il passaggio dalla $\tilde{f}(k)$ alla $f(t)$, con la posizione indicata fra parentesi, è lecito se e solo se vale il teorema del campionamento.

Una proprietà fondamentale della trasformata $\mathcal{Z}$ è la *linearità*: dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $\tilde{f}_1(k)$ e $\tilde{f}_2(k)$ due successioni le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(z)$ e $F_2(z)$, vale la relazione

$$\mathcal{Z}[c_1 \tilde{f}_1(k) + c_2 \tilde{f}_2(k)] = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z). \quad (9.3)$$

Un'altra importante proprietà della trasformata $\mathcal{Z}$ è che a valori coniugati di z corrispondono valori coniugati di $F(z)$, cioè

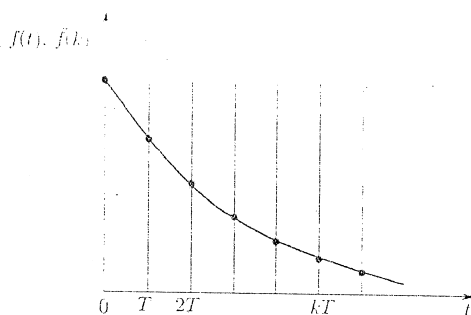
$$F(z^*) = F^*(z). \quad (9.4)$$

Le trasformate $\mathcal{Z}$ assumono espressioni particolarmente semplici quando le corrispondenti successioni hanno origine dal campionamento di funzioni nel tempo con trasformate di Laplace elementari, come i segnali tipici (gradino, rampa, esponenziale, seno e coseno). Si mostrerà che la trasformata $\mathcal{Z}$ della successione dei campioni di una funzione del tempo la cui trasformata di Laplace sia razionale fratta è pure razionale fratta.

Si presentano ora alcuni significativi esempi, che aprono la via alla deduzione sistematica della trasformata $\mathcal{Z}$ corrispondente a qualunque funzione la cui trasformata di Laplace sia razionale fratta.

Figura 9.5

Esponenziale campionata.



Trasformata $\mathcal{Z}$
dell'esponenziale

1. Esponenziale

Ci si riferisce alla Fig. 9.5, in cui sono riportate la funzione esponenziale e la successione che da essa si ottiene per campionamento:

$$f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad \tilde{f}(k) = e^{-akT}, \quad k \geq 0; \quad (9.5)$$

per definizione risulta

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots \quad (9.6)$$

Si noti che i campioni successivi sono in progressione geometrica, ottenendosi ciascuno moltiplicando il precedente per e^{-aT} . La trasformata (9.6) rappresenta una serie geometrica nel campo complesso. Si ricorda che la serie geometrica $1 + q + q^2 + \dots$ converge a $1/(1-q)$ per $|q| < 1$: nel caso in esame si ottiene pertanto

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad (9.7)$$

con dominio di convergenza $|e^{-aT}||z^{-1}| < 1$, cioè $|z| > e^{-\sigma_c T}$, con $\sigma_c = \text{Re } a$.

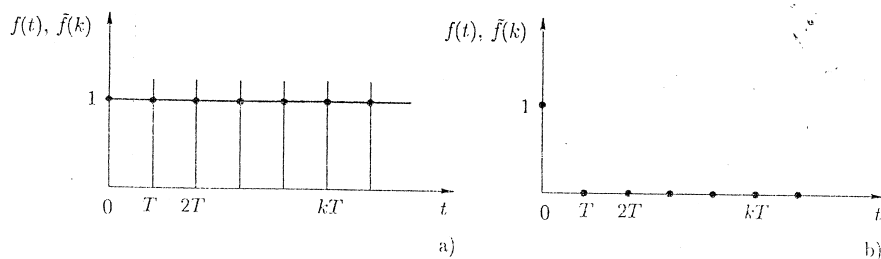


Figura 9.6
Gradino unitario e impulso unitario.

2. Gradino unitario e impulso unitario

Il gradino unitario e la corrispondente successione, rappresentati in Fig. 9.6a, sono espressi dalle relazioni

$$f(t) = 1, \quad t \geq 0; \quad \tilde{f}(k) = 1, \quad k \geq 0, \quad (9.8)$$

la trasformata $\mathcal{Z}$ si ricava come caso particolare dell'esponenziale, ponendo $a = 0$; si deduce

$$F(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1. \quad (9.9)$$

Nel caso dell'impulso unitario di Fig. 9.6b che, per analogia con l'impulso di Dirac, si suole indicare con il simbolo $\delta(k)$, risulta

$$\tilde{f}(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0, \\ 0 & \text{per } k > 0, \end{cases} \quad (9.10)$$

e, direttamente dalla espressione di definizione della trasformata $\mathcal{Z}$, si ricava

$$F(z) = 1, \quad (9.11)$$

come per la trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac.

3. Funzioni trigonometriche

Si considerano ora la funzione e la corrispondente successione

$$f(t) = e^{-at} \cos \omega t, \quad t \geq 0, \quad \tilde{f}(k) = e^{-akT} \cos k\omega T, \quad k \geq 0, \quad (9.12)$$

in cui a si suppone reale. Si può scrivere

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2} (p_1^k + p_2^k),$$

con

$$p_1 = e^{-aT} (\cos \omega T + j \sin \omega T) = u + jv, \\ p_2 = e^{-aT} (\cos \omega T - j \sin \omega T) = u - jv,$$

in cui per semplificare i passaggi si è posto:

$$u = e^{-aT} \cos \omega T, \quad v = e^{-aT} \sin \omega T.$$

Applicando la trasformata dell'esponenziale, si ricava

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - u - jv} + \frac{z}{z - u + jv} \right) = \frac{z(z - u)}{z^2 - 2zu + u^2 + v^2},$$

cioè

$$F(z) = \mathcal{Z}[\tilde{f}(k)] = \frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}, \quad |z| > e^{-aT}. \quad (9.13)$$

Trasformata $\mathcal{Z}$ del gradino unitario

Trasformata $\mathcal{Z}$ dell'impulso unitario

Trasformata $\mathcal{Z}$ del coseno

Trasformata $\mathcal{Z}$ del seno Analogamente, nel caso di

$$f(t) = e^{-at} \sin \omega t, \quad t \geq 0, \quad \tilde{f}(k) = e^{-akT} \sin k\omega T, \quad k \geq 0, \quad (9.14)$$

si può scrivere

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2} (-j p_1^k + j p_2^k),$$

e quindi, trasformando,

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{-jz}{z - u - jv} + \frac{jz}{z - u + jv} \right) = \frac{zv}{z^2 - 2zu + u^2 + v^2},$$

cioè

$$F(z) = \mathcal{Z}[\tilde{f}(k)] = \frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}, \quad |z| > e^{-aT}. \quad (9.15)$$

Più in generale, data la funzione

$$f(t) = e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) = e^{-at} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi), \quad (9.16)$$

la corrispondente $\tilde{f}(k)$ risultante dal campionamento con periodo T ha la trasformata

$$F(z) = \frac{ze^{-aT} \sin \omega T \cos \varphi + z(z - e^{-aT} \cos \omega T) \sin \varphi}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}, \quad |z| > e^{-aT}. \quad (9.17)$$

Si passano ora in rassegna i principali teoremi riguardanti le trasformate $\mathcal{Z}$, analoghi a quelli relativi alla trasformata di Laplace. Per comodità di riferimento, di essi si darà, oltre alla formulazione che si riferisce alla successione $\tilde{f}(k)$, anche quella relativa alla funzione del tempo $f(t)$ campionata con periodo T .

Teorema della traslazione nel tempo

TEOREMA DELLA TRASLAZIONE NEL TEMPO. Sia $F(z)$ la trasformata $\mathcal{Z}$ della successione $\tilde{f}(k)$. Per ogni intero $n \geq 0$ vale la relazione

$$\mathcal{Z}[\tilde{f}(k - n)] = z^{-n} F(z) \quad \left(\mathcal{Z}[f(t - nT), T] = z^{-n} F(z) \right). \quad (9.18)$$

Nel caso particolare di $n = 1$ si ottiene la funzione di trasferimento del ritardo unitario z^{-1} : si noti che, contrariamente ai sistemi a tempo continuo, nel caso dei sistemi a tempo discreto la funzione di trasferimento del ritardo è razionale.

Teorema della traslazione in z

TEOREMA DELLA TRASLAZIONE IN z . Per ogni costante complessa a vale la relazione

$$\mathcal{Z}[e^{\pm ak} \tilde{f}(k)] = F(e^{\mp a} z) \quad \left(\mathcal{Z}[e^{\pm at} f(t), T] = F(e^{\mp a} z) \right). \quad (9.19)$$

Teorema del valore finale

TEOREMA DEL VALORE FINALE. Vale la relazione

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) \quad \left(\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) \right). \quad (9.20)$$

Teorema del valore iniziale

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE. Vale la relazione

$$\tilde{f}(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad \left(\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \right). \quad (9.21)$$

TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE. Vale la relazione

Teorema della
convoluzione

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k \tilde{f}(h) \tilde{g}(k-h) \right] = F(z) G(z)$$

$$\left(\mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k f(hT) g(kT-hT) \right] = F(z) G(z) \right). \quad (9.22)$$

Le dimostrazioni dei precedenti teoremi sono riportate al Paragrafo C9.1.

9.3. Antitrasformazione delle funzioni razionali

Come si è precedentemente accennato, la successione ottenuta campionando uniformemente una funzione del tempo la cui trasformata di Laplace sia razionale fratta ammette una trasformata $\mathcal{Z}$ pure razionale fratta: dato che i segnali di saggio che si considerano nell'ambito dei controlli sono di questo tipo, è utile disporre di procedimenti sistematici per passare dalla $(F(s), T)$ alla $F(z)$, dalla $F(z)$ alla $\tilde{f}(k)$ e dalla $(F(z), T)$ alla $f(t)$ o alla $F(s)$. Si prenderà dapprima in esame il caso dei poli semplici, per passare successivamente al caso generale.

Poli semplici

Nel caso delle trasformate di Laplace vale la nota relazione

$$e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad (9.23)$$

mentre per le trasformate $\mathcal{Z}$ si ha

$$p^k \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-p}. \quad (9.24)$$

Le varie situazioni computazionali si gestiscono come segue:

i) passaggio da $(F(s), T)$ alla $F(z)$: si sviluppa la $F(s)$ in somma di fratti semplici del tipo a secondo membro della (9.23); le corrispondenti funzioni del tempo campionate sono come quella a primo membro della (9.24), con $p = e^{-aT}$ e di ciascuna di esse si ha immediatamente la trasformata $\mathcal{Z}$:

ii) passaggio dalla $F(z)$ alla $\tilde{f}(k)$: si noti che il fratto elementare a secondo membro della (9.24) differisce da quello a secondo membro della (9.23) per la presenza del fattore z a numeratore: questo rende necessario per l'antitrasformazione $\mathcal{Z}$ un procedimento lievemente diverso da quello per l'antitrasformazione di Laplace: si sviluppa in somma di fratti semplici la funzione razionale $F(z)/z$, e si moltiplica poi per z ogni termine dello sviluppo;

iii) passaggio da $(F(z), T)$ alla $f(t)$ o alla $F(s)$: si esegue il passaggio alla $\tilde{f}(k)$ come esposto al precedente punto ii); ogni termine della combinazione lineare corrispondente allo sviluppo in somma di fratti semplici è espresso nella forma p^k , $k \geq 0$; quindi dalla relazione $p = e^{-aT}$ si ricava $a = -(\ln p)/T$ e si deduce la $f(t)$ come combinazione lineare, con gli stessi coefficienti dello sviluppo di cui sopra, delle esponenziali e^{-at} , $t \geq 0$, o la $F(s)$ come combinazione lineare, ancora con gli stessi coefficienti, dei fratti elementari $1/(s+a)$.

Quando si passa dalle trasformate, di Laplace o $\mathcal{Z}$, alle corrispondenti funzioni del tempo o successioni del tempo, normalmente si esprimono le

esponenziali e^{-at} o le potenze p^k corrispondenti a coppie di poli complessi coniugati come funzioni trigonometriche.

Si ricorda che nel caso dell'antitrasformata di Laplace, la somma

$$\frac{K}{s-p} + \frac{K^*}{s-p^*},$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato, si può scrivere

$$\frac{u+jv}{s-\sigma-j\omega} = \frac{u-jv}{s-\sigma+j\omega} = \frac{M}{2} \left(\frac{e^{j\varphi}}{s-\sigma-j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s-\sigma+j\omega} \right),$$

in cui u e v sono la parte reale e immaginaria di K , σ e ω quelle di p , M e φ il modulo e l'argomento di K ; antitrasformando si ottiene

$$\frac{M}{2} (e^{\sigma t+j(\omega t+\varphi)} + e^{\sigma t-j(\omega t+\varphi)}) = M e^{\sigma t} \cos(\omega t+\varphi) = M e^{\sigma t} \sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Nel caso dell'antitrasformata $\mathcal{Z}$ si procede in modo analogo: la somma

$$\frac{Kz}{z-p} + \frac{K^*z}{z-p^*}$$

si può scrivere

$$\frac{M}{2} \left(\frac{e^{j\varphi}z}{z-Ne^{j\vartheta}} + \frac{e^{-j\varphi}z}{z-Ne^{-j\vartheta}} \right).$$

in cui M e φ sono ancora il modulo e l'argomento di K , N e ϑ quelli di p ; antitrasformando si ottiene

$$\frac{M}{2} N^k (e^{j(k\vartheta+\varphi)} + e^{-j(k\vartheta+\varphi)}) = M N^k \cos(k\vartheta+\varphi) = M N^k \sin\left(k\vartheta+\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

◆ Poli multipli

In luogo delle (9.23, 9.24) si hanno le relazioni⁽²⁾

$$\frac{1}{n!} t^n e^{-at} \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+a)^{n+1}}, \quad (9.25)$$

$$\binom{k}{n} \frac{p^k}{p^n} \xleftrightarrow[\mathcal{Z}^{-1}]{\mathcal{Z}} \frac{z}{(z-p)^{n+1}}, \quad (9.26)$$

⁽²⁾ Per dedurre le (9.25, 9.26) dalle (9.23, 9.24) si può utilizzare la proprietà di commutatività delle operazioni di trasformazione e di derivazione rispetto ad un parametro, espresse nei due casi dalle relazioni

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial}{\partial a} f(t, a) \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(s, a), \quad \mathcal{Z} \left[\frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(k, p) \right] = \frac{\partial}{\partial p} F(z, p).$$

Derivando successivamente rispetto ad a ambo i membri della (9.23) si ottengono le funzioni del tempo continuo t e le corrispondenti trasformate di Laplace

$$-t e^{-at}, \quad t^2 e^{-at}, \quad \dots, \quad (-1)^n t^n e^{-at},$$

$$\frac{-1}{(s+a)^2}, \quad \frac{2}{(s+a)^3}, \quad \dots, \quad \frac{(-1)^n n!}{(s+a)^{n+1}}.$$

Si prova così la (9.25). La (9.26) si prova in maniera analoga: derivando rispetto a p ambo

in cui è presente il coefficiente binomiale

$$\binom{k}{n} = \begin{cases} \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{n!} & \text{per } n > 0, \\ 1 & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Si noti che il primo membro della (9.26) si riduce a p^k per $n = 0$, mentre per $n > 0$ è una funzione del tipo

$$\frac{1}{p^n} (\alpha_{n+1,n} k^n + \alpha_{n+1,n-1} k^{n-1} + \dots + \alpha_{n+1,1} k) p^k.$$

consistente nel prodotto di un polinomio in k di grado n per p^k , quindi una combinazione lineare di successioni del tipo $k^i p^k$, analoghe ai modi dei sistemi a tempo continuo $t^i e^{-at}$. Peraltro, mentre il primo membro della (9.25) consiste in una sola di queste ultime funzioni, quello della (9.26) consiste in una combinazione lineare di $n+1$ delle corrispondenti successioni (per $1 \leq i \leq n$). Le radici del suddetto polinomio sono $0, 1, \dots, n-1$, il che comporta l'annullarsi di tale combinazione lineare per $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Questo risultato si riflette nel seguente schema di calcolo delle trasformate e antitrasformate corrispondenti a poli multipli:

$$\begin{bmatrix} \frac{z}{z-p} \\ p \frac{z}{(z-p)^2} \\ p^2 \frac{z}{(z-p)^3} \\ \vdots \\ p^n \frac{z}{(z-p)^{n+1}} \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\mathcal{Z}^{-1}]{\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+1,2} & \dots & \alpha_{n+1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^k \\ k p^k \\ k^2 p^k \\ \vdots \\ k^n p^k \end{bmatrix}. \quad (9.27)$$

Gli elementi della i -esima riga ($i \geq 2$) della matrice a secondo membro sono uguali ai prodotti di $1/(i-1)!$ per i coefficienti, ordinati a partire dal termine noto, del polinomio avente come radici gli interi $0, 1, \dots, i-1$, facilmente determinabili sviluppando la forma fattorizzata $x(x-1) \dots (x-i+1)$; la matrice è triangolare inferiore con gli elementi sulla diagonale principale tutti non nulli, quindi non singolare e facilmente invertibile per sostituzioni successive. Essa e la sua inversa per $n = 7$ sono riportate nell'Appendice B.

Se si vuole antitrasformare una funzione $F(z)$ avente poli multipli, si considera lo sviluppo in somma di fratti semplici di $F(z)/z$, si moltiplica ogni termine per z e si ricavano così, per ogni polo, elementi del tipo $z/(z-p)^i$, uguali a quelli a primo membro a meno della costante p^{i-1} , le cui antitrasformate vengono espresse, come indicato dalla (9.27), come combinazioni lineari di successioni del tipo $k^\ell p^k$. Viceversa, data una successione del tipo $k^\ell p^k$, quale si deduce ad esempio campionando il modo continuo $t^\ell e^{-at}$, la

i membri della (9.24) si ottengono infatti le successioni del tempo discreto k e le corrispondenti trasformate $\mathcal{Z}$

$$k p^{k-1}, \quad k(k-1) p^{k-2}, \quad \dots, \quad k(k-1) \dots (k-n+1) p^{k-n}, \\ \frac{z}{(z-p)^2}, \quad \frac{2z}{(z-p)^3}, \quad \dots, \quad \frac{n! z}{(z-p)^{n+1}}.$$

(9.27) consente di dedurre la trasformata Z come combinazione lineare di termini del tipo $z/(z-p)^i$.

La (9.27) non si può utilizzare per antitrasformare una funzione $F(z)$ avente poli nulli; in tal caso si usa la relazione

$$z^{-i} \xrightleftharpoons[Z^{-1}]{Z} \delta(k-i) \quad (9.28)$$

che deriva dal teorema della traslazione nel tempo.

ESEMPIO 9.3.1 Per determinare la trasformata Z corrispondente alla funzione $f(t)$ avente la trasformata di Laplace

$$F(s) = \frac{10}{s^3(s+2)^2}$$

campionata con periodo generico T , anzitutto si ricava lo sviluppo in somma di fratti semplici

$$F(s) = \frac{1.875}{s} - \frac{2.5}{s^2} + \frac{2.5}{s^3} - \frac{1.875}{s+2} - \frac{1.25}{(s+2)^2}$$

e, antitrasformando secondo Laplace, la funzione

$$f(t) = 1.875 - 2.5t + 1.25t^2 + \\ + (1.875 - 1.25t)e^{-2t}$$

la cui campionata è

$$\tilde{f}(k) = (1.875 - 2.5Tk + 1.25T^2k^2)1^k + \\ + (1.875 - 1.25Tk)(e^{-2T})^k$$

Utilizzando l'inversa della (9.27), riportata nell'Appendice B, si ricava

$$F(z) = \frac{1.875z}{z-1} + \frac{(-2.5T + 1.25T^2)z}{(z-1)^2} + \frac{2.5T^2z}{(z-1)^3} + \\ + \frac{1.875z}{z-e^{-2T}} - \frac{1.25Te^{-2T}z}{(z-e^{-2T})^2}$$

da tale relazione, una volta assegnato il periodo di campionamento T , si può ottenere la trasformata Z sotto forma di rapporto di polinomi.

ESEMPIO 9.3.2 Data la trasformata Z

$$F(z) = \frac{0.625z(z^2 + 0.8z - 0.6)}{(z-1)^4}$$

per ricavare la corrispondente successione, si determina anzitutto lo sviluppo in somma di fratti semplici di $F(z)/z$, i cui termini si moltiplicano poi tutti per z : si ottiene

$$F(z) = \frac{0.625z}{(z-1)^2} + \frac{1.75z}{(z-1)^3} + \frac{0.75z}{(z-1)^4}$$

e, antitrasformando i vari termini separatamente an-

cora con l'ausilio dell'Appendice B,

$$\tilde{f}(k) = 0.625k + 1.75\left(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k^2\right) + \\ + 0.75\left(\frac{1}{3}k - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k^3\right)$$

da cui, raccogliendo,

$$\tilde{f}(k) = 0.5k^2 + 0.125k^3$$

Per passare alla corrispondente funzione del tempo, occorre conoscere il periodo di campionamento. Posto che esso sia $T = 0.5$, si ottiene $f(t) = \tilde{f}(t/T) = 2t^2 + t^3$.

Il metodo della divisione estesa

I procedimenti precedentemente illustrati forniscono l'antitrasformata di una funzione $F(z)$ razionale fratta in termini finiti. Se si vuole ottenere direttamente la successione di infiniti termini $\tilde{f}(k)$, $k = 0, 1, \dots$, si può impiegare il metodo della *divisione estesa* (detta "long division" nella letteratura in lingua inglese), che consiste nel dividere il polinomio a numeratore, prolungato con le potenze negative di z moltiplicate per coefficienti nulli, per quello a denominatore con il normale metodo per la divisione di due polinomi: come quoziente si ottiene una serie nelle potenze negative di z , i cui coefficienti sono, per definizione, i valori della successione $\tilde{f}(k)$.

ESEMPIO 9.3.3 Data la trasformata

$$F(z) = \frac{z - 2}{z^3 - 1,6z^2 + 0,7z + 0,04},$$

eseguendo la divisione di

$$z - 2 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + \dots,$$

per il polinomio a denominatore, si ottiene l'espres-

sione

$$F(z) = z^{-2} - 0,4z^{-3} - 1,34z^{-4} - 1,954z^{-5} + \\ - 2,1524z^{-6} - \dots$$

cui, per la stessa relazione di definizione di trasformata Z , corrisponde la successione

$$0; 0; 1; -0,4; -1,34; -1,954; -2,1524; \dots$$

9.4. Corrispondenza fra il piano s e il piano z - aliasing

Il campionamento di una funzione $f(t)$ si può interpretare come il prodotto della funzione stessa per un segnale periodico formato da impulsi di Dirac distanziati di T l'uno dall'altro:

Campionamento con impulsi di Dirac

$$f_c(t) = f(t) \varphi(t), \quad (9.29)$$

con

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (9.30)$$

Si ottiene così la successione di impulsi rappresentata in Fig. 9.7, la cui trasformata di Laplace è

$$F_c(s) = f(0) + f(T)e^{-Ts} + f(2T)e^{-2Ts} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}. \quad (9.31)$$

La trasformata Z della successione $f(kT)$, $k = 0, 1, \dots$, data dalla relazione

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k},$$

si ottiene da $F_c(s)$ ponendo $z = e^{Ts}$. Attraverso l'espedito di esprimere una funzione del tempo campionata come una successione di impulsi di Dirac si può dare un'interpretazione semplice ed intuitiva del teorema del campionamento.

Si consideri lo sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica $\psi(t)$ di Fig. 9.8a, consistente in una serie di impulsi finiti di altezza Y e durata $2t_1$. Esso è dato da

$$\psi(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n e^{jn\Omega t}, \quad \text{con } \Psi_n = 2Yt_1 \frac{\sin n\Omega t_1}{n\Omega t_1}, \quad (9.32)$$

in cui si è posto $\Omega = 2\pi/T$. In Fig. 9.8b è rappresentato il corrispondente spettro a righe. La trasformata di Fourier della successione di impulsi di Dirac di area unitaria di Fig. 9.9a si ottiene assumendo $2Yt_1 = 1$ e passando al limite per t_1 tendente a zero. Si ottiene semplicemente

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}, \quad (9.33)$$

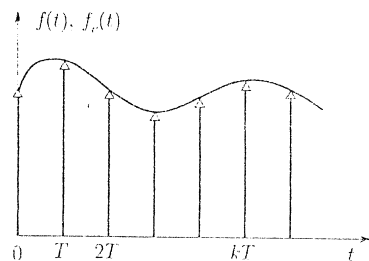
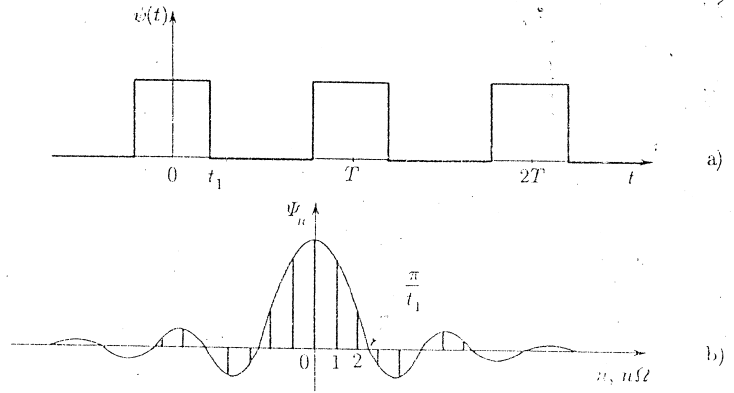


Figura 9.7
Campionamento con impulsi di Dirac.

Figura 9.8

Serie di impulsi finiti e relativo spettro di Fourier.



essendo in questo caso $\Phi_n = 1$ per ogni n . Il corrispondente spettro, uniforme, è rappresentato in Fig. 9.9b).

La trasformata di Laplace del segnale $f_c(t)$ si può ottenere anche, in una forma diversa dalla (9.31), applicando il teorema della traslazione in s , dato dalla relazione

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = F(s+a) :$$

si deduce

$$F_c(s) = \mathcal{L}[f_c(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\Omega) . \quad (9.31)$$

Lo spettro di Fourier si ottiene ponendo $s = j\omega$. Esso risulta del tipo rampa, presentato in Fig. 9.10, e consiste nella ripetizione periodica, con periodo Ω , dello spettro $F(j\omega)$ del segnale non campionato $f(t)$. Il campionamento introduce, pertanto, numerose armoniche, che rendono impossibile la ricostruzione qualora lo spettro del segnale originario presenti componenti alle stesse frequenze. Nel caso di Fig. 9.10a ciò non avviene, in quanto la banda del segnale originario è nulla per pulsazioni maggiori di ω_s (con $\omega_s < \Omega/2$), e le condizioni poste dal teorema del campionamento sono soddisfatte. Nel caso di Fig. 9.10b, invece, si hanno sovrapposizioni fra i vari spettri che ripetono quello principale e quindi il fenomeno dell'aliasing, che rende impossibile la ricostruzione.

Aliasing

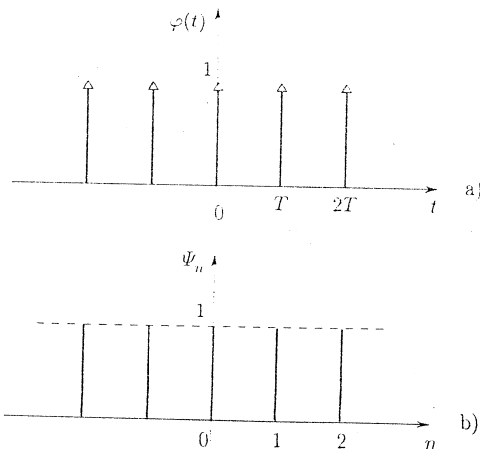


Figura 9.9 Serie di impulsi di Dirac e relativo spettro di Fourier.

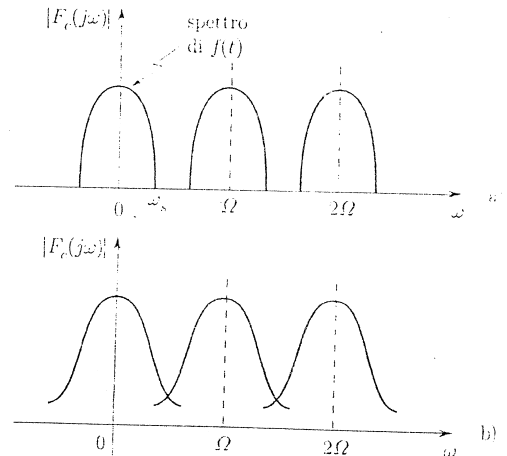


Figura 9.10 Due diversi spettri di segnali campionati.

ESEMPIO 9.4.1 In Fig. 9.11a è riportato un segnale sinusoidale campionato e di frequenza pari alla metà di quella di campionamento: si vede che l'ampiezza del segnale non può essere ricostruita con precisione: infatti un segnale a tempo continuo ricostruito interpolando i campioni avrebbe ampiezza dipendente dalla fase con cui avviene il campionamento.

Nel caso di Fig. 9.11b, in cui la frequenza di campionamento è identica a quella del segnale, non si può distinguere il segnale sinusoidale da un segnale costante e il segnale "più liscio" ricostruito (una costante) sarebbe ancora di ampiezza dipendente dalla fase con cui avviene il campionamento.

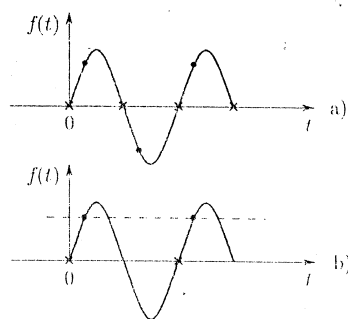


Figura 9.11 Segnali campionati non ricostruibili.

ESEMPIO 9.4.2 In Fig. 9.12 sono riportate tre sinusoidi di diverse frequenze: una di 1 Hz, la seconda con fase iniziale opposta, di 9 Hz e la terza di 11 Hz: si vede che il campionamento a 10 Hz produce lo stesso risultato nei tre casi. Le due sinusoidi a frequenza maggiore si possono infatti confondere con due alias della prima. Se ci si pone in condizioni in cui valga il teorema di Shannon, cioè se si opera un prefiltraggio che elimini le frequenze superiori o uguali a metà di quella di campionamento, tale fenomeno non può verificarsi.

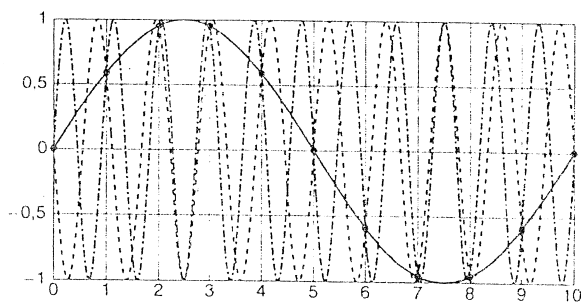


Figura 9.12 Sinusoidi di 1, 9 e 11 Hz campionate a 10 Hz.

Alla luce di quanto esposto in relazione al teorema del campionamento, si analizzano ora le proprietà della corrispondenza fra il piano s e il piano z data dalla relazione $z = e^{Ts}$. Indicando con σ e ω la parte reale e immaginaria di s , con u e v quelle di z , si ha

$$u + jv = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} (\cos \omega T + j \sin \omega T),$$

da cui risulta che alle rette parallele all'asse immaginario del piano s corrispondono circonferenze di raggio $e^{\sigma T}$ nel piano z ; in particolare, all'asse immaginario corrisponde la circonferenza di raggio unitario, al semipiano sinistro in s il cerchio di raggio unitario in z , al semipiano destro il dominio esterno a tale cerchio in z . La corrispondenza non è biunivoca, in quanto ai valori di s aventi parti immaginarie che differiscono di multipli di $\Omega = 2\pi/T$ corrisponde lo stesso valore di z . La corrispondenza risulta biunivoca se nel piano s ci si limita a considerare la cosiddetta *striscia primaria*, compresa fra le rette $\omega = -\Omega/2$ e $\omega = \Omega/2$ (tanto più estesa quanto minore è il periodo di campionamento), trascurando le *striscie complementari* ad essa adiacenti; infatti una corretta scelta del periodo di campionamento in base al teorema di Shannon implica che tutti i poli delle trasformate di Laplace $F(s)$ delle funzioni continue da campionare appartengano alla striscia primaria.

La Fig. 9.13 mostra due curve chiuse corrispondenti nei piani s e z che individuano domini corrispondenti, mentre in Fig. 9.14a e in Fig. 9.14b

Striscia primaria

Striscia complementare

Figura 9.13

Domini corrispondenti
nella funzione $z = e^{Ts}$.

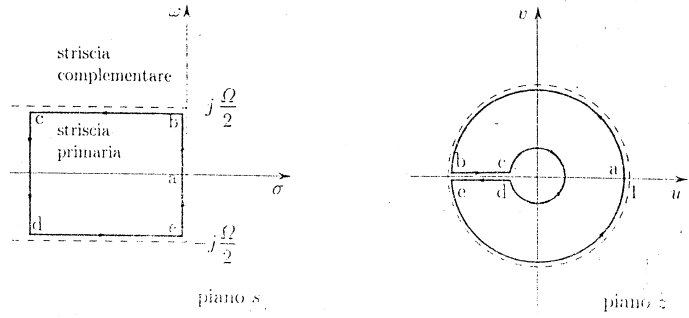
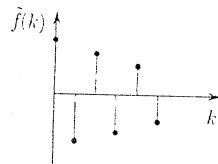
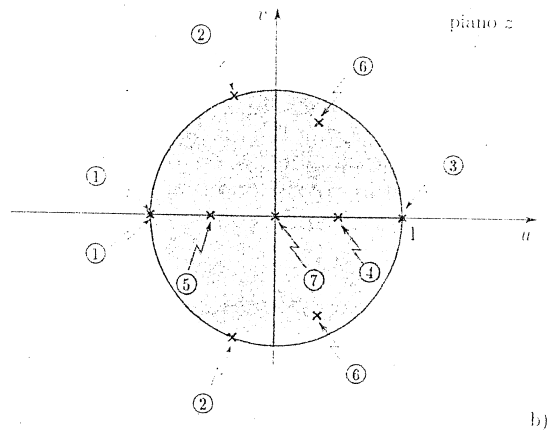
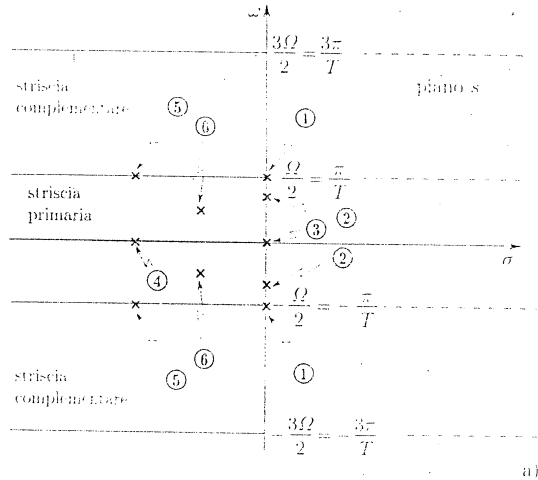


Figura 9.14

Corrispondenze fra po-
sizioni di poli di $F(s)$
e di $F(z)$ e andamento
della successione $\tilde{f}(k)$ nel
caso 5.



sono indicati punti corrispondenti nei due piani. Tali punti possono essere interpretati come posizioni di poli di funzioni $F(s)$ e $F(z)$ di cui la seconda sia ricavata campionando la prima, che sono appunto legati dalla relazione $p_z = e^{Tp_s}$. In particolare, ai punti $\pm j\Omega/2$, poli della trasformata di Laplace

della funzione $\sin(\Omega/2)t$, corrisponde il punto -1 (caso 1); ai punti $\pm j\omega$ (con $\omega < \Omega/2$), poli della trasformata di Laplace della funzione $\sin\omega t$, corrispondono valori complessi coniugati sulla circonferenza di raggio unitario (caso 2); all'origine, polo della trasformata di Laplace di una costante, corrisponde il punto $+1$ (caso 3); al punto $-\sigma$, polo della trasformata di Laplace di un'esponenziale convergente a zero, corrisponde un valore reale positivo inferiore all'unità (caso 4); ai punti $-\sigma \pm j\Omega/2$, poli della trasformata di Laplace della funzione $e^{-\sigma t} \sin((\Omega/2)t + \varphi)$, in cui il valore di φ dipende da un eventuale zero, corrisponde un valore reale negativo con valore assoluto inferiore all'unità (caso 5); ai punti $-\sigma \pm j\omega$, poli della trasformata di Laplace della funzione $e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$, corrispondono punti interni alla circonferenza di raggio unitario simmetrici rispetto all'asse reale (caso 6); ai punti all'infinito corrisponde l'origine (caso 7).

Si noti che i valori di z reali negativi per essere poli della trasformata Z della successione ottenuta mediante campionamento di una funzione del tempo devono avere molteplicità pari (almeno due): la successione che si ottiene antitrasformando la $1/(z + \alpha)$ con $\alpha > 0$ ha infatti l'andamento oscillante rappresentato in Fig. 9.14c (ogni campione è ottenuto dal precedente moltiplicandolo per $-\alpha$) che può nascere solo dal campionamento di una funzione avente poli complessi.

Come per i sistemi a tempo continuo, anche per i sistemi a tempo discreto caratterizzati dalla presenza di due poli dominanti complessi coniugati interessa conoscere quali domini del piano z garantiscano un assestamento sufficientemente pronto o uno smorzamento delle oscillazioni sufficientemente rapido. A tal fine basta considerare i trasformati degli analoghi domini del piano s .

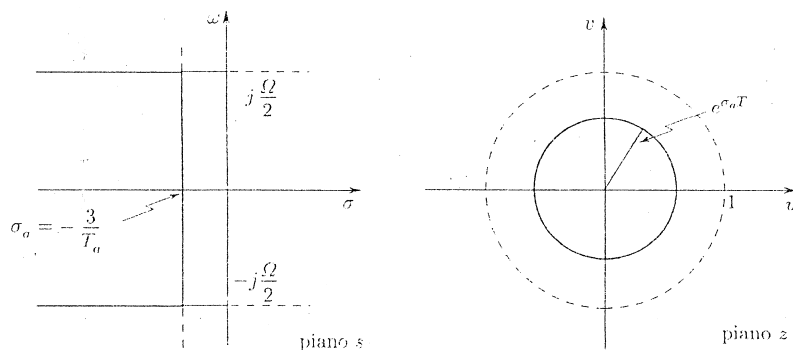


Figura 9.15

Domini dei piani s e z corrispondenti ad un tempo di assestamento non superiore a un dato valore T_a .

In Fig. 9.15 sono riportati i domini relativi al tempo di assestamento T_a , che sono nel piano s il semipiano delimitato a destra dalla retta $\sigma = \sigma_a = -3/T_a$ e nel piano z il cerchio di raggio $e^{\sigma_a T}$. La Fig. 9.16 si riferisce, invece, al coefficiente di smorzamento: nel piano s il luogo dei poli corrispondenti a valori del coefficiente di smorzamento non inferiori a δ è la parte di piano delimitata da due semirette passanti per l'origine e inclinate rispetto all'asse immaginario di $\pm\beta$, con $\beta = \arcsin\delta$: ad esse nel piano z corrispondono due spirali logaritmiche. Le equazioni dei due segmenti di retta appartenenti alla striscia primaria in forma parametrica in funzione di ω sono

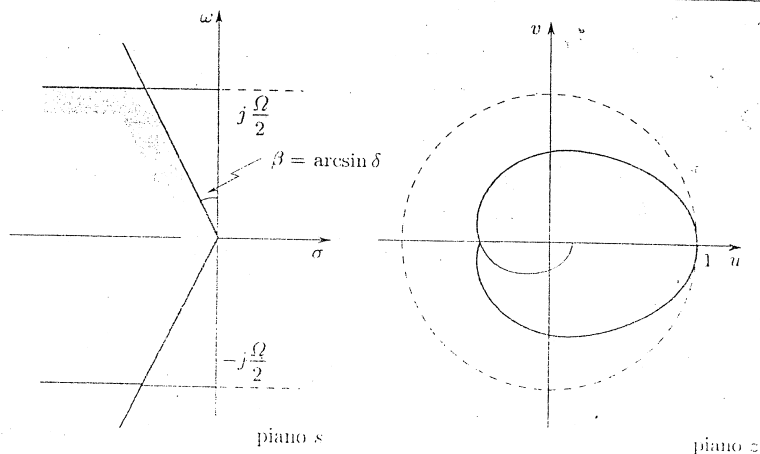
$$s = -\omega \tan\beta \pm j\omega = -\omega \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \pm j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq \Omega/2,$$

da cui

$$\begin{aligned} z &= e^{Ts} = e^{(-\omega \tan\beta \pm j\omega)T} = e^{-\frac{2\pi\omega}{\Omega} \tan\beta} e^{\pm j\frac{2\pi\omega}{\Omega}}, \quad 0 \leq \omega \leq \Omega/2, \\ &= e^{-\varphi \tan\beta} e^{\pm j\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{aligned}$$

Figura 9.16

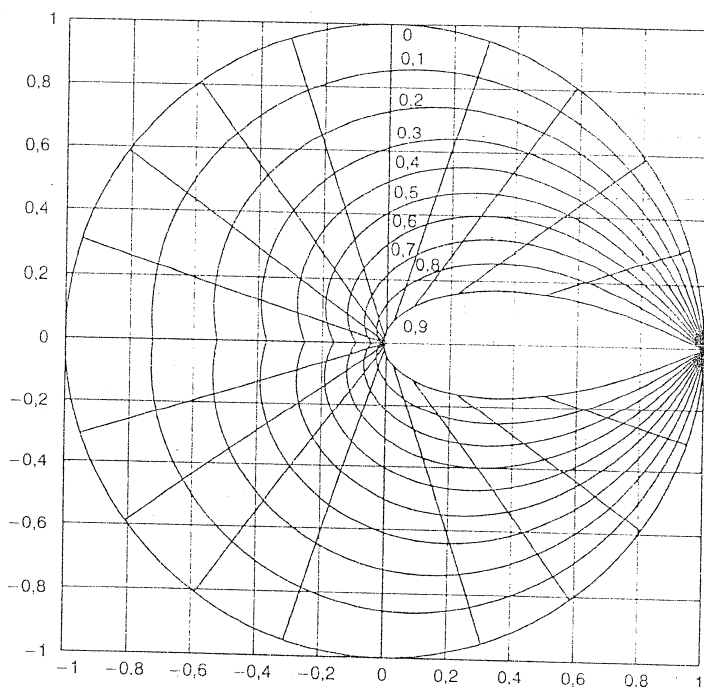
Domini dei piani s e z corrispondenti ad un coefficiente di smorzamento non inferiore a un dato valore δ .



In Fig. 9.17 sono riportati gli archi di spirale logaritmica corrispondenti a vari valori di δ .

Figura 9.17

Luoghi corrispondenti ai valori del coefficiente di smorzamento $\delta = 0; 0,1; \dots; 0,9$.



Il piano w

È utile disporre di una relazione razionale fra il piano z e un secondo piano di Gauss, che si suole indicare come *piano w* , in cui al cerchio di raggio unitario corrisponda il semipiano sinistro. Una semplice funzione avente questo requisito è la trasformazione bilineare

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad (9.35)$$

la cui inversa è

$$z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}}, \quad (9.36)$$

come si deduce raccogliendo rispettivamente z e w negli sviluppi $wT(z+1) = 2(z-1)$ e $z(2-wT) = (2+wT)$. Posto $w = \mu + j\nu$ e, come in precedenza, $z = u + jv$, dalla (9.35) si ricava

$$w = \mu + j\nu = \frac{2}{T} \frac{u + jv - 1}{u + jv + 1} = \frac{2}{T} \frac{(u-1 + jv)(u+1 - jv)}{(u+1)^2 + v^2} =$$

$$= \frac{2}{T} \frac{(u^2 + v^2 - 1) + j2v}{(u+1)^2 + v^2} = \frac{2}{T} \frac{(|z|^2 - 1) + j2v}{(u+1)^2 + v^2}$$

da cui risulta che la parte reale di w è positiva se e solo se $|z| > 1$: pertanto il cerchio di raggio unitario del piano z corrisponde al semipiano sinistro del piano w , come è indicato in Fig. 9.18; in particolare, al punto $z = -1$ corrispondono i punti all'infinito del piano w , al punto $z = 1$ corrisponde l'origine del piano w . Si noti che la (9.36) rappresenta l'approssimante di Padé di ordine 1 della funzione e^{Tw} .

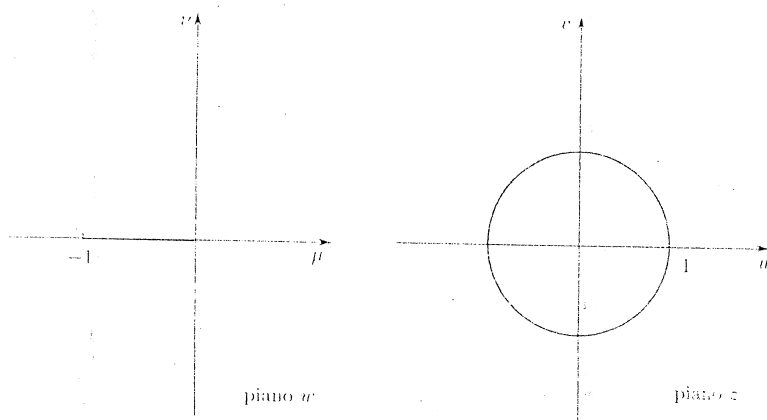


Figura 9.18

Corrispondenza fra i piani w e z data dalle trasformazioni bilineari $z = (1 + wT/2)/(1 - wT/2)$ e $w = (2z - 2)/(Tz + T)$.

Il passaggio dal piano z al piano w mantiene la razionalità delle funzioni e consente di applicare ai sistemi a tempo discreto la maggior parte dei metodi per lo studio della stabilità e la sintesi dei regolatori sviluppati per i sistemi a tempo continuo, ad esempio il criterio di Routh e i procedimenti di sintesi per tentativi riferiti alla funzione di risposta armonica.

9.5. La funzione di trasferimento discreta $G(z)$

Un sistema a tempo discreto è un sistema in cui i segnali di ingresso e di uscita sono successioni di campioni $\tilde{u}(k)$ e $\tilde{y}(k)$. I concetti fondamentali di *stato iniziale di quiete* o *stato zero* (risposta identicamente nulla quando l'eccitazione sia identicamente nulla), *linearità* (risposta ad una combinazione lineare di eccitazioni data dalla stessa combinazione lineare delle singole risposte, se il sistema è inizialmente in quiete), *stazionarietà* (possibilità di traslare nel tempo cause ed effetti, se il sistema è inizialmente in quiete) e *causalità* (impossibilità che la risposta preceda nel tempo la corrispondente eccitazione) si estendono in modo ovvio ai sistemi a tempo discreto.

Si considera, in particolare, il caso lineare stazionario e si indica con $\tilde{g}(k)$ la risposta all'impulso unitario (la cui trasformata $\mathcal{Z}$ è l'unità); $G(z)$, la *funzione di trasferimento* del sistema, è la trasformata $\mathcal{Z}$ di $\tilde{g}(k)$.

La risposta dallo stato zero alla sequenza di ingresso generica $\tilde{u}(k)$ è data da una *sommatoria di convoluzione*, che riveste un ruolo analogo a quello

Stato iniziale di quiete
Stato zero
Linearità

Stazionarietà

Causalità

Funzione di trasferimento
di un sistema a tempo
discreto

Sommatoria di
convoluzione

dell'integrale di convoluzione per i sistemi a tempo continuo e che si può dedurre direttamente applicando le proprietà di sovrapposizione degli effetti e di traslazione nel tempo di cause ed effetti. Infatti l'effetto, all'istante k , di $\tilde{u}(0)$ è $\tilde{y}(k) \tilde{u}(0)$, quello di $\tilde{u}(1)$ è $\tilde{y}(k-1) \tilde{u}(1)$, e così via, fino all'effetto di $\tilde{u}(k)$, che è $\tilde{y}(0) \tilde{u}(k)$. Sommando si ottiene

$$\tilde{y}(k) = \sum_{h=0}^k \tilde{y}(k-h) \tilde{u}(h) . \quad (9.37)$$

In base al teorema della convoluzione per le trasformate $\mathcal{Z}$, la (9.37) equivale alla relazione

$$Y(z) = G(z) U(z) . \quad (9.38)$$

Riveste particolare interesse il caso in cui $G(z)$ sia razionale, cioè esprimibile nella forma

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} , \quad (9.39)$$

come nel caso a tempo continuo, si assume $m \leq n$, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia causale o non anticipativo.

Una realizzazione di $G(z)$

Vediamo ora lo schema di elaborazione in base al quale si può realizzare una funzione di trasferimento discreta con un elaboratore digitale.

La (9.39) si può scrivere

$$(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) U(z) ,$$

o anche, esplicitando la potenza più elevata a primo membro,

$$z^n Y(z) = (-a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_0) Y(z) + (b_m z^m + \dots + b_0) U(z) . \quad (9.40)$$

Si ricorda che è

$$U(z) = \tilde{u}(0) + \tilde{u}(1) z^{-1} + \dots + \tilde{u}(n) z^{-n} + \dots ,$$

$$Y(z) = \tilde{y}(0) + \tilde{y}(1) z^{-1} + \dots + \tilde{y}(n) z^{-n} + \dots ,$$

raccogliendo nella (9.40) tutti i termini corrispondenti a potenze di z uguali ($z^0, z^{-1}, \dots, z^{-i}$), si deduce

$$\tilde{y}(n) = -a_{n-1} \tilde{y}(n-1) - \dots - a_0 \tilde{y}(0) + b_m \tilde{u}(n) + \dots + b_0 \tilde{u}(0) ,$$

$$\tilde{y}(n+1) = -a_{n-1} \tilde{y}(n) - \dots - a_0 \tilde{y}(1) + b_m \tilde{u}(n+1) + \dots + b_0 \tilde{u}(1) ,$$

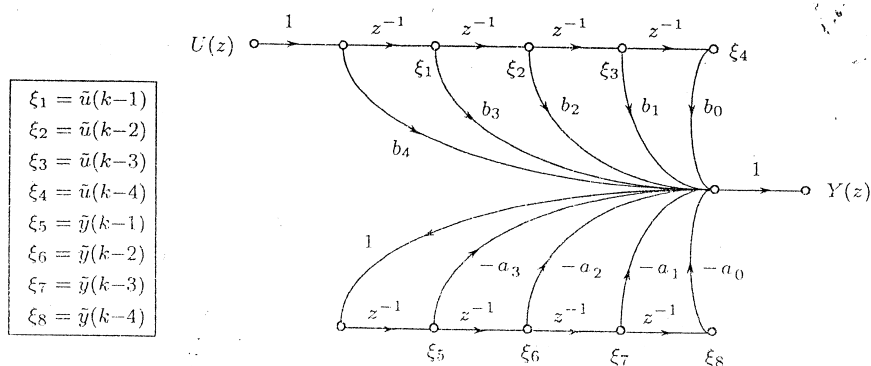
...

$$\tilde{y}(n+i) = -a_{n-1} \tilde{y}(n+i-1) - \dots - a_0 \tilde{y}(i) + b_m \tilde{u}(n+i) + \dots + b_0 \tilde{u}(i) .$$

o anche, indicando con k l'istante generico.

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k) = & -a_{n-1} \tilde{y}(k-1) - \dots - a_0 \tilde{y}(k-n) + b_m \tilde{u}(k-n+m) + \dots \\ & \dots + b_0 \tilde{u}(k-n) , \end{aligned} \quad (9.41)$$

da cui risulta che il campione dell'uscita all'istante k è funzione lineare dei campioni precedenti fino all'istante $k-n$ e di quelli dell'ingresso dall'istante $k-n$ all'istante $k-n+m$; risulta inoltre che qualora $G(z)$ non sia strettamente propria, cioè con $m = n$, l'uscita $\tilde{y}(k)$ è funzione anche dell'ingresso corrente $\tilde{u}(k)$.

**Figura 9.19**

Schema di elaborazione che realizza la (9.41).

L'elaborazione da riprodurre nel regolatore è rappresentata in Fig. 9.19 con un grafo di flusso di segnale che rappresenta le operazioni eseguite sui campioni e scandite dal segnale di sincronismo che determina anche il campionamento dei segnali analogici. Per semplicità si riferisce il grafo al caso particolare $n = 4$.

Il grafo di flusso di segnale di Fig. 9.19 realizza l'elaborazione (9.41), che rispecchia la funzione di trasferimento (9.39): i rami contrassegnati con z^{-1} rappresentano l'operatore *ritardo unitario*, che all'istante di campionamento trasferisce sull'uscita il valore presente sull'ingresso all'istante immediatamente precedente. I valori delle uscite dei ritardi unitari $\xi_i(k-1)$ ($i = 1, \dots, 8$) all'istante $k-1$ sono legati a quelli dei campioni dell'ingresso e dell'uscita come è indicato a fianco della figura.

Ritardo unitario

La verifica della funzione di trasferimento del grafo si effettua con la formula di Mason: si ottiene infatti

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{b_4 + b_3 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4}}{1 + a_3 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-3} + a_0 z^{-4}} = \\
 &= \frac{b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}
 \end{aligned}$$

Nell'elaboratore ad ogni ritardo unitario corrisponde una locazione di memoria (registro) in cui vengono trasferiti i dati (non necessariamente all'istante di campionamento, ma nell'intervallo fra due istanti di campionamento successivi): in genere si calcola il valore "futuro" $\tilde{y}(k)$ dell'uscita in funzione dei valori "attuali" degli ingressi e delle uscite precedenti e lo si trasferisce in una ulteriore memoria: all'istante di campionamento lo si somma a $b_4 \tilde{u}(k)$ e lo si rende disponibile all'uscita: si adeguano poi i contenuti dei registri, e così via⁽³⁾.

Lo stato iniziale

Per definizione, lo stato iniziale è l'informazione necessaria all'istante generico k per determinare la sequenza di uscita $y(k), y(k+1), \dots$, nota che sia quella d'ingresso $u(k), u(k+1), \dots$: dalla (9.41) risulta che il sistema si può considerare inizialmente in quiete se negli n istanti precedenti l'ingresso e

⁽³⁾ Se il sistema non è puramente dinamico (il che è frequente nei regolatori, che di solito presentano un numero uguale di zeri e poli, specie se il periodo di campionamento è relativamente elevato) l'uscita viene trasmessa al dispositivo di tenuta con un certo ritardo rispetto all'istante di campionamento: di tale ritardo si può tenere conto inglobandolo nella funzione di trasferimento del sistema controllato mediante la trasformata Z modificata, descritta al Paragrafo C9.3.

l'uscita si sono mantenuti entrambi nulli. Se si assume, secondo consuetudine, $k = 0$ come istante iniziale, l'informazione necessaria per determinare l'uscita futura in funzione dell'ingresso consiste nei $2n$ valori

$$\tilde{u}(-n), \tilde{u}(-n+1), \dots, \tilde{u}(-1); \quad (9.42)$$

$$\tilde{y}(-n), \tilde{y}(-n+1), \dots, \tilde{y}(-1). \quad (9.43)$$

In realtà lo stato iniziale presenta solo n gradi di libertà perché, agli effetti del comportamento futuro, ci si può sempre ricondurre ad una qualunque sequenza di ingresso negli n istanti precedenti: di solito lo stato iniziale si esprime con gli n valori precedenti dell'uscita corrispondenti ad ingressi nulli, cioè con il segmento di uscita libera $\tilde{y}_0(i)$ ($i = -n, \dots, -1$), di lunghezza n .

Siano infatti $\tilde{u}_r(k)$, $\tilde{y}_r(k)$ ($k = -n, \dots, -1$) valori equivalenti, agli effetti del comportamento futuro del sistema, a quelli specificati nelle (9.42, 9.43): si pone

$$\tilde{u}_r(i) = \tilde{u}(i) + \delta\tilde{u}(i),$$

$$\tilde{y}_r(i) = \tilde{y}(i) + \delta\tilde{y}(i) \quad (i = -n, \dots, -1).$$

e facendo riferimento, per semplicità, al caso particolare di $n = 4$, si ottiene

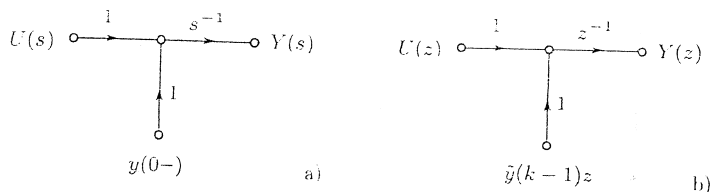
$$\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\tilde{y}(-1) \\ \delta\tilde{y}(-2) \\ \delta\tilde{y}(-3) \\ \delta\tilde{y}(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\tilde{u}(-1) \\ \delta\tilde{u}(-2) \\ \delta\tilde{u}(-3) \\ \delta\tilde{u}(-4) \end{bmatrix}.$$

da cui, nell'ipotesi che sia $a_0 \neq 0$, si possono dedurre le $\delta\tilde{y}(k)$ fissate le $\delta\tilde{u}(k)$ ($k = -4, \dots, -1$). In particolare per $\delta\tilde{u}(k) = -\tilde{u}(k)$ si ricava l'uscita libera equivalente $\tilde{y}_0(k)$ ($k = -4, \dots, -1$) che di regola si assume come stato iniziale. Se $a_0 = 0$, $\delta\tilde{y}(-4)$ è influente e si può pertanto eliminare insieme all'ultima equazione, ottenendo a primo membro una matrice analoga con a_1 in luogo di a_0 ; se $a_1 = 0$ si elimina $\delta\tilde{y}(-3)$ e così via. Con riferimento al grafo di Fig. 9.19, lo stato iniziale è lo stato dei ritardi della catena inferiore nell'ipotesi che quello dei ritardi nella catena superiore sia posto uguale a zero.

Come per i sistemi a tempo continuo, anche nel caso dei sistemi a tempo discreto lineari stazionari rappresentati con funzioni di trasferimento si introduce lo stato iniziale mediante opportuni ingressi impulsivi. Nel caso continuo l'effetto dello stato iniziale equivale a quello di un impulso di Dirac applicato all'ingresso di ogni integratore: nel caso discreto esso equivale a quello di un impulso applicato all'istante $k = -1$ all'ingresso di ogni ritardo unitario. Il caso continuo è illustrato in Fig. 9.20a con un semplice grafo di flusso di segnale, in cui lo stato iniziale corrisponde al segnale di ingresso $y(0-)\delta(t)$, mentre nel caso discreto di Fig. 9.20b, lo stato iniziale corrisponde al segnale di ingresso $\tilde{y}(k-1)\delta(k-1)$.

Figura 9.20

Introduzione dello stato iniziale con segnali impulsivi: il caso a tempo continuo e quello a tempo discreto.



Convenendo di assumere come stato iniziale il segmento di moto libero $\tilde{y}_0(i)$ ($i = -n, \dots, -1$), si può estendere la (9.39) ad includere lo stato iniziale come causa. A tal fine ci si può riferire al grafo di flusso di Fig. 9.19, che appunto riproduce la (9.39), sostituendovi i ritardi finiti corrispondenti alla sequenza di uscita con grafi elementari del tipo di Fig. 9.20b. Si ottiene

$$Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} U(z) - \frac{1}{Q(z)} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{\ell=i+1}^n z^{\ell} \tilde{y}_0(i-\ell). \quad (9.44)$$

Dalla (9.41) e dalle considerazioni precedenti risulta che la piena conoscenza dello stato corrente, cioè dell'insieme di parametri che consentono di determinare l'andamento futuro della sequenza di uscita nota quella di ingresso, si ottiene disponendo degli ultimi n campioni consecutivi di ingresso e uscita.

Con la tecnica illustrata si può realizzare un *osservatore dello stato*.

Osservatore dello stato

Stabilità dei sistemi a tempo discreto

Anche per i sistemi a tempo discreto, come per quelli a tempo continuo, si considerano due diverse definizioni di stabilità: la *stabilità (asintotica) a seguito di perturbazioni* e la *stabilità ingresso limitato - uscita limitata* (stabilità i.l.u.l.). Nel caso specifico cui si fa riferimento (sistemi che soddisfano la proprietà di sovrapposizione degli effetti) si parla di stabilità "del sistema" anziché di un particolare punto di equilibrio.

Stabilità a seguito di perturbazioni
Stabilità ingresso limitato - uscita limitata

TEOREMA 9.5.1. STABILITÀ ASINTOTICA A SEGUITO DI PERTURBAZIONI Un sistema a tempo discreto lineare stazionario descritto dalla funzione di trasferimento $G(z)$ è asintoticamente stabile a seguito di perturbazioni se e solo se tutti i poli di $G(z)$ sono interni al cerchio di raggio unitario.

Dimostrazione In virtù della relazione (9.44), la determinazione della successione $\tilde{y}_0(k)$ ($k = 0, 1, \dots$), che descrive l'evoluzione libera dell'uscita, per ogni stato iniziale si riconduce all'antitrasformazione di una funzione razionale il cui polinomio a denominatore è $Q(z)$, lo stesso di $G(z)$. Si è mostrato al Paragrafo 9.3 che l'antitrasformata $\mathcal{Z}$ di una funzione razionale $F(z)$ si può ricondurre al campionamento dell'antitrasformata di Laplace di una funzione razionale $F(s)$ con poli soddisfacenti la relazione $z = e^{Ts}$, con T arbitrario (ci si può limitare a considerare la striscia primaria nel piano s). Perché tale antitrasformata converga a zero per t tendente all'infinito è necessario e sufficiente che i poli di $F(s)$ siano punti interni del semipiano sinistro, il che implica che i poli di $F(z)$ siano punti interni del cerchio di raggio unitario.

Un sistema a tempo discreto si dice stabile i.l.u.l. se ad ogni reale limitato $M_u > 0$ si può associare un reale limitato $M_y > 0$ tale che, per ogni successione di ingresso con $|\tilde{u}(k)| \leq M_u$ per ogni k , corrisponda, a partire dallo stato zero, una successione di uscita tale che $|\tilde{y}(k)| \leq M_y$ per ogni k .

TEOREMA 9.5.2. STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA Un sistema a tempo discreto lineare stazionario descritto dalla funzione di risposta all'impulso $\tilde{g}(k)$ è stabile i.l.u.l. se e solo se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{g}(k)| = M < \infty. \quad (9.45)$$

Dimostrazione Se. Si ponga $M_y = M_u M$. La sommatoria di convoluzione (9.37) implica, per ogni k ,

$$|\tilde{y}(k)| \leq \sum_{i=0}^k |\tilde{g}(k-i)| |\tilde{u}(i)| \leq M_u \sum_{i=0}^{\infty} |\tilde{g}(i)| = M_u M = M_y. \quad (9.46)$$

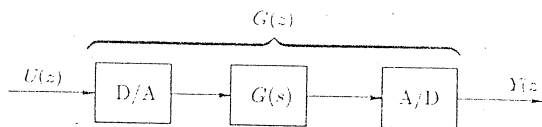
Solo se. Se la (9.45) non è soddisfatta, per ogni $M_y > 0$ esiste un k tale che $\sum_{i=0}^k |\tilde{g}(i)| \geq M_y$; assumendo $u(i) = \text{sign}(\tilde{g}(k-i))$ ($i = 0, \dots, k$), dalla (9.37) si deduce $\tilde{y}(k) \geq M_y$, da cui segue che, essendo M_y grande a piacere, il sistema non è stabile i.l.u.l.

Si può facilmente dimostrare che quando la trasformata $\mathcal{Z}$ di $\tilde{g}(k)$ sia razionale affinché valga la (9.46) tutti i poli di $G(z)$ devono essere punti interni del cerchio di raggio unitario e pertanto in tal caso la stabilità i.l.u.l. equivale alla stabilità asintotica a seguito di perturbazioni.

9.6. Conversione dal tempo continuo al tempo discreto

Ci si propone di dedurre la funzione di trasferimento discreta del complesso di Fig. 9.21, costituito dal convertitore digitale-analogico con relativo dispositivo di tenuta, dall'impianto e dal campionatore. Il dispositivo di tenuta realizza l'interpolazione dei campioni con il miglior compromesso fra precisione e semplicità; nei sistemi di controllo, in cui la prontezza è particolarmente importante e la precisione è cruciale solo in condizioni di regime asintotico, si usano dispositivi di tenuta relativamente semplici, come quelli di ordine zero e di ordine uno più avanti descritti.

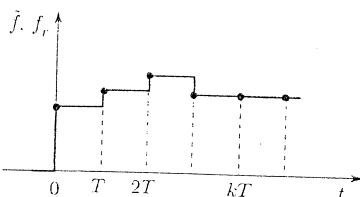
Figura 9.21
Il sistema controllato e i convertitori.



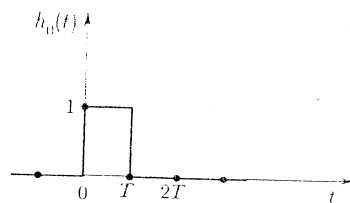
La funzione di trasferimento del complesso si ricava con il seguente procedimento: si determina la trasformata di Laplace $H_i(s)$ della risposta all'impulso unitario discreto del convertitore D/A con il relativo dispositivo di tenuta di ordine i e si pone $G(z) = \mathcal{Z}(H_i(s) G(s), T)$: tale funzione di trasferimento discreta descrive il sistema di Fig. 9.21, in quanto la corrispondente risposta all'impulso unitario è data appunto dalla campionata dell'antitrasformata di Laplace (o risposta all'impulso di Dirac) di $H_i(s) G(s)$.

Il dispositivo di tenuta di ordine zero

Il dispositivo di tenuta di ordine zero conserva in uscita il valore dell'ultimo campione pervenuto all'ingresso per l'intera durata del periodo di campionamento, come è indicato in Fig. 9.22a.



a)



b)

Figura 9.22
Risposta del dispositivo di tenuta di ordine zero ad una sequenza generica e all'impulso unitario.

La sua uscita $h_0(t)$ in risposta ad un impulso unitario è rappresentata in Fig. 9.22b. La corrispondente trasformata di Laplace è

$$H_0(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts}), \quad (9.47)$$

per cui la funzione di trasferimento del complesso di Fig. 9.21 quando il convertitore D/A realizza la tenuta di ordine zero è

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[(1 - e^{-Ts}) \frac{G(s)}{s}, T \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s}, T \right]. \quad (9.48)$$

Il dispositivo di tenuta di ordine uno

L'uscita del dispositivo di tenuta di ordine uno varia linearmente nel tempo secondo la pendenza assegnata dai due campioni precedenti, adeguandosi istantaneamente in valore ad ogni nuovo campione pervenuto. L'andamento della risposta ad una generica successione di campioni è rappresentato in Fig. 9.23a, mentre in Fig. 9.23b è riportata la risposta $h_1(t)$ all'impulso unitario; la relativa trasformata di Laplace è

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{T s^2} - \frac{2}{s} e^{-Ts} - \frac{2}{T s^2} e^{-Ts} + \frac{1}{s} e^{-2Ts} + \frac{1}{T s^2} e^{-2Ts} \\ &= (1 - e^{-Ts})^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{T s^2} \right), \end{aligned} \quad (9.49)$$

per cui la funzione di trasferimento del complesso di Fig. 9.21 quando il convertitore D/A realizza la tenuta di ordine uno è

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[(1 - e^{-Ts})^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{T s^2} \right) G(s), T \right] \\ &= (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \mathcal{Z} \left[\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{T s^2} \right) G(s), T \right] \\ &= \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 \mathcal{Z} \left[\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{T s^2} \right) G(s), T \right]. \end{aligned} \quad (9.50)$$

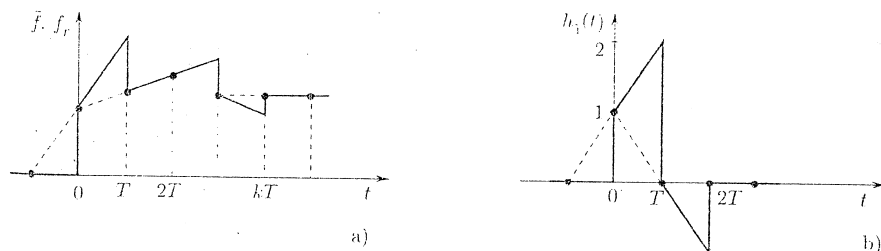


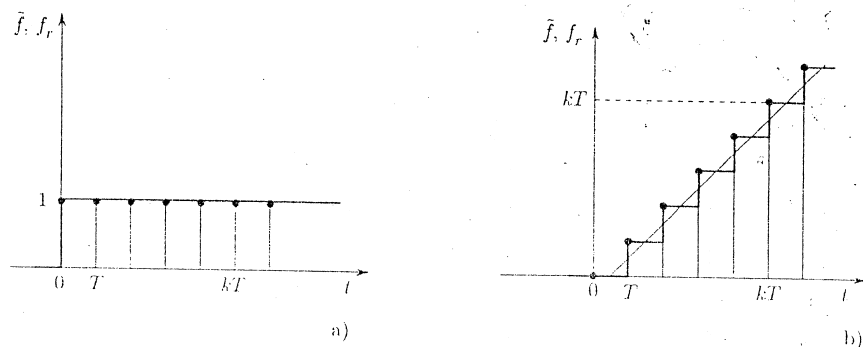
Figura 9.23

Risposta del dispositivo di tenuta di ordine uno ad una sequenza generica e all'impulso unitario.

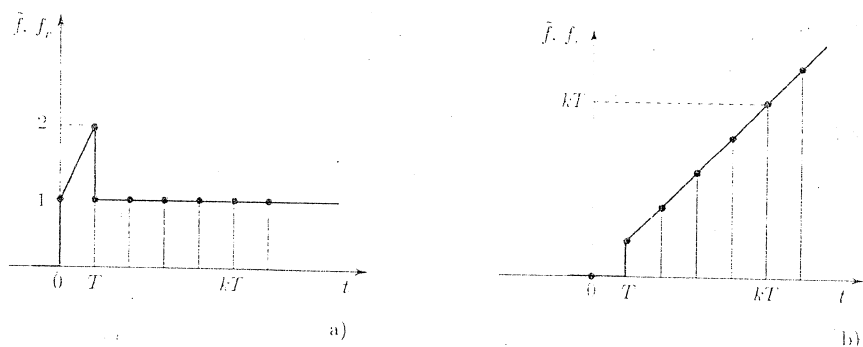
È interessante confrontare le risposte al gradino e alla rampa dei due dispositivi, rappresentate rispettivamente in Fig. 9.24a,b e in Fig. 9.25a,b. Si noti che il dispositivo di tenuta di ordine zero riproduce perfettamente il gradino, ma dà luogo a un ritardo pari a circa metà del periodo di campionamento sulla risposta alla rampa del sistema a tempo continuo collegato in cascata. Il dispositivo di tenuta di ordine uno per contro non ritarda la rampa ricostruita, ma somma al gradino ricostruito un impulso triangolare di ampiezza unitaria e di durata T e sottrae alla rampa ricostruita un eguale impulso triangolare.

Figura 9.24

Risposte al gradino e alla rampa del dispositivo di tenuta di ordine zero.

**Figura 9.25**

Risposte al gradino e alla rampa del dispositivo di tenuta di ordine uno.



La tenuta di ordine uno è di scarso impiego nei convertitori D/A, ma la relazione (9.50) è di notevole utilità nella sintesi diretta dei regolatori digitali: infatti il relativo modello di riferimento $G_0(z)$ viene spesso ottenuto utilizzando tale relazione da una funzione di trasferimento continua $G_0(s)$ che soddisfi le specifiche volute: la massima sovralongazione della risposta al gradino risulta in genere maggiore in $G_0(z)$ rispetto a $G_0(s)$ per effetto dell'impulso triangolare che si somma al gradino ricostruito (e di ciò si deve tener conto scegliendo una $G_0(s)$ con poli dominanti lievemente più smorzati), ma l'errore a regime in risposta alla rampa risulta uguale nei due casi.

L'ondulazione introdotta dai dispositivi di tenuta

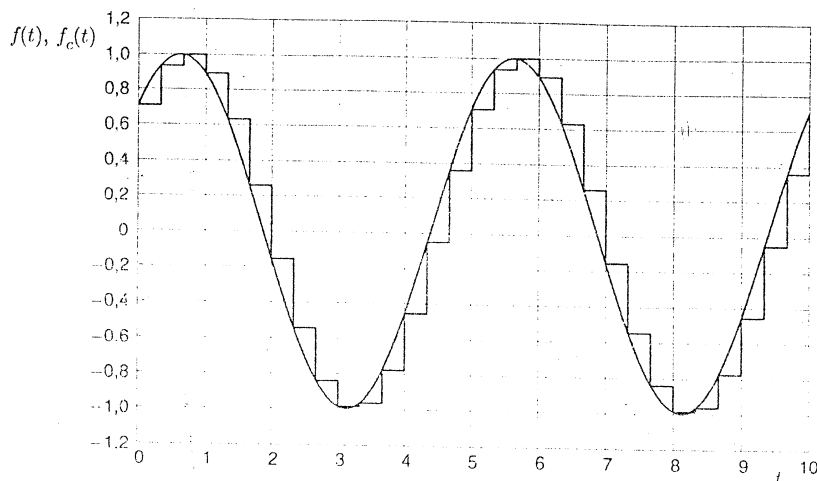
I dispositivi di tenuta possono generare sull'uscita controllata un'ondulazione ("ripple") di frequenza pari a quella di campionamento. Anche se in genere essa è trascurabile per il comportamento filtrante del sistema controllato, si ritiene utile accennare ai procedimenti che ne consentono la valutazione.

Si consideri dapprima il dispositivo di tenuta di ordine zero, e si supponga che al suo ingresso venga applicata la sequenza ottenuta per campionamento del segnale

$$f(t) = \cos(\omega_s t + \varphi), \quad (9.51)$$

con $\omega_s < \Omega$ (con Ω si indica, come in precedenza, la pulsazione di campionamento). La funzione così ottenuta è rappresentata in Fig. 9.26.

Lo spettro di Fourier di tale funzione si ricava ricordando che la sinusoide campionata con impulsi di Dirac viene applicata ad un blocco avente funzione di trasferimento $H_0(s)$ definita dalla (9.47). La trasformata di

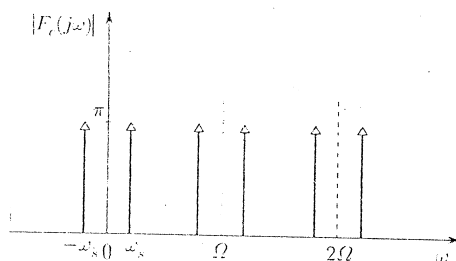
**Figura 9.26**

Sinusoide campionata e ricostruita con tenuta di ordine zero.

Fourier della funzione periodica (9.51) è⁽⁴⁾

$$F(j\omega) = \pi (e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_s) + e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_s)) , \quad (9.52)$$

cioè consiste in una coppia di impulsi di Dirac, di arco rispettivamente $\pi e^{-j\varphi}$ e $\pi e^{j\varphi}$, simmetrici rispetto all'origine, mentre la trasformata di Fourier della sequenza di impulsi di Dirac ottenuta campionando la (9.51), il cui modulo è rappresentato in Fig. 9.27, è costituita da più coppie di uguali impulsi di Dirac, simmetrici rispetto alle armoniche della pulsazione di campionamento (come si ricava immediatamente applicando a questo caso particolare quanto esposto al Paragrafo 9.4 in relazione ad un segnale generico di cui sia data la trasformata di Fourier).

**Figura 9.27**

Spettro della sinusoide campionata con impulsi di Dirac.

⁽⁴⁾Poiché la trasformata di Fourier dell'impulso di Dirac è l'unità, l'espressione dell'antitrasformazione fornisce l'identità

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega ,$$

da cui, scambiando i simboli t e ω , risulta

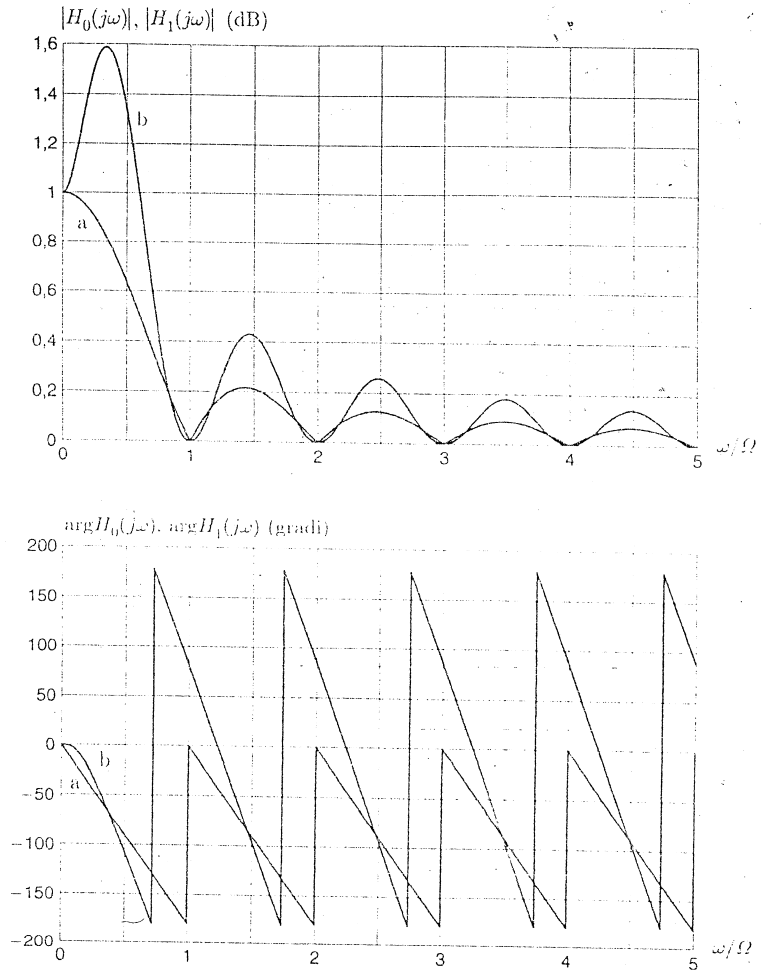
$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt .$$

La (9.52) si ottiene utilizzando quest'ultima identità, insieme alla $\delta(t) = \delta(-t)$, nella relazione di definizione della trasformata di Fourier:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_s t + \varphi)} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_s t + \varphi)} e^{-j\omega t} dt .$$

Figura 9.28

Diagrammi di risposta armonica dei dispositivi di tenuta di ordine zero e di ordine uno.



I diagrammi che riportano il modulo e l'argomento della $H_0(j\omega)$ sono indicati con (a) in Fig. 9.28: dal confronto dello spettro di Fig. 9.27 con tali diagrammi risulta che i termini spurii introdotti dal ricostruttore all'ingresso del sistema controllato risultano tanto maggiori quanto più ω_s è prossima ad $\Omega/2$.

Considerazioni analoghe valgono per i dispositivi di tenuta di ordine uno: la sinusoide ricostruita attraverso un dispositivo di ordine uno, rappresentata in Fig. 9.29, si può pensare ottenuta applicando la successione di impulsi di Dirac ricavata campionando la (9.51) al sistema con funzione di trasferimento $H_1(s)$ espressa dalla (9.49); il suo spettro di Fourier si deduce pertanto applicando la corrispondente $H_1(j\omega)$ ad ogni componente dello spettro di Fig. 9.27. I diagrammi che riportano il modulo e l'argomento della $H_1(j\omega)$ sono indicati con (b) in Fig. 9.28.

Di particolare interesse è il calcolo dello spettro dell'ondulazione introdotta dal dispositivo di tenuta di ordine zero nell'inseguimento di una rampa. Con riferimento alla Fig. 9.24b, si indichi con A la pendenza della rampa: il segnale spurio all'ingresso del sistema controllato è quello, a dente di sega, rappresentato in Fig. 9.30. Ci si riferisce allo sviluppo in serie di Fourier in forma esponenziale:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (9.53)$$

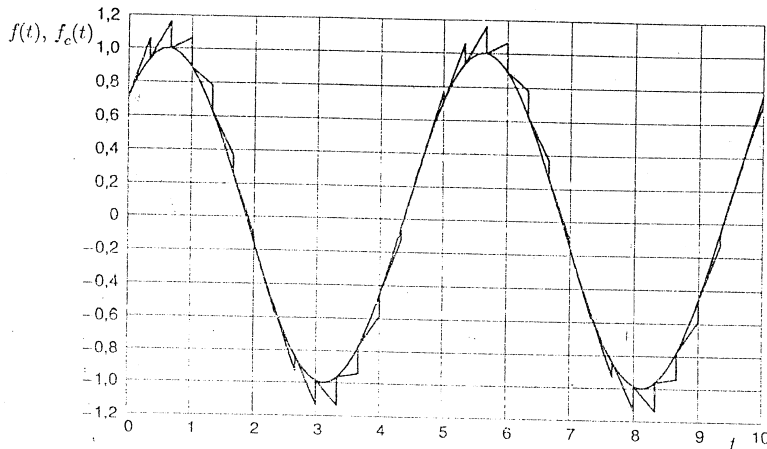


Figura 9.29
Sinusoide campionata e
ricostruita con tenuta di
ordine uno.

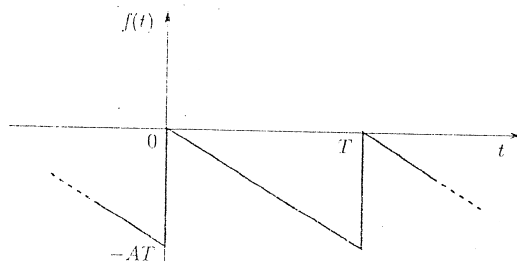


Figura 9.30
Errore nella ricostruzione
della rampa relativo alla
tenuta di ordine zero.

con

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jn\Omega t} d\Omega t; \quad (9.54)$$

per la periodicità della funzione, si può sommare una stessa costante a entrambi i limiti di integrazione. Nel caso in esame risulta

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-AT}{2\pi} \Omega t e^{-jn\Omega t} d\Omega t = \begin{cases} -j \frac{AT}{2n\pi} & \text{per } n \neq 0, \\ -\frac{AT}{2} & \text{per } n = 0. \end{cases} \quad (9.55)$$

Se si preferisce la consueta forma dello sviluppo di Fourier, cioè

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (9.56)$$

utilizzando le relazioni

$$a_n = F_n + F_{-n}; \quad b_n = j(F_n - F_{-n}); \quad a_0 = F_0, \quad (9.57)$$

si deduce

$$f(t) = -\frac{AT}{2} + \frac{AT}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{2} \sin 2\Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \dots \right). \quad (9.58)$$

Dalla (9.58) risulta che, a parte il termine costante, che si può eliminare utilizzando un regolatore digitale di tipo 2, l'ondulazione non ha alcun effetto sull'errore a regime nella risposta alla rampa se la funzione di risposta armonica del sistema controllato presenta argomento nullo o multiplo di π in corrispondenza della frequenza di campionamento e delle sue armoniche.

in quanto tutti i termini dello sviluppo in serie si annullano agli istanti di campionamento. Se l'errore introdotto agli istanti di campionamento risulta inaccettabile si deve ricorrere al dispositivo di tenuta di ordine uno.

9.7. La funzione di risposta armonica discreta

Si consideri un sistema a tempo discreto generico con funzione di trasferimento $G(z)$. La corrispondente *funzione di risposta armonica discreta* si definisce come

$$G(e^{j\omega T}), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}. \quad (9.59)$$

cioè come la funzione a valori complessi ottenuta ponendo $z = e^{j\omega T}$ nella funzione di trasferimento discreta e calcolata per i valori di ω compresi fra zero e la metà della pulsazione di campionamento. Il significato è analogo a quello del caso continuo: il modulo della funzione di risposta armonica discreta è uguale all'ampiezza della sinusoide campionata che si ottiene in uscita, a regime, in risposta ad una sinusoide campionata di pulsazione ω e di ampiezza unitaria, mentre l'argomento rappresenta l'angolo di fase della sinusoide campionata di uscita rispetto a quella di ingresso. La dimostrazione è analoga a quella sviluppata per i sistemi a tempo continuo, che si riferisce allo sviluppo in somma di fratti semplici di $Y(s) = G(s) X(s)$, con

$$X(s) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \sin \omega t.$$

Si dimostra che, a prescindere dai termini corrispondenti ai poli di $G(s)$, risulta

$$y(t) = M(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} = M(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)),$$

ove si è posto $M(\omega) = |G(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$; nel caso a tempo discreto si opera in modo analogo: si considera lo sviluppo in somma di fratti semplici di $Y(z) = G(z) X(z)$, con

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{jk\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-jk\omega T}} \right) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \frac{e^{jk\omega T} - e^{-jk\omega T}}{2j} = \sin k\omega T;$$

si dimostra che, a prescindere dai termini corrispondenti ai poli di $G(z)$, risulta

$$\bar{y}(k) = M(\omega) \frac{e^{j(k\omega T + \varphi(\omega))} - e^{-j(k\omega T + \varphi(\omega))}}{2j} = M(\omega) \sin(k\omega T + \varphi(\omega)).$$

con $M(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$, $\varphi(\omega) = \arg G(e^{j\omega T})$.

Mentre nel caso a tempo continuo la funzione di risposta armonica coincide con la funzione di trasferimento calcolata lungo la parte positiva dell'asse immaginario, in quello a tempo discreto essa coincide con la funzione di trasferimento discreta calcolata lungo l'arco di circonferenza di raggio unitario corrispondente appunto, secondo la relazione $z = e^{Ts}$, alla porzione di semiasse immaginario positivo del piano s appartenente alla striscia primaria. La limitazione sui valori di ω espressa dalla (9.59) è dovuta al fatto che è inutile dare la funzione di risposta armonica discreta in un intervallo maggiore dato che essa, in quanto funzione di variabile complessa

calcolata lungo una circonferenza, risulta periodica: i valori di $G(e^{j\omega T})$ per $\pi \leq \omega T \leq 2\pi$ coincidono con quelli relativi all'intervallo $-\pi \leq \omega T \leq 0$, che sono i coniugati di quelli per $\pi \geq \omega T \geq 0$, i valori per $2\pi \leq \omega \leq 3\pi$ coincidono con quelli per $0 \leq \omega \leq \pi$ e così via: questo semplicemente perché le successioni di campioni in ingresso sono periodicamente identiche al variare di ω al di fuori della striscia primaria per il fenomeno di aliasing descritto al Paragrafo 9.4.

ESEMPIO 9.7.1 Si consideri il sistema a tempo continuo

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+5)}; \quad (9.60)$$

il corrispondente sistema a tempo discreto con $T=1$ e dispositivo di tenuta di ordine zero ha la funzione

di trasferimento

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}, T\right] = \\ &= \frac{0.3047(z+0.7341)(z+0.0273)}{(z-0.3679)(z-0.1353)(z-0.0067)}, \end{aligned} \quad (9.61)$$

mentre con $T=1$ e dispositivo di tenuta di ordine uno la funzione di trasferimento è

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 \mathcal{Z}\left[\frac{1+Ts}{Ts^2} G(s), T\right] = \\ &= \frac{0.4119(z+1.0179)(z+0.0333)}{z(z-0.1353)(z-0.0067)}. \end{aligned} \quad (9.62)$$

In Fig. 9.31 sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica continua ottenuta ponendo $s = j\omega$ nella (9.60) e delle funzioni di risposta armonica discrete ottenute ponendo $z = e^{j\omega T}$, $0 \leq \omega \leq \pi/T$, nelle (9.61) e (9.62): i tre diagrammi sono contrassegnati rispettivamente con (a), (b) e (c).

In Fig. 9.32 sono riportati i corrispondenti diagrammi di Nyquist.

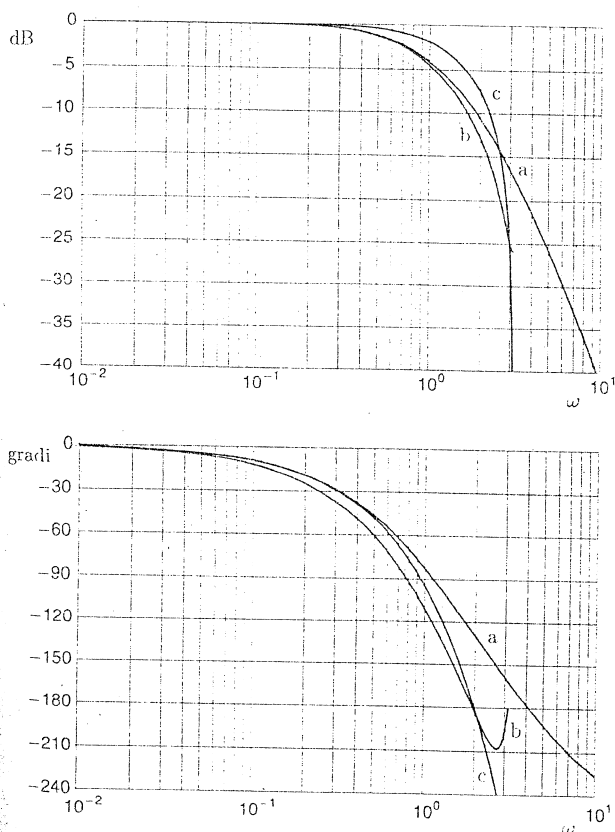


Figura 9.31 Diagrammi di Bode relativi alla funzione di trasferimento continua (9.60) e a quelle discrete (9.61) e (9.62).

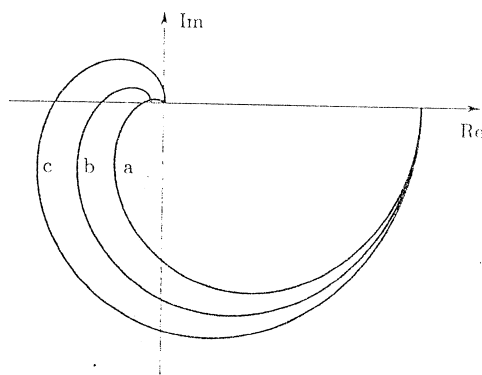


Figura 9.32 Diagrammi di Nyquist corrispondenti a quelli di Bode di Fig. 9.31.

Come per i sistemi a tempo continuo, i diagrammi di Bode e di Nyquist relativi ai sistemi a tempo discreto sono basilari per il progetto dei controlli digitali in retroazione nel dominio delle frequenze. Infatti il criterio di Nyquist e i principali metodi di sintesi dei compensatori dinamici (reti correttive) si estendono facilmente ai sistemi a tempo discreto.

È interessante, in questo contesto, l'utilizzazione del piano w , introdotto al Paragrafo 9.4, che, attraverso la posizione espressa dalla (1.35), riconduce i sistemi a tempo discreto a sistemi a tempo continuo equivalenti (in cui, per non ingenerare confusione, la variabile complessa si indica con w anziché con s), sui quali si opera per lo studio della stabilità e per la sintesi dei regolatori; si opera poi il passaggio inverso, da w a z , utilizzando la (1.34). Quando ci si riferisce al piano w i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica risultano diversi, in quanto la pulsazione (cioè la parte immaginaria di $w = 0 + j\omega_w$) vien fatta variare da 0 a ∞ anziché da 0 a π/T , ma questo porta solo ad una distorsione della scala delle ascisse: i diagrammi polari restano identici a parte la diversa parametrizzazione, a seconda che si consideri ω od ω_w .

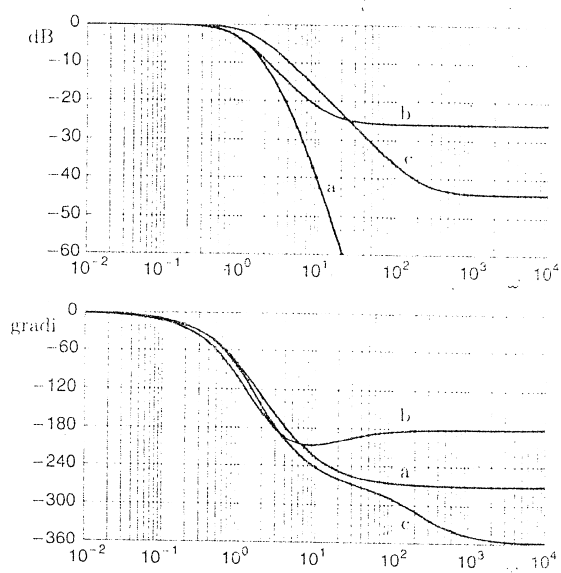
ESEMPIO 9.7.2 Le corrispondenti delle (9.61) e (9.62) nel piano w sono rispettivamente

$$G_1(w) = \frac{-0,0504(w-2)(w+2,1123)(w+13,045)}{(w+0,9242)(w+1,5232)(w+1,9732)} \quad (9.63)$$

$$G_2(w) = \frac{0,00623(w-2)(w+2,1380)(w-225,7)}{(w+1,5232)(w+1,9732)(w+2)} \quad (9.64)$$

I relativi diagrammi di Bode sono riportati, indicati con (b) e (c), in Fig. 9.33, unitamente a quelli della funzione continua (9.60), indicati con (a). Si noti che essi tendono asintoticamente ai valori che la funzione di risposta armonica discreta assume per $\omega = \pi/T$.

Figura 9.33 Diagrammi di Bode corrispondenti a quelli di Fig. 9.31.



9.8. Progetto dei regolatori digitali

L'estensione dai sistemi a tempo continuo a quelli a tempo discreto dei più comuni metodi di analisi e sintesi dei sistemi in retroazione si effettua senza difficoltà: i concetti di errore a regime nella risposta ai segnali tipici, il criterio di Nyquist, l'analisi armonica e i relativi diagrammi di Bode, i margini di stabilità, (cioè le basi metodologiche dell'approccio classico, la cosiddetta "sintesi per tentativi") non richiedono nel caso discreto alcun particolare approfondimento rispetto al caso continuo e vengono passati in rapida rassegna nel corso di questo paragrafo.

❖ Errori a regime in risposta ai segnali tipici

Con riferimento allo schema di Fig. 9.34, si indica con

$$G_0(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (9.65)$$

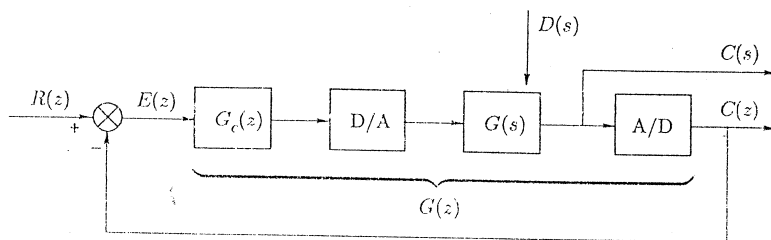


Figura 9.34
Sistema di controllo digitale con retroazione unitaria.

la funzione di trasferimento discreta del sistema ad anello chiuso; la trasformata $\mathcal{Z}$ dell'errore $E(z) = R(z) - C(z)$ è data dalla relazione

$$E(z) = (1 - G_0(z)) R(z) = \frac{1}{1 + G(z)} R(z). \quad (9.66)$$

Come nel caso a tempo continuo, l'errore a regime si calcola applicando il teorema del valore finale:

$$e_r = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{r}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + G(z)} R(z). \quad (9.67)$$

Per il calcolo dell'errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione e_p si assume

$$R(z) = \frac{z}{z-1} R_0$$

(trasformata della successione $\tilde{r}(k) = R_0, k \geq 0$); sostituendo nella (9.67) si ottiene

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} \frac{1}{1 + G(z)} R_0 = \frac{R_0}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)} = \frac{R_0}{1 + K_p}. \quad (9.68)$$

in cui, in analogia con il caso continuo, si è posto

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z), \text{ detta costante di guadagno o di posizione.} \quad (9.69)$$

Un sistema a tempo discreto di tipo 0 è, per definizione, un sistema la cui funzione di trasferimento di anello non presenta poli unitari ed ha pertanto la costante di posizione finita. I sistemi di tipo 1 e di tipo 2 presentano invece rispettivamente un polo unitario semplice e doppio ed hanno pertanto la costante di posizione infinita ed errore a regime nullo nella risposta al gradino.

Per l'errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità e_v si assume invece

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} R_0$$

(trasformata della successione $\tilde{r}(k) = kT R_0, k \geq 0$); sostituendo nella (9.67) si ottiene

$$\begin{aligned} e_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{Tz}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + G(z)} R_0 = \\ &= R_0 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{z-1} \frac{1}{1 + G(z)} = \frac{R_0}{K_v}, \end{aligned} \quad (9.70)$$

in cui, ancora in analogia con il caso continuo, si è posto

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G(z), \text{ detta costante di velocità.} \quad (9.71)$$

Costante di guadagno
Costante di posizione
Sistema a tempo discreto
di tipo 0
di tipo 1
di tipo 2

Errore di velocità

Costante di velocità

Un sistema a tempo discreto di tipo 1 ha la costante di velocità finita, mentre un sistema di tipo 2 ha la costante di velocità infinita e presenta errore a regime nullo nella risposta alla rampa. Peraltro un sistema di tipo 0 ha la costante di velocità nulla e presenta errore a regime infinito nella risposta alla rampa.

Procedendo in modo analogo, per l'errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione e_a si assume

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} R_0$$

(trasformata della successione $\tilde{r}(k) = \frac{1}{2}k^2 T^2 R_0$, $k \geq 0$); sostituendo nella (9.67) si ottiene

$$\begin{aligned} e_a &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \frac{1}{1+G(z)} R_0 = \\ &= R_0 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2 G(z)} = \frac{R_0}{K_a} \end{aligned} \quad (9.72)$$

in cui si è posto

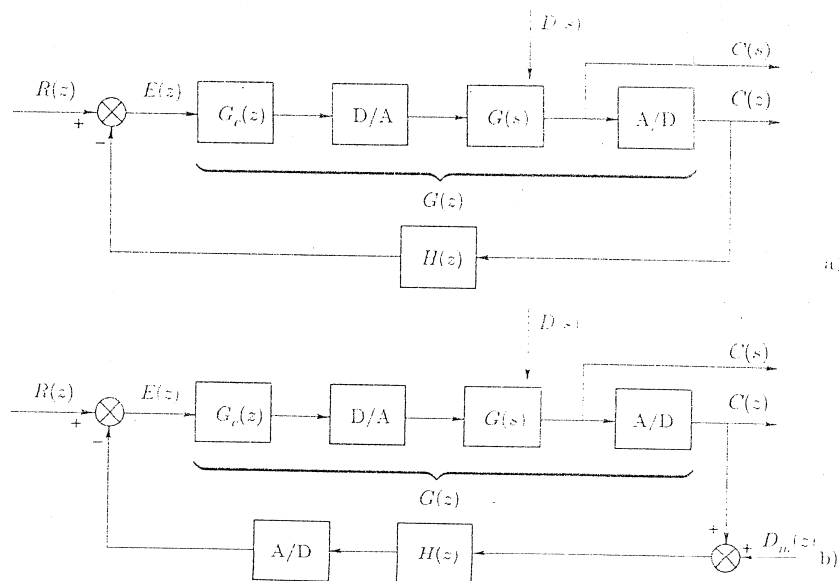
Costante di
accelerazione

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z), \text{ detta costante di accelerazione.} \quad (9.73)$$

Un sistema a tempo discreto di tipo 2 ha la costante di accelerazione finita e presenta pertanto errore a regime finito nella risposta alla parabola, mentre i sistemi di tipo 0 e di tipo 1 presentano costante di accelerazione nulla e errore a regime infinito nella risposta alla parabola.

Figura 9.35

Sistemi di controllo digitali con retroazione non unitaria.



Quando la retroazione non è unitaria, occorre distinguere i due casi di Fig. 9.35a e di Fig. 9.35b: nel primo la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$G_0(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z) H(z)} \quad (9.74)$$

in cui $H(z)$ indica la funzione di trasferimento del trasduttore di retroazione, che in questo caso è digitale e include l'operazione di campionamento, mentre nel secondo è

$$G_0(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}, \quad (9.75)$$

in cui con $GH(z)$ si conviene di indicare la trasformata $\mathcal{Z}$ (calcolata con riferimento al dispositivo di tenuta adottato nel convertitore D/A) corrispondente alla funzione di trasferimento $G(s)H(s)$. La distinzione fra i due casi ovviamente non è necessaria qualora $H(z)$ o $H(s)$ si riducano ad una costante.

Per unificare la trattazione, conviene riferirsi alla *funzione di trasferimento di anello* o *guadagno di anello*, definita come $F(z) = G(z)H(z)$ nel primo caso e $F(z) = GH(z)$ nel secondo. Ciò posto, in analogia al caso continuo gli errori si definiscono con riferimento al comportamento ideale del sistema in retroazione, dato dalla relazione

$$C(z) = K_c R(z), \quad (9.76)$$

in cui K_c indica la *costante di regolazione* o *di controllo*, corrispondente al comportamento ideale voluto (inseguimento perfetto del segnale di ingresso moltiplicato per una data costante di proporzionalità). L'errore riferito all'ingresso $E_i(z) = R(z) - C(z)/K_c$ e l'errore riferito all'uscita $E_u(z) = K_c R(z) - C(z) = K_c E_i(z)$ si determinano ancora con riferimento allo schema di Fig. 9.34, sostituendovi, in luogo della $G(z)$, la funzione di trasferimento

$$G_c(z) = \frac{G(z)}{K_c + K_c F(z) - G(z)}, \quad (9.77)$$

l'errore riferito all'ingresso è il segnale a valle della giunzione sommanza con ingresso $R(z)$ (in uscita si ottiene infatti $C(z)/K_c$), mentre l'errore riferito all'uscita è il segnale a valle della giunzione sommanza con ingresso $K_c R(z)$ (in uscita in questo caso si ha $C(z)$). Se la retroazione è puramente algebrica, definita dalla costante h , la (9.77) si riconduce alla

$$G_c(z) = \frac{G(z)}{K_c + G(z)(K_c h - 1)}, \quad (9.78)$$

che nel caso frequente in cui si possa assumere $K_c = 1/h$, si riduce semplicemente a $G_c(z) = G(z)h$.

Il criterio di Nyquist

Con riferimento ai sistemi in retroazione generici di Fig. 9.35a e di Fig. 9.35b, si indichi con

$$F(e^{j\omega T}), \quad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}, \quad (9.79)$$

la funzione di risposta armonica di anello, calcolata anche per pulsazioni negative. La pulsazione ω è quella corrispondente alla porzione di asse immaginario del piano s appartenente alla striscia primaria, che appunto si trasforma secondo la $z = e^{Ts}$ nell'intera circonferenza di raggio unitario.

Il criterio di Nyquist si può formulare e dimostrare per i sistemi a tempo discreto, con riferimento al diagramma polare della funzione (9.79), analogamente al caso continuo. Nel caso dei sistemi di tipo 0 esso consiste in una curva chiusa, mentre nei casi di sistemi di tipo 1 o di tipo 2 i diagrammi polari presentano rami all'infinito; peraltro, come nel caso continuo, si conviene di completare i diagrammi rispettivamente con una semicirconferenza e con una circonferenza all'infinito percorsa in senso orario per ottenere ancora una curva chiusa.

Funzione di trasferimento
di anello
Guadagno di anello

Costante di regolazione
Costante di controllo
Errore riferito all'ingresso
Errore riferito all'uscita

◆ **Criterio di Nyquist:** sistemi asintoticamente stabili ad anello aperto, a meno di un eventuale polo unitario semplice o doppio. *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(z)$ abbia tutti i poli con modulo minore di uno, eccezion fatta per un eventuale polo unitario semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(e^{j\omega T})$, $-\pi/T < \omega \leq \pi/T$, non circonda né tocchi il punto critico $-1 + j0$.*

Il precedente enunciato del criterio di Nyquist è quello che copre la maggior parte dei casi di interesse. Si può dare tuttavia il seguente enunciato più generale, che si applica anche al caso in cui il sistema in esame sia instabile ad anello aperto.

◆ **Criterio di Nyquist:** sistemi instabili ad anello aperto, con un eventuale polo unitario semplice o doppio. *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(z)$ non presenti poli con modulo unitario, eccezion fatta per un eventuale polo di valore 1 semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(e^{j\omega T})$, $-\pi/T < \omega \leq \pi/T$, circonda il punto critico $-1 + j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(z)$ con modulo maggiore di uno.*

Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario corrisponde alla presenza, nel sistema in retroazione, di un polo con modulo maggiore di uno.

ESEMPIO 9.8.1 Si consideri un sistema in retroazione avente il guadagno di anello

$$F(s) = K \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+5)}, \quad (9.80)$$

le cui trasformate z in relazione ai dispositivi di tenuta di ordine zero e uno e con $T=1$ e $K=1$ sono date dai secondi membri delle (9.61) e (9.62). I diagrammi polari della funzione di risposta armonica del sistema a tempo continuo (9.80) e dei corrispondenti sistemi a tempo discreto, tracciati per $K=1$, sono riportati in Fig. 9.32. Risulta che per valori di K positivi e sufficientemente elevati i dia-

grammi circondano il punto critico due volte in senso orario.

Quando ciò avviene, essendo i sistemi ad anello aperto asintoticamente stabili, i corrispondenti sistemi in retroazione sono instabili, con due poli a parte reale positiva nel caso a tempo continuo e due poli esterni al cerchio di raggio unitario in quello a tempo discreto. Si noti che l'intervallo di stabilità in K è inferiore per i sistemi a tempo discreto e che nel caso del circuito di tenuta di ordine zero aumentando ulteriormente il valore di K il punto critico può essere circondato una sola volta: questo significa che il numero dei poli esterni al cerchio di raggio unitario si riduce a uno.

ESEMPIO 9.8.2 Si consideri un sistema in retroazione avente il guadagno di anello

$$F(s) = K \frac{1,25(s+1,6)}{(s-1)(s-2)}; \quad (9.81)$$

assumendo $T=0,2$ e considerando ancora i due casi in cui la tenuta sia di ordine zero e di ordine uno si ottengono le funzioni di trasferimento discrete

$$F_1(z) = K \frac{0,3870(z-0,7187)}{(z-1,2214)(z-1,4918)}, \quad (9.82)$$

$$F_2(z) = K \frac{0,5558(z-0,2764)(z-0,7292)}{z(z-1,2214)(z-1,4918)}, \quad (9.83)$$

cui corrispondono i diagrammi polari di risposta armonica di Fig. 9.36.

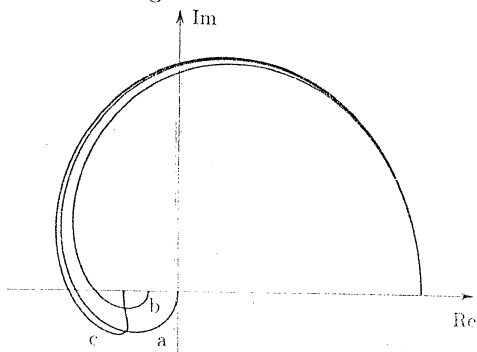


Figura 9.36 Diagrammi polari relativi alle funzioni (9.81–9.83) per $K = 1$.

ESEMPIO 9.8.3 In relazione al sistema di tipo 1

$$F(s) = K \frac{1}{s(s+1)(s+1,6)} \quad (9.84)$$

con $T = 1$ e ancora con tenuta di ordine zero e di ordine uno si ottengono le funzioni di trasferimento discrete

$$F_1(z) = K \frac{0,0911(z + 0,1328)(z + 2,0567)}{(z - 0,2019)(z - 0,3679)(z - 1)} \quad (9.85)$$

$$F_2(z) = K \frac{0,1167(z + 0,1710)(z + 2,6493)}{z(z - 0,2019)(z - 1)} \quad (9.86)$$

cui corrispondono i diagrammi polari di risposta armonica di Fig. 9.37. In questo caso sia il sistema a tempo continuo sia i corrispondenti sistemi a tempo discreto presentano un unico intervallo di stabilità limitato, al di fuori del quale hanno rispettivamente

In questo caso i sistemi ad anello aperto sono instabili, con due poli a parte reale positiva nel caso a tempo continuo, cui corrispondono nella trasformazione $z = e^{Ts}$ due poli esterni al cerchio di raggio unitario in quello a tempo discreto; per valori di K sufficientemente elevati peraltro i diagrammi polari completi possono circondare due volte il punto critico in senso antiorario, il che corrisponde alla stabilità dei corrispondenti sistemi in retroazione.

Si noti che nel caso dei sistemi a tempo discreto l'intervallo di stabilità è limitato: precisamente, mentre in relazione al diagramma (a) si ricava dal diagramma polare (o applicando il criterio di Routh) l'intervallo $2,4 < K < \infty$, per (b) e (c) si deducono rispettivamente gli intervalli $2,96 < K < 8,32$ e $2,24 < K < 4,51$.

due poli a parte reale positiva e due poli esterni al cerchio di raggio unitario.

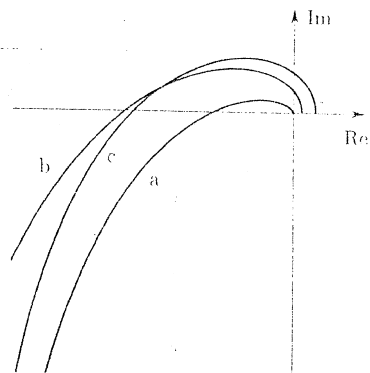


Figura 9.37 Diagrammi polari relativi alle funzioni (9.84–9.86) per $K = 1$.

Come nel caso dei sistemi a tempo continuo, si può dare del criterio di Nyquist una formulazione più generale, che comprende anche il caso in cui il guadagno di anello abbia zeri e/o poli di modulo unitario. Questa è data dal seguente teorema.

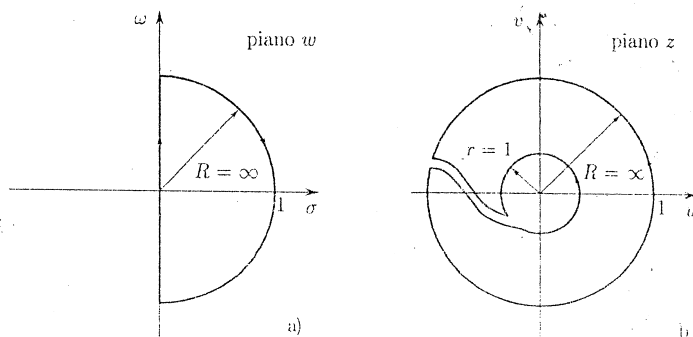
TEOREMA 9.8.1. CRITERIO DI NYQUIST Un sistema in retroazione a tempo discreto avente il guadagno di anello $F(z)$ è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma polare della funzione $F(e^{j\omega T})$, tracciato per ω variabile da $-\pi/T$ a π/T , circonda il punto critico $(-1 + j0)$ per tanti giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli di $F(z)$ esterni al cerchio di raggio unitario e per tanti mezzi giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli sulla circonferenza di raggio unitario.⁽⁵⁾

Criterio di Nyquist

⁽⁵⁾ Si ricorda che le rotazioni "al finito" sono quelle relative a valori non nulli e non infiniti del modulo.

Figura 9.38

Domini di integrazione per la dimostrazione del criterio di Nyquist per sistemi continui e sistemi discreti.



Dimostrazione (cenno) La dimostrazione si riconduce a quella per i sistemi a tempo continuo, che utilizza il teorema dell'indice logaritmico. Invece della curva chiusa di Fig. 9.38a, che circonda la parte di piano complesso in cui occorre rilevare la presenza di poli del sistema in retroazione nel caso a tempo continuo (semipiano a destra dell'asse immaginario), nel caso a tempo discreto, in cui occorre rilevare la presenza di poli esterni al cerchio di raggio unitario, si impiega quella di Fig. 9.38b, costituita dalla circonferenza di raggio unitario e dalla circonferenza all'infinito, collegate da un qualunque arco di curva che non passi per zeri o poli della $F(z)$: tale arco non dà alcun contributo nel computo dei giri, essendo percorso prima in un senso e poi nel senso opposto.

Attraverso la formulazione specifica del criterio di Nyquist vengono estesi ai sistemi a tempo discreto senza variazioni di rilievo i procedimenti di sintesi per tentativi. Si possono infatti definire i *margini di stabilità*, cioè il margine di ampiezza M_A e quello di fase M_F , fondamentali per sviluppare il progetto nel dominio delle frequenze, cioè con riferimento ai diagrammi di Bode e di Nichols.

La definizione di tali margini è identica a quella dei sistemi a tempo continuo: M_A è l'inverso del guadagno di anello alla pulsazione di fase π , M_F è l'angolo che occorre sottrarre alla fase, normalmente negativa, alla pulsazione di guadagno unitario (detta anche di intersezione o di incrocio) per ottenere il valore $-\pi$. Anche i valori che normalmente si assumono per i primi tentativi sono gli stessi, cioè M_A da 4 a 6 (da 12 a 16 db) e M_F da 45° a 60° .

La sintesi nel piano w

Sia $F(z)$ la funzione di trasferimento di anello di un sistema a tempo discreto e $\Phi(w)$ la funzione da essa ottenuta applicando la (1.36): poiché i valori di $F(e^{j\omega T})$, $0 \leq \omega \leq \pi/T$, sono identici a quelli di $\Phi(j\omega)$, $0 \leq \omega \leq \infty$, e ai poli di $F(z)$ interni ed esterni al cerchio di raggio unitario corrispondono poli di $\Phi(w)$ interni ed esterni al semipiano sinistro, il criterio di Nyquist per sistemi a tempo continuo applicato a $\Phi(w)$, equivale a quello per sistemi a tempo discreto applicato a $F(z)$. Anche i margini di stabilità e i luoghi a M e ad N costante si possono riferire a $\Phi(w)$. Inoltre gli errori a regime nella risposta ai segnali di saggio determinati con riferimento a $\Phi(w)$ con le relazioni relative ai sistemi a tempo continuo sono gli stessi che si possono determinare con riferimento a $F(z)$ con le relazioni relative ai sistemi a tempo discreto, riportate all'inizio del presente paragrafo. Infatti, posto che $F(z)$ sia di tipo γ , si può scrivere

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{(z-1)^\gamma},$$

Margini di stabilità
Margine di ampiezza
Margine di fase
Diagrammi di Bode
Diagrammi di Nichols

Pulsazione di
guadagno unitario
Pulsazione di
intersezione
Pulsazione di incrocio

in cui $F_1(z)$ è priva di poli unitari. Risulta

$$\Phi(w) = \frac{\Phi_1(w)}{(wT)^\gamma} \left(1 - \frac{wT}{2}\right)^\gamma,$$

dove $\Phi_1(w)$ rappresenta la funzione ottenuta da $F_1(z)$ applicando la (1.36), priva di poli nell'origine in quanto in tale trasformazione a $z = 1$ corrisponde $w = 0$. Risulta

$$\lim_{w \rightarrow 0} w^\gamma \Phi(w) = \frac{1}{T^\gamma} \Phi_1(0) = \frac{1}{T^\gamma} F_1(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T^\gamma} (z-1)^\gamma F(z).$$

Sulla scorta di tali proprietà, la sintesi per tentativi dei sistemi di controllo a tempo discreto si può ricondurre a quella dei sistemi a tempo continuo attraverso la trasformazione dal piano z al piano w .

La procedura si articola nei seguenti passi:

1. si ricava, nel piano z , la funzione di trasferimento del sistema controllato $G(z)$, che ovviamente dipende dal dispositivo di tenuta adottato;
2. si trasforma la $G(z)$ nella corrispondente $G(w)$ mediante la posizione (9.36)⁽⁶⁾;
3. si ricava la funzione di trasferimento del regolatore $G_r(w)$ in base ai normali procedimenti di sintesi per tentativi relativi ai sistemi a tempo continuo, basati sui margini di stabilità;
4. si trasforma inversamente la $G_r(w)$ nella corrispondente $G_r(z)$ operando la posizione (9.35);
5. si procede alla verifica del comportamento del sistema a tempo discreto in retroazione e alla eventuale modifica della $G_r(w)$, ritornando al punto 3, se le specifiche non risultano soddisfatte.

È opportuno sottolineare che i poli della funzione di trasferimento $G(w)$ e quelli della corrispondente $G(z)$ non sono legati dalla stessa relazione in cui si corrispondono quelli della $G(s)$ e quelli della $G(z)$, ma solo da una sua approssimazione; pertanto i luoghi del piano w corrispondenti a dati valori del tempo di assestamento e del coefficiente di smorzamento, che si possono ottenere trasformando secondo la (9.35) quelli ricavati per il piano z al Paragrafo 9.4, non sono gli stessi del piano s da cui questi ultimi sono stati dedotti utilizzando la relazione $z = e^{Ts}$, ma sono ad essi sufficientemente prossimi solo per valori del modulo relativamente piccoli rispetto alla pulsazione di campionamento Ω .

Il passaggio al piano w consente anche l'applicazione del criterio di Routh per determinare gli intervalli di stabilità in funzione della costante di guadagno di anello o di altri parametri. In questo caso nelle formule di trasformazione si può assumere qualunque valore di T , ad esempio $T = 1$, in quanto in ogni caso alla circonferenza di raggio unitario del piano z viene a corrispondere l'asse immaginario del piano w .

♦ Il luogo delle radici

L'applicazione del metodo del luogo delle radici ai sistemi di controllo in retroazione a tempo discreto non presenta differenze sostanziali rispetto

⁽⁶⁾ Nelle (9.35) e (9.36) si può porre $T = 1$, in quanto al variare di T varia solo la scala dei moduli nel piano w , quindi la scala delle frequenze nella funzione di risposta armonica, senza alcuna influenza sui margini di stabilità. È comunque preferibile mantenere la dipendenza da T per conservare nel piano w la validità delle specifiche relative agli errori a regime in risposta ai segnali tipici.

al caso dei sistemi a tempo continuo. Poiché l'equazione caratteristica si presenta nella stessa forma, cioè

$$1 + K F(z) = 0, \quad (9.87)$$

le regole per costruire il luogo delle radici in funzione di K , noti gli zeri e i poli di $F(z)$, sono ovviamente le stesse. L'interpretazione dell'andamento del luogo in rapporto alla stabilità è diversa, dato che occorre riferirsi al cerchio di raggio unitario anziché al semipiano sinistro, come pure diverse sono gli andamenti tipici dei luoghi delle radici, per le differenti caratteristiche che presenta la funzione di trasferimento di anello rispetto al caso a tempo continuo.

Le funzioni di trasferimento discrete ottenute per campionamento della risposta dei sistemi a tempo continuo presentano in genere numerosi zeri dovuti al fatto che il primo campione non nullo nella risposta all'impulso o al gradino è quello per $k = 1$. Ad esempio, si consideri la risposta al gradino unitario campionata di un sistema continuo: anche se la funzione di trasferimento del sistema $G(s)$ presenta n poli e nessuno zero (il che comporta l'annullarsi delle derivate della risposta all'istante iniziale fino alla $(n-1)$ -esima), il campione per $k = 1$ è in genere diverso da zero, il che significa che nella corrispondente $G_u(z)$ la differenza fra i gradi del polinomio a numeratore e a denominatore è pari ad uno: questa proprietà si conserva nella $G(z)$ corrispondente alla $G(s)$ secondo la tenuta di ordine zero, che si ottiene moltiplicando $G_u(z)$ per $(z-1)/z$.

Per la presenza di questi zeri il luogo delle radici risulta più "adagiato sull'asse reale", con un solo asintoto, dato dal semiasse reale negativo, e numerosi punti di emergenza e di convergenza.

Solo quando la funzione di trasferimento continua presenta un polo finito rilevante, pari a numerosi periodi di campionamento, nella relativa funzione di trasferimento discreta vengono ad aggiungersi numerosi poli (nell'origine), che incrementano la differenza fra i gradi dei polinomi a numeratore e a denominatore e producono di conseguenza altrettanti ulteriori asintoti.

ESEMPIO 9.8.4 Si consideri il sistema a tempo continuo avente la funzione di trasferimento di anello

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+5)}. \quad (9.88)$$

il cui luogo delle radici è rappresentato in Fig. 9.39. La corrispondente funzione di trasferimento discreta

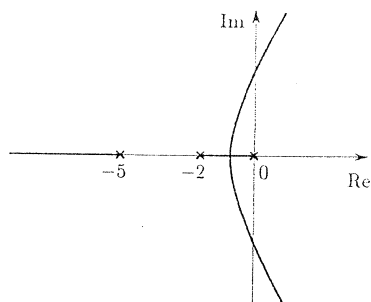


Figura 9.39 Luogo delle radici del sistema a tempo continuo (9.88).

secondo la tenuta di ordine zero e periodo di campionamento $T = 0,2$ sec è

$$G(z) = \frac{9,549 \cdot 10^{-3} (z + 0,1853)(z + 2,6822)}{(z - 1)(z - 0,6703)(z - 0,3679)}. \quad (9.89)$$

Il corrispondente luogo delle radici è riportato in Fig. 9.40.

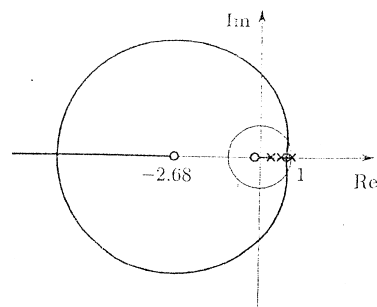


Figura 9.40 Luogo delle radici del sistema a tempo discreto (9.89).

Esso è ripetuto, in una diversa scala, in Fig. 9.41.

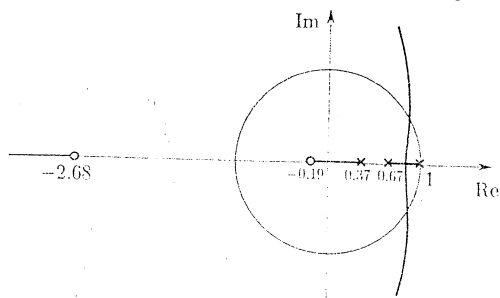


Figura 9.41 Luogo delle radici ingrandito del sistema a tempo discreto (9.89).

È interessante analizzare il luogo delle radici anche nel piano w . Trasformando la (9.89) secondo la (9.36), si ottiene la funzione di trasferimento

$$G(w) = \frac{2.864 \cdot 10^{-3} (w - 10.0)(w + 14.55)(w - 21.89)}{w(w + 1.9738)(w + 4.6212)} \quad (9.90)$$

cui corrisponde il luogo delle radici di Fig. 9.42.

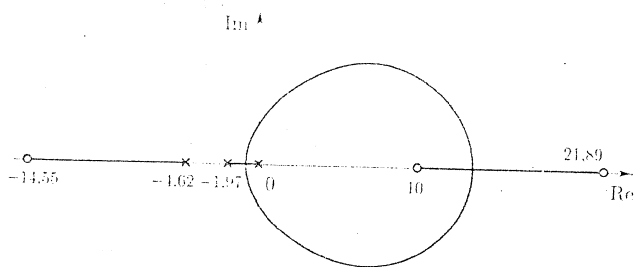


Figura 9.42 Luogo delle radici del sistema a tempo discreto (9.89) nel piano w .

Il campo di stabilità in K , al cui limite superiore avviene l'intersezione di questo luogo con l'asse immaginario o dei due precedenti con la circonferenza di raggio unitario, può essere determinato utilizzando il criterio di Routh per l'equazione caratteristica relativa alla (9.90). Esso risulta $0 < K < 4.2463$, mentre

per il sistema a tempo continuo (9.88) è $0 < K < 7$; tale decremento del campo di stabilità è dovuto alla presenza del campionamento e risulta ovviamente dipendente dal periodo T .

Nel caso che il sistema a tempo continuo presenti un ritardo finito, cioè sia

$$G_1(s) = \frac{10e^{-0.5s}}{s(s+2)(s+5)} \quad (9.91)$$

il corrispondente sistema a tempo discreto, dedotto con la trasformata Z modificata descritta al Paragrafo C9.3 adottando ancora la tenuta di ordine zero e il periodo di campionamento $T = 0.2$, è descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_1(z) = \frac{1.4049 \cdot 10^{-3} (z + 0.0313)}{z^3(z-1)(z-0.6703)(z-0.3679)} \times (z + 0.7058)(z + 15.965) \quad (9.92)$$

il cui luogo delle radici è riportato in Fig. 9.43: il polo triplo nell'origine e lo zero negativo ad esso vicino non sono stati contrassegnati con simboli come gli altri poli e zeri per mancanza di spazio ma con asterisco. Il campo di stabilità del sistema discreto (9.92) è $0 < K < 1.5482$, mentre quello del sistema continuo (9.91), calcolato utilizzando un'approssimante di Padé del ritardo finito di ordine opportuno, è $0 < K < 1.7522$.

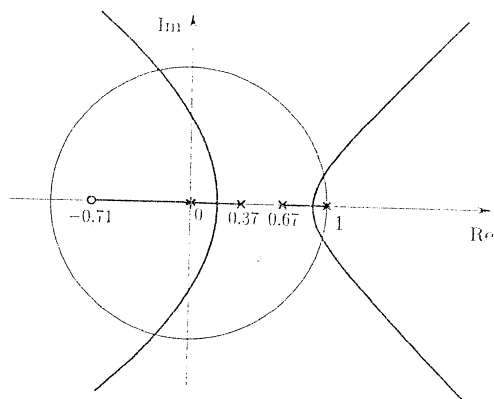


Figura 9.43 Luogo delle radici del sistema a tempo discreto (9.92).

◆ I regolatori standard

I classici regolatori standard sono facilmente realizzabili per via digitale, con il vantaggio non indifferente, specie nei grandi impianti, di rendere possibile anche la raccolta dati e la trasmissione a distanza dei vari segnali sotto forma digitale, in modo da renderli disponibili in tempo reale agli elaboratori preposti alla supervisione centralizzata e alla generazione dei segnali di riferimento (anch'essi digitali per un'agevole trasmissione a distanza) per i vari anelli di regolazione.

Le funzioni di trasferimento dei regolatori standard digitali si deducono da quelle dei corrispondenti regolatori analogici con le sostituzioni

$T_d(z-1)/Tz$ in luogo di $T_d s$ per l'azione derivativa e $Tz/T_i(z-1)$ in luogo di $1/(T_i s)$ per quella integrale. Tali sostituzioni conseguono agli sviluppi riportati al Paragrafo C9.2.

Indicando con $G_r(z) = M(z)/E(z)$ la funzione di trasferimento del regolatore, che lega le trasformate Z della variabile errore e della variabile manipolabile (a monte del convertitore D/A), si deduce pertanto, per i diversi tipi di regolatore:

Regolatore proporzionale	1. Regolatore proporzionale (P): $G_r(z) = K_p ; \tag{9.93}$
Regolatore integrale	2. Regolatore integrale (I): $G_r(z) = K_p \frac{Tz}{T_i(z-1)} ; \tag{9.94}$
Regolatore proporzionale-integrale	3. Regolatore proporzionale-integrale (PI): $G_r(z) = K_p \left(1 + \frac{Tz}{T_i(z-1)} \right) ; \tag{9.95}$
Regolatore proporzionale-derivativo	4. Regolatore proporzionale-derivativo (PD): $G_r(z) = K_p \left(1 + \frac{T_d(z-1)}{Tz} \right) ; \tag{9.96}$
Regolatore proporzionale-integrale-derivativo	5. Regolatore proporzionale-integrale-derivativo (PID): $G_r(z) = K_p \left(1 + \frac{Tz}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{Tz} \right) . \tag{9.97}$

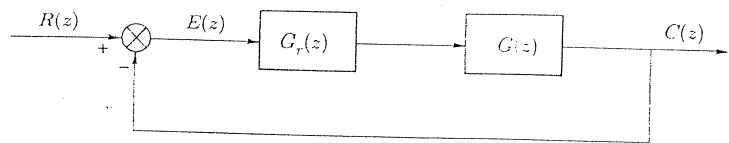
Sensibilità proporzionale
Costante di tempo dell'azione derivativa
Costante di tempo dell'azione integrale

Si ricorda che le costanti K_p , T_i e T_d si dicono rispettivamente *sensibilità proporzionale*, *costante di tempo dell'azione derivativa* e *costante di tempo dell'azione integrale*.

9.9. La sintesi diretta

La sintesi diretta dei regolatori digitali non presenta differenze sostanziali rispetto a quella dei regolatori analogici. Con riferimento al sistema con retroazione unitaria di Fig. 9.44, si indica con $G_0(z) = P_0(z)/Q_0(z)$ la funzione di trasferimento del sistema complessivo (detta *modello di riferimento* e scelta a priori in base alle specifiche), con $G_r(z)$ quella del regolatore e con $G(z) = P(z)/Q(z)$ quella del sistema controllato.

Figura 9.44
Sistema digitale con retroazione unitaria.



Dalla relazione

$$G_0(z) = \frac{G_r(z) G(z)}{1 + G_r(z) G(z)}, \quad (9.98)$$

attraverso i passaggi

$$G_0(z) (1 + G_r(z) G(z)) = G_r(z) G(z),$$

$$G_r(z) G(z) (1 - G_0(z)) = G_0(z),$$

si ricava

$$G_r(z) = \frac{G_0(z)}{1 - G_0(z)} \frac{1}{G(z)} = \frac{P_0(z)}{Q_0(z) - P_0(z)} \frac{Q(z)}{P(z)}. \quad (9.99)$$

Come nel caso a tempo continuo, il modello di riferimento deve soddisfare le seguenti condizioni:

1. *Condizione per la realizzabilità fisica del regolatore*: la differenza dei gradi dei polinomi a denominatore e a numeratore del modello di riferimento $G_0(z)$ deve essere non inferiore a quella del sistema controllato $G(z)$.

2. *Condizioni imposte dal comportamento a regime*: gli errori a regime si possono assegnare attraverso la scelta del modello di riferimento. L'errore di posizione è

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} (1 - G_0(z)) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Q_0(z) - P_0(z)}{Q_0(z)};$$

essendo $Q_0(1) \neq 0$ per la stabilità in senso stretto del modello di riferimento, si può scrivere

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{Q_0(1) - P_0(1)}{Q_0(1)}; \quad (9.100)$$

in un sistema a tempo discreto di tipo 1, che presenta errore di posizione nullo, si ha $Q_0(1) = P_0(1)$; in altri termini, esiste un polinomio $Q_1(z)$ tale che

$$Q_0(z) - P_0(z) = (z-1) Q_1(z). \quad (9.101)$$

Per ciò che riguarda l'errore di velocità, si ha

$$\begin{aligned} e_v &= \frac{1}{K_v} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} (1 - G_0(z)) \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Q_0(z) - P_0(z)}{Q_0(z)} \frac{T}{z-1} = \frac{Q_1(1)}{Q_0(1)} T, \end{aligned} \quad (9.102)$$

in cui $Q_1(z)$ è il polinomio definito dalla (9.101). In un sistema a tempo discreto di tipo 2, in cui l'errore di velocità è nullo, si ha $Q_1(1) = 0$; in altri termini, esiste un polinomio $Q_2(z)$ tale che

$$Q_0(z) - P_0(z) = (z-1)^2 Q_2(z); \quad (9.103)$$

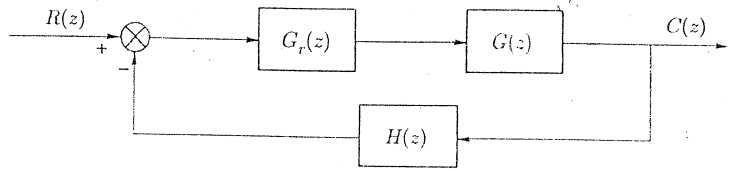
tale relazione equivale alle

$$P_0(1) = Q_0(1) \text{ e } (dP_0(z)/dz)|_{z=1} = (dQ_0(z)/dz)|_{z=1}.$$

Si considera ora il sistema di Fig. 9.45, in cui la retroazione non è unitaria: la $H(z)$ rappresenta la funzione di trasferimento di un trasduttore di

Figura 9.45

Sistema con retroazione digitale generica.



retroazione digitale o non dinamico (in questo caso si può porre $H(z) = h$). Si ha

$$G_0(z) = \frac{G_r(z) G(z)}{1 + G_r(z) G(z) H(z)} \quad (9.104)$$

e, attraverso i passaggi

$$G_0(z) (1 + G_r(z) G(z) H(z)) = G_r(z) G(z)$$

$$G_r(z) G(z) (1 - G_0(z) H(z)) = G_0(z) \quad (9.105)$$

si ricava

$$\begin{aligned} G_r(z) &= \frac{G_0(z)}{1 - G_0(z) H(z)} \frac{1}{G(z)} = \frac{G_0(z) H(z)}{1 - G_0(z) H(z)} \frac{1}{G(z) H(z)} = \\ &= \frac{\bar{P}_0(z)}{\bar{Q}_0(z) - \bar{P}_0(z)} \frac{\bar{Q}(z)}{P(z)} \end{aligned} \quad (9.106)$$

in cui si è convenuto di indicare con $\bar{P}_0(z)$ e $\bar{Q}_0(z)$ il numeratore e il denominatore di $G_0(z) H(z)$, e con $\bar{P}(z)$ e $\bar{Q}(z)$ quelli di $G(z) H(z)$. Operando queste sostituzioni, ci si riporta, pertanto, al caso di retroazione unitaria. Si noti che la condizione su $G_0(z)$ per la realizzabilità fisica del regolatore è la stessa, in quanto $H(z)$ si trova a moltiplicare sia $G_0(z)$ sia $G(z)$. Se $H(z)$ non è puramente algebrica le condizioni sugli errori a regime risultano più complesse, dovendosi definire l'errore in rapporto alla costante di regolazione desiderata, come è indicato all'inizio del Paragrafo 9.8.

Quando si debba tener conto di un disturbo in un sistema in retroazione è utile esprimere il legame fra la funzione di trasferimento che ne descrive l'influenza sull'uscita e il modello di riferimento, al fine di valutare rapidamente l'effetto di diverse possibili scelte di quest'ultima sulla reiezione del disturbo. Con riferimento allo schema di Fig. 9.46 si indica con $B_0(z)$ la funzione di trasferimento fra $D(z)$ e $C(z)$ nel sistema in retroazione: utilizzando la (9.98) si ha

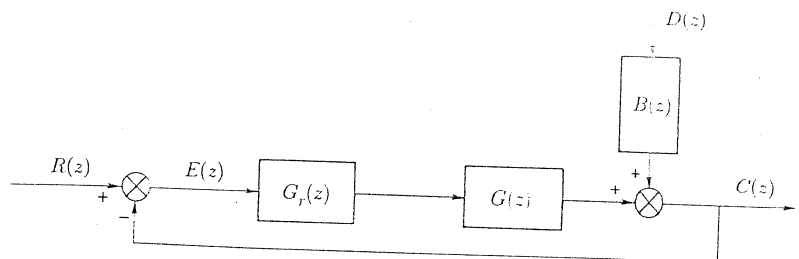
$$B_0(z) = \frac{B(z)}{1 + G_r(z) G(z)} = \frac{B(z) G_0(z)}{G_r(z) G(z)} \quad (9.107)$$

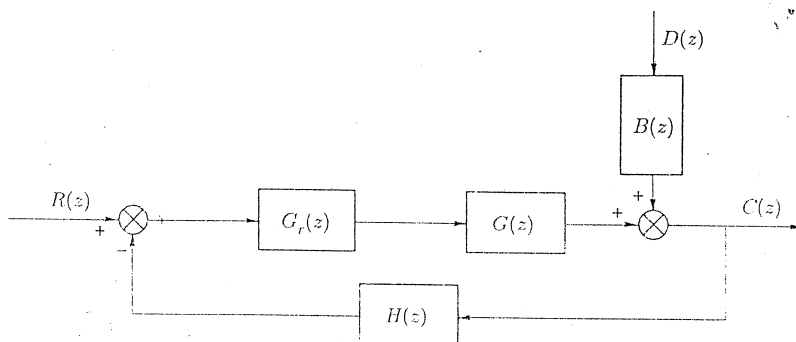
e, utilizzando la (9.99), si ottiene infine

$$B_0(z) = \frac{B(z) G_0(z)}{G(z)} \frac{(1 - G_0(z)) G(z)}{G_0(z)} = (1 - G_0(z)) B(z) \quad (9.108)$$

Figura 9.46

Sistema con retroazione unitaria e disturbo.



**Figura 9.47**

Sistema con retroazione digitale generica e disturbo.

Il caso di Fig. 9.47 si tratta in modo analogo, utilizzando le (9.104) e (9.1056) in luogo delle (9.98) e (9.99). Si ottiene

$$B_0(z) = \frac{B(z)}{1 + G_r(z) G(z) H(z)} = (1 - G_0(z) H(z)) B(z) . \quad (9.109)$$

Le (9.108, 9.109) non si applicano al caso, molto frequente nella pratica, in cui il disturbo è una variabile continua con trasformata di Laplace $D(s)$, che influisce sull'uscita $C(s)$ a monte del campionatore attraverso la funzione di trasferimento ad anello aperto $B(s)$; in questo caso ovviamente l'influenza sulla $C(z)$ non può essere espressa da una funzione di trasferimento; si può calcolare peraltro il contributo $C_d(z)$ di $D(s)$ sull'uscita campionata ad anello chiuso, nei due casi di retroazione unitaria e retroazione generica, mediante le relazioni

$$C_d(z) = (1 - G_0(z)) \mathcal{Z}(B(s) D(s), T) , \quad (9.110)$$

$$C_d(z) = (1 - G_0(z) H(z)) \mathcal{Z}(B(s) D(s), T) . \quad (9.111)$$

Si sottolinea che lo schema cui si è fatto riferimento per le precedenti considerazioni nel caso in cui la retroazione non sia unitaria o puramente algebrica è quello di Fig. 9.35a; nel caso di Fig. 9.35b, cioè quando il trasduttore di retroazione sia analogico e con una dinamica non trascurabile, le funzioni di trasferimento discrete da considerare sono $G(z)$ e $GH(z)$ anziché $G(z)$ e $G(z) H(z)$. Posto $F(z) = GH(z)$, si ha

$$G_0(z) = \frac{G_r(z) G(z)}{1 + G_r(z) F(z)} , \quad (9.112)$$

e, attraverso i passaggi

$$G_0(z) + G_0(z) G_r(z) F(z) = G_r(z) G(z) , \quad (9.113)$$

$$G_r(z) (G(z) - G_0(z) F(z)) = G_0(z) , \quad (9.114)$$

si deduce

$$\begin{aligned} G_r(z) &= \frac{G_0(z)}{G(z) - G_0(z) F(z)} = \frac{\frac{P_0(z)}{Q_0(z)}}{\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{P_0(z) P_F(z)}{Q_0(z) Q_F(z)}} \\ &= \frac{P_0(z) Q(z) Q_F(z)}{P(z) Q_0(z) Q_F(z) - P_0(z) P_F(z) Q(z)} , \end{aligned} \quad (9.115)$$

da cui, notando che il grado di $Q_F(z)$ è non inferiore a quello di $Q(z)$, dato che il prodotto $G(s) H(s)$ ha un numero di poli non inferiore a quello di

$G(s)$ e questo si mantiene anche quando si converte al discreto, risulta che la realizzabilità fisica del regolatore si ottiene ancora scegliendo il modello di riferimento in modo che la differenza dei gradi di $Q_0(z)$ e $P_0(z)$ sia non inferiore a quella dei gradi di $Q(z)$ e $P(z)$.

Le formule per la sintesi diretta precedentemente dedotte possono essere applicate quando il sistema controllato non si presenti instabile o con zeri esterni al cerchio di raggio unitario, in quanto il procedimento di sintesi che esse realizzano implica cancellazioni polo-zero fra la funzione di trasferimento del regolatore e quella del sistema controllato. Per ovviare a tale inconveniente si usano gli stessi accorgimenti del caso a tempo continuo: i poli instabili vengono eliminati mediante un'opportuna retroazione stabilizzante, per applicare poi il procedimento di sintesi diretta al sistema stabile così ottenuto, mentre gli zeri con modulo maggiore di uno vengono ripetuti nel modello di riferimento, in modo che la conseguente cancellazione diretta nella relazione che fornisce la funzione di trasferimento del regolatore vi eviti l'introduzione di poli instabili.

Il modello di riferimento

La scelta del modello di riferimento per la sintesi diretta dei sistemi di controllo digitali si presenta più articolata e complessa di quella dei sistemi analogici. Le difficoltà sono peraltro facilmente superabili mettendo in atto alcuni semplici accorgimenti.

Si consideri un sistema a tempo continuo $G(s)$ unito a un sistema di controllo digitale attraverso un dispositivo di tenuta di ordine zero o uno, sia $G(z)$ la corrispondente funzione di trasferimento discreta. Questa in genere ha un numero di zeri molto maggiore di $G(s)$: infatti la differenza $n - m$ fra i gradi dei polinomi a denominatore e numeratore è uguale ad uno se il sistema continuo è puramente dinamico o la tenuta è di ordine uno ed è uguale a zero in caso contrario⁽⁷⁾.

$G(z)$ in genere presenta numerosi zeri con modulo maggiore di uno, che, come sopra ricordato, devono essere presenti anche nel modello di riferimento, vincolandone la scelta in modo apparentemente gravoso.

Tenuto conto di ciò, per la scelta del modello di riferimento si suggerisce il seguente procedimento:

- i) si sceglie un modello di riferimento a tempo continuo $G_0(s)$ che soddisfi, con un certo margine, tutte le specifiche imposte (massima sovraelongazione, tempo di assestamento, errori a regime) e che presenti una differenza fra il numero dei poli e quello degli zeri pari a quella di $G(s)$;
- ii) si ricava da esso la $G_0(z)$ in base alla tenuta di ordine zero (che conserva la massima sovraelongazione e l'errore a regime nella risposta al gradino) o a quella di ordine uno (che peggiora di poco la massima sovraelongazione ma mantiene invariati gli errori a regime sia nella risposta al gradino sia in quella alla rampa);
- iii) da questa si ricava un modello di riferimento modificato $G'_0(z)$ che abbia fra i suoi zeri tutti quelli di modulo maggiore di uno di $G(z)$ e che soddisfi ancora le specifiche relative al comportamento a regime;

⁽⁷⁾ Nel caso dei sistemi a tempo continuo $n - m$ è l'ordine della prima derivata della risposta al gradino diversa da zero in $t = 0+$, mentre nel caso dei sistemi a tempo discreto $n - m$ è l'istante k_ℓ del primo campione non nullo della risposta al gradino discreta: quando questa si ottenga per campionamento di quella continua, risulta in genere $k_\ell = 1$ ($k_\ell = 0$ quando il sistema a tempo continuo non sia puramente dinamico).

iv) si verifica se $G'_0(z)$ soddisfa ancora le specifiche relative al transitorio: se ciò avviene, si deduce direttamente la funzione di trasferimento del regolatore, altrimenti si ritocca la scelta operata al punto 1 e si ripete la procedura.

Per la scelta di cui al punto i), nel caso dei sistemi di tipo zero o uno si possono utilizzare le funzioni di trasferimento dei filtri di Bessel o di Butterworth; il numeratore è una costante e il denominatore è un polinomio di grado opportuno, i cui poli sono disposti lungo una curva (una semicirconferenza nel caso di Butterworth) nel semipiano sinistro del piano complesso: i parametri sui quali si può agire nella scelta sono il numero dei poli (ordine del filtro), che è imposto dalla condizione di realizzabilità fisica, e la pulsazione naturale, cioè la distanza dei poli dall'origine, cui è legata la scala dei tempi della risposta (tempo di ritardo, di salita, di assestamento).

*Filtro
di Bessel
di Butterworth*

Per ciò che riguarda il punto iii) della procedura, confrontando gli zeri di $G_0(z)$ e $G(z)$ si opera la fattorizzazione

Fattorizzazione

$$P_0(z) = P_{01}(z) P_{02}(z), \quad (9.116)$$

$$P(z) = P_1(z) P_2(z), \quad (9.117)$$

in cui con $P_{02}(z)$ e $P_2(z)$ si indicano i polinomi monici aventi come radici rispettivamente quelle di $P_0(z)$ che si vogliono eliminare e quelle di $P(z)$ che si vogliono ad esse sostituire (queste ultime comprendono quelle di modulo maggiore di uno)⁽⁵⁾. Immaginando che tali radici si cancellino, si stabilisce per il regolatore la funzione di trasferimento

$$G_r(z) = \frac{k_0 P_{01}(z)}{Q_0(z) - P_0(z)} \frac{Q(z)}{P_1(z)}, \quad (9.118)$$

in cui k_0 è un parametro libero; si noti che il regolatore così definito mantiene il tipo γ di sistema corrispondente al modello di riferimento originario, dovuto al fatto che il polinomio $Q_0(z) - P_0(z)$ ammette il fattore $(z-1)^\gamma$. Il modello di riferimento modificato è

$$\begin{aligned} \bar{G}_0(z) &= \frac{\bar{P}_0(z)}{Q_0(z)} = \frac{\frac{k_0 P_{01}(z)}{Q_0(z) - P_0(z)} \frac{Q(z)}{P_1(z)} \frac{P_1(z) P_2(z)}{Q(z)}}{1 + \frac{k_0 P_{01}(z)}{Q_0(z) - P_0(z)} \frac{Q(z)}{P_1(z)} \frac{P_1(z) P_2(z)}{Q(z)}} \\ &= \frac{k_0 P_{01}(z) P_2(z)}{Q_0(z) - P_0(z) + k_0 P_{01}(z) P_2(z)}. \end{aligned} \quad (9.119)$$

Il parametro k_0 si può scegliere in modo che il valore del primo errore a regime non nullo (cioè quello di velocità nei sistemi di tipo 1, di accelerazione nei sistemi di tipo 2) si conservi passando da $G_0(z)$ a $\bar{G}_0(z)$. Tale scelta conduce alla relazione

$$k_0 = \frac{P_{02}(1)}{P_2(1)}. \quad (9.120)$$

⁽⁵⁾ Se $G_0(z)$ è stata ottenuta convertendo un modello di riferimento continuo $G_0(s)$ soddisfacente la condizione di realizzabilità fisica in rapporto a $G(s)$, in genere presenta una configurazione di zeri non molto diversa da quella di $G(z)$.

Si consideri infatti la (9.111) o la formula analoga per l'errore di accelerazione: dato che vale l'eguaglianza $\bar{Q}_0(z) - \bar{P}_0(z) = Q_0(z) - P_0(z)$ e che $Q_0(z) - P_0(z)$ ammette il fattore $(z-1)^\gamma$, risulta

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{Q}_0(z) - \bar{P}_0(z)}{(z-1)^\gamma} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Q_0(z) - P_0(z)}{(z-1)^\gamma}; \quad (9.121)$$

affinché gli errori siano uguali deve essere pertanto $\bar{Q}_0(1) = Q_0(1)$, relazione da cui segue la (9.120).

Quanto sopra esposto sulla scelta del modello di riferimento non vuole rappresentare la formulazione di una serie di criteri rigidi, ma solo alcuni suggerimenti per procedure che devono essere in genere adattate caso per caso, a seconda delle particolari esigenze.

9.10. Frequenza di campionamento e filtro antialiasing

La scelta della frequenza di campionamento nei sistemi di controllo digitali è uno dei punti più delicati del progetto, in quanto comporta la ricerca del miglior compromesso fra prestazioni e costo della realizzazione. A parità di potenza di calcolo disponibile, un campionamento più lento si traduce in maggior tempo a disposizione per le elaborazioni che riproducono la funzione di trasferimento discreta del regolatore, mentre un campionamento più rapido si traduce in minore difficoltà nel progetto e nella riduzione del fenomeno dell'aliasing.

Convienne, per la scelta della frequenza di campionamento, assumere come riferimento la banda passante ω_f desiderata per il sistema in retroazione: per il teorema di Shannon la frequenza di campionamento deve essere non inferiore al doppio della banda passante ad anello chiuso, cioè $\Omega > 2\omega_f$. Tenendo presente che il taglio alla pulsazione ω_f non è netto, si può assumere come buona indicazione empirica il campo di valori

$$6 \leq \frac{\Omega}{\omega_f} \leq 20. \quad (9.122)$$

Strettamente collegato con la scelta della pulsazione di campionamento è il progetto dell'eventuale *filtro antialiasing*, cioè del filtro avente la funzione di evitare che disturbi ad alta frequenza producano alias nella banda passante del sistema di controllo e pertanto l'inseguimento di segnali spuri. In particolare l'aliasing può tradursi in derive del punto di equilibrio, influenzando così sulla precisione statica del sistema. Il filtro è tipicamente collocato fra il trasduttore analogico e il campionatore. Con riferimento alla Fig. 9.35b, esso può essere considerato parte integrante del blocco con funzione di trasferimento $H(s)$. Il filtro antialiasing ha la funzione di attenuare il più possibile i disturbi a pulsazione maggiore di $\Omega/2$ senza peraltro che il ritardo di fase inevitabilmente introdotto venga ad influire in modo sensibile sul margine di fase del sistema in retroazione. Ciò si ottiene assumendo per il filtro una frequenza di taglio sensibilmente maggiore della banda passante e di conseguenza una pulsazione di campionamento Ω relativamente elevata. Come filtri antialiasing si possono utilizzare i filtri di Bessel o di Butterworth descritti al Paragrafo 7.2.

9.11. Esercizi

9.11.1 Sintesi nel piano w con formule di inversione: rete anticipatrice

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)} \quad (9.123)$$

si progetti un regolatore digitale in retroazione unitaria con tenuta di ordine zero e periodo di campionamento $T = 0,2$ sec che soddisfi le seguenti specifiche:

1. massima sovralongazione della risposta al gradino: $S < 20\%$;
2. errore a regime nella risposta alla rampa unitaria: $\epsilon_p = 0,5$.

Soluzione Anzitutto si trasforma la (9.123) assumendo la tenuta di ordine zero: si ottiene così la funzione di trasferimento discreta

$$G(z) = \frac{8,197 \cdot 10^{-3} (z + 0,1442) (z + 2,342)}{(z - 1) (z - 0,1353) (z - 0,8187)} \quad (9.124)$$

la cui trasformata dal piano z al piano w è

$$G(w) = \frac{2,280110^{-3} (w - 10) (w + 13,37) (w - 24,9)}{w (w + 0,9967) (w + 7,616)} \quad (9.125)$$

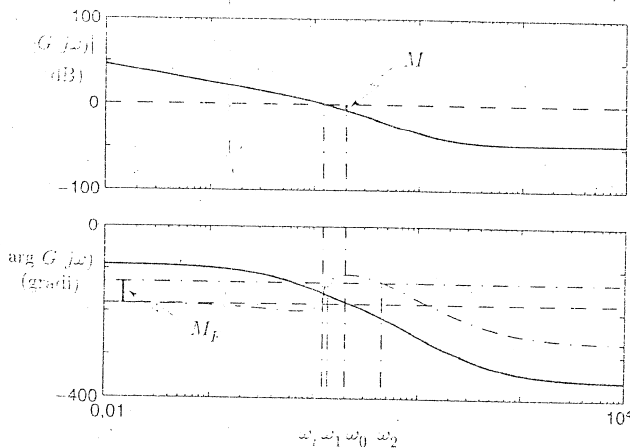


Figura 9.48 Costruzione grafica per la rete anticipatrice riferita alla funzione $K_r G(w)$.

La costante di guadagno della (9.125) è uguale ad uno, per cui si sceglie il guadagno statico della rete

corretttrice $K_r = 2$ per soddisfare la specifica 2. Il progetto della rete verrà realizzato nel piano w utilizzando le formule di inversione. In fig. 9.48 è riportata la costruzione grafica a suo tempo presentata per la determinazione dei parametri M e φ da impiegare nelle formule di inversione (vedi Esercizio 6.5.2). Nel caso in esame dalla costruzione per la scelta $\omega = 2$ si deduce $M = 2,23$, $\varphi = 45,5^\circ$, da cui $\alpha = 0,16$, $\tau = 1$. La funzione di trasferimento del regolatore nel piano w è pertanto

$$G_r(w) = K_r \frac{1 - \tau w}{1 - \alpha \tau w} = \frac{2(1 + w)}{1 + 0,16 w} = \frac{12,5(w + 1)}{w + 6,25} \quad (9.126)$$

cui corrisponde nel piano z

$$G_r(z) = \frac{8,46 (z - 0,82)}{z - 0,23} \quad (9.127)$$

In Fig. 9.49 sono riportati la risposta al gradino unitario e l'andamento dell'errore nella risposta alla rampa unitaria del sistema di controllo ottenuto. Quest'ultimo è dedotto antitrasformando la relazione

$$\left(1 - \frac{G_r(z) G(z)}{1 + G_r(z) G(z)}\right) \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

che rappresenta la differenza fra la rampa e la risposta alla rampa del sistema complessivo ad anello chiuso.

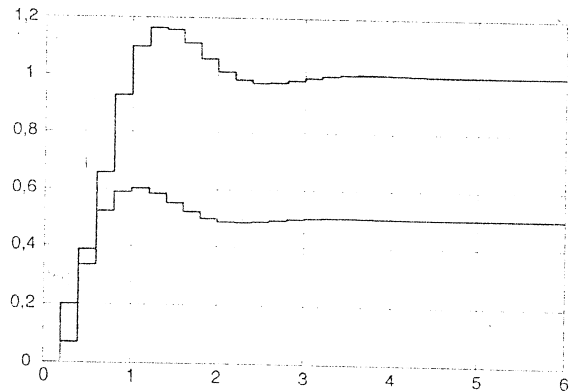


Figura 9.49 Risposta al gradino unitario ed errore nella risposta alla rampa unitaria del sistema (9.124) con regolatore (9.127).

9.11.2 Sintesi nel piano w : regolatore PI

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2e^{-2s}}{s + 2} \quad (9.128)$$

si progetti un regolatore digitale in retroazione unitaria di tipo 1 con tenuta di ordine zero e periodo di campionamento $T = 0,2$ sec che presenti una

massima sovralongazione della risposta al gradino $S < 20\%$.

Soluzione Trasformando al discreto la (9.128) secondo l'equivalenza di ordine zero si deduce

$$G(z) = \frac{0,3297}{z^{10} (z - 0,6703)} \quad (9.129)$$

e, passando al piano w ,

$$G(w) = \frac{-0,1974(w-10)^{11}}{(w+1,974)(w+10)^{10}} \quad (9.130)$$

Si sceglie un regolatore che operi per cancellazione polo-zero, con funzione di trasferimento

$$G_r(w) = K_r \frac{w+1,974}{w} \quad (9.131)$$

per cui si ha

$$G_r(w)G(w) = K_r \frac{-0,194(w-10)^{11}}{w(w+10)^{10}} \quad (9.132)$$

Si vuole ora scegliere il valore di K_r che corrisponde al margine di fase di 50° . Si pone nella (9.132) $w = j\omega$ e si determina la fase in funzione di ω come

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 21 \arctan \frac{\omega}{10}.$$

La pulsazione di incrocio ω_0 si determina imponendo che a tale pulsazione si presenti il margine di fase voluto, cioè

$$\varphi(\omega_0) = -\pi + M_F = -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - M_F\right),$$

cioè

$$21 \arctan \frac{\omega_0}{10} = 40 \frac{\pi}{180}.$$

da cui

$$\omega_0 = 10 \tan \frac{40\pi}{21 \cdot 180} = 0,3326;$$

si impone poi che a tale pulsazione il guadagno di anello abbia modulo unitario, cioè che sia

$$\frac{K_r 0,1974 \sqrt{\omega_0^2 + 10^2}}{\omega_0} = 1,$$

ricavando il valore $K_r = 0,1684 \text{ sec}^{-1}$. La funzione di trasferimento del regolatore è pertanto

$$G_r(w) = \frac{0,1684(w+1,974)}{w} \quad (9.133)$$

e, nel piano z ,

$$G_r(z) = \frac{0,216(z-0,6703)}{z-1} \quad (9.134)$$

In Fig. 9.50 è riportata la risposta al gradino unitario del sistema in retroazione così ottenuto.

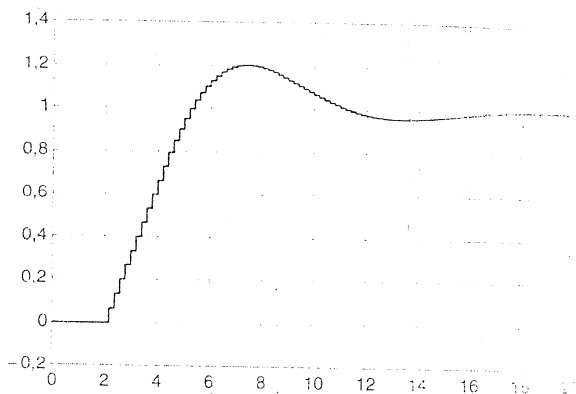


Figura 9.50 Risposta al gradino unitario del sistema (9.129) con regolatore (9.134).

9.11.3 Sintesi diretta: sistema di tipo 1

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+5)}, \quad (9.135)$$

si vuole progettare un regolatore digitale in retroazione unitaria con tenuta di ordine zero e periodo di campionamento $T = 0,2 \text{ sec}$ che soddisfi le seguenti specifiche:

1. massima sovralongazione della risposta al gradino: $S = 10\%$;
2. errore a regime nella risposta alla rampa unitaria: $e_v = 0,5$.

Soluzione Come modello di riferimento a tempo continuo, da convertire poi a tempo discreto, si sceglie la funzione di trasferimento di un filtro di Butterworth di ordine 3, che, scritta esplicitando la pulsazione naturale ω_n , è:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} = \\ &= \frac{1}{(s/\omega_n)^3 + 2(s/\omega_n)^2 + 2(s/\omega_n) + 1}. \end{aligned} \quad (9.136)$$

Si verifica, dal grafico della corrispondente risposta

al gradino normalizzata, cioè riportata in funzione di $\omega_n t$, che la specifica 1 viene soddisfatta con un certo margine. L'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria è

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(1 - G_0(s)) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q_0(s) - P_0(s)}{s Q_0(s)} = \frac{2}{\omega_n}$$

ed assume il valore voluto per $\omega_n = 4$.

Si passa ora al tempo discreto. Anzitutto si devono convertire $G(s)$ e $G_0(s)$. Per $G(s)$ la conversione deve essere effettuata in base alla tenuta di ordine zero, come richiesto dalle specifiche, mentre la scelta rimane aperta per ciò che riguarda il modello di riferimento. Si sceglie la tenuta di ordine zero tenendo conto del ritardo illustrato in Fig. 9.24b, che aumenta l'errore di velocità di metà del periodo di campionamento, per cui si assume $\omega_n = 5$ nella funzione di trasferimento da convertire (nel caso continuo tale scelta corrisponderebbe ad $e_v = 0,4$: sommando $T/2 = 0,1$ si ottiene appunto $e_v = 0,5$). Si ricava

$$G(z) = \frac{9,06 \cdot 10^{-3} (z + 0,1768) (z + 2,5430)}{(z - 0,3679) (z - 0,6703) (z - 0,8187)}, \quad (9.137)$$

$$G_0(z) = \frac{9,861 \cdot 10^{-2} (z + 0,1686) (z + 2,1951)}{(z - 0,3679) ((z - 0,3929)^2 + 0,4620^2)} \quad (9.138)$$

Si nota che, casualmente, le due funzioni di trasferimento hanno un polo uguale, che deriva dal fatto che $G(s)$ e $G_0(s)$ presentano entrambe il polo -5 . Inoltre i loro zeri sono non molto diversi; in relazione alla fattorizzazione (9.116), (9.117) si assume pertanto

$$P_1(z) = 9,06 \cdot 10^{-3},$$

$$P_2(z) = (z + 0,1768) (z + 2,5430),$$

$$P_{01}(z) = 9,861 \cdot 10^{-2},$$

$$P_{02}(z) = (z + 0,1686) (z + 2,1951);$$

il nuovo modello di riferimento, dato dalla (9.119) con la posizione (9.120) (che assicura che la specifica sull'errore di velocità sia soddisfatta) è

$$G'_0(z) = \frac{8,823 \cdot 10^{-2} (z + 0,1768) (z + 2,5430)}{(z - 0,3467) ((z - 0,4087)^2 + 0,4621^2)}; \quad (9.139)$$

una volta verificato che questa soddisfa ancora la specifica sulla massima sovraelongazione, si ricava

la funzione di trasferimento del regolatore con la (9.113). Si ottiene

$$G_r(z) = \frac{9,7386(z - 0,3679)(z - 0,6703)(z - 0,8187)}{(z - 1)((z - 0,1262)^2 + 0,3946^2)} \quad (9.140)$$

La risposta al gradino e l'andamento dell'errore in risposta alla rampa sono riportati in Fig. 9.51.

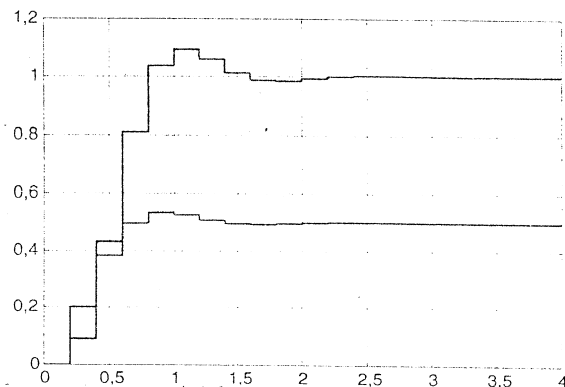


Figura 9.51 Risposta al gradino ed errore nella risposta alla rampa unitaria relativi al sistema (9.137) con regolatore (9.140).

9.11.4 Sintesi diretta: sistema di tipo 2 e tenuta di ordine zero

Con riferimento allo stesso sistema dell'esercizio precedente, cioè avente la funzione di trasferimento (9.135), chiuso in retroazione unitaria, si progetti un regolatore digitale con tenuta di ordine zero e periodo di campionamento $T = 0,2$ sec che soddisfi le seguenti specifiche:

1. massima sovraelongazione della risposta al gradino: $S = 25\%$;
2. errore a regime nella risposta alla rampa unitaria: $e_r = 0$, robusto rispetto alle variazioni di parametri;
3. tempo di ritardo (al 50% del valore finale) $T_r = 0,5$ sec.

Soluzione La seconda specifica impone un regolatore di tipo 2. In primo luogo, come modello di riferimento si sceglie la funzione di trasferimento di un filtro di Bessel di ordine 3, che fornisce una risposta al gradino più smorzata di quella del filtro di Butterworth, introducendo lo zero richiesto dal tipo di sistema con l'aggiunta di una coppia polo-zero. Con riferimento alla (7.39) del Paragrafo 7.2, si determina per tentativi un valore di α per cui venga soddisfatta, con un certo margine, la prima specifica, e quindi il valore della pulsazione di rottura del filtro ω_n che renda soddisfatta la terza specifica: si ricava $\alpha = 10$, $\omega_n = 5$. La funzione di trasferimento così ottenuta è

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} = \\ &= \frac{2,4932s + 1}{1,6 \cdot 10^{-2}s^4 + 0,2026s^3 + 1,0838s^2 + 2,4932s + 1} \\ &= \frac{155,8(s + 0,4011)}{(s + 0,5)(s + 4,708)((s + 3,728)^2 + 3,557^2)} \end{aligned} \quad (9.141)$$

Si passa ora al tempo discreto. La $G(s)$ viene convertita in base alla tenuta di ordine zero, come richiesto dalle specifiche: si ottiene così ancora la (9.137), mentre per il modello di riferimento si sceglie la tenuta di ordine uno, che mantiene il tipo di sistema; si ottiene

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \frac{0,1430(z - 0,3679)(z - 0,9929)}{z(z - 0,39)(z - 0,9048)} \times \\ &\times \frac{(z + 0,1885)(z + 2,5487)}{((z - 0,3594)^2 + 0,3097^2)} \end{aligned} \quad (9.142)$$

In relazione alla fattorizzazione (9.116), (9.117), si assume

$$P_1(z) = 9,06 \cdot 10^{-3},$$

$$P_2(z) = (z + 0,1768) (z + 2,5430),$$

$$P_{01}(z) = 0,1430 (z - 0,3679) (z - 0,9929),$$

$$P_{02}(z) = (z + 0,1885) (z + 2,5487);$$

il nuovo modello di riferimento, dato dalla (9.119) con la posizione (9.120) è

$$G'_0(z) = \frac{0,1447(z - 0,3679)(z - 0,9229)}{(z - 0,0163)(z - 0,3917)} \times \frac{(z + 0,1768)(z + 2,5430)}{(z - 0,9048)((z - 0,3496)^2 + 0,3049^2)} \quad (9.143)$$

una volta verificato che questa soddisfa ancora la specifica sulla massima sovraelongazione, si ricava la funzione di trasferimento del regolatore con la (9.118). Si ottiene

$$G_r(z) = \frac{15,969(z - 0,3679)^2(z - 0,6703)}{(z - 1)^2(z - 0,3641)} \times \frac{(z - 0,8187)(z - 0,9229)}{((z + 0,1037)^2 + 0,2309^2)} \quad (9.144)$$

Nel grafico di Fig 9.52 sono riportate la risposta

al gradino e l'andamento dell'errore in risposta alla rampa.

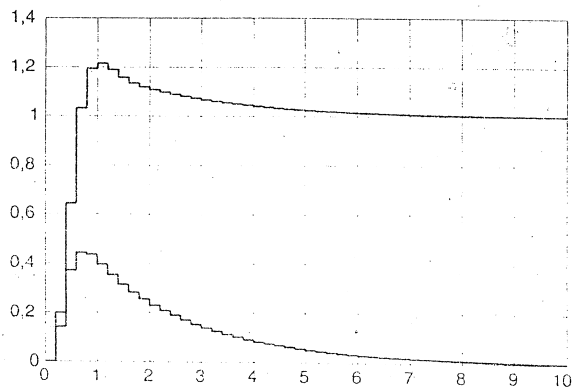


Figura 9.52 Risposta al gradino ed errore nella risposta alla rampa unitaria relativi al sistema (9.137) con regolatore (9.144).

9.11.5 Sintesi diretta: sistema di tipo 2 e tenuta di ordine uno

Si consideri ancora il sistema controllato con funzione di trasferimento (9.135) per il quale viene richiesto un regolatore caratterizzato dagli stessi dati di specifica dell'esercizio precedente, ma con dispositivo di tenuta di ordine uno. A tale dispositivo si deve ricorrere se l'ondulazione sull'uscita dovuta alle frequenze spurie introdotte dal dispositivo di tenuta di ordine zero in risposta alla rampa risulta eccessiva.

Soluzione La funzione di trasferimento del sistema con tenuta di ordine uno, che sostituisce la (9.137), è

$$G(z) = \frac{1,1507 \cdot 10^{-2}(z + 0,2299)(z + 3,2225)}{z(z - 0,6703)(z - 0,8187)} \quad (9.145)$$

Come modello di riferimento si assume ancora la (9.142). La fattorizzazione (9.116), (9.117) viene effettuata assumendo

$$P_1(z) = 1,1507 \cdot 10^{-2}$$

$$P_2(z) = (z + 0,2299)(z + 3,2225)$$

$$P_{01}(z) = 0,1430(z - 0,3679)(z - 0,9929)$$

$$P_{02}(z) = (z + 0,1885)(z + 2,5487)$$

procedendo come negli esercizi precedenti, si ottiene il modello di riferimento modificato

$$G'_0(z) = \frac{0,1162(z - 0,3679)(z - 0,9229)}{(z + 0,0595)(z - 0,3829)} \times \frac{(z + 0,2299)(z + 3,2225)}{(z - 0,9050)((z - 0,4060)^2 + 0,3473^2)} \quad (9.146)$$

si verifica che le specifiche relative al transitorio sono soddisfatte e si ricava quindi la funzione di trasferimento del regolatore con la (9.118), ottenendo

$$G_r(z) = \frac{10,0943z(z - 0,3679)(z - 0,6703)}{(z - 1)^2(z - 0,3641)} \times \frac{(z - 0,8187)(z - 0,9229)}{((z + 0,1037)^2 + 0,2309^2)} \quad (9.147)$$

Nel grafico di Fig 9.53 sono riportate la risposta al gradino e l'andamento dell'errore in risposta alla rampa.

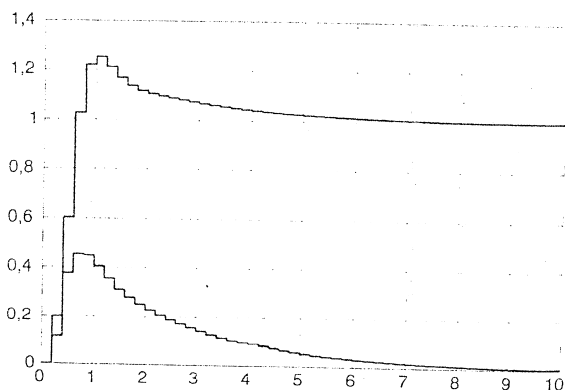


Figura 9.53 Risposta al gradino ed errore nella risposta alla rampa unitaria relativi al sistema (9.137) con regolatore (9.147).

Complementi al Capitolo 9

C9.1. I principali teoremi sulla trasformata Z

Si riportano le dimostrazioni di alcuni teoremi sulla trasformata $\mathcal{Z}$, i cui enunciati sono stati anticipati al Paragrafo 9.2.

TEOREMA C9.1.1. (TEOREMA DELLA TRASLAZIONE NEL TEMPO) Sia $F(z)$ la trasformata $\mathcal{Z}$ della successione $\tilde{f}(k)$. Vale la relazione

Teorema della traslazione nel tempo

$$\mathcal{Z}[\tilde{f}(k-n)] = z^{-n} F(z), \quad n \geq 0. \quad (9.148)$$

Dimostrazione Si considera la relazione

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\tilde{f}(k-n)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(k-n) z^{-k} \quad (\text{e, posto } h = k-n) \\ &= \sum_{h=-n}^{\infty} \tilde{f}(h) z^{-h} z^{-n} \quad (\text{ed essendo } \tilde{f}(k) = 0 \text{ per } k < 0) \\ &= z^{-n} \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{f}(h) z^{-h} = z^{-n} F(z). \end{aligned}$$

TEOREMA C9.1.2. (TEOREMA DELLA TRASLAZIONE IN Z) Per ogni costante complessa a vale la relazione

Teorema della traslazione in z

$$\mathcal{Z}[e^{\pm ak} \tilde{f}(k)] = F(e^{\mp a} z). \quad (9.149)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[e^{\pm ak} \tilde{f}(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\pm ak} \tilde{f}(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(k) (e^{\mp a} z)^{-k} = F(e^{\mp a} z). \end{aligned}$$

TEOREMA C9.1.3. (TEOREMA DEL VALORE FINALE) Vale la relazione

Teorema del valore finale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (9.150)$$

Dimostrazione Si noti che è

$$\mathcal{Z}[\tilde{f}(k) - \tilde{f}(k-1)] = F(z) - z^{-1} F(z) = \frac{z-1}{z} F(z);$$

pertanto si può scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{f}(k) - \tilde{f}(k-1)) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{f}(k) - \tilde{f}(k-1)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i (\tilde{f}(k) - \tilde{f}(k-1)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (\tilde{f}(0) - \tilde{f}(-1) + \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) + \dots + \tilde{f}(i) - \tilde{f}(i-1)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (\tilde{f}(i) - \tilde{f}(-1)) \quad (\text{ed essendo } \tilde{f}(k) = 0 \text{ per } k < 0) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{f}(i). \end{aligned}$$

*Teorema del
valore iniziale*

TEOREMA C9.1.4. (TEOREMA DEL VALORE INIZIALE) Vale la relazione

$$\tilde{f}(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z). \quad (9.151)$$

Dimostrazione La (9.151) segue immediatamente alla relazione di definizione della trasformata $\mathcal{Z}$:

$$F(z) = \tilde{f}(0) + \tilde{f}(1)z^{-1} + \tilde{f}(2)z^{-2} + \dots$$

*Teorema della
convoluzione*

TEOREMA C9.1.5. (TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE) Vale la relazione

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^k \tilde{f}(i) \tilde{g}(k-i)\right] = F(z)G(z). \quad (9.152)$$

Dimostrazione Si ha, per definizione,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^k \tilde{f}(i) \tilde{g}(k-i)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \tilde{f}(i) \tilde{g}(k-i) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}(i) \tilde{g}(k-i) z^{-k} \quad (\text{e. posto } m = k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}(i) \sum_{m=-i}^{\infty} \tilde{g}(m) z^{-i} z^{-m} \quad (\text{ed essendo } \tilde{g}(k) = 0 \text{ per } k < 0) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}(i) z^{-i} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{g}(m) z^{-m} = F(z)G(z). \end{aligned}$$

*Teorema della
trasformata di una
successione periodica*

TEOREMA C9.1.6. (TEOREMA DELLA TRASFORMATA DI UNA SUCCESSIONE PERIODICA) Siano $\tilde{f}_p(k)$ una successione periodica di periodo m e $\tilde{f}(k)$ la successione corrispondente al primo periodo, cioè

$$\tilde{f}(k) = \begin{cases} \tilde{f}_p(k) & \text{per } 0 \leq k \leq m-1 \\ 0 & \text{per } k > m-1 \end{cases}$$

indicando con $F(z)$ la trasformata di $\tilde{f}(k)$, vale la relazione

$$\mathcal{Z}[\tilde{f}_p(k)] = \frac{z^m}{z^m - 1} F(z). \quad (9.153)$$

Dimostrazione Si ha

$$\tilde{f}_p(k) = \tilde{f}(k) + \tilde{f}(k-m) + \tilde{f}(k-2m) + \dots$$

in cui uno solo dei termini della somma a secondo membro è diverso da zero per ogni valore di k , $k \geq 0$; la stessa relazione si può scrivere nella forma più compatta

$$\tilde{f}_p(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}(k-im).$$

da cui, applicando il teorema della traslazione nel tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\tilde{f}_p(k)] &= F(z) + F(z)z^{-m} + F(z)z^{-2m} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} F(z)z^{-im} \\ &= F(z) \sum_{i=0}^{\infty} z^{-im} = \frac{1}{1-z^{-m}} F(z) = \frac{z^m}{z^m - 1} F(z), \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

C9.2. Approssimazioni discrete di derivate ed integrali

La *differenza prima* della successione $\tilde{f}(k)$ è definita dalla relazione

$$\Delta \tilde{f}(k) = \tilde{f}(k) - \tilde{f}(k-1), \quad (9.154)$$

Differenza prima

la *differenza seconda* dalla

Differenza seconda

$$\Delta^2 \tilde{f}(k) = \Delta(\Delta \tilde{f}(k)) = \Delta \tilde{f}(k) - \Delta \tilde{f}(k-1) = \tilde{f}(k) - 2\tilde{f}(k-1) + \tilde{f}(k-2). \quad (9.155)$$

Passando alle trasformate $\mathcal{Z}$, si deduce immediatamente

$$\mathcal{Z}[\Delta \tilde{f}(k)] = (1 - z^{-1}) F(z) - \tilde{f}(-1) = \frac{z-1}{z} F(z) - \tilde{f}(-1), \quad (9.156)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\Delta^2 \tilde{f}(k)] &= \frac{(z-1)^2}{z^2} F(z) - \frac{z-1}{z} \tilde{f}(-1) - \Delta \tilde{f}(k)|_{k=-1} = \\ &= \frac{(z-1)^2}{z^2} F(z) - \frac{2z-1}{z} \tilde{f}(-1) + \tilde{f}(-2). \end{aligned} \quad (9.157)$$

Quanto esposto si può estendere alle differenze di ordine superiore. Il calcolo della trasformata $\mathcal{Z}$ della differenza n -esima di una successione richiede pertanto la conoscenza dei valori relativi ad istanti negativi fino a $k = -n$, così come il calcolo della trasformata di Laplace della derivata n -esima di una funzione del tempo richiede la conoscenza del valore iniziale della funzione stessa e delle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima all'istante $t = 0+$.⁽⁹⁾ Tale conoscenza ovviamente non è necessaria se ci si riferisce a successioni i cui valori siano nulli per valori negativi di k .

La *somma* della successione $\tilde{f}(k)$ è definita dalla relazione

$$S \tilde{f}(k) = \sum_{i=0}^k \tilde{f}(i); \quad (9.158)$$

si noti che eseguendo la differenza prima della somma si ottiene la successione di partenza $\tilde{f}(k)$, per cui risulta

$$\mathcal{Z}[S \tilde{f}(k)] = \frac{z}{z-1} F(z). \quad (9.159)$$

Se la successione $\tilde{f}(k)$ è stata ottenuta per campionamento con periodo T di una funzione del tempo $f(t)$, la differenza prima di $\tilde{f}(k)$ divisa per T rappresenta un'approssimazione della successione ottenuta campionando $f'(t)$ (la derivata viene sostituita dal rapporto incrementale), la differenza seconda divisa per T^2 un'approssimazione della successione ottenuta campionando $f''(t)$, e così via, mentre la somma moltiplicata per T approssima $\int_0^{kT} f(\tau) d\tau$. Posto $F(z) = \mathcal{Z}[f(t), T]$, si ha pertanto:

$$\mathcal{Z}[f'(t), T] \simeq \frac{z-1}{Tz} F(z), \quad (9.160)$$

$$\mathcal{Z}[f''(t), T] \simeq \frac{(z-1)^2}{T^2 z^2} F(z), \quad (9.161)$$

$$\dots$$

$$\mathcal{Z}[f^{(n)}(t), T] \simeq \frac{(z-1)^n}{T^n z^n} F(z). \quad (9.162)$$

e, per l'integrale,

$$\mathcal{Z}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau, T\right] \simeq \frac{Tz}{z-1} F(z). \quad (9.163)$$

⁽⁹⁾ I valori della successione di uscita relativi ad istanti negativi rappresentano lo stato iniziale dei sistemi a tempo discreto descritti da equazioni alle differenze finite, così come i valori della funzione di uscita e delle sue derivate all'istante $t = 0-$ rappresentano lo stato iniziale dei sistemi a tempo continuo descritti da equazioni differenziali.

ESEMPIO C9.2.1 La trasformata $\mathcal{Z}$ della differenza prima del gradino unitario campionato è

$$\frac{z-1}{Tz} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{T},$$

cioè consiste in un impulso di ampiezza $1/T$ all'istante $k = 0$, mentre la trasformata $\mathcal{Z}$ della differenza prima

della rampa unitaria campionata è

$$\frac{z-1}{Tz} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1},$$

cioè consiste nel gradino unitario campionato e ritardato di un campione.

C9.3. La trasformata $\mathcal{Z}$ modificata

Data una funzione del tempo $f(t)$ con trasformata di Laplace razionale $F(s)$, la *trasformata $\mathcal{Z}$ modificata* di $f(t)$ è la trasformata $\mathcal{Z}$ della sequenza ottenuta campionando la $f(t - t_0)$, cioè campionando la funzione la cui trasformata di Laplace è $e^{-t_0 s} F(s)$. Un'importante proprietà della trasformata $\mathcal{Z}$ modificata è quella di essere razionale, contrariamente alla corrispondente trasformata di Laplace. Si può assumere $0 < t_0 \leq T$ senza ledere la generalità, in quanto, se è $t_0 > T$, il ritardo si può esprimere come $t_0 = t'_0 + hT$ con $0 < t'_0 \leq T$, h intero positivo, e la trasformata $\mathcal{Z}$ modificata risulta pertanto uguale a quella relativa al ritardo t'_0 moltiplicata per z^{-h} .

La trasformata $\mathcal{Z}$ modificata consente:

1. la considerazione di ritardi finiti nella parte continua dell'anello di regolazione (impianto);
2. la considerazione di eventuali ritardi (in genere minori del periodo di campionamento) con i quali il regolatore digitale trasmette i campioni in uscita al convertitore D/A, in particolare quando la sua funzione di trasferimento $G(z)$ non sia puramente dinamica (in tal caso, che è il più frequente perché comporta la massima prontezza e stabilità della regolazione, il campione generico in uscita è funzione anche del campione contemporaneo in ingresso);
3. la determinazione dei valori dell'uscita della parte continua dell'anello di regolazione (impianto) in istanti diversi da quelli di campionamento.

La trasformata $\mathcal{Z}$ modificata relativa ad una generica funzione del tempo $f(t)$ e al periodo di campionamento T si indica con $F(z, m)$, in cui la variabile adimensionale m è legata a t_0 dalla relazione

$$m = \frac{T - t_0}{T}. \quad (9.164)$$

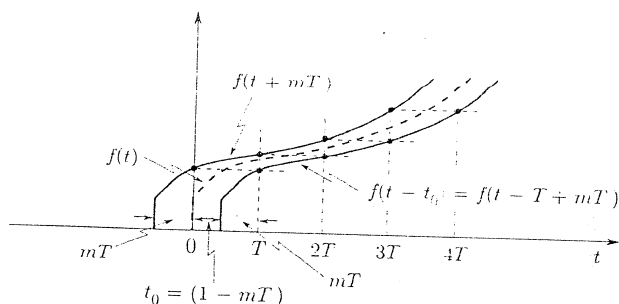
Si può anche scrivere, indicando con $\mathcal{Z}_m$ la trasformazione modificata:

$$F(z, m) = \mathcal{Z}_m[f(t), T, m], \quad f(t) = \mathcal{Z}_m^{-1}[F(z, m), T], \quad (9.165)$$

in cui la trasformazione inversa ha significato nell'ipotesi che valga il teorema del campionamento. Risulta $0 \leq m < 1$. Si consideri la Fig. 9.54: la trasformata $\mathcal{Z}$ della successione ottenuta campionando la $f(t - t_0) = f(t - (1 - m)T)$ si può ottenere moltiplicando per z^{-1} la trasformata $\mathcal{Z}$ della campionata di $f(t + mT)$, cioè della funzione anticipata di mT .

Figura 9.54

L'anticipo di mT e il ritardo di $(1 - m)T$ di una funzione del tempo generica $f(t)$ in rapporto al campionamento.



Si suppone che $f(t)$ abbia trasformata di Laplace $F(s)$ razionale, per cui è esprimibile come combinazione lineare di termini del tipo

$$t^n e^{-at}, \quad t \geq 0$$

a ciascuno dei quali corrisponde la funzione da campionare

$$(t + mT)^n e^{-a(t+mT)}, \quad t \geq 0,$$

e la successione di campioni

$$(k + m)^n T^n e^{-a(k+m)T} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

che, posto $p = e^{-aT}$, si scrive anche

$$p^m T^n (k + m)^n p^k \quad (k = 0, 1, \dots),$$

o ancora, sviluppando il binomio,

$$p^m T^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} m^{n-i} k^i p^k \quad (k = 0, 1, \dots).$$

che, a sua volta, è una combinazione lineare di successioni del tipo

$$k^i p^k, \quad k \geq 0,$$

le cui trasformate Z si possono calcolare con il procedimento generale descritto al Paragrafo 9.2: ciascuna di esse viene quindi moltiplicata per z^{-1} per trasformare l'anticipo di mT nel ritardo di $(1-m)T$.

Per chiarire la procedura si riportano due esempi particolarmente significativi.

1. Rampa unitaria

Ci si riferisca alla Fig. 9.55. La funzione del tempo anticipata di mT e la corrispondente successione di campioni sono

$$f_a(t) = t + mT, \quad t \geq 0;$$

$$\tilde{f}_a(k) = (k + m)T, \quad k \geq 0.$$

Pertanto la trasformata Z modificata della rampa unitaria è

$$\begin{aligned} F(z, m) &= z^{-1} \left(\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{mTz}{z-1} \right) = \\ &= \frac{T}{(z-1)^2} + \frac{mT}{z-1}. \end{aligned} \quad (9.166)$$

2. Esponenziale

Ci si riferisca alla Fig. 9.56. In questo caso si ha:

$$f_a(t) = e^{-a(t+mT)}, \quad t \geq 0;$$

$$\tilde{f}_a(k) = e^{-a(k+m)T} = e^{-amT} e^{-akT}, \quad k \geq 0.$$

Posto $p = e^{-aT}$, si ricava per la trasformata Z modificata dell'esponenziale l'espressione

$$F(z, m) = z^{-1} \frac{p^m z}{z-p} = \frac{p^m}{z-p}. \quad (9.167)$$

Per ciò che riguarda la determinazione dei valori dell'uscita dell'impianto in istanti diversi da quelli di campionamento, ci si riferisce allo schema di Fig. 9.57a e ai grafici di Fig. 9.57b: i valori di $c(t)$ fra gli istanti generici kT e $(k-1)T$ si possono determinare, con la trasformata Z modificata, facendo variare il corrispondente valore di m fra 0 ed 1. Infatti la corrispondente successione $\tilde{c}_1(k)$ anticipa di mT il campionamento dell'uscita analogica $c(t)$ rispetto al campionamento effettivamente operato e trasmesso in retroazione, riprodotto nella successione $\tilde{c}(k)$.

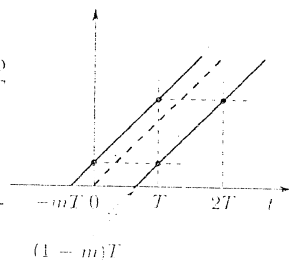


Figura 9.55

Procedimento per la deduzione della trasformata Z modificata della rampa unitaria.

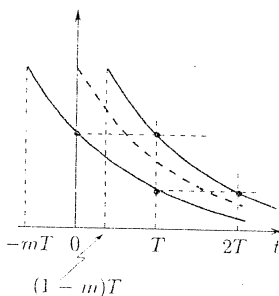
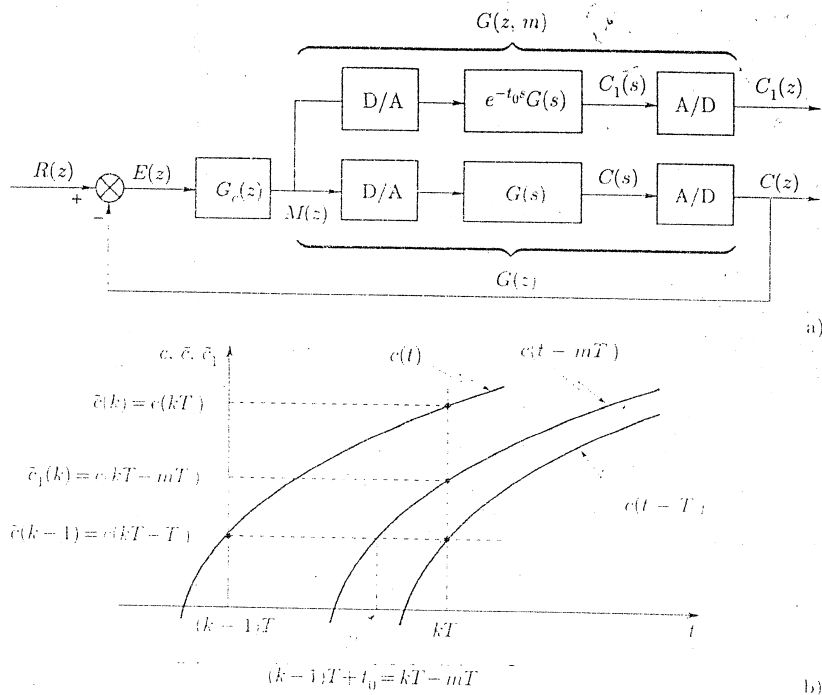


Figura 9.56

Procedimento per la deduzione della trasformata Z modificata dell'esponenziale.

Figura 9.57

Schema per la determinazione dell'uscita analogica in istanti diversi da quelli di campionamento e illustrazione grafica del procedimento.



C9.4. Esercizi

C9.4.1 Sintesi diretta: sistema di tipo 1 con ritardo finito

Con riferimento al sistema

$$G(s) = \frac{10 e^{-0.5s}}{(s+1)(s+2)(s+5)}, \quad (9.168)$$

si progetti un regolatore digitale in retroazione unitaria con tenuta di ordine zero e periodo di campionamento $T = 0,2$ sec che soddisfi le specifiche:

1. massima sovraelongazione della risposta al gradino: $S = 12\%$;
2. errore a regime nella risposta alla rampa unitaria: $e_v = 0,5$.

Soluzione Si segue la falsariga della soluzione dell'Esercizio 9.11.3: come modello di riferimento a tempo continuo si impiega ancora la (9.136) assumendo $\omega_n = 5$ per soddisfare la specifica relativa all'errore a regime. Il passaggio al tempo discreto si realizza applicando la trasformata $\mathcal{Z}$ modificata direttamente alla (9.135) e alla (9.136) (con $\omega_n = 5$); si ha

$$G(z) = \frac{1,369 \cdot 10^{-3} (z + 0,0299)}{z^3 (z - 0,3679) (z - 0,6703)} \times \frac{(z + 0,6711) (z + 15,03)}{(z - 0,8187)}, \quad (9.169)$$

$$G_0(z) = \frac{1,612 \cdot 10^{-2} (z + 0,0287)}{z^3 (z - 0,3679)} \times \frac{(z + 0,6065) (z + 12,805)}{((z - 0,3929)^2 + 0,4620^2)} \quad (9.170)$$

La fattorizzazione (9.116), (9.117) in questo caso viene effettuata nei termini

$$P_1(z) = 1,369 \cdot 10^{-3}$$

$$P_2(z) = (z + 0,0299) (z + 0,6711) (z + 15,03),$$

$$P_{01}(z) = 1,612 \cdot 10^{-2}$$

$$P_{02}(z) = (z + 0,0287) (z + 0,6065) (z + 12,805);$$

il nuovo modello di riferimento si ricava ancora mediante la (9.119) con la posizione (9.120): si ha

$$G'_0(z) = \frac{1,333 \cdot 10^{-2} (z + 0,0299)}{(z + 0,0451) (z + 0,1673)} \times \frac{(z + 0,6711) (z + 15,03)}{((z - 0,3646)^2 + 0,272^2)} \times \frac{1}{((z - 0,3185)^2 + 0,4084^2)}; \quad (9.171)$$

dato che questa soddisfa ancora la specifica sulla massima sovraelongazione, si ricava la funzione di trasferimento del regolatore con la (9.118). Si ottiene

$$G_r(z) = \frac{9,7386 z^3 (z - 0,3679)}{(z - 1)(z + 0,0287)} \times \frac{(z - 0,6703)(z - 0,8187)}{((z + 0,2895)^2 + 0,2733^2)} \times \frac{1}{((z - 0,3807)^2 + 0,8037^2)} \quad (9.172)$$

Nei grafici di Fig. 9.58 sono riportate la risposta al gradino e l'andamento dell'errore in risposta alla rampa. Si noti che l'errore va riferito alla rampa ritardata, cioè con la relazione

$$\frac{0,1(z+1)}{z^2(z-1)^2} = G'_0(z) \frac{Tz}{(z-1)^2} :$$

il primo termine è la trasformata $\mathcal{Z}$ della rampa ritardata, determinata moltiplicando per z^{-2} (ritardo di due periodi di campionamento) la (9.166) calcolata con

$T = 0,2$ ed $m = 0,5$ (ritardo di mezzo periodo di campionamento).

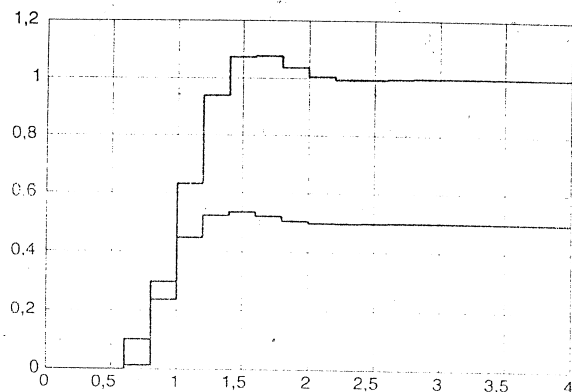


Figura 9.58 Risposta al gradino ed errore nella risposta alla rampa unitaria relativi al sistema (9.169) con regolatore (9.172).

Capitolo 10

Alcuni componenti

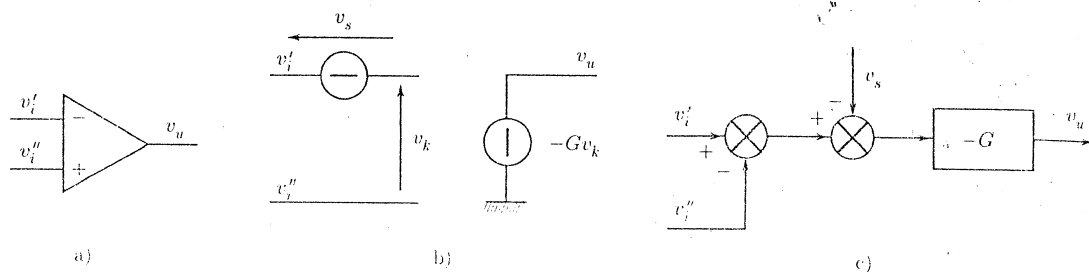
Nei precedenti capitoli si è preso in esame il progetto dei sistemi di controllo in retroazione da un punto di vista del tutto generale, senza fare riferimento, tranne che per occasionali esempi, al tipo di sistema controllato (meccanico, elettromeccanico, elettronico, termico, chimico) o alla particolare realizzazione del regolatore: la generalità della trattazione è stata resa possibile dalla sostanziale analogia dei modelli matematici che si possono assumere per i sistemi, anche di natura fisica diversa. In realtà, operazione preliminare al progetto vero e proprio è la scelta dei componenti, cioè degli elementi che, opportunamente collegati, realizzano il sistema di controllo. I componenti più importanti oltre agli amplificatori e alle reti correttrici, sono i sensori o trasduttori, dispositivi di misura di grandezze fisiche che forniscono in uscita un segnale adatto per la trasmissione a distanza del valore della misura, e gli attuatori o motori, dispositivi che agiscono sulla variabile manipolabile del sistema controllato ad un livello di potenza adeguato. In questo capitolo si presenta una rapida rassegna descrittiva dei principali componenti, rimandando per l'approfondimento alle numerose pubblicazioni specifiche.

10.1. Elaborazione analogica dei segnali

Gli *amplificatori operazionali* sono amplificatori elettronici in continua (ad accoppiamento diretto) e ad alto guadagno progettati allo scopo di costruire sistemi elettrici il cui comportamento ingresso-uscita viene imposto caso per caso mediante un collegamento in retroazione negativa attraverso un'opportuna rete elettrica esterna. Essi costituiscono i componenti fondamentali per la costruzione di circuiti di amplificazione ed elaborazione analogica.

*Amplificatore
operazionale*

Il nome "amplificatore operazionale" è collegato alla possibilità, offerta da tale componente, di eseguire operazioni aritmetiche o differenziali sui segnali, intesi come grandezze elettriche funzioni del tempo, e risale all'epoca (anni '40 e '50) in cui ebbe grande sviluppo il *calcolo analogico*, avente l'obiettivo di risolvere problemi matematici, e specificamente sistemi di equazioni algebriche e differenziali, mediante la costruzione di circuiti retti da equazioni ad esse analoghe, in cui i segnali (tensioni variabili nel tempo) rappresentano le variabili. Ancor oggi si parla di *elaborazione analogica* con riferimento all'elaborazione di segnali elettrici variabili con continuità nel

**Figura 10.1**

L'amplificatore operazionale: simbolo, circuito equivalente e corrispondente schema a blocchi.

Fuori zero di tensione

Amplificatore differenziale
Ingresso invertente
Ingresso non invertente

tempo, in contrapposizione all'*elaborazione digitale o numerica*, che invece ha per oggetto segnali elettrici a due soli valori significativi che, in codice opportuno, rappresentano sequenze di numeri.

Il simbolo con il quale l'amplificatore operazionale viene indicato negli schemi elettrici è rappresentato in Fig. 10.1a, mentre in Fig. 10.1b è riportato un circuito equivalente in cui è mostrato il parametro parassita più importante nelle applicazioni ai sistemi di controllo, il *fuori zero di tensione* v_s . Il valore di v_s (che nell'amplificatore operazionale ideale dovrebbe essere nullo) è di qualche millivolt negli amplificatori operazionali di uso generale e di qualche microvolt negli amplificatori operazionali di precisione, particolarmente concepiti per l'amplificazione di segnali molto bassi. In Fig. 10.1c è riportato lo schema blocchi corrispondente al circuito equivalente di Fig. 10.1b.

La costante G , che rappresenta il *guadagno* dell'amplificatore, nella schematizzazione ideale si considera di valore molto elevato, tanto da potersi supporre infinito nella deduzione del legame ingresso-uscita dell'amplificatore operazionale collegato ad una rete elettrica esterna di retroazione: si noti che il segnale di ingresso v_i' viene amplificato e invertito di segno, mentre v_i'' viene amplificato in egual misura senza inversione di segno. L'amplificatore operazionale che qui si considera è pertanto un *amplificatore differenziale* e i due suoi ingressi si dicono rispettivamente *ingresso invertente* e *ingresso non invertente*.

L'amplificatore operazionale, pur essendo costituito da un circuito elettronico di notevole complessità, può supporre rappresentato da un modello così semplice purché le resistenze della rete elettrica esterna siano comprese, grosso modo, fra 5 K Ω e 1 M Ω , cioè siano di valori tali da non caricare eccessivamente l'uscita e polarizzare convenientemente gli ingressi. In ogni caso, per la verifica del comportamento effettivo del circuito e la determinazione degli inevitabili errori rispetto al comportamento ideale si potrà far riferimento al circuito equivalente dell'amplificatore operazionale reale, che verrà descritto al Paragrafo C10.1.

Per fissare le idee nel seguito si farà riferimento ad un amplificatore operazionale di impiego generale (general purpose) con i seguenti valori dei parametri più significativi⁽¹⁾:

(1) Si assume qui come riferimento l'amplificatore di impiego generale LF 156-256-356 della National Semiconductors, con stadio di ingresso a FET e corrente di polarizzazione di soli 30 pA, quindi in effetti trascurabile, come si è supposto nel circuito equivalente di Fig. 10.1b. Esistono in commercio moltissimi tipi di amplificatori operazionali. Con l'avvento della tecnologia CMOS, che comporta correnti di polarizzazione ancor più basse, all'alimentazione a ± 15 V si è affiancata quella a ± 5 V, come nel caso del TLC274 della Texas o addirittura, per amplificatori di precisione per piccoli segnali e per ponti di misura, a 0-5 V, per i quali i campi di variazione ammissibili per i segnali di ingresso e di uscita possono essere ridotti in proporzione, ma possono anche giungere ai due valori estremi dell'alimentazione (nei tipi cosiddetti "rail-to-rail", come l'LMC7111 della National Semiconductors o l'AD8632 della Analog Devices). Inoltre sono disponibili amplificatori

- guadagno statico ad anello aperto G_0 : $2 \cdot 10^5$;
- tensione di alimentazione: ± 15 V;
- campi ammissibili per i segnali:
 - $-10 \text{ V} \leq v_i' \leq 10 \text{ V}$,
 - $-10 \text{ V} \leq v_i'' \leq 10 \text{ V}$,
 - $-10 \text{ V} \leq v_u \leq 10 \text{ V}$,
 - $-5 \text{ mA} \leq i_u \leq 5 \text{ mA}$.

Dal punto di vista pratico, requisito fondamentale dei circuiti comprendenti un amplificatore operazionale, come di ogni sistema in retroazione, è la stabilità che, com'è noto, dipende dal comportamento dinamico degli elementi dell'anello posti in cascata. Agli effetti dell'analisi della stabilità non è corretto considerare l'amplificatore come un elemento puramente algebrico caratterizzato da una costante G di valore elevato: ci si riferisca alla Fig. 10.2, in cui l'amplificatore operazionale è associato ad un blocco in retroazione la cui funzione di trasferimento $H(s)$ dipende dalla particolare rete di impedenze cui l'amplificatore è collegato. Infatti per particolari reti di impedenze (ad esempio resistenze) anche la funzione $H(s)$ si riduce ad una costante reale, nel qual caso lo studio della stabilità non può essere condotto per aver assunto un modello matematico eccessivamente semplificato. In realtà l'amplificatore operazionale, come tutti i sistemi fisici, è caratterizzato da una funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con caratteristiche filtranti tipo passa basso, nel senso che il guadagno tende a ridursi in modulo alle alte frequenze: pertanto la stabilità del sistema di Fig. 10.2 dipende sia dal particolare amplificatore impiegato, sia dalla rete di impedenze cui esso viene collegato. Il problema della stabilità si supera in base alle seguenti considerazioni:

1. I costruttori di amplificatori operazionali garantiscono la stabilità, con un buon margine di fase, dell'amplificatore chiuso in retroazione diretta, cioè con l'uscita collegata direttamente all'ingresso invertente e l'ingresso non invertente collegato a massa, che nello schema di Fig. 10.2 corrisponde ad $H(s) = 1$.

2. Si costruisce la rete di impedenze in modo che in corrispondenza della frequenza di incrocio di $G(j\omega)$ (in genere dell'ordine del MHz) la funzione $H(j\omega)$ abbia argomento trascurabile e modulo non superiore all'unità. Nel caso frequente in cui la rete sia costituita di sole resistenze e capacità, quest'ultima condizione è in genere soddisfatta.

Per ciò che riguarda il guadagno $G(j\omega)$, normalmente vengono forniti dal costruttore i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi. A titolo esemplificativo, in Fig. 10.3 sono riportati i diagrammi di Bode di un amplificatore operazionale di impiego generale. Essi valgono per piccoli segnali, cioè per segnali di ampiezze tali da non interessare fenomeni di saturazione. Il taglio netto a frequenze relativamente basse è dovuto alla presenza di una rete ritardatrice interna, che garantisce un margine di fase di circa 50° in retroazione unitaria. Segue che nel campo di frequenze da zero alla pulsazione di incrocio si può assumere valida la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{G_0}{1 + \tau s}, \quad (10.1)$$

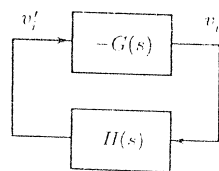
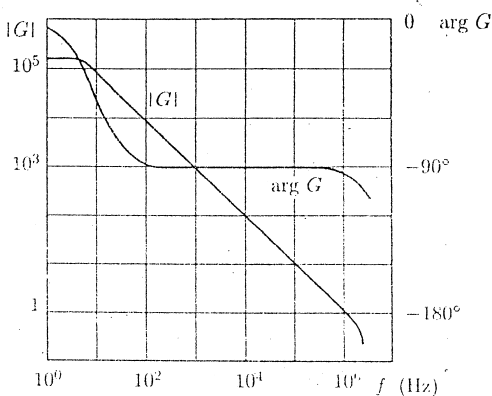


Figura 10.2
Connessione di riferimento per la stabilità.

operazionali di potenza, con tensione e corrente di uscita più elevate, come LM12CL della National Semiconductors. Nel CD-ROM allegato al presente volume sono riportati i link ai fogli delle caratteristiche dei componenti citati come esempi nelle note a piè pagina di questo capitolo.

Figura 10.3
Diagrammi di Bode tipici di un amplificatore operazionale.



in cui G_0 rappresenta il guadagno statico ad anello aperto (fornito dal costruttore) e τ si può facilmente dedurre dal diagramma di Bode delle ampiezze.

◆ Circuiti relativi alla connessione invertente

In Fig. 10.4a è riportato lo schema di un amplificatore operazionale in connessione invertente. In tale connessione l'amplificatore è collegato a due impedenze: $Z_i(s)$ (di ingresso) e $Z_f(s)$ (di retroazione). Non avendosi assorbimento di corrente all'ingresso dell'amplificatore, si può scrivere

$$V_i'(s) = B(s) V_i(s) + H(s) V_u(s) .$$

in cui, in virtù della sovrapposizione degli effetti, è

$$B(s) = \frac{Z_f(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)} , \quad H(s) = \frac{Z_i(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)} .$$

Si deduce così lo schema a blocchi di Fig. 10.4b, cui corrispondono le relazioni

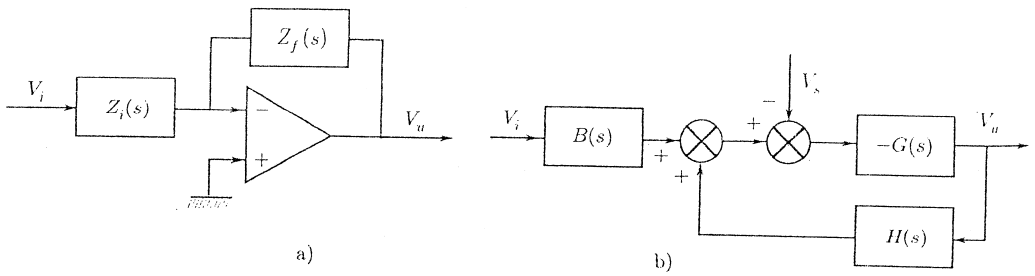
$$\frac{V_u(s)}{V_s(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} . \quad (10.2)$$

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{-G(s) B(s)}{1 + G(s) H(s)} = -\frac{B(s)}{\frac{1}{G(s)} + H(s)} . \quad (10.3)$$

La (10.2) è utile per il calcolo dell'errore dovuto al fuori zero di tensione v_s , mentre la (10.3) fornisce il legame ingresso-uscita realizzato dallo schema di Fig. 10.4a. Nel campo di valori di $s = j\omega$ tali che $|G(j\omega) H(j\omega)| \gg 1$, si ha

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} \simeq -\frac{B(s)}{H(s)} = -\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} . \quad (10.4)$$

Figura 10.4
Schema elettrico e schema a blocchi della connessione invertente.



L'approssimazione in base alla quale si è ricavata la (10.4) è in genere valida nel campo di frequenze (fino a qualche kHz) che interessano l'elaborazione analogica. La (10.4) esprime il bilancio delle correnti all'ingresso dell'amplificatore operazionale per $v_i' = 0$. Infatti, nella connessione invertente l'ingresso viene mantenuto a potenziale pressoché nullo per l'elevato guadagno dell'amplificatore. Più in generale, si parla di *cortocircuito virtuale degli ingressi*: infatti vale la relazione $v_i'' - v_i' = v_u/G \simeq 0$ per $G \simeq \infty$. Se si ritiene che l'approssimazione di cortocircuito virtuale non valga, per una verifica si può utilizzare la (10.3) con $G(s)$ data dalla (10.1). In tutti gli esempi che seguono i legami ingresso-uscita sono dedotti in base alla relazione di corto circuito virtuale degli ingressi.

Cortocircuito virtuale

In Fig. 10.5 sono riportati alcuni circuiti elementari relativi alla connessione invertente. In particolare, in Fig. 10.5a è rappresentato l'*amplificatore invertente*, che realizza la relazione

Amplificatore invertente

$$\frac{v_u(t)}{v_i(t)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Casi particolari sono l'*invertitore di segno* di Fig. 10.5b e l'*amplificatore con regolazione del guadagno* di Fig. 10.5c, che realizzano rispettivamente le

Invertitore di segno
Amplificatore con regolazione del guadagno

$$v_u(t) = -v_i(t) \quad \text{e} \quad \frac{v_u(t)}{v_i(t)} = -\alpha \frac{R_2}{R_1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

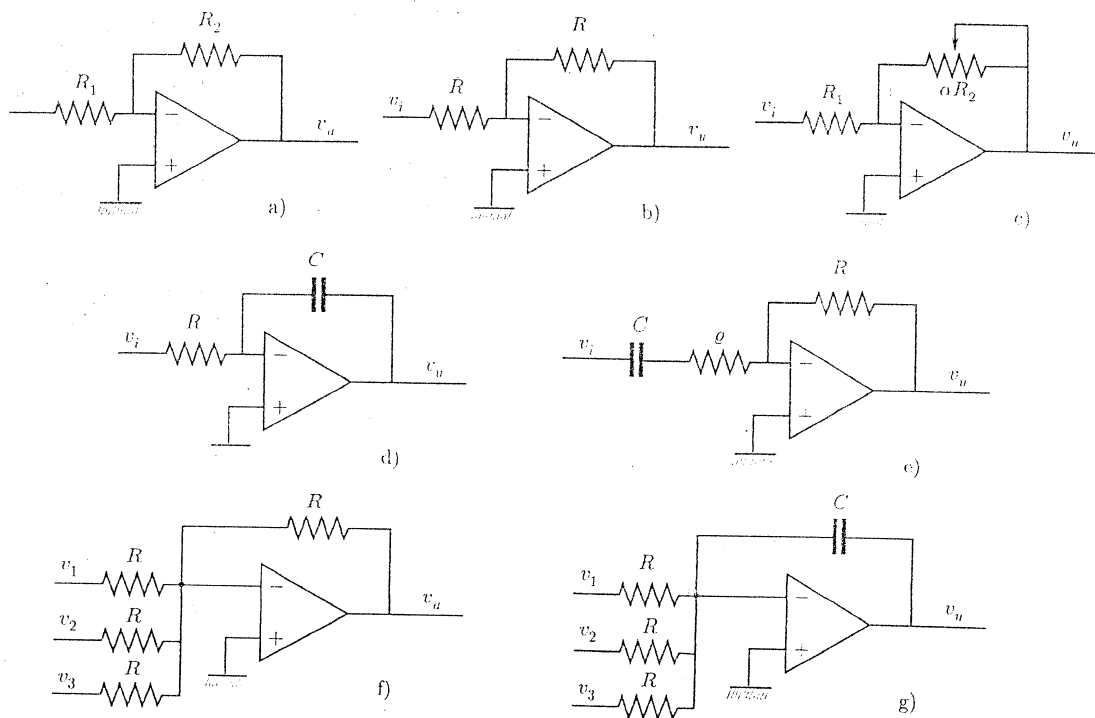
In Fig. 10.5d è rappresentato l'*integratore* e in Fig. 10.5e il *derivatore*, descritti rispettivamente da

Integratore
Derivatore

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{T s}, \quad \text{cioè} \quad v_u(t) = -\frac{1}{T} \int_0^t v_i(\tau) d\tau + v_u(0)$$

Figura 10.5

Alcuni schemi relativi alla connessione invertente.



e

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = -Ts, \quad \text{cioè} \quad v_u(t) = -T \frac{d}{dt} v_i(t),$$

con $T = RC$. Nel derivatore, per realizzare la condizione che $H(j\omega)$ tenda ad essere puramente algebrica in corrispondenza della frequenza critica e garantire così la stabilità del sistema, occorre inserire una piccola resistenza ρ in serie alla capacità C , che produce un errore trascurabile nel campo di frequenze utile. In Fig. 10.5f è rappresentato il *sommatore* e in Fig. 10.5g il *sommatore-integratore* (entrambi con inversione di segno) descritti da

$$v_u(t) = - \sum_{h=1}^3 v_h(t) \quad \text{e} \quad v_u(t) = - \frac{1}{T} \int_0^t \sum_{h=1}^3 v_h(\tau) d\tau + v_u(0),$$

ancora con $T = RC$. Assumendo resistenze di ingresso differenti fra loro, i due circuiti realizzano rispettivamente la somma pesata e l'integrazione nel tempo di una somma pesata.

Si prenderà ora in esame l'impiego dell'amplificatore operazionale in connessione invertente per la realizzazione di reti correttrici e regolatori standard. Il circuito di Fig. 10.6a presenta l'impedenza di retroazione

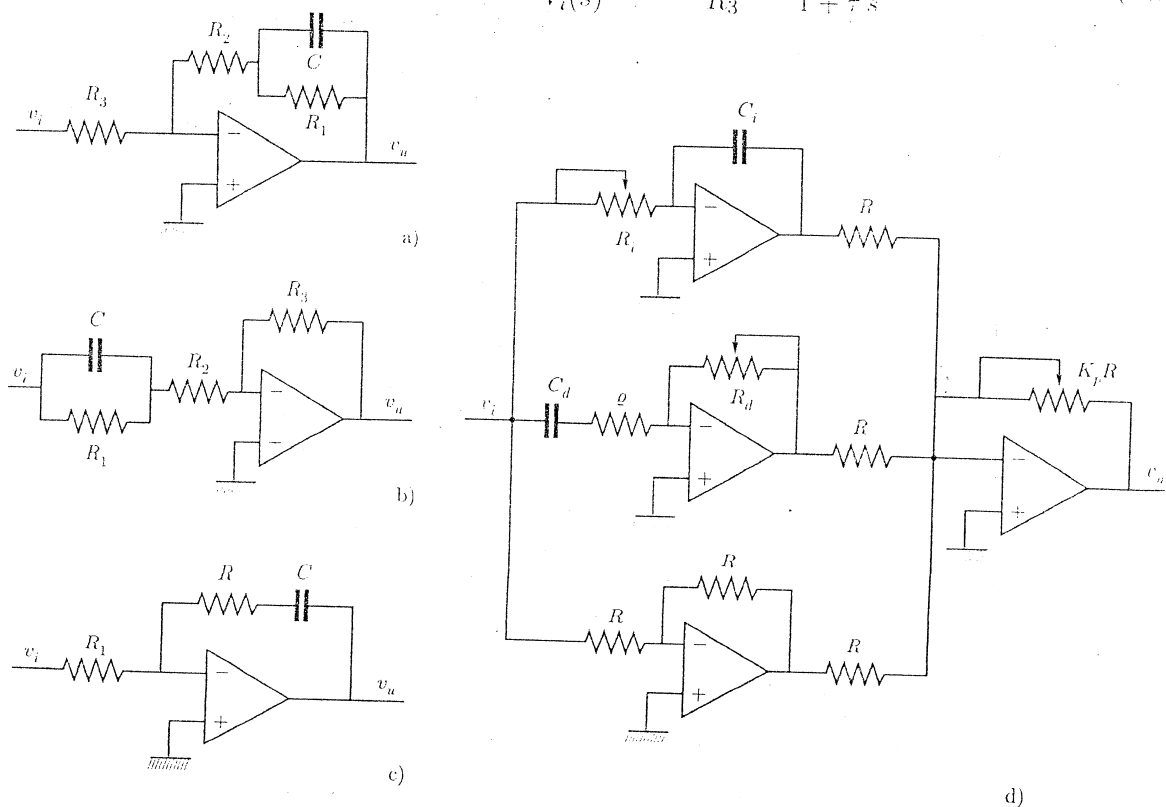
$$Z_f(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + Cs} + R_2 = \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s}{1 + R_1 C s} = (R_1 + R_2) \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s},$$

con $\tau = R_1 C$, $\alpha = R_2 / (R_1 + R_2)$. La funzione di trasferimento del circuito di Fig. 10.6a è pertanto

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = - \frac{R_1 + R_2}{R_3} \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad (10.5)$$

Figura 10.6

Reti correttrici e regolatori standard.



Segue che tale circuito realizza una *rete ritardatrice* con amplificazione arbitraria, mentre il circuito di Fig. 10.6b, con le impedenze di ingresso e di retroazione scambiate fra loro presenta, come funzione di trasferimento, l'inversa della (10.5), cioè realizza una *rete anticipatrice* con amplificazione arbitraria. Il circuito di Fig. 10.6c realizza un *regolatore PI*. Infatti è

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = -\frac{R + \frac{1}{Cs}}{R_1} = -\frac{1 + RCs}{R_1 Cs} = -\frac{R}{R_1} \left(1 + \frac{1}{Ts}\right), \quad \text{con } T = RC.$$

Infine il circuito di Fig. 10.6d realizza un *regolatore PID* con parametri regolabili, descritto dalla relazione

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = K_p \left(1 + R_d C_d s + \frac{1}{R_i C_i s}\right).$$

Rete ritardatrice

Rete anticipatrice
Regolatore PI

Regolatore PID

Circuiti relativi alla connessione non invertente

In Fig. 10.7a è riportato lo schema di un amplificatore operazionale in connessione non invertente. In tale connessione l'amplificatore è retroazionato attraverso una rete elettrica con funzione di trasferimento $H(s)$.

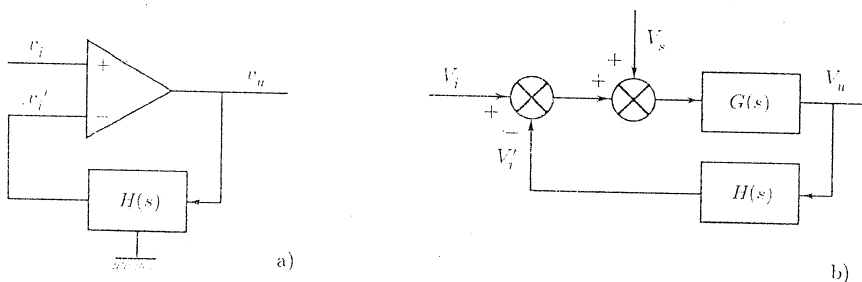


Figura 10.7
Schema elettrico e schema a blocchi della connessione non invertente.

Il corrispondente schema a blocchi è rappresentato in Fig. 10.7b. L'errore dovuto al fuori zero di tensione v_s si può ancora calcolare con la (10.2), mentre il legame ingresso-uscita in questo caso è

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\frac{1}{G(s)} + H(s)} \simeq \frac{1}{H(s)}. \quad (10.6)$$

L'ultima relazione è valida per i valori di $s = j\omega$ tali che $|G(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$. In molti casi la funzione $H(s)$ viene realizzata con il partitore di impedenze rappresentato in Fig. 10.8, nel qual caso si ha

$$H(s) = \frac{Z_i(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)}, \quad \text{quindi} \quad \frac{V_u(s)}{V_i(s)} \simeq \frac{1}{H(s)} = 1 + \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}. \quad (10.7)$$

In Fig. 10.9 sono riportati alcuni circuiti elementari relativi alla connessione invertente. In particolare, in Fig. 10.9a è rappresentato l'*amplificatore non invertente*, che realizza la relazione

$$\frac{v_u(t)}{v_i(t)} = 1 + \frac{R_2}{R_1},$$

che corrisponde alla (10.7) quando le due impedenze siano semplici resistenze. Esso viene preferito all'amplificatore invertente di Fig. 10.5a, specie come primo stadio, quando si desidera ottenere un'elevata impedenza di ingresso: in questo caso infatti questa coincide con l'impedenza dello stadio

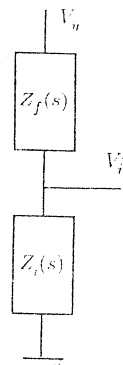


Figura 10.8
Realizzazione di $H(s)$ come partitore di impedenze.

Amplificatore non invertente

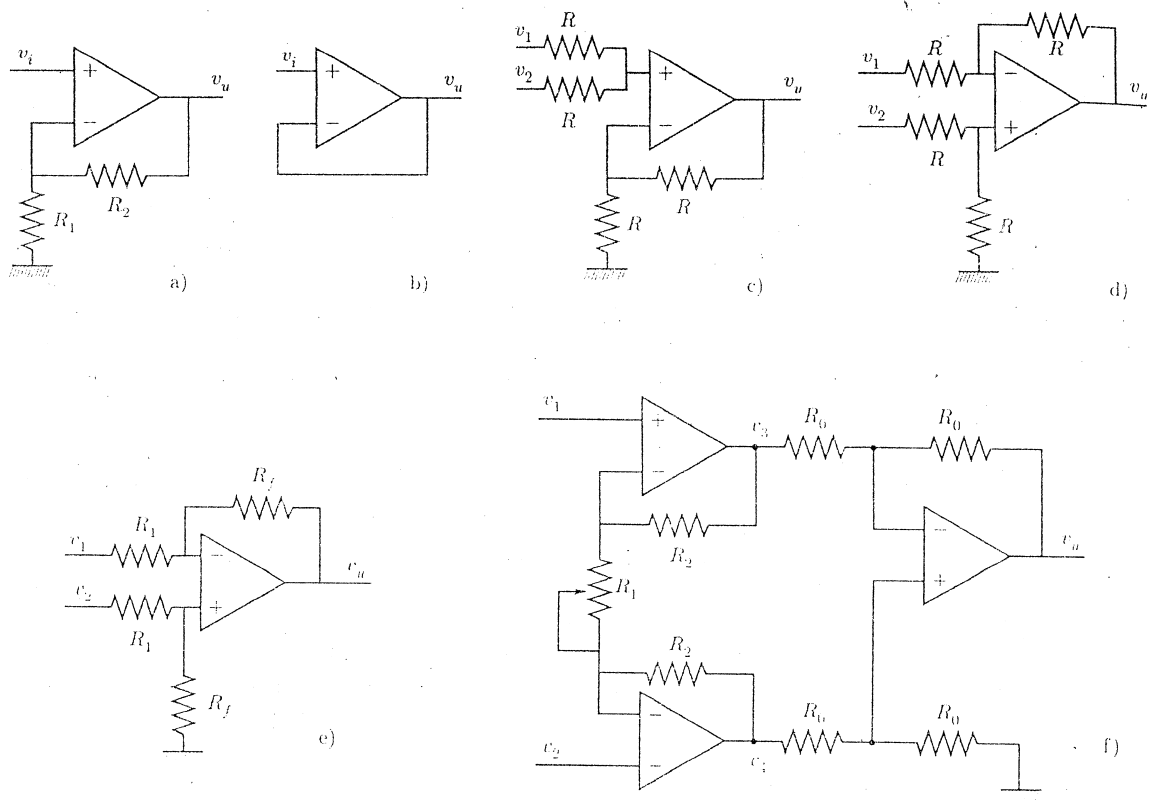


Figura 10.9
Amplificatori realizzati
con la connessione non
invertente.

Buffer
Amplificatore
di isolamento

di ingresso dell'amplificatore, che di norma è elevatissima, in particolare negli amplificatori con stadio di ingresso a FET o a CMOS. Per aumentare l'impedenza di ingresso di uno stadio invertente e in numerosi altri casi in cui si richieda il prelievo di un segnale di tensione senza apprezzabile effetto di carico si può ricorrere a un *buffer* o *amplificatore di isolamento*, rappresentato in Fig. 10.9b.

I circuiti di Fig. 10.9c e di Fig.10.9d realizzano rispettivamente le relazioni

$$v_u(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad \text{e} \quad v_u(t) = v_2(t) - v_1(t) \quad ,$$

Amplificatore
differenziale

come si può facilmente verificare applicando la condizione di cortocircuito virtuale dei due ingressi. Il primo è un *sommatore* e il secondo un amplificatore differenziale a guadagno unitario, caso particolare dell'*amplificatore differenziale* di Fig.10.9e, in cui è

$$v_u(t) = \frac{R_f}{R_1} (v_2(t) - v_1(t)) \quad .$$

Un altro tipo di amplificatore differenziale è rappresentato in Fig. 10.9f. Esso realizza la relazione

$$v_u(t) = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) (v_2(t) - v_1(t)) \quad , \tag{10.8}$$

che si ricava applicando la proprietà di sovrapposizione degli effetti. Infatti questa fornisce

$$v_3(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_1(t) - \frac{R_2}{R_1} v_2(t) \quad , \quad v_4(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_2(t) - \frac{R_2}{R_1} v_1(t) \quad ,$$

da cui per sottrazione segue la (10.8). Rispetto al circuito di Fig. 10.9e quest'ultimo tipo di amplificatore differenziale presenta i vantaggi della possibilità di regolazione del guadagno con una sola resistenza variabile e di un'elevata reiezione di modo comune. Infatti un segnale di ingresso di modo comune, cioè un segnale applicato ai due ingressi collegati fra loro, non viene amplificato nel primo stadio in quanto per la condizione di cortocircuito virtuale non passa corrente in R_1 , cosicché v_3 e v_4 rimangono uguali fra loro anche se le due resistenze indicate con R_2 non sono uguali; lo stadio finale, presentando un guadagno unitario, non introduce un errore di modo comune di valore significativo.

Un tipico impiego degli amplificatori differenziali ad alto guadagno nell'ambito della strumentazione degli impianti è l'amplificazione locale del segnale di sbilanciamento dei ponti di resistenze. Con riferimento al ponte resistivo di Fig. 10.10a, si ha

$$v_2 - v_1 = E \left(\frac{R(1+\delta)}{R(2+\delta)} - \frac{1}{2} \right) = \frac{E}{4} \frac{\delta}{1 + (\delta/2)} \simeq \frac{E}{4} \delta, \quad (10.9)$$

in cui la linearizzazione introdotta è accettabile per piccoli valori di δ , cioè per piccole variazioni relative del valore della resistenza di misura. La resistenza di uscita del ponte bilanciato vale $R/2$; se si trascura la variazione di tale resistenza con lo sbilanciamento del ponte e l'effetto di carico (in quanto è $R_f \gg R$), il valore della tensione di uscita si può ricavare notando che la differenza di tensioni (10.9) viene applicata all'ingresso di un amplificatore differenziale del tipo di Fig. 10.9e con $R_1 = R/2$. Si ottiene

$$v_u \simeq \frac{E}{2} \frac{R_f}{R} \delta. \quad (10.10)$$

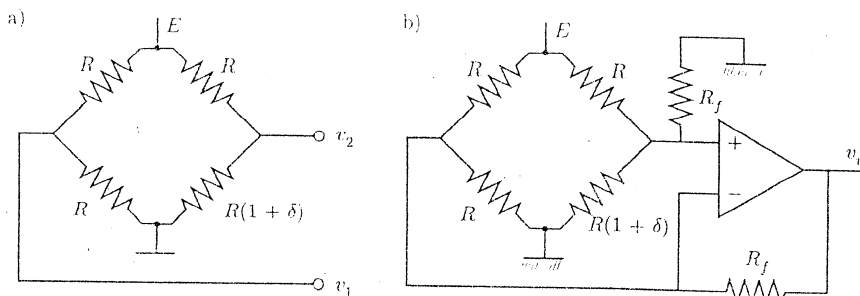


Figura 10.10
Ponte di resistenze e relativo sistema di amplificazione.

In Fig. 10.11 sono rappresentati alcuni semplici elaboratori di segnale la cui funzione di trasferimento si deduce immediatamente come inversa di quella di una rete di impedenze collegata in retroazione. In particolare si considerano i collegamenti in retroazione di alcune delle reti correttrici descritte al Paragrafo 6.2. Nel caso di Fig. 10.11a questa, evidenziata a tratto, è una rete integratrice e dà luogo ad un *regolatore PD*, con funzione di trasferimento

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{H(s)} = 1 + Ts, \quad \text{con } T = RC, \quad (10.11)$$

mentre nel caso di Fig. 10.11b in retroazione è posta una rete derivatrice che dà luogo ad un *regolatore PI*, con funzione di trasferimento

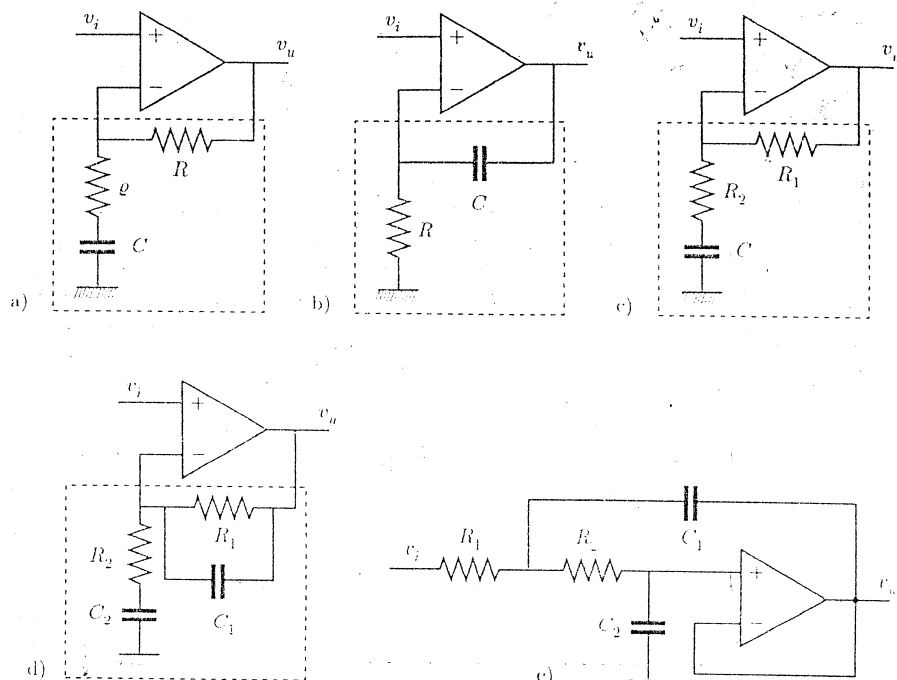
$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{H(s)} = \frac{1 + Ts}{Ts} = 1 + \frac{1}{Ts}, \quad \text{con } T = RC. \quad (10.12)$$

Regolatore PD

Regolatore PI

Figura 10.11

Elaboratori realizzati con la connessione non invertente.



Rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico

Nel circuito di Fig. 10.11e è stata posta in retroazione una rete ritardatrice, ottenendo così una rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico, con funzione di trasferimento

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad \text{con } \tau = R_1 C, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (10.13)$$

il cui diagramma di Bode è rappresentato in Fig. 10.12, mentre nel caso di Fig. 10.11d si è impiegata una rete a ritardo e anticipo, ottenendo l'amplificatore in alternata con funzione di trasferimento

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad \text{con} \quad (10.14)$$

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \tau_{12} = R_1 C_2,$$

il cui diagramma di Bode è rappresentato in Fig. 10.13. Risulta

$$G_0 = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{\tau_1 + \tau_2}, \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}.$$

Un amplificatore in alternata più selettivo si può ottenere utilizzando la rete a T ponticellata in luogo della rete a ritardo e anticipo. Il guadagno è unitario a frequenza zero (eliminando così i problemi connessi all'amplificazione del fuori zero di tensione) e può essere molto elevato in corrispondenza della banda da amplificare.

Un altro circuito di notevole interesse è il filtro attivo di tipo passa basso, rappresentato in Fig. 10.11e, con funzione di trasferimento

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 + R_2) C_2 s + 1}, \quad (10.15)$$

con due poli arbitrari reali o complessi coniugati nel semipiano sinistro del piano complesso e nessuno zero: con n circuiti di questo tipo posti in cascata si può realizzare qualunque filtro di Butterworth o di Bessel di ordine $2n$.

Figura 10.12

Diagramma di Bode del circuito di Fig. 10.11e.

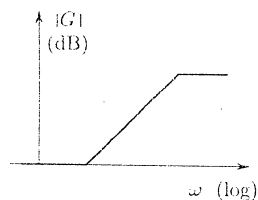
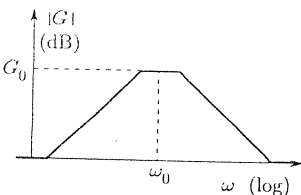
**Figura 10.13**

Diagramma di Bode del circuito di Fig. 10.11d.



Si noti che questo circuito presenta guadagno statico unitario: peraltro se il buffer, del tipo di Fig. 10.9b, vi viene sostituito con un amplificatore non invertente del tipo di Fig. 10.9a si ottiene un circuito con la stessa funzione di trasferimento moltiplicata per la costante $1 + R_2/R_1$.

I *comparatori di tensione* sono circuiti analoghi a quelli degli amplificatori operazionali, che vengono utilizzati senza alcuna rete di retroazione, avendo lo scopo di rivelare quale delle due relazioni $v'_i > v''_i$ o $v'_i < v''_i$ sia vera istante per istante. L'uscita è pertanto di tipo logico, a due livelli, generalmente 0 e 5 V, indipendenti dall'alimentazione della parte analogica del circuito, che può essere, ad esempio, ± 15 V, per un'escursione dei segnali di ingresso di ± 10 V. Dato che il circuito viene utilizzato senza alcuna retroazione e il tempo di risposta deve essere il più piccolo possibile, manca la rete correttiva interna.

Un tipico comparatore è caratterizzato dai seguenti valori⁽²⁾:

- guadagno statico ad anello aperto G_0 : $2 \cdot 10^5$;
- tempo di risposta per ingresso differenziale di 100 mV: 200 ns;
- tensione di alimentazione: ± 15 V;
- corrente di polarizzazione: 60 nA;
- campi ammissibili per i segnali:
 - $-10 \text{ V} \leq v'_i \leq 10 \text{ V}$,
 - $-10 \text{ V} \leq v''_i \leq 10 \text{ V}$,
 - $0 \text{ V} \leq v_u \leq 35 \text{ V}$ (open collector)
 - $0 \text{ mA} \leq i_u \leq 20 \text{ mA}$.

Il comparatore di tensione viene indicato negli schemi elettrici con lo stesso simbolo dell'amplificatore operazionale (Fig. 10.14a), da cui si distingue facilmente per l'assenza della retroazione.

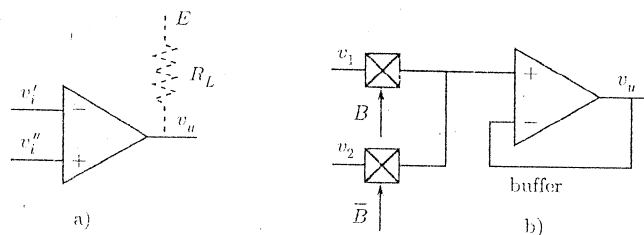


Figura 10.14

Il comparatore di tensione e l'interruttore elettronico.

Gli *interruttori elettronici* sono dispositivi atti ad interrompere un collegamento di segnale di tensione, rendendo così possibile la sua commutazione fra due o più diverse sorgenti. Il segnale di ingresso è di tipo logico, a due livelli. Le tensioni dei due terminali dell'interruttore possono fluttuare fra due livelli legati alle tensioni di alimentazione analogiche del dispositivo. Lo stato di "interruttore aperto" è caratterizzato da un buon isolamento dei terminali, reciproco, verso le alimentazioni e verso il circuito della logica di comando, mentre lo stato di "interruttore chiuso" è caratterizzato da una resistenza fra i terminali relativamente bassa, cui corrisponde una caduta

Interruttore elettronico

⁽²⁾ Si assume qui come riferimento il comparatore LM111-211-311 della National Semiconductors. L'uscita "open collector" può essere adattata a diverse famiglie logiche collegandola ad una resistenza di "pull-up" esterna che determina il livello alto della logica. Anche i comparatori, come gli amplificatori operazionali, sono disponibili in una vasta gamma di tipi, con diverse tecnologie elettroniche (bipolari, bipolari con stadio di ingresso a FET, CMOS), diverse tensioni di alimentazione e diverse caratteristiche dello stadio di uscita. Si ricorda qui anche un tipo a CMOS, il TLC364 della Texas Instruments, con alimentazione a ± 5 V.

Multiplexer analogico

di tensione trascurabile, specie se il dispositivo a valle dell'interruttore è ad alta impedenza di ingresso, ad esempio un buffer. Il simbolo con il quale viene indicato l'interruttore elettronico è mostrato in Fig. 10.14b, in cui sono rappresentati due interruttori comandati da segnali logici complementari⁽³⁾ e il relativo buffer. Per evitare cortocircuiti o picchi nella corrente assorbita in impieghi di questo tipo le commutazioni in apertura sono più rapide di quelle in chiusura ("break-before-make switching"). I *multiplexer analogici* sono complessi di 8 o 16 interruttori elettronici con uno dei due terminali di ciascun elemento collegato ad uno stesso punto (l'ingresso del buffer) e logica di comando codificata in binario (rispettivamente tre o quattro bit).

Un tipico interruttore elettronico è caratterizzato dai seguenti valori dei parametri più importanti⁽⁴⁾:

- campo di variabilità del segnale analogico: $\pm 15\text{ V}$;
- tempo di commutazione: 80 ns;
- tensione di alimentazione della parte analogica: $\pm 15\text{ V}$;
- logica con livello basso a 0 V e livello alto da 5 V a 15 V;
- resistenza dell'interruttore chiuso: 5 Ω ;
- corrente di dispersione media: 100 pA.

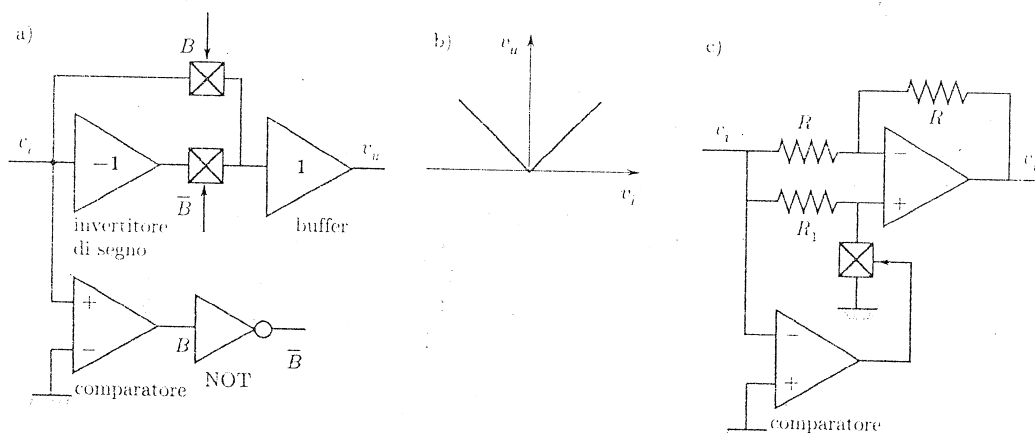


Figura 10.15
Rettificatore di precisione.

Rettificatore
di precisione

In molte applicazioni gli interruttori elettronici sono comandati direttamente da comparatori. Un esempio di applicazione del comparatore e dell'interruttore elettronico è il *rettificatore di precisione*, il cui schema è riportato in Fig. 10.15a, in cui l'invertitore di segno e il buffer possono essere realizzati rispettivamente come in Fig. 10.5b e in Fig. 10.9b. Esso realizza la caratteristica ingresso-uscita di Fig. 10.15b (valore assoluto). Una realizzazione alternativa e più semplice del rettificatore di precisione è riportata in Fig. 10.15c: quando l'interruttore elettronico è chiuso (per v_i negativa) l'amplificatore operazionale è collegato come invertente con guadagno unitario e si ha pertanto $v_u = -v_i$, mentre quando esso è aperto, non avendosi

⁽³⁾ Con $\bar{B}$ si conviene di indicare il complemento del segnale logico B .

⁽⁴⁾ Si assume qui come riferimento l'interruttore ADG451-452-453 della Analog Devices, utilizzando la tecnologia LC²MOS, per segnali analogici a $\pm 15\text{ V}$, che funziona anche con alimentazioni a -5 e $+5\text{ V}$, segnali analogici entro i limiti delle alimentazioni e logica di comando a 5 V. Per segnali analogici variabili entro limiti di tensione uguali a quelli della logica di comando (ad esempio 0 e 5 V oppure 0 e 12 V) si può impiegare l'interruttore elettronico CD4066BC della Fairchild, appartenente alla normale famiglia logica CMOS, quindi di facile reperibilità e basso costo, o il 74VHC4316 della Fairchild, che accetta un campo di variabilità del segnale analogico più esteso di quello logico.

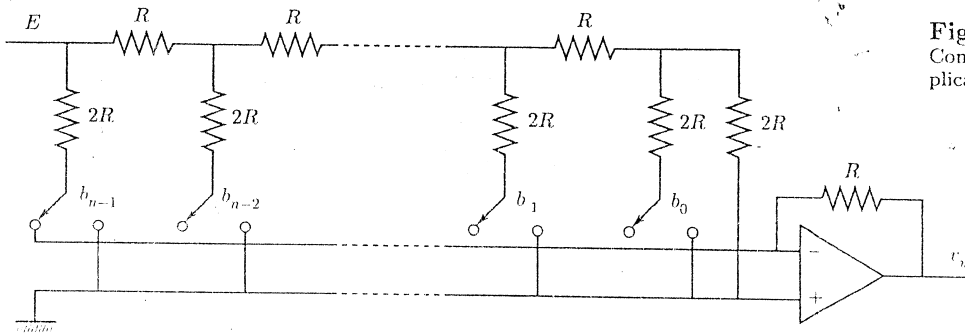


Figura 10.16
Convertitore D/A moltiplicativo.

assorbimento di corrente all'ingresso dell'amplificatore operazionale le tensioni dei due ingressi e dell'uscita sono tutte uguali a v_i .

Gli interruttori elettronici a CMOS sono utilizzati nei convertitori D/A (digitale-analogico). In Fig. 10.16 è riportato un *convertitore D/A moltiplicativo*, che consente il prodotto di un segnale analogico per un segnale digitale codificato in binario. Esso si basa su una rete di resistenze a scala, i cui rami trasversali vengono commutati a massa se il corrispondente bit è falso o all'ingresso di un amplificatore operazionale invertente, anch'esso a potenziale zero, se il bit è vero. Sia N il valore del segnale digitale formato da n bit, espresso come

Convertitore D/A moltiplicativo

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i,$$

in cui b_0 rappresenta il bit meno significativo, b_{n-1} quello più significativo. Per semplicità in Fig. 10.16 si è rappresentato un convertitore a soli 4 bit, ma questi tipi di convertitori sono disponibili in commercio da 8 a 12 bit⁽⁵⁾.

Si noti che la resistenza verso massa della parte di circuito a destra di ogni ramo trasversale è pari a $2R$, per cui le tensioni ai vari nodi da sinistra a destra valgono $E, E/2, E/4, \dots$. Si deduce pertanto che la tensione al nodo corrispondente al ramo trasversale commutato dal bit b_i vale $E/2^{n-i-1}$, mentre la corrente che perviene attraverso tale ramo all'ingresso non invertente dell'amplificatore operazionale vale $E b_i / (2^{n-i} R)$ e la tensione all'uscita dell'amplificatore operazionale è pertanto

$$v_u = R \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b_i}{2^{n-i} R} \right) E = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b_i 2^i}{2^n} \right) v = \frac{1}{2^n} N E,$$

in cui il valore dell'intero N è compreso fra 0 e $2^n - 1$. Il convertitore si dice "moltiplicativo" in quanto l'ingresso E può essere un segnale analogico variabile nel tempo, che viene pertanto ad essere moltiplicato per il numero N .

10.2. Trasduttori di posizione e velocità

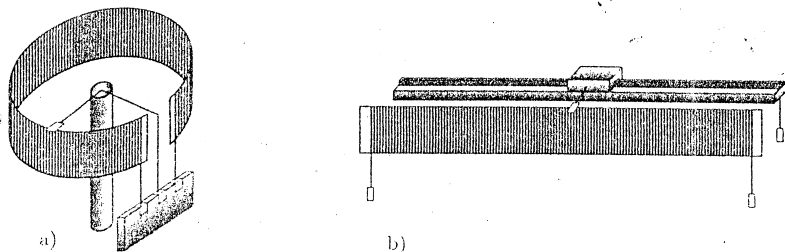
Il più semplice trasduttore di posizione elettrico è il *potenziometro*, consistente in un avvolgimento resistivo fisso e in un cursore con contatto mobile. Per le applicazioni ai sistemi di controllo si costruiscono sia potenziometri

Potenziometro

⁽⁵⁾Un esempio di convertitore moltiplicativo a 12 bit di questo tipo è l'AD7541A della Analog Devices.

Figura 10.17

Potenzimetri con movimento rotatorio e rettilineo.



a rotazione, con il cursore a movimento rotatorio (Fig. 10.17a), sia potenziometri lineari, con cursore a movimento rettilineo (Fig. 10.17b).

Gli elementi resistivi dei potenziometri sono a filo avvolto o a plastica conduttrice. I fili resistivi sono in leghe a base di nichel e cromo, con eventuale aggiunta di rame e ferro. Si costruiscono anche potenziometri a molti giri, in cui l'avvolgimento è realizzato su un supporto elicoidale.

I potenziometri impiegati come misuratori di posizione nei servosistemi, sono caratterizzati da una realizzazione meccanica particolarmente curata, per una maggiore affidabilità e durata; nei tipi a rotazione in genere l'albero è montato su cuscinetti a sfere. Precisione e linearità sono maggiori nei tipi a filo avvolto, mentre la durata è maggiore nei tipi a plastica conduttrice.

La gamma di resistenza dei potenziometri reperibili in commercio è molto ampia: per i potenziometri a filo si va dalla decina di ohm al centinaio di kohm, mentre quelli a plastica conduttrice per una durata ottimale dell'ordine di qualche milione di azionamenti, vengono forniti con resistenza di una decina di kohm. La linearità nei tipi più accurati va da qualche parte per diecimila a qualche parte per mille. Nei potenziometri a filo ovviamente la risoluzione aumenta col valore della resistenza, poiché al crescere della resistenza aumenta il numero delle spire dell'avvolgimento.

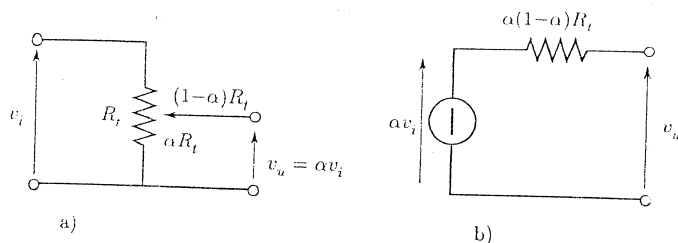
L'*attenuazione* α del potenziometro, che dipende dalla posizione angolare o lineare del cursore, è il rapporto fra la resistenza misurata fra un estremo e il cursore e la resistenza totale dell'avvolgimento. In Fig. 10.18a è riportato il simbolo con il quale si indica il potenziometro negli schemi e in Fig. 10.18b il circuito equivalente del potenziometro. I potenziometri normalmente sono *lineari*, il che significa che sono costruiti in modo che l'attenuazione sia funzione lineare dell'angolo di rotazione ϑ dell'albero, o dello spostamento x del cursore nei tipi rettilinei, cioè se risulta

$$\alpha = K_1 \vartheta \quad \text{oppure} \quad \alpha = K_1 x.$$

I potenziometri sono misuratori di posizione relativamente precisi, leggeri e poco ingombranti; hanno però l'inconveniente di un'affidabilità relativamente scarsa per la presenza del contatto strisciante, soggetto ad usura e ossidazione.

Figura 10.18

Simbolo e circuito equivalente del potenziometro.



Condizionamento del segnale

I dispositivi per il condizionamento del segnale dei trasduttori sono circuiti elettronici accessori per adattare il segnale da essi fornito ai normali livelli di tensione ed impedenza impiegati per la trasmissione e l'elaborazione. Nel caso dei potenziometri, per evitare l'effetto di carico quando il dispositivo cui viene inviato il segnale di uscita abbia un'impedenza di ingresso relativamente bassa, si può ricorrere a un buffer del tipo di Fig. 10.9b.

Utilizzazione dei potenziometri nei servomeccanismi di posizione

Nei servomeccanismi di posizione, quando la variabile di riferimento e quella di uscita sono entrambe posizioni (angolari o rettilinee), si possono impiegare due potenziometri alimentati con la stessa tensione di riferimento, le cui uscite vengono inviate ai due ingressi di un amplificatore differenziale, che costituisce il primo elemento della catena di amplificazione diretta. L'equilibrio si ottiene quando i segnali di uscita dei due potenziometri sono uguali, cioè quando essi presentano la medesima attenuazione, per cui risulta indipendente dalla tensione di riferimento E . Uno schema tipico di servomeccanismo di posizione in cui si impiega tale dispositivo è rappresentato in Fig. 10.19.

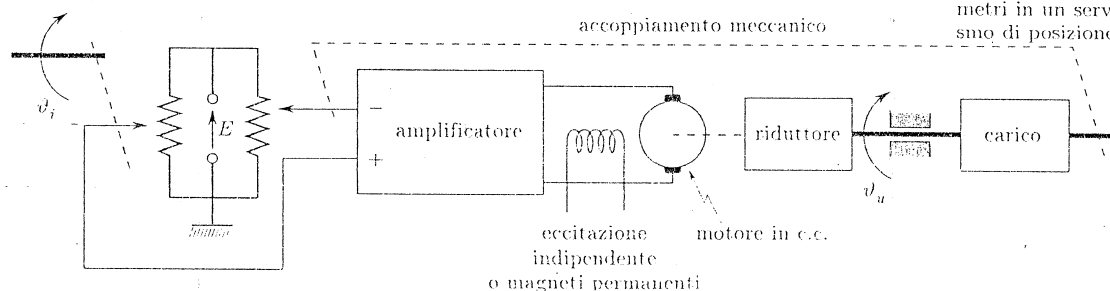


Figura 10.19
Utilizzazione dei potenziometri in un servomeccanismo di posizione.

Nei sistemi di controllo di impianti e nel controllo automatico delle macchine utensili si preferisce impiegare, in luogo dei potenziometri, i *misuratori a induzione*.

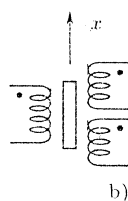
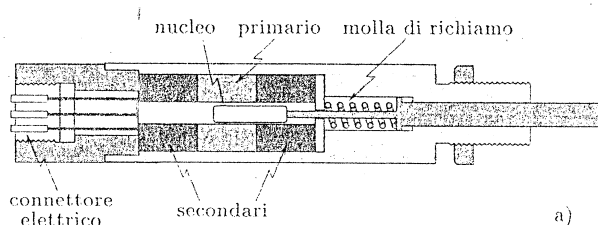


Figura 10.20
Trasformatore differenziale e relativo simbolo.

Fra questi, il più semplice e diffuso è il *trasformatore differenziale*⁽⁶⁾, rappresentato in Fig. 10.20a, mentre in Fig. 10.20b è riportato il simbolo con cui esso viene rappresentato nei circuiti. Il trasformatore differenziale è formato da un circuito magnetico con tre avvolgimenti il cui accoppiamento viene variato mediante un nucleo mobile in materiale ferromagnetico (ferrite). L'avvolgimento centrale è quello di eccitazione, che funge da primario del trasformatore: quando il nucleo è nella posizione centrale, le tensioni indotte ai secondari sono uguali. Se il nucleo viene spostato, il flusso concatenato con uno dei secondari viene rinforzato mentre quello concatenato con l'altro secondario diminuisce, portando ad analogo squilibrio delle forze elettromotrici indotte nei due avvolgimenti. L'eccitazione avviene, a seconda

Trasformatore
differenziale

⁽⁶⁾ Il trasformatore differenziale si indica spesso con l'acronimo LVDT (linear variable differential transformer).

dei tipi, a frequenze comprese fra 50 Hz e 20 kHz. I trasformatori differenziali presentano numerosi vantaggi rispetto ad altri trasduttori di posizione: robustezza, buona sensibilità (dell'ordine dei 100 mV/V per mm per una corsa di ± 2 mm), buona linearità (dallo 0,1 allo 0,5 % del fondo scala), buona ripetibilità. L'escursione è variabile, a seconda dei tipi e delle realizzazioni costruttive, entro ampi limiti (dal decimo di millimetro a cinquanta centimetri).

Condizionamento del segnale

I due secondari dell'amplificatore differenziale possono essere collegati come un unico avvolgimento a presa centrale oppure in serie con forze elettromotrici indotte in opposizione. Nel primo caso il condizionamento del segnale viene effettuato come è indicato in Fig. 10.21: i segnali v_A e v_B vengono inviati a due rettificatori di precisione del tipo di Fig. 10.15a, filtrati con filtri del tipo di Fig. 10.11e ed inviati ad un amplificatore differenziale del tipo di Fig. 10.9f. Nel secondo caso il segnale di uscita del trasduttore è modulato in ampiezza con portante avente la frequenza dell'eccitazione: il segno dello spostamento del nucleo rispetto alla posizione di zero si traduce in un ribaltamento di fase (cioè il segnale di uscita, a seconda del segno dello spostamento, può risultare in fase o in opposizione rispetto all'eccitazione). Il condizionamento del segnale viene effettuato come è indicato in Fig. 10.22: il segnale v_C viene inviato a un amplificatore in alternata del tipo di Fig. 10.11d e ad un demodulatore sincrono.

Figura 10.21

Condizionamento del segnale del trasformatore differenziale: secondari in serie con presa centrale.

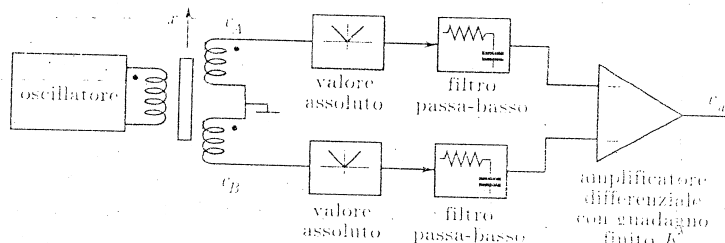


Figura 10.22

Condizionamento del segnale del trasformatore differenziale: secondari in serie con orientamento opposto.

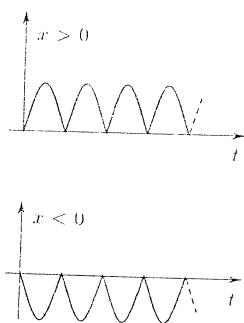
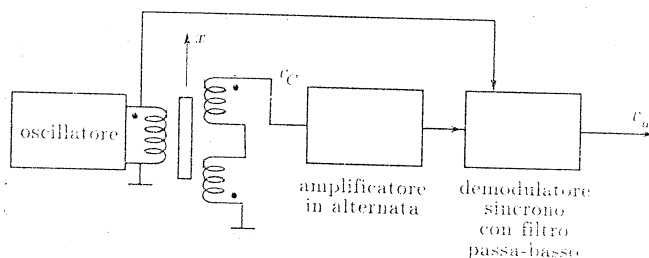


Figura 10.23

Segnali positivo e negativo a monte del filtro nel demodulatore sincrono.

Il demodulatore sincrono è costituito da un circuito rettificatore sincrono seguito da un filtro passa basso. Il rettificatore sincrono è analogo al rettificatore di precisione di Fig. 10.15a, ma con il comparatore pilotato dal segnale di eccitazione del trasformatore differenziale: in questo modo all'uscita del buffer si ottiene il valore assoluto del segnale di ingresso se esso è in fase con l'eccitazione, il valore assoluto invertito di segno se esso è in opposizione, come è indicato in Fig. 10.23. Si ricostruisce così il segno dello spostamento del nucleo rispetto alla posizione centrale. All'uscita del buffer del rettificatore sincrono è presente un filtro passa basso del tipo di Fig. 10.11e, avente la funzione di eliminare la frequenza di eccitazione mantenendo quella della modulante. L'ampiezza del segnale di uscita del demodulatore sincrono è proporzionale a quella del segnale sinusoidale di eccitazione, che deve pertanto essere mantenuta rigorosamente costante. In alcuni circuiti di condizionamento per trasformatori differenziali si ottiene un segnale di uscita indipendente dall'ampiezza dell'eccitazione operandone la divisione per un segnale ottenuto rettificando e filtrando l'eccitazione stessa⁽⁷⁾.

⁽⁷⁾ Circuiti integrati per il condizionamento di segnali di trasformatori differenziali sono l'AD598 e l'AD698 della Analog Devices. La stessa casa produce moltiplicatori di segnali analogici che, in retroazione su un amplificatore operazionale, possono essere utilizzati anche per eseguire la divisione. Un esempio è l'AD633.

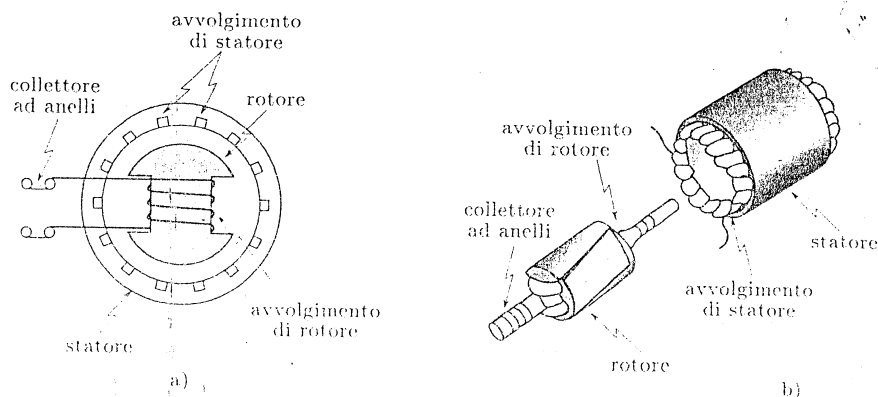


Figura 10.24
Realizzazione costruttiva
del sincro.

Nei servosistemi in cui sia necessario rilevare e trasmettere a distanza una posizione angolare variabile senza limitazioni (anche più giri) si impiegano trasduttori che si fondano anch'essi sulla variazione dell'accoppiamento fra due circuiti elettrici, ma realizzati in modo da consentire la trasmissione continua della posizione angolare, senza alcun fine corsa.

Un sincro per la rilevazione di una posizione angolare, schematizzato in Fig. 10.24a, dal punto di vista costruttivo è simile ad un piccolo alternatore trifase: presenta un avvolgimento di statore trifase, situato nelle cave di un pacco laminato, con una disposizione del tutto analoga a quella delle normali macchine in corrente alternata, ma con una lavorazione molto accurata. Normalmente l'avvolgimento presenta un'unica coppia di poli ed ha i tre rami collegati a stella. Il rotore, che costituisce il primario del trasformatore ad accoppiamento variabile, è anch'esso laminato e a poli salienti, con scarpe polari sagomate in modo da ottenere una distribuzione di flusso al traferro con andamento il più vicino possibile a quello sinusoidale. Come risulta dalla Fig. 10.24b, in cui sono illustrati alcuni dettagli costruttivi, l'avvolgimento di rotore è reso accessibile mediante un collettore ad anelli e le espansioni polari sono lievemente sghembe rispetto all'asse, al fine di smussare, mediandole in un certo intervallo angolare, le irregolarità nella distribuzione del flusso al traferro. In Fig. 10.25 sono indicati i simboli con i quali si rappresenta usualmente il sincro negli schemi elettrici.

Sincro

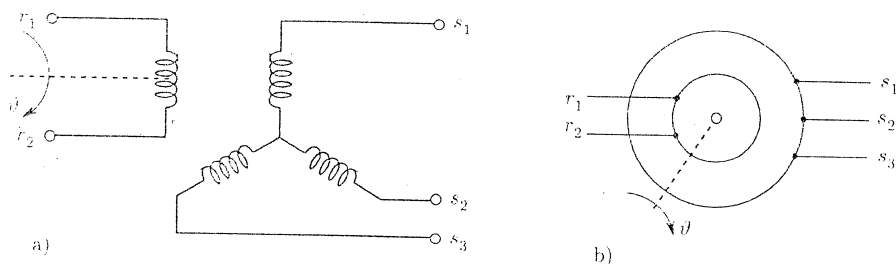


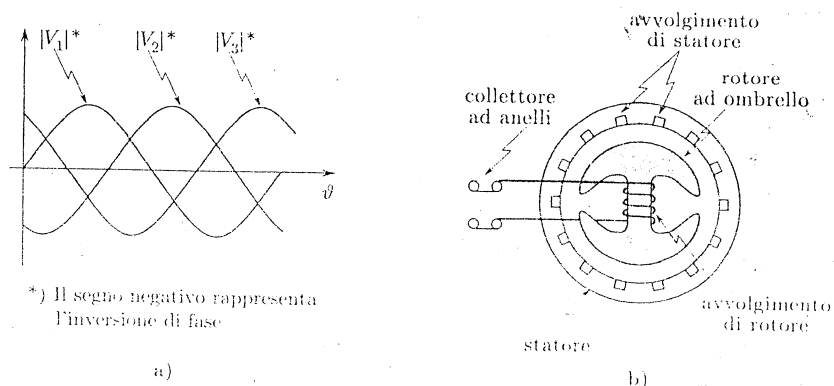
Figura 10.25
Rappresentazioni schematiche
del sincro.

Il rotore viene alimentato con una tensione alternata di frequenza, a seconda dei tipi, di 50, 60 o 400 Hz o fino a 40 kHz nei tipi senza spazzole. Nell'ipotesi che il carico sia simmetrico ed equilibrato, gli andamenti, in funzione del tempo e dell'angolo di rotazione del rotore, delle tensioni concatenate agli estremi dell'avvolgimento di statore, sono dati dalle relazioni

$$\begin{aligned} v_1(t, \vartheta) &:= v_{s2}(t, \vartheta) - v_{s3}(t, \vartheta) = V_M \sin \omega t \sin \vartheta, \\ v_2(t, \vartheta) &:= v_{s3}(t, \vartheta) - v_{s1}(t, \vartheta) = V_M \sin \omega t \sin (\vartheta + 120^\circ), \\ v_3(t, \vartheta) &:= v_{s1}(t, \vartheta) - v_{s2}(t, \vartheta) = V_M \sin \omega t \sin (\vartheta + 240^\circ), \end{aligned} \quad (10.16)$$

Figura 10.26

Caratteristiche ingresso-uscita del sincrotrasmettitore e realizzazione costruttiva del sincrotrasformatore di controllo.



in cui V_M ed ω sono l'ampiezza e la pulsazione della tensione di eccitazione, mentre ϑ è l'angolo di rotazione del rotore rispetto ad un opportuno riferimento. Le caratteristiche ingresso-uscita del sincro sono rappresentate in Fig. 10.26a. Le ampiezze dei tre segnali di uscita, che sono sinusoidi di pulsazione ω , variano sinusoidalmente in funzione dell'angolo ϑ , mentre le fasi possono assumere, rispetto alla tensione di eccitazione, solo i valori 0 e π : lo sfasamento di π , come nel caso del trasformatore differenziale, rappresenta il segno negativo della modulante. In realtà è presente un ulteriore piccolo sfasamento rispetto al segnale di eccitazione dovuto ai parametri reattivi parassiti degli avvolgimenti e del carico.

Il sincro appena descritto, che serve per trasmettere a distanza un segnale di posizione angolare senza assorbire all'albero alcuna coppia apprezzabile, viene indicato con il nome di *sincrotrasmettitore di controllo* e con la sigla CX. Normalmente esso viene collegato ad un *sincrotrasformatore di controllo*, indicato con la sigla CT, costruttivamente analogo, a parte una più elevata impedenza degli avvolgimenti di statore ed una diversa forma del rotore, che è del tipo cosiddetto "a ombrello", cioè a poli salienti con traferro costante e minima distanza fra le espansioni polari. Esso è rappresentato schematicamente in Fig. 10.26b.

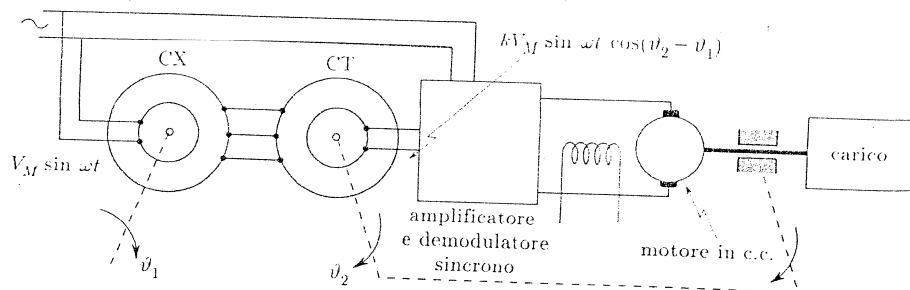
Sincrotrasmettitore
di controllo
Sincrotrasformatore
di controllo

Utilizzazione dei sincro nei servomeccanismi di posizione

Una tipica utilizzazione della coppia di sincro CX e CT è quella della rivelazione dell'errore nei servomeccanismi di posizione. Se lo statore del sincrotrasformatore di controllo viene collegato a quello di un sincrotrasmettitore come è indicato in Fig. 10.27, al traferro del sincrotrasformatore si genera un flusso pulsante a distribuzione sinusoidale e con orientamento identico a quello presente al traferro del sincrotrasmettitore: infatti le correnti indotte negli avvolgimenti del sincrotrasmettitore tendono ad opporsi al flusso, mentre nel sincrotrasformatore le stesse correnti, percorrendo però gli avvolgimenti in senso opposto, danno luogo alla forza magnetomotrice cui è proporzionale il flusso. L'orientamento del flusso al traferro in entrambi i dispositivi varia pertanto con la posizione angolare dell'albero del sincrotrasmettitore. Il flusso al traferro, richiudendosi attraverso il rotore

Figura 10.27

Utilizzazione di una coppia di sincro in un servomeccanismo di posizione con motore in corrente continua.



del sincrotrasformatore, si concatena con il relativo avvolgimento in misura variabile a seconda della posizione angolare del rotore stesso: la forza elettromotrice indotta nell'avvolgimento di rotore è data dalla relazione

$$e(t) = k V_M \sin \omega t \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) = k V_M \sin \omega t \sin (90^\circ + \vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (10.17)$$

cioè è proporzionale al seno dell'angolo che rappresenta l'errore di perpendicolarità dei due rotori.

Gli errori statici dei sincro, dovuti a limitazioni costruttive (come il fatto che gli avvolgimenti sono disposti in cave e pertanto la distribuzione del flusso al traferro è sinusoidale solo approssimativamente), l'inevitabile eccentricità del rotore, l'ellitticità di statore e rotore, sono dell'ordine di $5'$ o $10'$ (primi o sessantesimi di grado). Oltre agli errori statici, si devono considerare gli errori dinamici o di velocità, dovuti al fatto che, oltre alle forze elettromotrici indotte per la variazione sinusoidale nel tempo del flusso concatenato, si presentano forze elettromotrici associate alla variazione del flusso causata dal moto, cioè forze elettromotrici che, contrariamente alle precedenti, sarebbero presenti anche se il flusso fosse costante: i valori di tali forze elettromotrici sono proporzionali alla velocità di rotazione e inversamente proporzionali alla frequenza di eccitazione dei sincro, per cui vengono ridotti tenendo relativamente elevata tale frequenza. Nei servomeccanismi con motore in corrente continua il segnale errore deve essere rivelato con un demodulatore sincrono analogo a quello utilizzato per il trasformatore differenziale, come è indicato in Fig. 10.27.

Sincro di coppia

I sincro finora considerati si dicono *sincro di controllo* e sono veri e propri trasduttori di posizioni angolari o di differenze di posizioni angolari. Altri tipi di sincro sono i *sincro di coppia*, dispositivi costruttivamente simili, ma utilizzati per la trasmissione a distanza di una coppia senza amplificazione di potenza. I sincro di coppia sono del tutto analoghi ai sincrotrasmettitori di controllo, con rotore a poli salienti alimentato dalla rete attraverso un collettore ad anelli, come indicato in Fig. 10.24a. Lo schema di collegamento del sincro di coppia è riportato in Fig. 10.28: immaginando per un attimo che sia collegato alla rete il solo sincrotrasmettitore di coppia (TX), al traferro delle due macchine si genera un flusso pulsante, la cui direzione dipende dalla posizione del rotore di TX. Se si collega alla rete anche il ricevitore di coppia (TR), si genera un flusso che tende ad allinearsi con quello preesistente, dando luogo ad una coppia qualora i due rotori non siano allineati parallelamente. Si realizza perciò la trasmissione a distanza del moto, come se i due alberi fossero collegati fra loro con una trasmissione meccanica elastica e flessibile, in grado di vincere una coppia resistente. Dal punto di vista meccanico i ricevitori di coppia sono identici ai trasmettitori di coppia (entrambi a poli salienti), mentre dal punto di vista meccanico i due dispositivi si differenziano alquanto per la presenza, nel ricevitore, di un apparato smorzatore delle oscillazioni. Il parametro che caratterizza i sincro di coppia è il gradiente di coppia, misurato in gr-cm/grado, il cui valore dipende dalle dimensioni dei dispositivi: si va da alcuni gr-cm/grado a qualche decina di gr-cm/grado. Si possono collegare più ricevitori di coppia ad uno stesso trasmettitore di coppia. Esistono anche i ricevitori differenziali di coppia (TDR), con avvolgimenti trifasi sia nel rotore sia nello statore, che, collegati a due trasmettitori di coppia, realizzano un posizionamento angolare pari alla somma algebrica delle posizioni angolari dei rotori dei due trasmettitori.

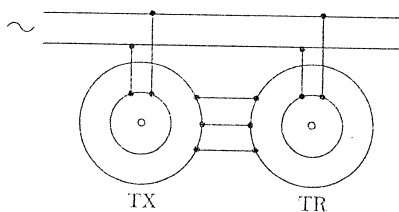


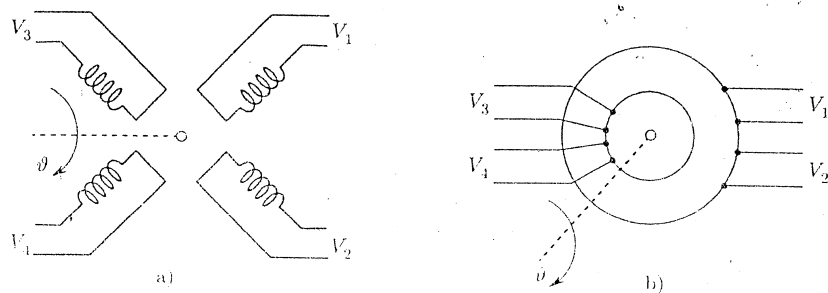
Figura 10.28
Collegamento di un trasmettitore e di un ricevitore di coppia.

I *resolver* sono costruttivamente analoghi ai sincro, ma presentano avvolgimenti bifasi in cave sia nello statore sia nel rotore, che è di tipo cilindrico. I simboli con i quali si rappresentano i resolver negli schemi elettrici sono riportati in Fig. 10.29. Indicando con ϑ la posizione angolare del rotore rispetto a un opportuno riferimento e con V_1 , V_2 , V_3 e V_4 i valori massimi

Resolver

Figura 10.29

Rappresentazioni schematiche del resolver.



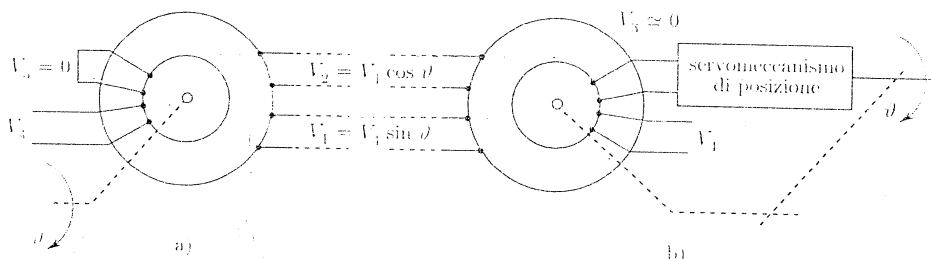
delle tensioni alternate di rotore e di statore, nell'ipotesi che il rotore sia alimentato con due tensioni alternate in fase fra loro valgono le relazioni

$$\begin{aligned} V_1 &= V_3 \cos \vartheta + V_4 \sin \vartheta, \\ V_2 &= V_4 \cos \vartheta - V_3 \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (10.18)$$

che si riferiscono al caso più frequente, in cui il rapporto di trasformazione del resolver è unitario.

Figura 10.30

Impiego del resolver per il passaggio da coordinate polari a cartesiane e viceversa.

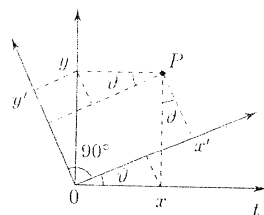


Il resolver è impiegato nella strumentazione di bordo di navi ed aerei per l'elaborazione di dati relativi alla posizione geografica. Un impiego tipico del resolver è la trasformazione di coordinate da polari a cartesiane e viceversa: in Fig. 10.30a è rappresentata la connessione di un resolver per il primo caso: le grandezze di ingresso sono V_4 , il valore della tensione di eccitazione, che rappresenta il modulo, e ϑ , la posizione angolare, che rappresenta l'argomento. In Fig. 10.30b è rappresentata la connessione per ottenere la trasformazione inversa: in questo caso le eccitazioni sono V_1 e V_2 : un servomeccanismo di posizione provvede a variare la posizione angolare del resolver in modo da mantenere nullo il segnale errore, costituito da V_3 : in tale condizione di equilibrio V_4 rappresenta il modulo e ϑ l'argomento.

Il resolver può essere impiegato per eseguire i calcoli relativi a rotazioni di assi cartesiani: con riferimento alle relazioni (10.18) si può constatare che, se V_3 e V_4 rappresentano le coordinate cartesiane rispetto a un dato sistema di assi, V_1 e V_2 quelle del sistema ruotato di ϑ , le equazioni del resolver coincidono con quelle della trasformazione di coordinate. Con riferimento alla Fig. 10.31 infatti si può scrivere $x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$, $y' = y \cos \vartheta - x \sin \vartheta$.

Con il resolver si può sfasare una tensione alternata di un angolo arbitrario e variabile con continuità rispetto a una data tensione di riferimento: occorre eccitare il dispositivo con la suddetta tensione di riferimento e con una tensione ad essa in quadratura per ottenere, sulle due uscite, tensioni sfasate rispetto alle precedenti dell'angolo del rotore ϑ , cioè di un angolo variabile ad arbitrio senza alcuna limitazione. Infatti se nelle (10.18) si assume

$$V_3 = V \sin \omega t, \quad V_4 = V \cos \omega t,$$

**Figura 10.31**

Rotazione di assi cartesiani.

si deduce

$$V_1 = V_3 \cos \vartheta + V_4 \sin \vartheta = V \sin(\omega t + \vartheta),$$

$$V_2 = V_4 \cos \vartheta - V_3 \sin \vartheta = V \cos(\omega t + \vartheta).$$

Come trasduttori, i resolver vengono impiegati in modo analogo ai sincro, per rilevare un errore d'angolo; in questa applicazione si usa uno solo degli avvolgimenti di rotore o si impiega un resolver avente un solo avvolgimento di rotore. Infatti i due segnali di statore $V(t) \cos \vartheta$ e $V(t) \sin \vartheta$ (in cui $V(t) = V_M \sin \omega t$ indica l'eccitazione alternata) forniscono informazione completa sulla posizione del rotore. In tale utilizzazione pertanto non sussiste alcuna differenza fra il resolver e il sincro, a parte il fatto che il primo è un dispositivo bifase, il secondo trifase. La connessione per ottenere un servomeccanismo di posizione analogo a quello di Fig. 10.27 è in pratica quella di Fig. 10.30ab, supponendo che V_1 rappresenti il segnale alternato di riferimento con il quale deve essere sincronizzato il demodulatore.

Nelle applicazioni in cui il sincro o il resolver risultino molto sollecitati meccanicamente, il collettore ad anelli per la trasmissione del segnale di eccitazione al rotore viene sostituito con un accoppiamento a trasformatore, i cui avvolgimenti, sono concentrici e disposti uno sullo statore e l'altro sul rotore, come è indicato in Fig. 10.32a, mentre in Fig. 10.32b è riportato il corrispondente schema elettrico. In questo caso il sincro o il resolver si dicono *senza spazzole* e vengono tipicamente utilizzati per la misura della posizione angolare del rotore nei motori in corrente continua senza spazzole. In questo impiego per diminuire gli errori di velocità viene scelta una frequenza di eccitazione relativamente elevata (dell'ordine della decina di kHz).

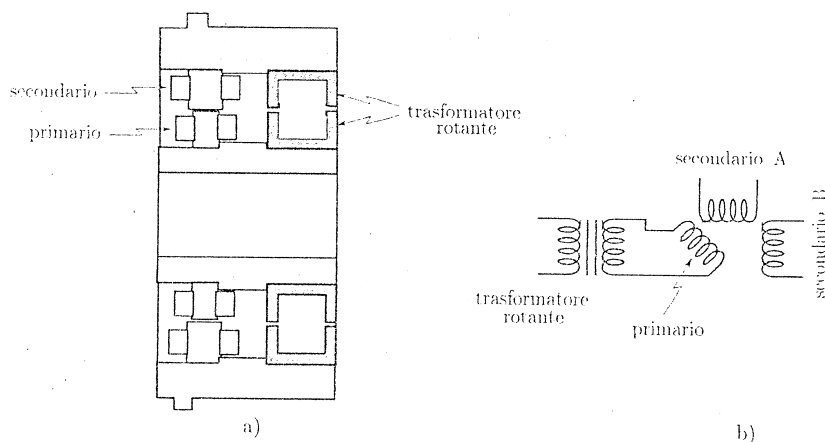


Figura 10.32
Sincro o resolver senza
spazzole e relativo
schema.

Conversione di segnale sincro-resolver e viceversa

È possibile passare dai segnali forniti da un sincro a quelli di un resolver e viceversa mediante semplici elaborazioni algebriche, facilmente deducibili dal diagramma vettoriale di Fig. 10.33, in cui le proiezioni sulla verticale di S_1 , S_2 e S_3 rappresentano i segnali del sincro in funzione dell'angolo ϑ , mentre R_1 ed R_2 i corrispondenti segnali del resolver. Si deduce

$$\begin{aligned} R_1 &= S_1, \\ R_2 &= \left(S_2 + \frac{1}{2} S_1 \right) \frac{2}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (10.19)$$

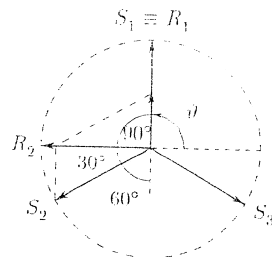


Figura 10.33
Diagrammi vettoriali del
sincro e del resolver.

e, viceversa,

$$\begin{aligned} S_1 &= R_1, \\ S_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} R_2 - \frac{1}{2} R_1, \\ S_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} R_2 - \frac{1}{2} R_1. \end{aligned} \quad (10.20)$$

❖ Errori di velocità

Si è accennato in precedenza, con riferimento ai sincro, agli errori di velocità. Tali errori ovviamente sussistono anche nei resolver e un'analisi del loro effetto si può condurre come segue. Sia la tensione di eccitazione

$$V(t) = V_M \sin \omega t; \quad (10.21)$$

considerando l'impedenza degli avvolgimenti puramente reattiva, la corrente e il flusso al traferro risultano sfasati rispetto ad essa di 90° ed inversamente proporzionali alla pulsazione ω , per cui, nel caso sia $\vartheta = \vartheta_0 + \alpha t$ (rotazione a velocità costante) si può scrivere

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= -(k/\omega) V_M \cos \omega t \sin(\vartheta_0 + \alpha t), \\ \Phi_2(t) &= -(k/\omega) V_M \cos \omega t \cos(\vartheta_0 + \alpha t). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Le forze elettromotrici indotte negli avvolgimenti secondari sono proporzionali a

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{dt} &= k V_M \sin \omega t \sin(\vartheta_0 + \alpha t) - (\alpha/\omega) k V_M \cos \omega t \cos(\vartheta_0 + \alpha t), \\ \frac{d\Phi_2}{dt} &= k V_M \sin \omega t \cos(\vartheta_0 + \alpha t) + (\alpha/\omega) k V_M \cos \omega t \sin(\vartheta_0 + \alpha t); \end{aligned} \quad (10.23)$$

gli ultimi termini a secondo membro rappresentano gli errori di velocità: si noti che essi risultano in quadratura rispetto ai segnali e si possono pertanto eliminare utilizzando un demodulatore sensibile alla fase.

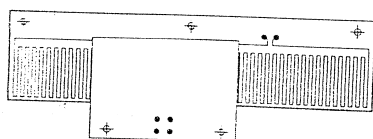
Inductosyn

Analogo al resolver nel principio di funzionamento è l'*inductosyn*, un trasduttore di posizione di grande precisione utilizzato nel controllo numerico delle macchine utensili. Esso è costituito da una *riga* o *scala* e da un *cursore*, consistenti in supporti metallici rigidi a basso coefficiente di dilatazione termica, sui quali sono riportati a intarsio avvolgimenti planari su supporto vetroso. La scala e il cursore sono fissati a due parti in moto relativo di una macchina utensile, ad esempio il banco e una slitta, in modo che gli avvolgimenti siano affacciati e a piccola distanza (circa 0,2 mm), disposti come in Fig. 10.34a. La scala può essere allungata ad arbitrio collegando in serie più unità adiacenti; essa porta un unico avvolgimento con passo di 2 mm o 0,1 pollice, mentre il cursore, ad essa affacciato, porta due avvolgimenti con lo stesso passo della scala, uno traslato rispetto all'altro di un quarto di passo, come è indicato in Fig. 10.34b.

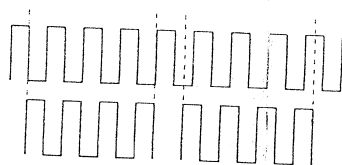
Se si alimenta la scala con una corrente sinusoidale, ai capi degli avvolgimenti del cursore si rilevano due tensioni esprimibili con le relazioni

$$V_1(t) = V(t) \sin \frac{2\pi x}{p}, \quad V_2(t) = V(t) \cos \frac{2\pi x}{p}, \quad (10.24)$$

Figura 10.34
Inductosyn.



a)



b)

in cui $V(t)$ è una tensione sinusoidale avente la stessa frequenza del segnale di eccitazione, x lo spostamento del cursore rispetto alla scala, p il passo. La precisione ottenibile è dell'ordine del micron, la frequenza di eccitazione è sui 20 o 40 kHz.

Vengono costruiti anche inductosyn circolari, aventi la forma di dischi affacciati, con passo di 2° o di 1° .

L'inductosyn è un trasduttore incrementale, nel senso che fornisce segnali uguali per spostamenti multipli del passo. Per ottenere una misura assoluta, alcuni inductosyn riportano sulla scala anche un'opportuna codifica, analoga a quella degli encoder, che consente di distinguere ogni singolo incremento mediante un lettore disposto sul cursore, per cui si ottiene la misura esatta con lo spostamento di un passo dopo la messa in funzione del dispositivo. In alternativa, su può impiegare un altro trasduttore (ad esempio un potenziometro) che viene utilizzato per una misura grossolana, ma sufficiente per poter discriminare il passo con opportuna logica numerica. L'inductosyn viene largamente impiegato nel controllo numerico delle macchine utensili, unito a sistemi elettronici per il condizionamento del segnale che forniscono direttamente informazione ed indicazione digitale con risoluzione dell'ordine del micron.

*Inductosyn
incrementale
assoluto*

Condizionamento del segnale

Lo schema di principio di un dispositivo utilizzando un inductosyn per la conversione diretta di uno spostamento in informazione digitale è riportato in Fig. 10.35: l'avvolgimento della scala viene eccitato con una corrente alternata sinusoidale, cosicché ai capi degli avvolgimenti del cursore si rilevano due tensioni alternate sinusoidali modulate del tipo (10.24), che nella figura sono state indicate più semplicemente con $V(t) \cos \vartheta$ e $V(t) \sin \vartheta$, avendo posto $\vartheta := 2\pi x/p$. Il dispositivo elettronico ha lo scopo di fornire un valore numerico N proporzionale all'angolo ϑ : ad esempio nel caso di un inductosyn con passo di 2 mm, una relazione del tipo

$$N = \frac{2000}{2\pi} \vartheta \quad (10.25)$$

corrisponde ad un trasduttore digitale con sensibilità di 1 micron; ovviamente il primo membro della (10.25) si intende arrotondato all'intero più vicino.

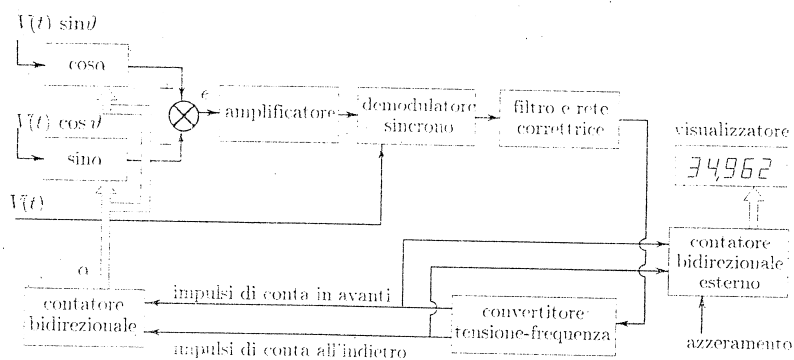


Figura 10.35
Schema di principio di un convertitore digitale per inductosyn.

La conversione analogico-digitale è del tipo detto *ad inseguimento*, cioè funziona secondo il consueto principio esplorativo proprio dei sistemi in retroazione: l'angolo ϑ viene confrontato con l'angolo α , corrispondente, secondo la costante di proporzionalità definita dalla (10.25), al valore numerico accumulato nel contatore bidirezionale compreso entro l'anello; se i due valori sono diversi, si genera un'azione correttiva tendente ad annullare la differenza, sotto forma di impulsi di conta in avanti, se il valore numerico accumulato nel contatore è errato per difetto, oppure di conta all'indietro, se esso è errato per eccesso. La rilevazione dell'errore avviene come segue: il segnale $V(t) \sin \vartheta$ viene inviato ad un moltiplicatore a ingresso numerico (convertitore moltiplicativo del tipo di Fig. 10.16), ove viene moltiplicato per $\cos \alpha$, mentre $V(t) \cos \vartheta$ viene moltiplicato per $\sin \alpha$ e ad esso sottratto: si genera così il segnale errore

$$e(t) = V(t) (\sin \vartheta \cos \alpha - \cos \vartheta \sin \alpha) = V(t) \sin (\vartheta - \alpha) \quad (10.26)$$

*Conversione analogico-
digitale ad inseguimento*

ovviamente anch'esso sinusoidale, di frequenza uguale a quella della corrente di eccitazione della scala e modulato in ampiezza. La generazione delle funzioni $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ in funzione del valore numerico α accumulato nel contatore viene effettuata con opportune memorie digitali a sola lettura (ROM). Il segnale (10.26) viene inviato ad un demodulatore sincrono. Si ottiene così un segnale che presenta una componente continua di valore proporzionale alla modulante, che viene filtrato ed inviato ad un *convertitore tensione-frequenza*, cioè ad un dispositivo che genera sequenze di impulsi di frequenza proporzionale alla tensione di ingresso. Il convertitore impiegato nello schema di Fig. 10.35 presenta due uscite, corrispondenti rispettivamente a polarità positiva e negativa del segnale di ingresso, che danno luogo agli impulsi di conta in avanti e di conta all'indietro. Gli impulsi, il cui numero è di 2000 per passo, possono essere utilizzati anche in un contatore esterno, che viene azzerato prima di eseguire una misura incrementale. Il contenuto di tale contatore costituisce la restituzione digitale della misura e può essere visualizzato e trasmesso a distanza. Il passaggio per lo zero del contenuto del contatore entro l'anello, che è ciclico ed avviene ogni 2000 impulsi, rappresenta invece un riferimento assoluto per ogni singolo passo (*zero elettrico*): se il contatore esterno viene azzerato, all'accensione del dispositivo, in corrispondenza di un determinato zero elettrico, si ottiene una misura assoluta perfettamente ripetibile⁽⁸⁾.

Convertitore
tensione-frequenza

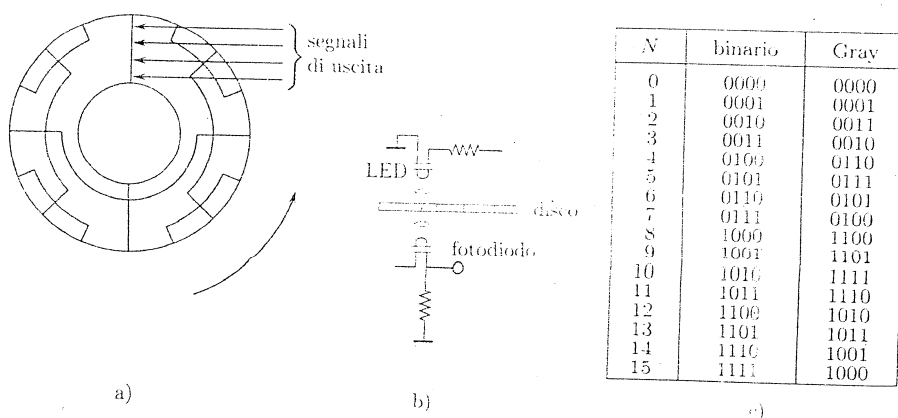
Un trasduttore di posizione ad uscita digitale, che viene impiegato quando si desideri un'indicazione numerica diretta o nel controllo numerico delle macchine utensili, è l'*encoder*, che può essere assoluto o incrementale.

Encoder assoluto

Un *encoder assoluto* è costituito da un disco di vetro ottico, che ruota solidalmente con l'albero di cui si vuole misurare la posizione angolare: il disco è diviso in settori, ciascuno dei quali, con un opportuno alternarsi di zone trasparenti ed opache (ottenute per deposito di film metallico), riproduce un'informazione numerica codificata: i settori opachi intercettano un fascio di luce emesso da un LED (light emitting diode, diodo emettitore di luce), opportunamente focalizzato, che viene captato, dalla parte opposta del disco, da un fotodiodo o fototransistor. Questo fornisce un segnale elettrico, che, opportunamente squadrato attraverso un "trigger di Schmitt" (circuito elettrico con retroazione positiva avente caratteristica ingresso-uscita del tipo relè con isteresi), dà luogo all'informazione sotto forma di segnali di tensione a due livelli significativi (che si indicano con i simboli convenzionali 0 ed 1), su un numero di conduttori corrispondente alla lunghezza della parola nel codice adottato per la trasduzione sotto forma digitale della misura angolare. In genere l'apparato elettronico di preamplificazione è situato entro lo stesso contenitore del disco, in prossimità degli elementi sensibili.

In Fig. 10.36a è rappresentato il disco di un encoder assoluto a 16 settori con codifica binaria e in Fig. 10.36b la disposizione del gruppo optoelettro-

Figura 10.36
Disco e gruppo optoelettronico di un encoder assoluto: tabella per due diverse codifiche di posizione.



⁽⁸⁾Lo schema di Fig.10.35 può essere utilizzato anche per la conversione da resolver a digitale. Vedi i circuiti monolitici ADS80, ADS81 e ADS90 della Analog Devices.

nico in rapporto al disco. Il codice binario è un codice "pesato", cioè un codice in cui l'informazione numerica è rappresentata da una configurazione di simboli 0 ed 1, in cui ogni 1 ha un proprio peso, che dipende dalla sua posizione. Nel caso del binario, la i -esima cifra a partire da destra ha un peso pari a 2^{i-1} ; la codifica binaria dei numeri da 0 a 15 è riportata nella seconda colonna della tabella di Fig. 10.36c.

Il codice Gray per gli encoder assoluti

Negli encoder assoluti però la codifica binaria non è conveniente perché può presentare errori notevoli dovuti ad imperfetto allineamento dei rivelatori ottici: si consideri ad esempio il passaggio dal 7 (0111) all'8 (1000): se il primo rivelatore dà il segnale corrispondente all'1 prima che gli altri tre diano quelli corrispondenti allo 0, si presenta la codifica 15 (1111), che è del tutto errata in rapporto alla posizione effettiva del disco. L'inconveniente si supera adottando il *codice Gray*, riportato nella terza colonna della tabella di Fig. 10.36c, che è legato al binario dalla seguente relazione: la i -esima cifra del codice Gray, procedendo da destra, è l'OR esclusivo della i -esima ed $(i+1)$ -esima cifra binaria, cioè $g_i = b_i \oplus b_{i+1}$. L'operatore "OR esclusivo" è un operatore logico, cioè elabora segnali a due livelli, il cui simbolo è rappresentato in Fig. 10.37a. Esso realizza la funzione indicata nella tabella di Fig. 10.37b, in cui l'uscita è 1 quando i simboli di ingresso sono diversi, 0 quando essi sono uguali. Poiché le codifiche adiacenti in codice Gray differiscono per un solo simbolo, la mancanza di allineamento non porta ad errore. Il passaggio dal Gray al binario, cui conviene ricondursi perché più conveniente per le elaborazioni, si può eseguire con il semplice collegamento di OR esclusivi mostrato in Fig. 10.37c, che realizza la relazione $b_i = g_i \oplus b_{i+1}$. Encoder assoluti a 8, 9, 10, 11, 12 bits forniscono rispettivamente 256, 512, 1024, 2048 e 4096 settori per giro. Si possono ottenere altri numeri di settori per giro eliminando le prime N e le ultime N configurazioni, con N qualunque: si mantiene così la proprietà di adiacenza del codice Gray. Ad esempio 360 settori si ottengono da $512 - 2 \cdot 76$, 3600 da $4096 - 2 \cdot 248$, 4000 da $4096 - 2 \cdot 48$. La conversione a binario si può effettuare con una memoria a sola lettura.

Codice Gray

OR esclusivo

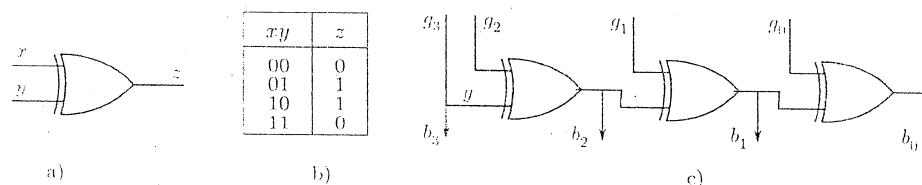


Figura 10.37
Operatore "OR esclusivo",
relativa tabella di verità
e circuito per il passaggio
dal Gray al binario.

Condizionamento del segnale

I segnali forniti dai gruppi ottici degli encoder assoluti e incrementali viene inviato a circuiti rigenerativi del tipo "trigger di Schmitt", contenuti nello stesso corpo dell'encoder, che provvedono a rendere netta la transizione dei segnali di uscita fra i due livelli significativi.

Gli *encoder incrementali* sono di più frequente impiego di quelli assoluti perché costruttivamente più semplici. In molti casi inoltre una misura incrementale si può facilmente riportare ad assoluta prevedendo un opportuno dispositivo per l'azzeramento o la predisposizione automatica di un contatore in fase di avviamento del sistema (ad esempio la macchina utensile) in cui l'encoder viene utilizzato. Dal punto di vista costruttivo, anche l'encoder incrementale è costituito da un disco di vetro ottico, che riporta settori opachi ottenuti per deposizione di film metallico, alternati a settori trasparenti. Per ottenere una maggior risoluzione, al disco è affacciata una maschera di vetro fissa che riporta anch'essa un'uguale alternanza di settori opachi e trasparenti, con ugual passo e disposta in modo che le due superfici metallizzate siano di fronte: in tal modo non occorre una focalizzazione molto spinta del raggio di luce fornito dal LED. In numerose applicazioni il moto dell'elemento di cui si vuole misurare lo spostamento è bidirezionale

Encoder incrementale

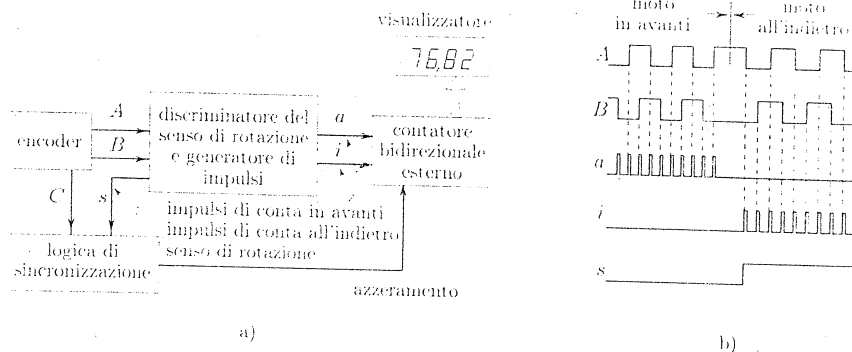
e, per una codifica esatta della posizione, occorre poter discriminare il senso di rotazione. A tal fine l'encoder fornisce due segnali, che verranno indicati con *A* e *B*, fra loro in quadratura, di cui il primo risulta in anticipo rispetto al secondo se il moto è in avanti, e in ritardo se il moto è all'indietro. Tali segnali si ottengono con due elementi sensibili separati e distanziati fra loro di un qualunque numero intero di passi più un quarto di passo: la sequenza dei segnali *A* e *B* corrispondente al moto in avanti è 00-01-11-10-00-... e quella corrispondente al moto all'indietro è 00-10-11-01-00-...: è pertanto possibile rilevare ogni inversione del senso di rotazione non appena si ha una variazione di uno dei segnali. Ad esempio, nel caso in cui la configurazione presente sia 11, se la successiva configurazione è 10 il moto è in avanti, se essa è 01 il moto è all'indietro.

Condizionamento del segnale

Il segnale fornito dall'encoder incrementale viene inviato a un contatore, in cui la misura incrementale di spostamento, rispetto alla posizione in cui il contatore viene azzerato, è resa disponibile in forma digitale ed eventualmente visualizzata. Nelle applicazioni in cui il moto dell'elemento di cui si vuole misurare lo spostamento è bidirezionale per una codifica esatta della posizione, occorre impiegare un contatore bidirezionale e generare impulsi di conta in avanti e di conta all'indietro, come nel caso del convertitore per inductosyn precedentemente illustrato. Uno schema di collegamento di un encoder incrementale bidirezionale è rappresentato in Fig. 10.38a: i segnali *A* e *B* provenienti dall'encoder vengono inviati a un dispositivo elettronico che provvede alla discriminazione del senso di rotazione e alla generazione di impulsi per il contatore, in ragione di un impulso per ogni fronte di salita o di discesa di ciascuno dei due segnali, come è indicato in Fig. 10.38b. In genere gli encoder incrementali forniscono anche un terzo segnale *C*, consistente in un impulso per ogni giro, che può servire per l'azzeramento del contatore (con l'avvertenza di usarne l'uno o l'altro fronte a seconda del senso di rotazione)⁽⁹⁾.

Figura 10.38

Collegamento di un encoder incrementale bidirezionale e relativi segnali.



La risoluzione massima ottenibile negli encoder incrementali ottici è di qualche migliaio di passi per giro; encoder ottici particolarmente accurati e utilizzanti il fenomeno delle frange di interferenza forniscono anche più di ventimila impulsi per giro. Esistono anche encoder incrementali lineari, detti *righe ottiche*, aventi risoluzioni dell'ordine di 1/100 di millimetro o del micron nei tipi più accurati.

Sono reperibili in commercio anche encoder incrementali magnetici, costituiti da dischi metallici opportunamente magnetizzati per settori adiacenti e un sensore magnetoresistivo che fornisce segnali in quadratura analoghi a quelli degli encoder ottici. La risoluzione è inferiore, ma la robustezza e la resistenza agli urti e alle vibrazioni molto maggiore.

⁽⁹⁾ Un integrato che genera i segnali di Fig. 10.38b e discrimina il senso di rotazione è l'LS7183 della LSI Computer Systems.

Si considerano ora i *trasduttori di velocità*, pure largamente impiegati nei dispositivi di controllo: si hanno generatori tachimetrici in corrente continua e generatori di impulsi.

Trasduttore di velocità

Un tachimetro in corrente continua o *dinamo tachimetrica* è una piccola dinamo, generalmente eccitata con magnete permanente, realizzata con cura e utilizzando materiali di caratteristiche elevate, in modo da ottenere una buona linearità e ridurre quanto possibile gli effetti dell'isteresi magnetica e della temperatura. Esso è caratterizzato dalla relazione lineare

Dinamo tachimetrica

$$v_u(t) = K_t \omega_r(t),$$

in cui K_t è la *costante tachimetrica* o *gradiente tachimetrico* e ω_r la velocità angolare del rotore.

Costante tachimetrica
Gradiente tachimetrico

I circuiti magnetici normalmente sono compensati, cioè comprendono materiali la cui permeabilità varia con la temperatura. Un fenomeno che nelle applicazioni ai sistemi di controllo genera disturbo è l'inevitabile ondulazione della tensione di uscita, dovuta alla presenza del collettore. Tale ondulazione, essendo di frequenza variabile con la velocità, non è di facile filtraggio, per cui nella scelta di una dinamo tachimetrica occorre tener conto della sua entità, che può variare in misura notevole a seconda del modello, dipendendo dal numero di lamelle del collettore. La corrente assorbita all'uscita deve essere sempre relativamente bassa, per evitare fenomeni di smagnetizzazione e anomalie di commutazione dovute alla reazione di armatura.

Un semplice *generatore di impulsi a induzione* è rappresentato nella Fig. 10.39. Un rotore cilindrico di ferrite magnetizzato in superficie con numerosi poli magnetici di polarità alterne ruota all'interno di una bobina circondata da un mantello tubolare di ferro dolce che riporta all'interno delle espansioni polari alternativamente di verso opposto in numero uguale a quello dei poli del rotore. Quando questo ruota viene a crearsi intorno alla bobina un campo magnetico alternativo e in uscita si genera una tensione alternata approssimativamente sinusoidale di ampiezza e frequenza proporzionali alla velocità angolare.

Generatore di impulsi a induzione

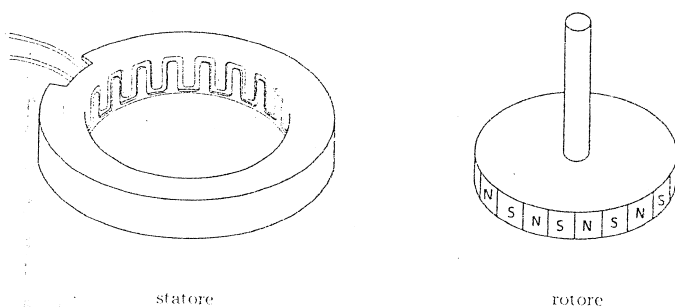


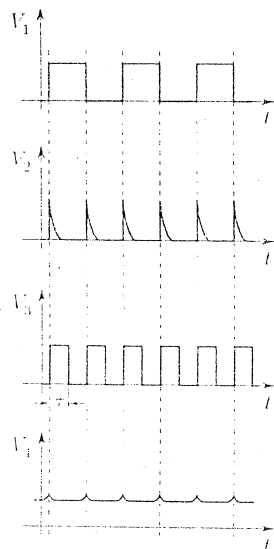
Figura 10.39
Un semplice generatore di impulsi a induzione.

Condizionamento del segnale

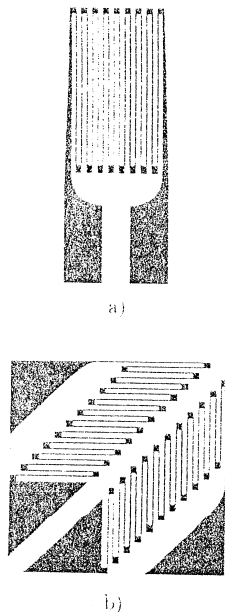
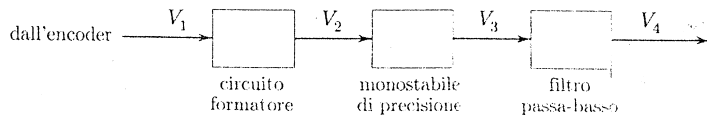
Il condizionamento del segnale così ottenuto può essere effettuato con un amplificatore in alternata, un rettificatore di precisione e un filtro passa basso. Rispetto ai generatori tachimetrici in corrente continua il generatore di impulsi di Fig. 10.39 presenta il vantaggio di non aver alcun contatto strisciante, unito però all'inconveniente di non fornire il segno della grandezza misurata. Se esso viene utilizzato in un azionamento in cui la misura di posizione viene effettuata con un encoder incrementale, si può utilizzare l'informazione sul segno fornita dal circuito di Fig. 10.38a o da un integrato ad esso equivalente come l'LS7183. Se il sistema non comprende un encoder incrementale ma il trasduttore è un motore brushless, si possono utilizzare due dei tre segnali provenienti dai trasduttori a effetto Hall in luogo dei due segnali dell'encoder.

Figura 10.40

Schema di principio di un convertitore frequenza-tensione.

**Figura 10.41**

Forme d'onda relative al circuito di Fig. 10.40.

**Figura 10.42**
Estensimetri.

Utilizzazione degli encoder come tachimetri

Tachimetri di diverso tipo si possono costruire utilizzando gli encoder: un solo encoder spesso viene utilizzato per misurare sia la posizione sia la velocità angolare. Un segnale analogico proporzionale alla velocità angolare si ottiene inviando ad un convertitore frequenza-tensione uno dei due segnali di uscita dell'encoder e ricostruendo poi il segno con il segnale fornito dal discriminatore del senso di rotazione dell'encoder. Il convertitore frequenza-tensione può essere realizzato secondo lo schema di Fig. 10.40: il segnale viene inviato ad un circuito che ne converte in impulsi entrambi i fronti, raddoppiando così la frequenza, quindi a un monostabile di precisione, che produce impulsi di area costante, con un controllo preciso sia della loro durata τ sia della loro ampiezza V e a un filtro passa basso, che fornisce il valor medio della sequenza di tali impulsi, proporzionale al loro numero per unità di tempo, quindi alla frequenza del segnale di ingresso ⁽¹⁰⁾. In Fig. 10.41 sono riportate le forme d'onda dei segnali relativi ai vari blocchi di tale tipo di convertitore.

10.3. Misure di deformazione, temperatura, campo magnetico, pressione, accelerazione

I trasduttori di posizione presi in esame al paragrafo precedente sono adatti per rilevare spostamenti lineari o angolari di entità notevole. Si deve però considerare che anche la misura precisa di spostamenti o deformazioni di piccola entità con apparati che, per contro, siano caratterizzati da una maggiore semplicità costruttiva, riveste un grande interesse, in quanto alcune grandezze fisiche, come forze, coppie, pressioni, sono rivelabili in pratica solo attraverso la misura di deformazioni elastiche di organi meccanici cui esse vengono applicate.

Misure di deformazione

Un tipico misuratore di deformazioni e sollecitazioni è l'estensimetro ("strain gage"), in cui si sfrutta, per la trasduzione di un piccolo spostamento in un segnale elettrico, la variazione di resistenza di un conduttore elettrico soggetto a deformazione. Nella sua forma più comune l'estensimetro consiste in un piccolo rettangolo di carta o materia plastica in cui è incorporato un filo conduttore a basso coefficiente di temperatura. Il dispositivo viene incollato al corpo soggetto a deformazione, in modo che questa si comunichi anche al filo. In Fig. 10.42a è rappresentato un estensimetro assiale, in Fig. 10.42b un estensimetro biassiale a 90°, adatto ad esempio per rilevare le deformazioni di una membrana, quindi per misurare una pressione.

Un estensimetro è caratterizzato dalla *sensibilità* (gage factor)

$$K = \frac{dR/R}{dl/l}$$

che dipende dal materiale impiegato. Il materiale più frequentemente impiegato è la costantana, per il suo basso coefficiente di temperatura, per

⁽¹⁰⁾ Un convertitore frequenza-tensione integrato avente la struttura di quello qui descritto è l'LM2907/2917 della National Semiconductors.

il quale la sensibilità è di circa 2: all'allungamento del filo è infatti associata una contrazione trasversale, che contribuisce anch'essa ad aumentarne la resistenza elettrica. Purtroppo, anche impiegando un materiale a basso coefficiente di temperatura le variazioni di resistenza dovute alla deformazione e quelle dovute a variazioni di temperatura sono dello stesso ordine di grandezza, per cui è indispensabile ricorrere a disposizioni circuitali in cui l'effetto della temperatura venga compensato. La disposizione più frequente è quella a ponte di Wheatstone.

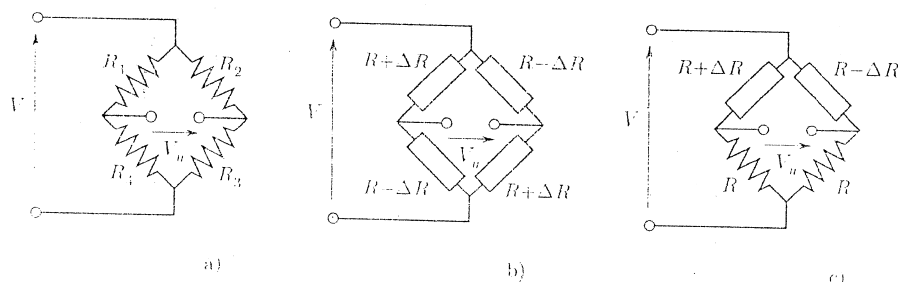


Figura 10.43

Collegamenti di estensimetri in ponti di Wheatstone.

Ricordando che la tensione di sbilanciamento di un ponte di Wheatstone vale

$$v_u = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} V.$$

risulta che, qualora si possano collegare a ponte quattro estensimetri (Fig. 10.43b) che subiscano deformazioni a due a due opposte (come ad esempio su una superficie di una barra soggetta a flessione e sulla sua superficie opposta), la tensione di sbilanciamento è

$$v_u = \frac{\Delta R}{R} V = \frac{\Delta l}{l} K V,$$

cioè è funzione lineare della variazione di lunghezza dell'estensimetro. Spesso, per maggiore semplicità, si impiegano due soli estensimetri che subiscano deformazioni opposte (Fig. 10.43c), ottenendo la tensione di sbilanciamento

$$v_u = \frac{\Delta R/R}{2 \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 \right)} V \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R} V, \quad (10.27)$$

che solo per piccoli spostamenti si può ritenere funzione lineare della variazione di lunghezza dell'estensimetro.

Quando si opera la misura con un solo estensimetro, si impiega ancora la disposizione di Fig. 10.43c, utilizzando un secondo estensimetro uguale al primo, non soggetto a deformazione, allo scopo di compensare termicamente il sistema. In questo caso è

$$v_u = \frac{\Delta R/R}{4 \left(1 + \frac{\Delta R}{2R} \right)} V \simeq \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} V. \quad (10.28)$$

Esistono anche *estensimetri a semiconduttore*, costituiti da strutture monocristalline di semiconduttori di tipo P o di tipo N, che presentano una sensibilità molto più elevata (dell'ordine del centinaio), ma anche una maggiore non linearità e una maggiore sensibilità alla temperatura. Un vantaggio consiste anche nella dimensione ridotta, dell'ordine del millimetro con uno spessore dell'elemento sensibile dell'ordine della decina di micron. Nel caso

Estensimetro a semiconduttore

dei semiconduttori di tipo P la resistenza aumenta in trazione e in quello dei semiconduttori di tipo N aumenta in compressione. Nei due casi l'orientamento del cristallo di silicio deve essere diverso in rapporto alla direzione della deformazione.

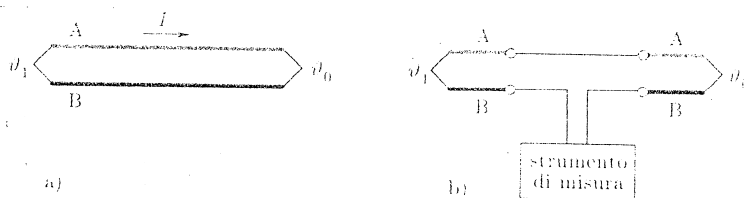
Condizionamento del segnale

Poiché i valori di resistenza degli estensimetri sono relativamente modesti (dell'ordine di qualche centinaio di ohm), la tensione di alimentazione del ponte è piccola (dell'ordine di volt) per evitare il riscaldamento per effetto Joule, per cui il segnale di uscita, dell'ordine dei millivolt, deve essere amplificato. L'amplificazione può essere effettuata in continua, con un amplificatore di precisione a chopper o si può alimentare il ponte con una tensione alternata, a frequenza dell'ordine del Khz, amplificare in alternata e demodulare con un demodulatore sincrono.

Misure di temperatura

I principali termometri elettrici utilizzano, come elementi sensibili, le termocoppie, le termoresistenze (indicate spesso con l'acronimo RTD, cioè "resistance temperature detector"), i termistori e i semiconduttori: a seconda dell'elemento sensibile variano la precisione, la stabilità e il campo di temperature di impiego.

Figura 10.44
Collegamenti di termocoppie.



Termocoppia

Una *termocoppia* è rappresentata schematicamente in Fig. 10.44a: essa consiste in due fili conduttori di metalli diversi, A e B, saldati in due punti le cui giunzioni sono tenute a temperature differenti ϑ_0 (giunzione fredda) e ϑ_1 (giunzione calda). Nell'anello costituito dai due conduttori si genera una corrente dipendente dalla differenza delle temperature. Se l'anello viene aperto, si può misurare una f.e.m. per effetto termoelettrico o effetto Seebeck, tanto maggiore quanto più elevata è la differenza delle temperature delle giunzioni. Se nell'anello si inseriscono tratti di filo di metalli diversi, la f.e.m. non varia, purché ogni coppia di giunzioni introdotte sia tenuta alla stessa temperatura: si può così ricorrere allo schema di misura rappresentato in Fig. 10.44b, in cui un millivoltmetro o un amplificatore in corrente continua di precisione è collegato con normali fili di rame alle due termocoppie che realizzano la giunzione calda e la giunzione fredda.

Quando le termocoppie si impiegano per misure di alta precisione, si ricorre alla termostatazione della giunzione fredda, così da mantenere una temperatura di riferimento ϑ_0 molto precisa. In molti casi, in particolare quando i termometri a termocoppia si impiegano negli apparati di controllo, non si termostata la giunzione fredda e non occorre attenersi alla disposizione di Fig. 10.44b, ma si può collegare direttamente lo strumento di misura ai morsetti della termocoppia corrispondente alla giunzione calda, eliminando la termocoppia che realizza la giunzione fredda: se i morsetti dei collegamenti sono entrambi a temperatura ambiente, la f.e.m. che si ottiene è identica a quella che si avrebbe con il circuito di Fig. 10.44b con ϑ_0 uguale alla temperatura ambiente. In questi casi si può compensare la variazione

della f.e.m. al variare della temperatura ambiente con speciali circuiti utilizzando termoresistenze o termistori, normalmente compresi entro l'apparato di condizionamento del segnale della termocoppia.

Le termocoppie per la misura di temperature elevate vengono montate entro tubi di protezione, metallici per temperature relativamente basse, fino a circa 1000°C, di speciali ceramiche per temperature più elevate, fino a circa 1600°C. Una realizzazione molto semplice della termocoppia ferro-costantana consiste in un tubo di ferro chiuso a un'estremità, alla quale è lentamente saldato il filo di costantana che percorre tutto il tubo ed esce all'altra estremità. Il contenitore della termocoppia deve essere inoltre realizzato con particolare cura per ridurre a valori accettabili i ritardi di propagazione termica attraverso le pareti; il tempo di risposta di una buona termocoppia rimane tuttavia dell'ordine di una decina di secondi.

L'effetto Seebeck è descritto dalla relazione non lineare

$$v_u = K (\vartheta' - \vartheta_0) \left(\vartheta' - \frac{\vartheta' + \vartheta_0}{2} \right), \quad (10.29)$$

in cui K e ϑ' sono costanti dipendenti dai materiali impiegati: solo se la termocoppia viene impiegata fino a una temperatura massima molto minore di ϑ' , la dipendenza della f.e.m. dalla temperatura si può supporre lineare.

In molte termocoppie per temperature non elevate si usa la costantana (45% Ni, 55% Cu): rame-costantana fino a 350°C (18 mV a 350°C), ferro-costantana fino a 800°C (44 mV a 800°C); per temperature più elevate, nichel-nichelcromo (90% Ni, 10% Cr) fino a 1100°C, platino-platinorodio (90% Pt, 10% Rh) fino a 1450°C (13 mV a 1450°C).

Le *termoresistenze* consistono generalmente in fili di platino avvolti o film di platino depositati su supporti ceramici e protetti da bulbi di quarzo, ceramica o pyrex. Si impiegano anche, più raramente, il nichel e il rame. La dipendenza della resistenza dalla temperatura si può supporre con buona approssimazione lineare. La variazione della resistenza con la temperatura è misurata dal cosiddetto coefficiente α definito come

$$\alpha = \frac{R(100^\circ\text{C}) - R(0^\circ\text{C})}{R(0^\circ\text{C})}, \quad (10.30)$$

il cui valore è 0,00392 per il platino, 0,00672 per il nichel, 0,00427 per il rame. Il valore della resistenza a 0°C è di 100 Ω per il platino.

Le termoresistenze hanno temperature di impiego più basse di quelle delle termocoppie (150°C per nichel e rame, 800°C per il platino), ma consentono misure più stabili e precise. Normalmente vengono inserite entro un ponte di Wheatstone, la cui tensione di alimentazione deve essere scelta con particolare cura perché risultino trascurabili gli errori dovuti all'effetto Joule e, d'altra parte, il segnale utile non sia eccessivamente basso: anche per le termoresistenze, come per le termocoppie, occorre infatti eseguire un'amplificazione locale con amplificatori elettronici di precisione. Dato che il ponte in cui è situata la termoresistenza è normalmente situato a una certa distanza, sia pur la più breve possibile, dall'elemento sensibile, occorre compensare l'effetto delle variazioni della temperatura ambiente sui fili di collegamento. Ciò si può ottenere con la "connessione a tre fili", rappresentata in Fig. 10.45, in cui due fili uguali sono inseriti in due rami adiacenti del ponte.

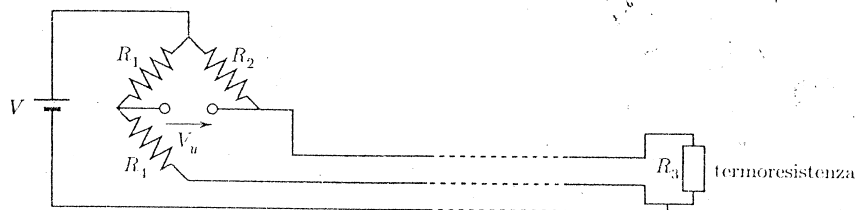
I *termistori* sono elementi semiconduttori, realizzati con miscele di ossidi metallici (di nichel, cobalto, manganese e altri metalli) ridotti in polvere e sinterizzati. La loro resistenza elettrica diminuisce all'aumentare della

Termoresistenza

Termistore

Figura 10.45

Connessione a ponte a tre fili.



temperatura, in base alla relazione

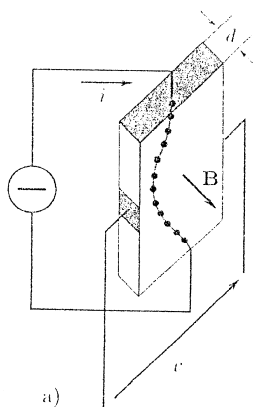
$$R = K e^{\beta/T} \quad (10.31)$$

in cui T è la temperatura assoluta, K e β costanti dipendenti dal materiale.

In commercio i termistori sono reperibili in una vasta gamma di forme e tipi (a barrette, a disco, a bulbo di vetro o di resina) e di valori di resistenza. I valori di β sono dell'ordine di $2000-4000^\circ\text{K}$ e corrispondono pertanto ad una sensibilità, in termini di variazione di resistenza a parità di variazione di temperatura, molto più elevata di quella delle termoresistenze. Per contro la precisione, il campo di temperatura (massimo 200°C o 300°C) e la stabilità sono notevolmente inferiori. Anche i termistori si possono impiegare in ponti di Wheatstone come quello di Fig. 10.45 o con disposizioni circuitali più semplici, giustificate dalla loro maggiore sensibilità alla temperatura, che rende superflua la compensazione della variazione di resistenza dei fili di collegamento.

I *sensori di temperatura a semiconduttore* si basano sulla dipendenza dalla temperatura della caduta di tensione in una giunzione percorsa da corrente costante e vengono forniti in contenitori a tre terminali, analoghi a quelli dei transistori, integrati sullo stesso chip con il circuito elettronico per il condizionamento del segnale. La tensione di uscita è in genere di $10\text{ mV}/^\circ\text{C}$. Essi vengono forniti dai più importanti costruttori di dispositivi a semiconduttore e possono essere impiegati solo per temperature relativamente basse (tipicamente da -55°C a $+150^\circ\text{C}$).

Sensori di temperatura a semiconduttore



Misure di induzione magnetica

Il componente che in tempi relativamente recenti ha portato ad una notevole evoluzione nel campo degli azionamenti e dei sistemi di controllo è il *trasduttore a effetto Hall*. Esso consiste in una piastrina rettangolare di semiconduttore di opportuno spessore d percorsa nella direzione di uno dei lati da una corrente costante i : se in direzione perpendicolare alla lamina si presenta un campo magnetico di induzione B , fra due elettrodi posti sugli altri due lati della lamina si produce una differenza di potenziale data dalla relazione

$$v = K \frac{iB}{d} \quad (10.32)$$

in cui K indica una costante dipendente dal materiale e dalla dimensione della piastrina, i la corrente e B l'induzione (in gauss o in weber/m²).

Il dispositivo è rappresentato schematicamente in Fig. 10.46a: per la regola della mano sinistra di Fleming (pollice, indice, medio, $\rightarrow$ campo, corrente, moto), gli elettroni in eccesso in un semiconduttore di tipo n vengono spostati verso sinistra nella figura per effetto della forza di Lorentz, dando luogo ad una distorsione delle linee equipotenziali e, di conseguenza, ad una differenza di potenziale con la polarità indicata, che può essere convenientemente amplificata. Un effetto analogo si verifica in un semiconduttore di tipo p , in cui le lacune vengono spostate verso destra. I trasduttori a effetto

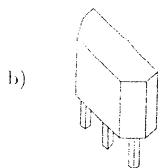


Figura 10.46

Trasduttore a effetto Hall e LOHET

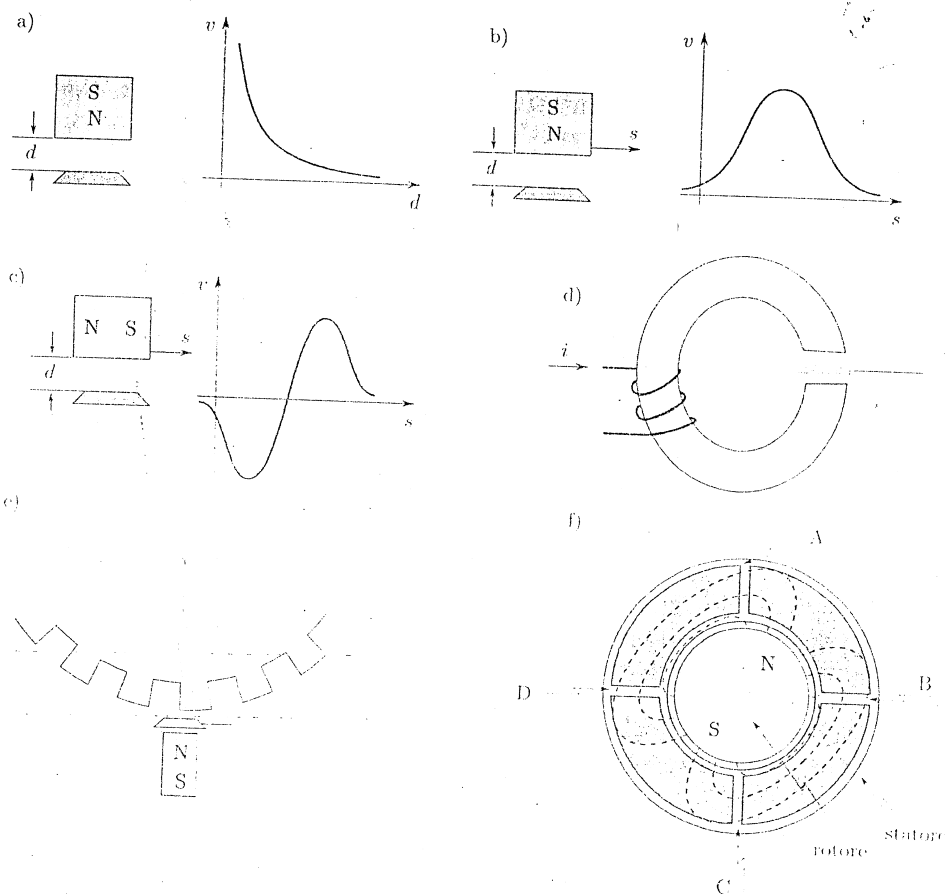


Figura 10.47
Impieghi tipici dei trasduttori lineari a effetto Hall.

Hall sono in genere integrati insieme al circuito elettronico per il condizionamento del segnale, che comprende anche elementi per la compensazione della temperatura: si ottengono così elementi con buone caratteristiche di precisione, stabilità e linearità, che vengono normalmente indicati con il nome di LOHET (Linear Output Hall Effect Sensor). Tali elementi hanno l'aspetto rappresentato in Fig. 10.46b, con tre terminali (due per l'alimentazione e uno per il segnale di uscita, in generale di tipo "rail-to-rail"). La sensibilità al campo magnetico varia a seconda dei tipi: nei tipi più sensibili è dell'ordine di alcuni mV/G con tensione di alimentazione di 5 V.

In Fig. 10.47a, 10.47b e 10.47c sono rappresentate tre disposizioni per sensori di prossimità, in Fig. 10.47d un misuratore di corrente, in Fig. 10.47e un encoder a effetto Hall (del tipo impiegato come sensore di velocità negli ABS per auto), in Fig. 10.47f un resolver, consistente in un rotore cilindrico magnetizzato radialmente situato entro un circuito magnetico di ferro dolce in cui sono disposti a 90° due trasduttori a effetto Hall (A e B) e due elementi inerti di bilanciamento (C e D). Uno degli impieghi più importanti dei trasduttori a effetto Hall è la rilevazione della posizione del rotore nei motori elettrici in corrente continua senza spazzole.

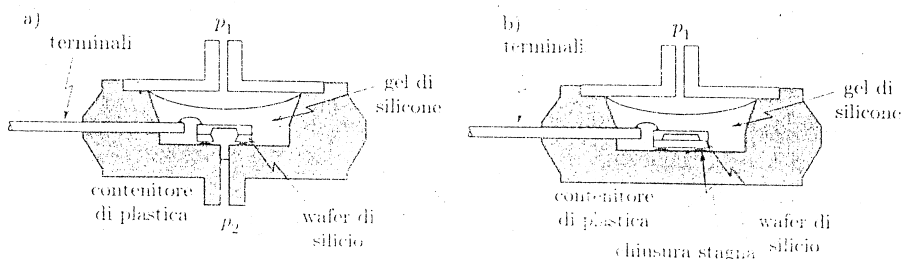
◆ Trasduttori microelettromeccanici (MEMS)

Per alcune misure di notevole interesse (pressione, forza, accelerazione, campi magnetici) l'organo sensibile e il circuito microelettronico, per il condizionamento del segnale da esso fornito, sono miniaturizzati e realizzati come un unico dispositivo, che viene indicato con il termine MEMS ("micro electro-mechanical system"), cioè microsensori e microtrasduttori realizzati

estendendo la tecnologia dei circuiti integrati, cioè attraverso la microlavorazione ("micromachining") con laser di un wafer di silicio e la deposizione su di esso, di materiali conduttori, isolanti e magnetici. In tal modo si ottengono con una sola procedura di lavorazione sia il trasduttore sia il circuito di condizionamento del segnale, con notevolissima riduzione del costo. I trasduttori a effetto Hall e i trasduttori di temperatura a semiconduttore descritti in precedenza possono considerarsi particolari MEMS.

Figura 10.48

Sensori di pressione, differenziale e assoluto.

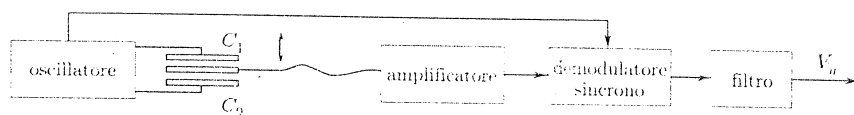


Trasduttore di pressione

I trasduttori di pressione possono considerarsi derivati dall'estensimetro a semiconduttore: per microlavorazione del silicio si ricava una cavità in un wafer di silicio in modo da realizzare un diaframma deformabile sul quale per diffusione con elementi droganti di tipo N o di tipo P sulla faccia opposta rispetto a quella della cavità si ottengono delle piste di semiconduttore analoghe a quelle degli estensimetri. Sullo stesso wafer o su un secondo wafer che viene posto nello stesso contenitore e collegato al primo si realizza anche il circuito di condizionamento che comprende elementi per la compensazione dell'effetto della temperatura. In Fig. 10.48a è rappresentato un trasduttore di pressione differenziale e in Fig. 10.48b un trasduttore di

Figura 10.49

Accelerometro a variazione di capacità.



pressione assoluta, che differisce dal precedente solo perché la cavità è stata chiusa, fornendo così una contropressione pari alla pressione atmosferica. Questi trasduttori di pressione, sia assoluta sia differenziale, sono reperibili in commercio per valori di fondo scala variabili da una decina a qualche centinaio di kPa (kilopascal).

I trasduttori di forza si basano sulla misura con estensimetro a semiconduttore della deformazione di una barretta o di una membrana cui viene trasmessa la forza. Per forze elevate si converte la forza in pressione attraverso una cella di carico, costituita da un soffietto (cilindro deformabile), riempito con un fluido incompressibile.

Gli accelerometri si basano sulla misura dello spostamento di una massa vincolata elasticamente. Gli accelerometri MEMS più sensibili si basano sullo schema di misura illustrato in Fig. 10.49: la massa costituisce l'armatura comune a due condensatori piani C_1 e C_2 in serie fra loro le cui capacità variano in senso opposto al variare della sua posizione producendo, in presenza di un'eccitazione alternata, una tensione di uscita variabile in modulo e fase come quella dei trasformatori differenziali, che può essere trasformata in segnale proporzionale allo spostamento per demodulazione sincrona e filtraggio. I due condensatori sono realizzati con microlavorazione come è indicato in Fig. 10.50, con due strutture a pettine, una fissa e una ancorata elasticamente in modo da poter traslare rispetto alla prima. Le strutture a

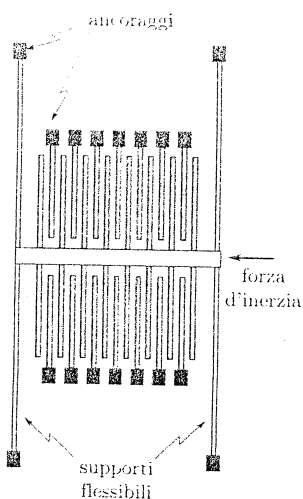


Figura 10.50

Realizzazione pratica della capacità variabile.

pettine sono realizzate per microlavorazione di uno strato di silicio policristallino depositato su uno strato di biossido di silicio, a sua volta depositato sul wafer di silicio e forato in corrispondenza dei punti di ancoraggio (un punto di ancoraggio per ogni lamina dell'armatura fissa e solo quattro per l'intera armatura mobile). Dopo la lavorazione lo strato di biossido di silicio viene rimosso mediante lavaggio con acido, ottenendo così le due strutture a pettine vincolate solo nei punti di ancoraggio. La lavorazione a pettine consente di raggiungere capacità relativamente elevate e l'integrazione con il circuito di condizionamento consente l'impiego di frequenze di eccitazione relativamente elevate (dell'ordine del centinaio di kHz). La sensibilità va da ± 2 g a ± 100 g.

I sensori di campo magnetico più sensibili (per la misura su due o tre assi del campo magnetico terrestre, dell'ordine di circa mezzo gauss) sono realizzati con MEMS che utilizzano il fenomeno della magnetoresistività. È possibile ottenere film sottili di *permalloy*, lega di ferro (19%) e nichel (81%), magneticamente anisotropi (cioè con una direzione di magnetizzazione preferenziale, che si ottiene applicando un intenso campo magnetico durante la deposizione del film), la cui resistività varia se si applica un campo magnetico in direzione ortogonale a quella preferenziale. La direzione preferenziale può essere ripristinata o invertita di segno applicando, mediante una piccola bobina un opportuno campo magnetico impulsivo (flipping field) periodicamente durante il funzionamento.

In Fig. 10.51 è rappresentato schematicamente un conduttore magnetoresistivo in cui la direzione del flipping field coincide con quella della corrente. Se non viene applicato alcun campo magnetico o viene applicato un campo magnetico nella stessa direzione della corrente, il valore della resistenza è massimo, mentre se viene applicato un campo magnetico H_y in direzione ortogonale rispetto a quella della corrente esso diminuisce secondo la relazione

$$R = R_0 + \Delta R \left(1 - \left(\frac{H_y}{H_0} \right)^2 \right) = R_0 + \Delta R (1 - \tan^2 \alpha), \quad (10.33)$$

in cui H_0 è un vettore costante nella direzione del flipping field e α è l'angolo del campo magnetico risultante rispetto alla direzione della corrente. L'inconveniente di tale disposizione è che la magnetoresistenza non è sensibile al verso del campo magnetico H_y : ciò si supera dando alla corrente una direzione a $\pm 45^\circ$ rispetto a quella del flipping field, per cui nella (10.33) viene sottratto un angolo di $\pm 45^\circ$ all'angolo α . Un elemento magnetoresistivo viene realizzato secondo la cosiddetta struttura "barber pole", cioè alternando il film di permalloy con film di alluminio, in modo che il campo elettrico venga distorto come è indicato in Fig. 10.52.

Sensore di campo magnetico

Magnetoresistività
Permalloy

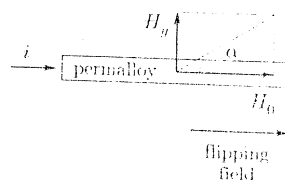


Figura 10.51
Elemento magnetoresistivo.

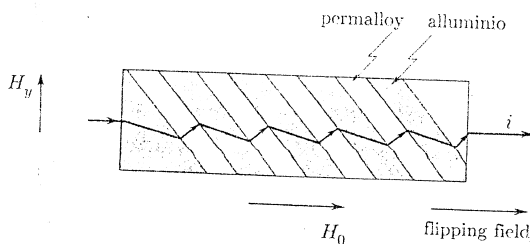
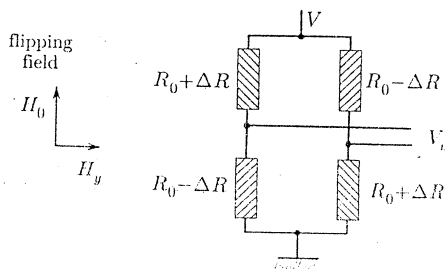


Figura 10.52
Struttura "barber pole".

Il sensore di campo magnetico è un ponte disposto come in Fig. 10.53, con i rami di tipo "barber pole" disposti come indicato, in modo da ottenere rispettivamente aumento e diminuzione di resistenza a seconda dell'angolo

Figura 10.53

Ponte magnetoresistivo.



dei film di alluminio. I rami del ponte sono accoppiati magneticamente con delle bobine in cui il microprocessore cui il sensore è collegato provvede ad inviare periodicamente impulsi di corrente di opposte polarità che generano il flipping field in un verso o nel verso opposto, dando luogo alternativamente a letture del campo magnetico H_y di polarità opposte. Un secondo accoppiamento magnetico in direzione ortogonale rispetto al flipping field provvede alla compensazione automatica dell'eventuale sbilanciamento del ponte, rivelabile perché indipendente dal verso di magnetizzazione⁽¹¹⁾.

10.4. I motori elettrici per azionamenti

Nella maggior parte degli automatismi l'oggetto del controllo è il movimento di un organo meccanico. I motori elettrici sono pertanto i componenti fondamentali di questi sistemi.

Schemi di alcune macchine elettriche rotanti

Affinché la trattazione dei problemi connessi con l'utilizzazione dei motori elettrici nei sistemi di controllo risulti il più possibile chiara, si ritiene opportuno passare in rapida rassegna gli schemi costruttivi delle più importanti macchine elettriche rotanti.

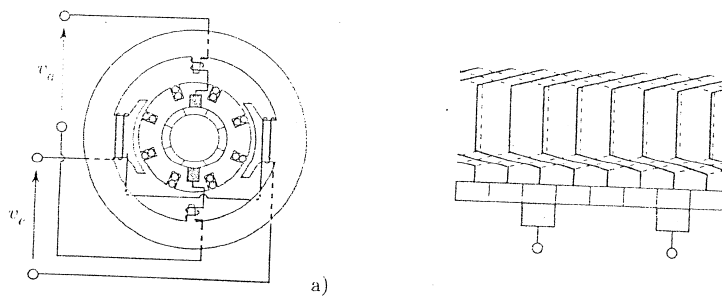
In Fig. 10.54a è riportato lo schema costruttivo di una *macchina in corrente continua*: lo stesso schema può applicarsi sia ai generatori sia ai motori. Si distinguono lo statore, normalmente realizzato in ferro omogeneo, con le espansioni polari, in cui si genera un campo magnetico per la presenza di bobine percorse dalla *corrente di eccitazione* i_e , e il rotore, normalmente in ferro laminato, nelle cui cave è situato l'avvolgimento, costituito da più matasse disposte come in Fig. 10.54b, i cui estremi sono collegati alle lame

Macchina in
corrente continua
Motore elettrico in
corrente continua

Corrente di eccitazione

Figura 10.54

Schema costruttivo della
macchina in corrente
continua.



⁽¹¹⁾ Questi tipi di rivelatori di campo magnetico sono utilizzati nei sensori HMC1001/1002 della Honeywell e nei sensori KMZ51/52 della Philips. Essi vengono impiegati nella costruzione di bussole di precisione.

del collettore, dove avviene la commutazione tramite le spazzole. Il circuito del rotore, detto anche "circuito di armatura" è percorso dalla *corrente di armatura* i_a e può comprendere anche i cosiddetti "poli di commutazione", aventi la funzione di correggere la distorsione del flusso di eccitazione dovuta all'azione della corrente di armatura. Una generica matassa, che può comprendere più spire, è costituita da due lati, uno dei quali, per esempio quello rappresentato a tratto continuo in Fig. 10.54b è situato nella cava più esternamente. l'altro, tratteggiato, più internamente; i due lati sono collegati mediante le cosiddette "testate", da una delle quali partono i collegamenti al collettore. La macchina rappresentata in Fig. 10.54 presenta una sola coppia di poli, ma secondo lo stesso principio si possono realizzare macchine con più coppie di poli.

Corrente di armatura

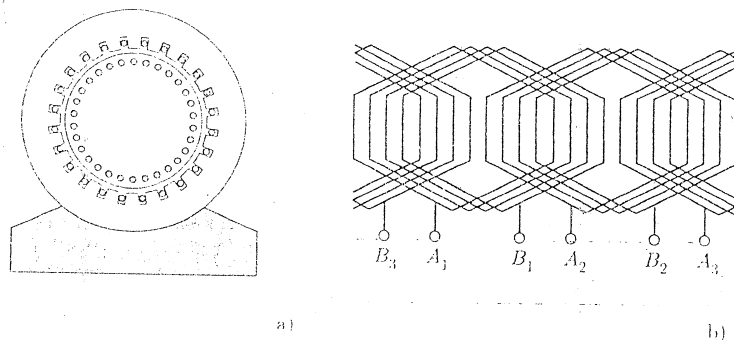


Figura 10.55
Schema costruttivo del motore asincrono trifase.

In Fig. 10.55a è riportato lo schema costruttivo di una tipica *macchina in corrente alternata*, precisamente di un motore asincrono trifase con rotore a gabbia di scoiattolo. In questo caso sia lo statore sia il rotore sono in ferro laminato. In Fig. 10.55b è rappresentato schematicamente l'avvolgimento trifase: si noti che ogni fase fa capo a un certo numero di matasse (quattro nel caso della figura), fra loro collegate in serie. Anche nelle macchine in corrente alternata si possono avere più coppie di poli per fase: ad esempio, nel caso di Fig. 10.55a, se il numero delle cave fosse doppio (48 invece di 24), si potrebbe ripetere l'avvolgimento, con altre quattro matasse per fase, collegando in serie le matasse di ogni fase per ogni coppia di poli, fermo restando per ogni matassa il collegamento al collettore.

Macchina in corrente alternata
Motore elettrico in corrente alternata

La corrente che percorre l'avvolgimento di una fase genera un campo magnetico che, qualora le sezioni delle matasse si possano considerare puntiformi, ha l'andamento, detto *trapezoidale*, indicato in Fig. 10.56. In realtà, essendo le cave di dimensioni finite, si ha una distorsione del campo, che non risulta perfettamente radiale e la sua distribuzione al traferro più "smussata", tanto che nelle trattazioni analitiche del funzionamento delle macchine in corrente alternata si introduce l'ipotesi di una distribuzione del campo magnetico e del flusso al traferro ad andamento sinusoidale. Per rendere più smussata la distribuzione media (in senso longitudinale) del campo al traferro spesso si dà alle cave una configurazione lievemente elicoidale.

Campo trapezoidale

In Fig. 10.57a è riportato lo schema costruttivo di un'altra macchina in corrente alternata, un alternatore a poli salienti; l'avvolgimento di statore è analogo a quello del motore di Fig. 10.55, mentre quello di rotore, percorso da corrente continua, fa capo ad un collettore ad anelli. La distribuzione sinusoidale del flusso che si concatena con il circuito di statore viene ottenuta con un'opportuna sagomatura delle scarpe polari, cosicché il traferro in loro corrispondenza non è uniforme. In Fig. 10.57b è riportato lo schema del rotore a poli lisci, in cui il campo magnetico a distribuzione

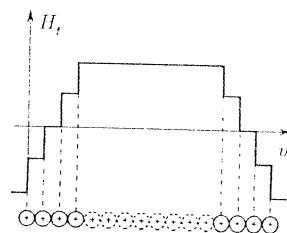
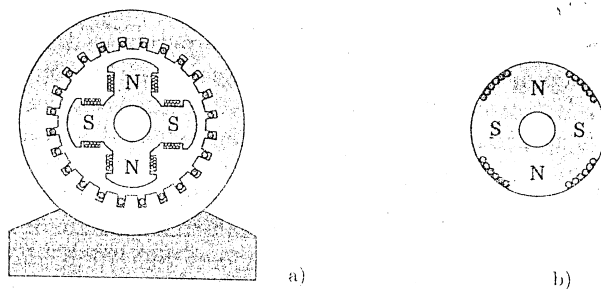


Figura 10.56
Andamento teorico del campo magnetico al traferro di una macchina in corrente alternata.

Figura 10.57

Schema costruttivo dell'alternatore.



approssimativamente sinusoidale si ottiene con un'opportuna distribuzione dei conduttori entro cave, esattamente come nel caso del motore asincrono.

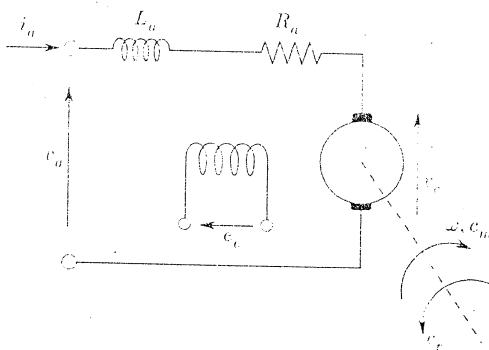
Il controllo dei motori in corrente continua

I motori in corrente continua sono gli attuatori più comunemente impiegati nei sistemi di controllo elettromeccanici, eventualmente anche nelle loro versioni senza spazzole che tendono a sostituire quelle a collettore per le piccole e medie potenze. I modi di controllare un motore in corrente continua sono essenzialmente due: il *controllo di armatura* e il *controllo di campo*. Essi risultano ben diversi per ciò che concerne le caratteristiche principali: potenza e tipo dei circuiti di comando, prontezza di risposta e rendimento; è opportuno pertanto considerarli separatamente e in modo comparativo.

Controllo di armatura
Controllo di campo

Figura 10.58

Schema di motore in corrente continua a controllo di armatura.



In Fig. 10.58 è riportato lo schema di un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente e a controllo di armatura. Nelle ipotesi, che normalmente comportano errori di entità accettabile in modelli dinamici, che la reazione di armatura e le nonlinearità del ferro e dei contatti delle spazzole siano trascurabili e che si possa prescindere dall'attrito coulombiano, si possono scrivere le seguenti equazioni:

1. Equazione del circuito di armatura:

$$V_a(s) = (R_a + s L_a) I_a(s) + V_c(s), \quad (10.34)$$

in cui L_a ed R_a sono la resistenza e l'induttanza del circuito di rotore e v_c la forza elettromotrice, che, nella condizione ipotizzata di eccitazione costante, è proporzionale alla velocità di rotazione ω :

$$V_c(s) = K_1 \Omega(s). \quad (10.35)$$

2. Equazione elettromeccanica della coppia all'albero:

$$C_m(s) = K_2 I_a(s), \quad (10.36)$$

in cui c_m rappresenta la coppia motrice. Se le unità di misura sono coerenti, si può porre $K_1 = K_2 = K_m$.

3. Equazione di equilibrio delle coppie:

$$C_m(s) = (B + s J) \Omega(s) + C_r(s), \quad (10.37)$$

in cui B e J sono il coefficiente di attrito viscoso e il momento di inerzia, c_r la coppia resistente applicata all'albero, rappresentata da una generica funzione del tempo. Dalle (10.34-10.37) si ottiene

$$\Omega(s) = \frac{K_m}{(B + sJ)(R_a + sL_a) + K_m^2} V_a(s) - \frac{R_a + sL_a}{(B + sJ)(R_a + sL_a) + K_m^2} C_r(s) . \quad (10.38)$$

In molti casi questo modello matematico si può semplificare, in quanto, essendo il circuito di armatura scarsamente induttivo, si può trascurare il parametro L_a . In tale ipotesi si può scrivere

$$\Omega(s) = \frac{K}{1 + \tau s} V_a(s) - \frac{Z}{1 + \tau s} C_r(s) , \quad (10.39)$$

in cui si è posto

$$K := \frac{K_m}{B R_a + K_m^2} , \quad Z := \frac{R_a}{B R_a + K_m^2} , \quad \tau := \frac{J R_a}{B R_a + K_m^2} . \quad (10.40)$$

In Fig. 10.59 è riportato lo schema di un motore in corrente continua a controllo di campo. Il circuito di armatura può essere alimentato a tensione costante o a corrente costante. L'alimentazione a tensione costante si può in pratica effettuare solo quando il motore è già avviato, nel caso in cui il controllo riguardi una gamma non ampia di velocità nell'intorno di una velocità nominale non nulla. Infatti a velocità zero non si ha forza contro elettromotrice e pertanto il circuito di armatura risulta soggetto ad una corrente troppo elevata. Inoltre quando il motore è alimentato a tensione costante il sistema risulta non lineare: infatti, considerando anche il solo funzionamento a regime, essendo la forza contro elettromotrice data da una relazione del tipo $v_e = \gamma_1 \omega i_e$, sostituendo nell'equazione del circuito di armatura (10.34) si ottiene $v_a = R_a i_a + \gamma_1 \omega i_e$, da cui $i_a = (v_a - \gamma_1 \omega i_e)/R_a$. Poiché c_m è data da una relazione del tipo $c_m = \gamma_2 i_a i_e$ ed essendo (a regime e in assenza di coppia resistente) $c_m = B \omega$, si deduce

$$\omega = \gamma_2 i_e \frac{v_a - \gamma_1 \omega i_e}{B R_a} , \quad (10.41)$$

che, per v_a costante, è una relazione non lineare fra i_e ed ω .

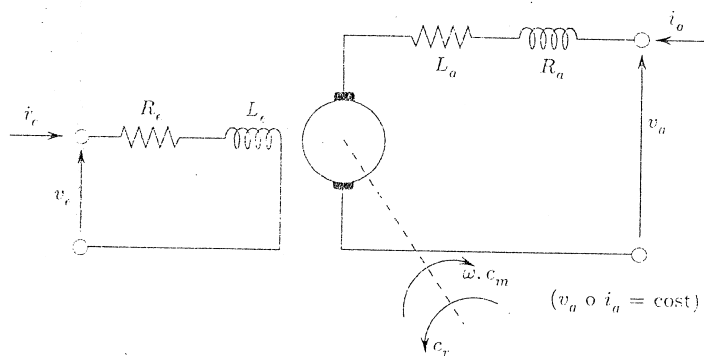


Figura 10.59
Schema di motore in corrente continua a controllo di campo.

Nel caso in cui il circuito di armatura venga invece alimentato a corrente costante, ad esempio utilizzando un opportuno amplificatore a diodi controllati, la funzione di trasferimento si può dedurre dalle seguenti equazioni.

1. Equazione del circuito di eccitazione:

$$V_e(s) = (R_e + sL_e) I_e(s) . \quad (10.42)$$

2. Equazione elettromeccanica della coppia all'albero:

$$C_m(s) = K_3 I_e(s) . \quad (10.43)$$

3. Equazione di equilibrio delle coppie (10.37).

Da esse si ricava

$$\Omega(s) = \frac{K_3}{(B + sJ)(R_e + sL_e)} V_e(s) - \frac{1}{B + sJ} C_r(s), \quad (10.44)$$

o anche

$$\Omega(s) = \frac{K'}{(1 + \tau_m s)(1 + \tau_e s)} V_e(s) - \frac{Z'}{1 + \tau_m s} C_r(s), \quad (10.45)$$

in cui si è posto

$$K' := \frac{K_3}{R_e B}, \quad Z' := \frac{1}{B}, \quad \tau_m := \frac{J}{B}, \quad \tau_e := \frac{L_e}{R_e}. \quad (10.46)$$

Nel caso del controllo di campo la funzione di trasferimento presenta due poli reali entrambi non trascurabili, data la notevole costante di tempo del circuito di eccitazione. Dal confronto delle (10.39), (10.40) con le (10.45), (10.46) si può vedere che anche la costante di tempo meccanica, nel caso del controllo di armatura, è inferiore, essendo evidentemente $\tau < \tau_m$; di regola anzi essa è notevolmente inferiore, essendo $K_m^2/R_a \gg B$. La stessa considerazione vale per le impedenze di uscita Z e Z' : in conclusione, il motore a controllo di armatura è molto meno sensibile al carico di quello a controllo di campo e reagisce alle variazioni di carico con maggiore prontezza.

In condizioni ideali ($L_a = R_a = 0$) nella (10.40) è $K = 1/K_m$, $Z = 0$, $\tau = 0$, cioè il controllo di armatura tende ad agire direttamente sulla velocità angolare; sempre in condizioni ideali ($L_e = 0$) dalle (10.42), (10.43) si ricava che il controllo di eccitazione tende ad agire direttamente sulla coppia motrice.

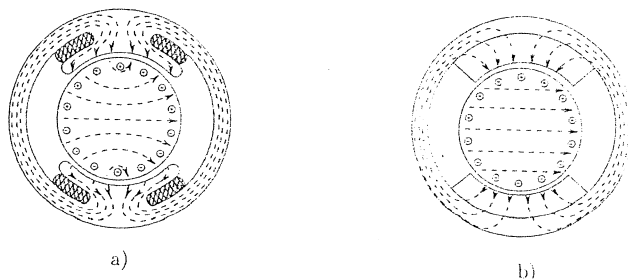
I motori in corrente continua a magneti permanenti

I motori in corrente continua impiegati nei sistemi di controllo, specie quelli di potenza non grande e funzionanti a velocità soggetta a forti variazioni, sono spesso realizzati con particolari soluzioni tecnologiche, che portano a vantaggi sia in ordine alla distorsione del flusso dovuta alla reazione di armatura, con beneficio della linearità e della facilità di commutazione, sia in ordine alla riduzione del momento di inerzia del rotore.

Di largo impiego per piccole e medie potenze sono i motori con eccitazione a magneti permanenti, cioè a controllo di armatura in cui le espansioni polari nello statore (generalmente due o quattro) sono ottenute inserendo magneti permanenti entro la carcassa in ferro dolce, opportunamente lavorata. Il beneficio, per ciò che riguarda la diminuzione dell'effetto della reazione di armatura, deriva essenzialmente dalle caratteristiche dei materiali con cui sono realizzati i moderni magneti ceramici o di terre rare, che presentano una permeabilità molto bassa unita ad un'elevata forza coercitiva, che mantiene stabili le caratteristiche magnetiche.

Figura 10.60

Motore con circuito di campo tradizionale e motore a magneti permanenti.



Un confronto fra un motore tradizionale, con campo magnetico generato da una corrente elettrica, e un motore a magneti permanenti, è reso possibile dall'esame di Fig. 10.60a e Fig. 10.60b: nel primo caso sono indicati, entro la parte del circuito magnetico di statore e di rotore, gli andamenti dei flussi dovuti alle rispettive correnti, di statore e di rotore: appare evidente che ad un estremo del traferro che interessa un polo i due flussi si sottrag-

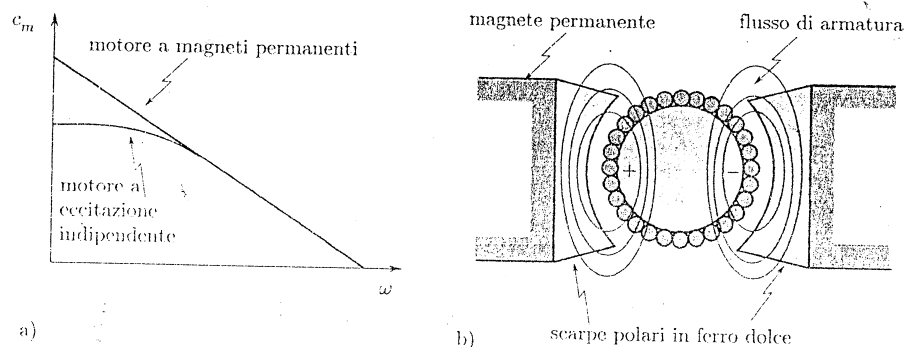


Figura 10.61
Caratteristiche meccaniche tipiche dei motori in c.c. a controllo di armatura e protezione in ferro dolce contro la smagnetizzazione nei motori a magneti permanenti.

gono, mentre all'altro estremo si sommano, con un effetto medio che, data la non linearità della curva di magnetizzazione del materiale magnetico, corrisponde ad un indebolimento del flusso di eccitazione in presenza di corrente di armatura. Nel caso del motore a magneti permanenti si vede invece che solo una piccola parte del flusso di armatura tende a chiudersi attraverso i poli, presentando questi una riluttanza relativamente elevata: a parità di altre condizioni ciò comporta una maggiore linearità delle caratteristiche meccaniche (coppia in funzione della velocità angolare), in particolare alle basse velocità, come è indicato in Fig. 10.61a.

I motori a magneti permanenti possono venire danneggiati da una corrente eccessiva, in quanto il campo di armatura tende a smagnetizzarli. Per diminuire l'effetto della reazione di armatura ed avere una maggiore protezione contro la smagnetizzazione si usa disporre una scarpa polare di ferro dolce sotto ogni espansione polare, come è indicato in Fig. 10.61b, fornendo così al flusso di armatura una via di richiusura a bassa riluttanza.

I magneti permanenti

Un magnete permanente viene costruito sottoponendo un materiale ad alta isteresi magnetica, dopo la lavorazione, a un campo magnetizzante di elevata intensità H_m . In Fig. 10.62a la lettera *a* indica la curva di prima magnetizzazione e la lettera *b* indica la curva di smagnetizzazione, cioè la caratteristica che lega l'induzione magnetica al campo magnetico quando questo venga eliminato o addirittura assuma valori opposti a quello di magnetizzazione. I parametri principali del materiale magnetico sono il magnetismo residuo B_r e la forza coercitiva H_c . I costruttori di magneti forniscono tali parametri in gauss e in oersted, indicando spesso anche i corrispondenti valori nelle unità del sistema internazionale (tesla o weber/m² e amperspire/metro). Il costruttore del motore in genere opera una stabilizzazione del magnete lungo il ciclo di isteresi minore approssimato con la retta *RS* in Fig. 10.62b entro il quale si verrà a trovare la caratteristica effettiva del magnete durante il funzionamento del motore qualora il campo magnetico non esca dai valori estremi di tale ciclo. In condizioni di riposo la situazione del circuito magnetico del motore è espressa dal punto *P*, dato dall'intersezione del segmento *RS* con la caratteristica di permeanza *OC* (lineare, essendo trascurabile l'isteresi) del circuito magnetico esterno. Le amperspire generate dagli avvolgimenti del motore porteranno a punti di lavoro che devono necessariamente essere compresi entro il segmento *RS*, pena la smagnetizzazione. La temperatura incide sulla caratteristica magnetica e ad una certa temperatura Θ_c (temperatura di Curie) si ha la smagnetizzazione completa.

I principali materiali impiegati nei motori a magneti permanenti sono:

- **Alnico**: gli Alnico sono leghe di alluminio, nichel e cobalto con tracce di altri elementi (ad esempio ferro, rame e titanio), caratterizzati da valori alti del magnetismo residuo ma valori bassi della forza coercitiva (B_r da 6000 a 12000 G, H_c da 500 a 1600 Oe, Θ_c 840°C). Esistono diverse gradazioni di Alnico (3,5,8) con proprietà lievemente diverse, che si differenziano per la percentuale di cobalto, che va da zero al 40%. Il più usato è l'Alnico 5. Può essere anisotropo, cioè con una direzione di magnetizzazione preferenziale applicando un campo magnetico durante il raffreddamento da una temperatura di circa 1100°C. I magneti possono essere ottenuti per fusione o per sinterizzazione, ancora con diverse proprietà.

Campo magnetizzante

Magnetismo residuo
Forza coercitiva

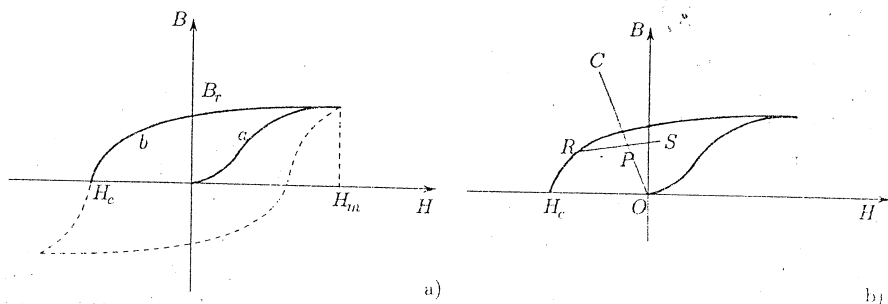
Stabilizzazione
del magnete

Caratteristica
di permeanza

Alnico

Figura 10.62

Magnetizzazione e stabilizzazione del magnete.



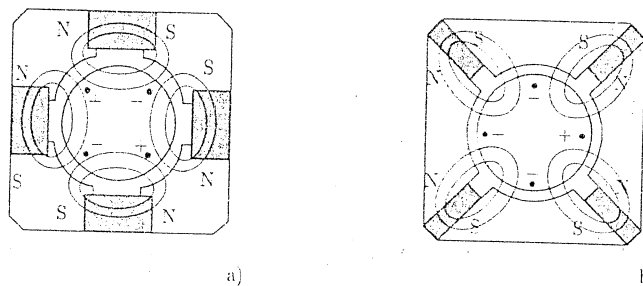
- *Magneti ceramici (ferriti)*: le ferriti sono materiali sinterizzati ottenuti con ossidi di ferro, e composti (ad esempio carbonati) di bario e stronzio, caratterizzati da basso magnetismo residuo ma elevata forza coercitiva (B_r da 3500 a 4000 G, H_c da 3000 a 4800 Oe; Θ_c 450°C). Il loro costo è relativamente basso.

Terre rare

- *Terre rare*: le terre rare sono composti di samario-cobalto (SmCo) o neodimio, ferro e boro (NdFeB), caratterizzati da valori alti sia del magnetismo residuo sia della forza coercitiva (B_r da 9000 a 12000 G, H_c da 12000 a 20000 Oe). La dipendenza dalla temperatura è bassa per SmCo (Θ_c 750-825°C), ma alta per NdFeB (Θ_c 310°C). Il materiale più pregiato è pertanto SmCo, che viene largamente impiegato nei motori a magneti permanenti, specie di piccola potenza a causa del suo costo relativamente elevato.

Figura 10.63

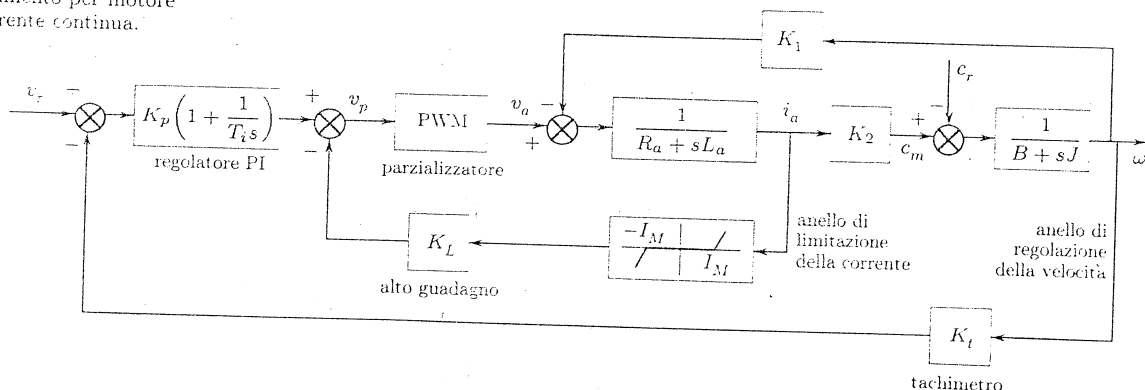
Disposizione dei magneti in Alnico e SmCo.



Per le loro caratteristiche magnetiche si tende a magnetizzare le barre di Alnico in senso longitudinale, quelle di ferrite e samario-cobalto in senso trasversale. A titolo di esempio, in Fig. 10.63a è rappresentato il circuito magnetico di un motore a due coppie di poli in Alnico e in Fig. 10.63b quello dello stesso motore realizzato invece in SmCo. Sul rotore sono indicati i punti corrispondenti alle espansioni polari, cioè i punti corrispondenti alle cave percorse da corrente nei versi indicati con + e - (o viceversa, per la rotazione in senso opposto).

Figura 10.64

Schema a blocchi di un azionamento per motore in corrente continua.



◆ Gli azionamenti per motori in corrente continua

Azionamento per motore elettrico in corrente continua

Un azionamento per motori elettrici in corrente continua è un sistema elettronico di amplificazione di segnale e di potenza per un servomeccanismo di velocità in cui il segnale di retroazione viene fornito da una dinamo tachimetrica calettata sull'albero motore. Esso costituisce l'elemento fondamentale dei sistemi di controllo di posizione più precisi (come quelli utilizzati nel controllo numerico delle macchine utensili), che in genere comprendono appunto anche un anello di velocità. Lo stadio finale è parzializzato e realizzato con

transistori o mosfet di potenza. In Fig. 10.64 è riportato lo schema a blocchi di un tipico azionamento per motore in corrente continua, in cui sono evidenziate sia le retroazioni intrinseche dell'azionamento sia quelle interne al motore: K_t indica la costante del tachimetro, K_L quella dell'anello di limitazione della corrente, K_1 il coefficiente di retroazione di armatura, K_2 quello della coppia motrice, B e J il coefficiente di attrito viscoso e il momento d'inerzia riportati all'albero motore. L'amplificazione di potenza si ottiene utilizzando un parzializzatore, che verrà descritto più avanti, con un anello di limitazione di corrente schematizzabile con una soglia e un alto guadagno, come indicato in figura. La limitazione di corrente si traduce in una limitazione della coppia motrice.

Le caratteristiche meccaniche (coppia in funzione di velocità angolare) ideali del dispositivo sono riportate in Fig. 10.65 per diversi valori della tensione di ingresso v_r . La presenza del tachimetro e dell'azione integrale consentono un controllo preciso anche di velocità molto basse.

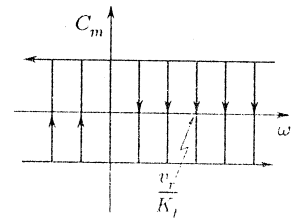


Figura 10.65
Caratteristiche meccaniche dell'azionamento di Fig. 10.64.

La parzializzazione (PWM)

La *parzializzazione* o *PWM* (Pulse Width Modulation) è il tipo di amplificazione di potenza universalmente adottato per il controllo dei motori elettrici in corrente continua di tutti i tipi (con collettore, senza spazzole o passo passo). Il PWM consiste nella commutazione ad alta frequenza dei dispositivi elettronici di potenza (transistori bipolari o mosfet) che alimentano gli avvolgimenti del motore fra la piena conduzione e l'interdizione, in modo da ottenere un valor medio corrispondente alla regolazione di tensione voluta, ma con bassa dissipazione di potenza. Le caratteristiche filtranti del circuito a valle, di tipo RC, rendono trascurabili le corrispondenti fluttuazioni di corrente.

In Fig. 10.66a è rappresentato, a tratto spesso, il segnale di ingresso v_p dell'unità PWM e in Fig. 10.66b, ancora a tratto spesso, il segnale di uscita v_a . Nella prima figura a tratto sottile è rappresentata un'onda triangolare generata internamente all'unità per confronto con la quale mediante un comparatore viene generato il segnale d'uscita e nella seconda figura è rappresentato anche l'andamento della corrente nel circuito di armatura del motore. La frequenza dell'onda triangolare è molto elevata (qualche decina di kHz) per cui in pratica l'ondulazione della corrente è trascurabile.

In Fig. 10.67 è riportato lo schema di principio di un amplificatore PWM, realizzato con alcuni degli elementi circuitali presentati al Paragrafo 10.1. L'onda triangolare v_s viene generata da un integratore il cui ingresso è commutato, mediante due interruttori elettronici, fra le due tensioni costanti $-E$ e $+E$ ad opera di un comparatore che rileva gli istanti in cui l'uscita raggiunge rispettivamente i livelli $+E$ in aumento e $-E$ in diminuzione. Due comparatori, per confronto di v_s rispettivamente con v_{p1} , pari al segnale di ingresso v_p più la costante pari alla caduta nel diodo D_1 , e con v_{p2} , pari al segnale v_p meno la caduta nel diodo D_2 , generano i segnali B_2 e A_2 che, insieme ai loro negati B_1 e A_1 , pilotano il ponte ad H rappresentato in Fig. 10.68, che completa l'amplificatore di potenza e alimenta direttamente il motore M . Sono visibili i diodi di ricircolazione, che provvedono a scaricare sull'alimentazione l'eventuale corrente inversa prodotta in fase di decelerazione.

La presenza di due comparatori anziché uno è dovuta alla necessità di evitare cortocircuiti fra i due mosfet presenti su uno stesso lato del ponte: infatti dai diagrammi di

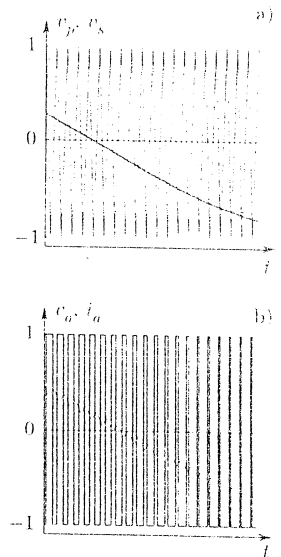


Figura 10.66
Segnali relativi all'unità PWM.

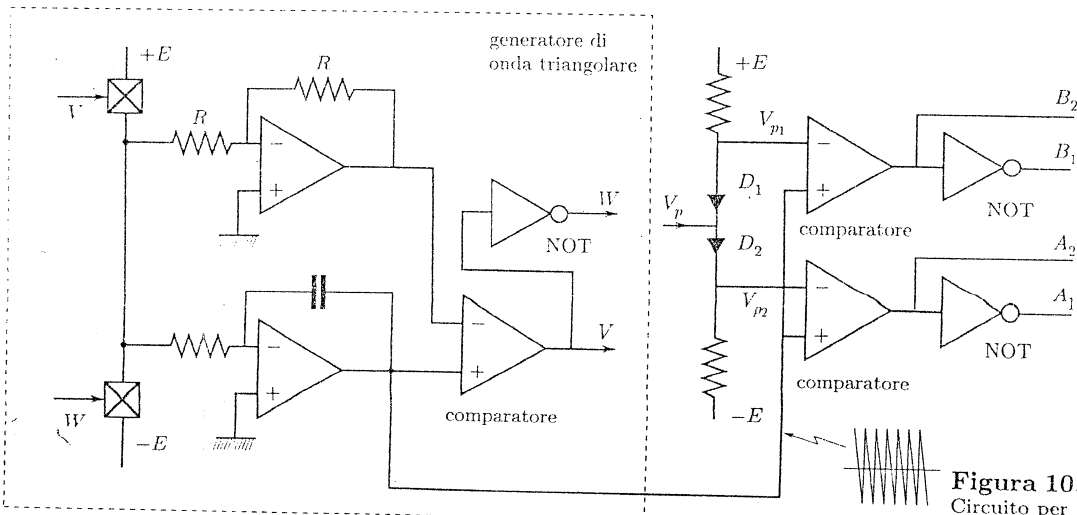


Figura 10.67
Circuito per la generazione del segnale PWM.

Figura 10.68

Ponte ad H per l'alimentazione del motore.

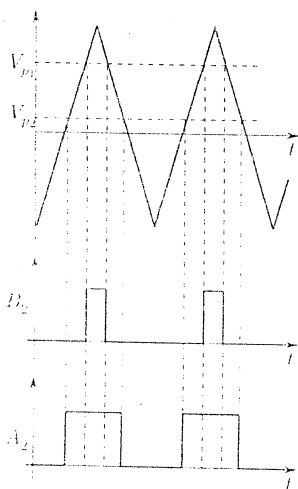


Figura 10.69

Particolare della generazione di B_2 e A_2 .

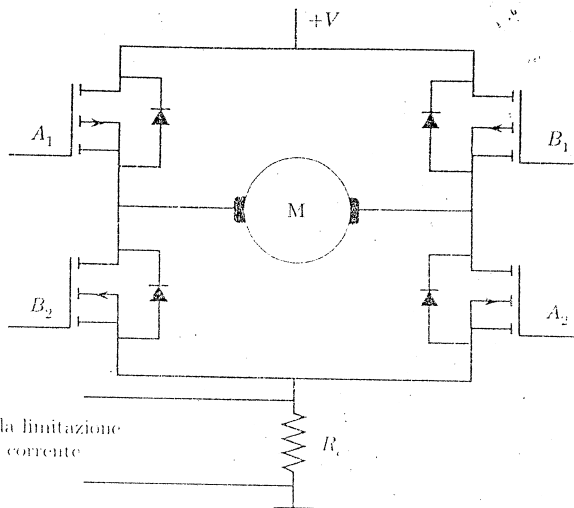


Fig. 10.69 risulta che l'intervallo di tempo in cui conducono B_1 e B_2 è sempre interno a quello in cui conducono A_1 e A_2 ⁽¹²⁾.

L'impiego dei mosfet nei ponti ad H che alimentano i motori in corrente continua in PWM è particolarmente conveniente, rispetto ai transistori bipolari, per la grande amplificazione di potenza che essi forniscono. I ponti che si impiegano nelle applicazioni di maggior potenza sono costituiti da mosfet dello stesso tipo (in genere a canale N), che lavorano fino a tensioni di 600 V e correnti di ordine di 10 A, con tensioni di gate di 0-10 V per il passaggio dall'interdizione alla piena conduzione. Esistono circuiti traslatori di tensione, realizzati in un unico integrato, che consentono di pilotare il ponte a partire da segnali logici di 0-5 V⁽¹³⁾.

I motori in corrente continua senza spazzole

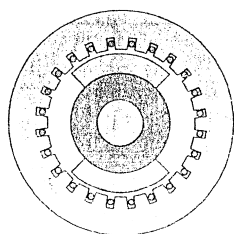
Motore senza spazzole
Motore brushless

I motori in corrente continua *senza spazzole* (brushless), in cui la commutazione è realizzata per via completamente elettronica, sono i più diffusi nei dispositivi di controllo più raffinati. Per la completa assenza di contatti striscianti presentano i vantaggi di un'elevata affidabilità e di un minore attrito.

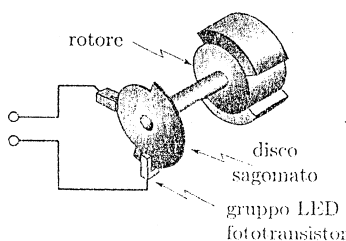
Un tipico motore senza spazzole è rappresentato in Fig. 10.70: esso consiste in pratica in un motore a magneti permanenti in cui i magneti sono disposti sul rotore e l'avvolgimento nello statore. La commutazione, anziché con il normale collettore a lame, avviene per via elettronica, con l'impiego di coppie LED-fototransistor (Fig. 10.70b) o con sensori a effetto Hall, sensibili al campo magnetico generato dal rotore. Il caso cui ci si riferisce in Fig. 10.70b è quello, semplificato al massimo, con due soli avvolgimenti di statore: la commutazione avviene ogni 90° di rotazione, tramite un circuito a transistor del tipo rappresentato in Fig. 10.71a. Ogni transistor conduce per 90°, nella sequenza ABCD per un senso di moto e nella sequenza ADCB per l'altro. In Fig. 10.71b, in cui con ω è indicata la velocità angolare del rotore, sono rappresentate le forme d'onda delle correnti negli avvolgimenti.

⁽¹²⁾In tempi relativamente recenti sono stati sviluppati degli integrati a basso costo che realizzano circuiti funzionalmente analoghi a quello illustrato in Fig. 10.67. Fra questi risultano particolarmente interessanti l'UC2638/3638 della Texas Instruments (ex Unitrode) e l'A3959 dell'Allegro Microsystems. Quest'ultimo comprende in un unico chip anche il ponte ad H per tensioni fino a 50 V e correnti fino a ± 3 A.

⁽¹³⁾Vedi, ad esempio, l'IR2110 dell'International Rectifier e LM5102/5104 della National Semiconductors. Un esempio di mosfet di potenza è l'IRF730 dell'International Rectifier.



a)

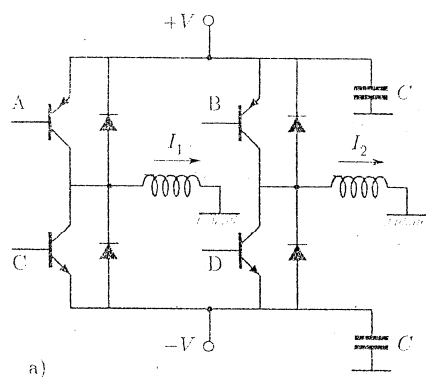


b)

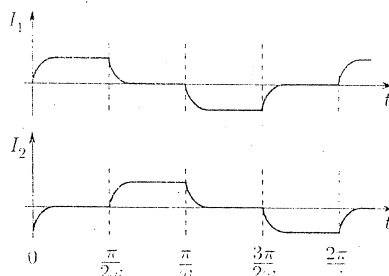
Figura 10.70

Motore senza spazzole bifase.

I diodi servono per richiudere sull'alimentazione le correnti degli avvolgimenti quando i transistor vengono bruscamente interdetti, producendo così mediamente un effetto equivalente a una forza controelettromotrice e un comportamento analogo a quello di un motore a magneti permanenti con caratteristica meccanica lineare (coppia decrescente linearmente in funzione della velocità angolare): il motore senza spazzole, come il motore a collettore, presenta pertanto una velocità di rotazione a vuoto proporzionale alla tensione applicata. L'irregolarità nell'assorbimento di corrente viene attutita dalla presenza dei condensatori sull'alimentazione. Nel caso in esame, in cui la commutazione avviene ogni 90° elettrici, l'avvolgimento di statore è realizzato come quello di un motore in alternata bifase. Questo tipo di motore è bipolare, cioè richiede alimentazioni di entrambe le polarità.



a)



b)

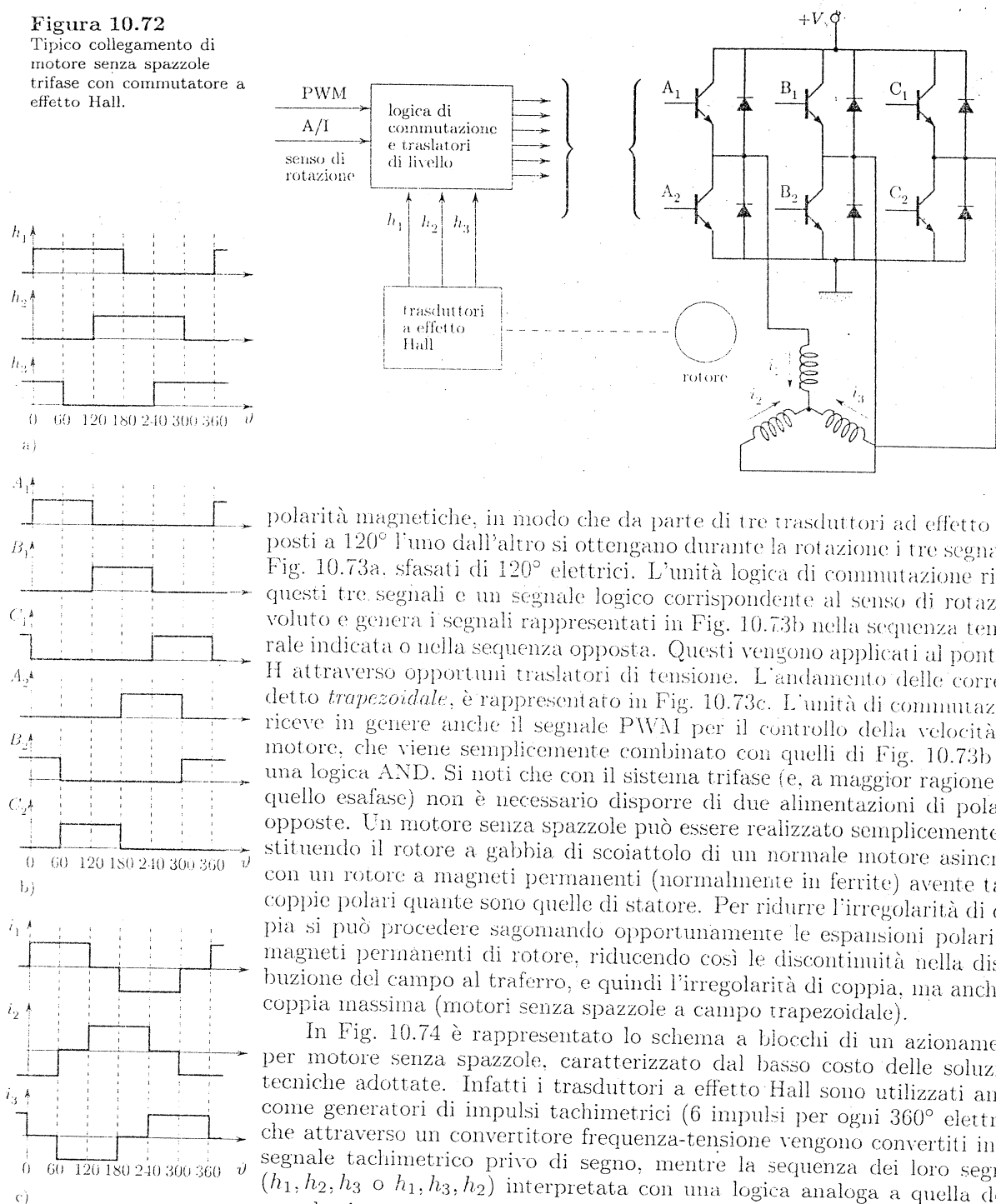
Figura 10.71

La commutazione elettronica nel motore di Fig. 10.70.

Il maggior difetto dei motori senza spazzole è l'irregolarità di coppia, dovuta alla brusca commutazione: si ricorda infatti che nei motori in corrente continua convenzionali una delle ragioni della suddivisione dell'avvolgimento in numerosi segmenti e dell'utilizzazione di un numero elevato di lame sul collettore è la riduzione della fluttuazione di coppia. Un'altra ragione per la suddivisione dell'avvolgimento nei motori convenzionali, che non sussiste nei motori senza spazzole, è limitare lo scintillio alla commutazione per effetto dell'induttanza del segmento di avvolgimento che esce di conduzione. Nei motori senza spazzole per ragioni economiche una suddivisione molto fine dell'avvolgimento di statore, con la conseguente moltiplicazione anche dei circuiti elettronici di comando, non è praticabile. Essi si realizzano di regola con disposizioni trifase od esafase e a quattro poli, cioè con quattro magneti permanenti sul rotore. La disposizione più diffusa è quella di Fig. 10.72, relativa a un motore trifase: un ponte ad H trifase, realizzato con transistori bipolari o mosfet come quello di Fig. 10.68, viene direttamente alimentato con una tensione continua ottenuta per rettificazione di un sistema trifase. Il generatore dei segnali di commutazione è realizzato con un cilindro in materiale magnetico solidale con il rotore e che ne ripete le

Figura 10.72

Tipico collegamento di motore senza spazzole trifase con commutatore a effetto Hall.

**Figura 10.73**

La commutazione elettronica nel motore di Fig. 10.72.

polarità magnetiche, in modo che da parte di tre trasduttori ad effetto Hall posti a 120° l'uno dall'altro si ottengano durante la rotazione i tre segnali di Fig. 10.73a, sfasati di 120° elettrici. L'unità logica di commutazione riceve questi tre segnali e un segnale logico corrispondente al senso di rotazione voluto e genera i segnali rappresentati in Fig. 10.73b nella sequenza temporale indicata o nella sequenza opposta. Questi vengono applicati al ponte ad H attraverso opportuni traslatori di tensione. L'andamento delle correnti, detto *trapezoidale*, è rappresentato in Fig. 10.73c. L'unità di commutazione riceve in genere anche il segnale PWM per il controllo della velocità del motore, che viene semplicemente combinato con quelli di Fig. 10.73b con una logica AND. Si noti che con il sistema trifase (e, a maggior ragione con quello esafase) non è necessario disporre di due alimentazioni di polarità opposte. Un motore senza spazzole può essere realizzato semplicemente sostituendo il rotore a gabbia di scoiattolo di un normale motore asincrono con un rotore a magneti permanenti (normalmente in ferrite) avente tante coppie polari quante sono quelle di statore. Per ridurre l'irregolarità di coppia si può procedere sagomando opportunamente le espansioni polari dei magneti permanenti di rotore, riducendo così le discontinuità nella distribuzione del campo al traferro, e quindi l'irregolarità di coppia, ma anche la coppia massima (motori senza spazzole a campo trapezoidale).

In Fig. 10.74 è rappresentato lo schema a blocchi di un azionamento per motore senza spazzole, caratterizzato dal basso costo delle soluzioni tecniche adottate. Infatti i trasduttori a effetto Hall sono utilizzati anche come generatori di impulsi tachimetrici (6 impulsi per ogni 360° elettrici) che attraverso un convertitore frequenza-tensione vengono convertiti in un segnale tachimetrico privo di segno, mentre la sequenza dei loro segnali (h_1, h_2, h_3 o h_1, h_3, h_2) interpretata con una logica analoga a quella degli encoder incrementali, fornisce il senso di rotazione⁽¹⁴⁾.

Negli azionamenti più raffinati si utilizzano rilevatori di posizione angolare più precisi, come i resolver o i sincro, alimentati ad alta frequenza (ad es. una ventina di kHz) per ridurre gli errori di velocità, e modulare per parzializzazione le correnti di fase con legge sinusoidale in funzione della posizione

⁽¹⁴⁾ Integrati che realizzano asservimenti per motori brushless: l'UC2626/3626 della Texas Instruments (ex Unitrode) e l'A3936 dell'Allegro Microsystems.

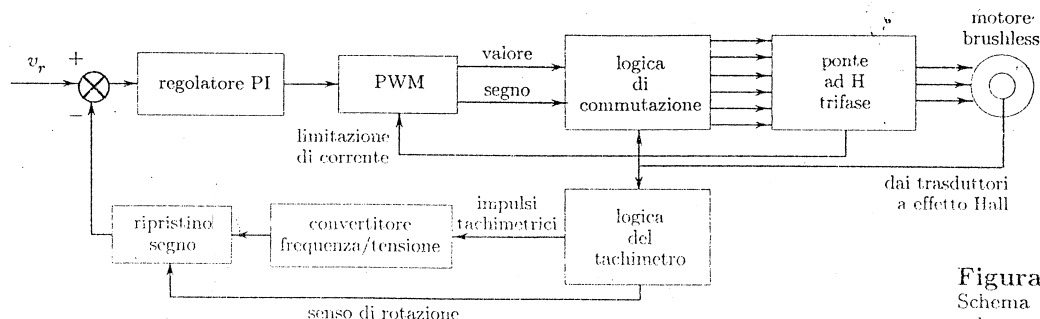


Figura 10.74
Schema di azionamento
a basso costo per motore
senza spazzole.

angolare del rotore (motori senza spazzole a campo sinusoidale): in questo secondo caso si può ottenere un campo rotante con velocità uniforme anche a bassa velocità. L'anticipo del campo rotante rispetto a quello generato dai magneti permanenti è in genere di 90° elettrici, perché per tale valore si ottiene la coppia massima, ma può essere variato negli azionamenti più raffinati, per avere un controllo di coppia più fine alle basse velocità. In questi casi l'elaborazione dei segnali in genere non viene realizzata con circuiti analogici, ma con microcontrollori digitali (DSP, Digital Signal Processor).

◀ I motori passo passo

I motori finora presi in esame come componenti dei sistemi di controllo risultano fondamentalmente analoghi ai normali motori elettrici in corrente continua. Si differenziano da essi, al più, per una particolare cura nella realizzazione costruttiva o nei valori dei parametri elettrici, in modo da renderne più spiccata l'attitudine al controllo.

I *motori passo passo* (stepping motors), per contro, sono dispositivi realizzati appositamente per il controllo di posizione, che si discostano notevolmente, nel principio di funzionamento e nella costruzione, dai motori elettrici in corrente continua. Essi comprendono più avvolgimenti alimentati in modo discontinuo, cioè con onde rettangolari generate mediante appositi circuiti elettronici: ogni commutazione produce un piccolo spostamento angolare, la cui entità è detta "passo angolare" e costituisce uno dei principali parametri caratteristici del motore. Il circuito elettronico riceve sequenze di impulsi e fa ruotare il motore di un numero corrispondente di passi angolari. Normalmente gli impulsi vengono inviati a due terminali di ingresso distinti, uno per ciascun senso di rotazione. Il vantaggio principale che si consegue con l'impiego dei motori passo passo nei sistemi di controllo consiste in una buona precisione di posizionamento senza ricorrere alla retroazione.

*Motore passo passo
Stepping motor*

Esistono due tipi fondamentali di motori passo passo: i motori passo passo a *riluttanza variabile*, che funzionano per effetto della variazione, con il moto, della riluttanza dei circuiti magnetici concatenati con gli avvolgimenti di eccitazione, e i motori passo passo a *magnete permanente*, che funzionano per l'interazione fra il campo elettromagnetico generato dagli avvolgimenti di eccitazione e un magnete permanente facente parte del rotore. Dal punto di vista del comportamento elettromeccanico, i due tipi di motore si differenziano nel fatto che il movimento nel secondo è sensibile al verso della corrente applicata, per la presenza della polarizzazione introdotta dal magnete, mentre ciò non avviene nel primo.

*Motori passo passo a
riluttanza variabile
Motori passo passo a
magnete permanente*

Una rappresentazione schematica di un motore passo passo a riluttanza variabile è riportato in Fig. 10.75: lo statore presenta 12 poli, i cui avvolgimenti sono collegati a quattro a quattro in serie, cosicché danno luogo a tre fasi, di cui per semplicità in figura se ne è indicata completamente una sola, mentre il rotore presenta 8 poli. Alimentando la sola fase A, il rotore

si dispone come è indicato in figura, cioè nella posizione corrispondente alla minima riluttanza del relativo circuito magnetico; alimentando la sola fase B, esso subisce una rotazione di 15° in senso antiorario, e così pure alimentando la sola fase C, col che si completa la sequenza. Il movimento in senso opposto si ottiene con la sequenza ACB.

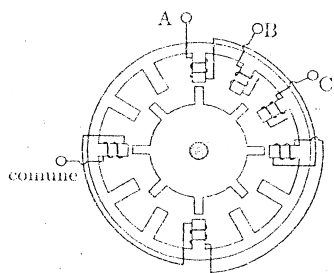


Figura 10.75

Schema di motore passo passo a riluttanza variabile.

I motori passo passo a riluttanza variabile sono impiegati nelle applicazioni in cui il piccolo ingombro, la semplicità e il basso costo sono privilegiati rispetto alle prestazioni, come ad esempio nelle stampanti, negli scanner, negli orologi. La realizzazione dei circuiti magnetici può essere anche notevolmente diversa da quella indicata in Fig. 10.75, ferma restando l'assenza di magneti permanenti.

I motori passo passo disponibili in commercio come componenti per la costruzione di servomeccanismi di posizione sono generalmente a magneti permanenti, per cui ci si soffermerà maggiormente sulla descrizione di tale tipo di motore, che in molte applicazioni può risultare vantaggioso rispetto ai normali motori in corrente continua con e senza spazzole. In Fig. 10.76 è riportato lo schema semplificato di un motore passo passo a magneti permanenti: il motore è costituito da un cilindro magnetizzato in senso diametrico e lo statore comprende due avvolgimenti con presa centrale, con ciascuno dei quali è concatenato il circuito magnetico di una coppia di poli diametralmente opposti.

La presa centrale dell'avvolgimento consente di invertire il flusso nel relativo circuito magnetico con una sola commutazione; nelle realizzazioni elettroniche i due commutatori meccanici indicati in figura sono di regola sostituiti da quattro transistori di potenza.

Un motore che presenta due circuiti magnetici di statore provvisti di avvolgimenti con presa centrale si dice *unipolare a quattro fasi*: se gli avvolgimenti non fossero provvisti di presa centrale, e quindi dovessero essere percorsi da corrente nei due sensi, il principio di funzionamento non cambierebbe, ma si dovrebbe adottare un diverso circuito di pilotaggio: un tale motore si dice *bipolare a due fasi*. Si possono inoltre costruire motori con più di due circuiti magnetici: ad esempio, se nel motore di Fig. 10.76 si avessero altri due circuiti magnetici i cui poli fossero intercalati a quelli già presenti, il motore sarebbe *bipolare a quattro fasi* o *unipolare a otto fasi*. L'aumento del numero delle fasi comporta ovviamente una maggiore complessità del circuito elettronico di pilotaggio e d'altronde non è indispensabile, come si vedrà, per aumentare il numero di passi per giro, cosicché i motori a magneti permanenti più diffusi risultano gli unipolari a quattro fasi e i bipolari a due fasi. In genere uno stesso motore può essere fornito sia come unipolare sia come bipolare: nel primo caso la presa intermedia nell'avvolgimento si ottiene avvolgendo due fili anziché uno, il che è consentito dalla relativa semplicità degli avvolgimenti stessi, che non sono disposti in cave.

Uno stesso motore passo passo può essere pilotato in più modi: ad esempio nella Fig. 10.77 sono riportate tre possibili sequenze di eccitazione del motore di Fig. 10.76 con le relative posizioni angolari del rotore; nelle tabelle di eccitazione con 0 si è indicata la posizione intermedia del commutatore, corrispondente alla diseccitazione del relativo circuito magnetico. Particolare interesse riveste la sequenza indicata in Fig. 10.77c, che corrisponde al funzionamento del motore con incrementi angolari pari a mezzo passo.

Per ciò che riguarda la corrente (e quindi la potenza) media assorbita, se si prescinde dalla potenza dissipata durante i transistori di commutazione, nel secondo modo di eccitazione essa appare la metà rispetto al primo, nel terzo i tre quarti rispetto al primo.

Motore passo passo unipolare a quattro fasi

Motore passo passo bipolare a due fasi

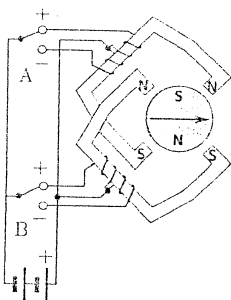


Figura 10.76

Principio di funzionamento di un motore passo passo a magneti permanenti.

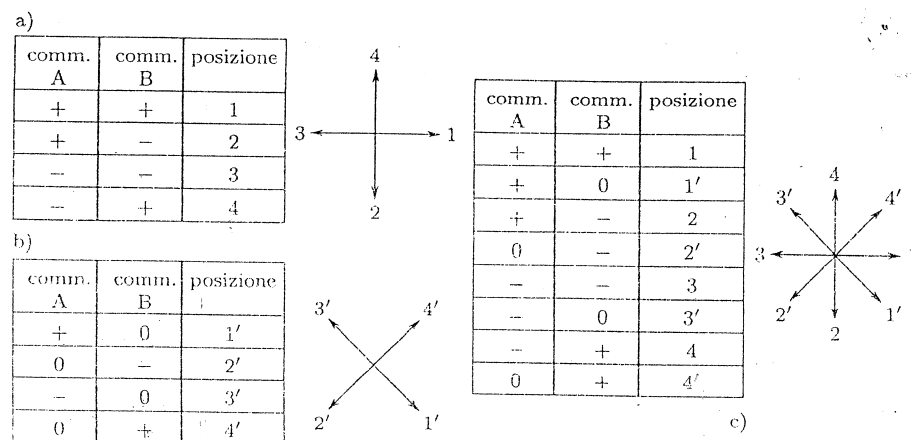


Figura 10.77
Diverse possibilità di comando del motore di Fig. 10.76.

Si osservi che il motore passo passo presenta una coppia di tenuta che è ovviamente nulla nella posizione di equilibrio, varia sinusoidalmente in funzione della posizione del rotore, risulta massima quando la rotazione è di un passo e decresce nuovamente fino a raggiungere lo zero quando la rotazione è di due passi. Se si aumenta la rotazione oltre tale limite, la coppia si inverte di segno e il rotore tende a una diversa posizione di equilibrio, che nel caso dei motori a magneti permanente è distante di quattro passi da quella iniziale: nel caso del motore di Fig. 10.76, che presenta solo quattro passi per giro, la nuova posizione di equilibrio si ritrova dopo un giro completo.

Per ottenere posizionamenti angolari precisi senza la necessità di forti demoltiplicazioni ad ingranaggi, si costruiscono motori passo passo che, pur funzionando secondo lo stesso principio di quello di Fig. 10.76, cioè con due soli avvolgimenti con presa centrale, presentano un numero molto maggiore di passi per giro.

Il motore Slo-syn

Una realizzazione del motore passo passo adottata da vari costruttori⁽¹⁵⁾ è rappresentata in Fig. 10.78: rispetto al precedente, questo motore presenta un numero superiore di passi per giro (200, cioè passo angolare 1.8°) e una realizzazione meccanica più simile a quella dei normali motori elettrici di media potenza.

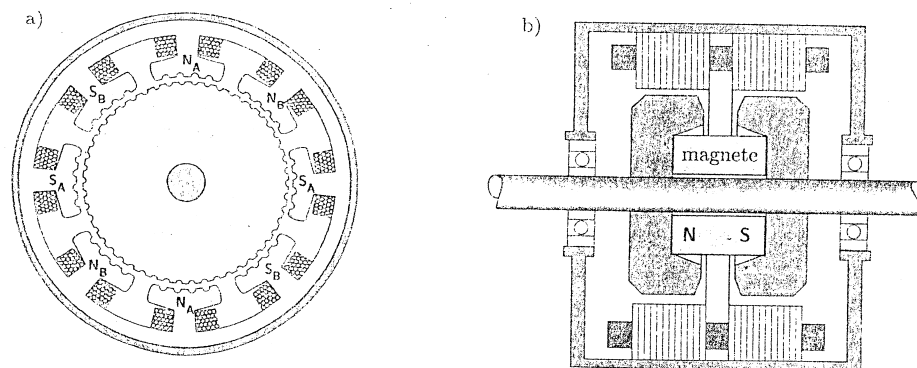


Figura 10.78
Particolari costruttivi del motore Slo-syn.

Il rotore è costituito da due cilindri presentanti ciascuno 50 denti, montati in modo che i denti dell'uno siano sfalsati, cioè in posizione intermedia, rispetto ai denti dell'altro, con interposto un magnete permanente, di cui i due cilindri si possono considerare le espansioni polari. Lo statore presenta otto poli salienti i cui avvolgimenti, che possono

⁽¹⁵⁾ Per esempio la Superior Electric.

avere una presa intermedia, sono collegati a quattro a quattro in serie: una fase bipolare (o una doppia fase unipolare) corrisponde alle polarità magnetiche indicate con N_A e S_A in Fig. 10.78a, l'altra alle polarità indicate con N_B e S_B . I denti dello statore, a parte le interruzioni dovute alle espansioni polari che ne diminuiscono il numero di 8, sarebbero 48, cioè due di meno di quelli del rotore: ciò fa sì che, se i denti di rotore e statore corrispondenti a una coppia di poli opposti si corrispondono (come nel caso della coppia disposta secondo l'asse verticale in Fig. 10.78a), quelli della coppia di poli ortogonale sono sfalsati. Una stessa espansione polare è affacciata a entrambi i cilindri del rotore.

Si supponga di alimentare la sola fase A in modo che la polarità del relativo campo magnetico sia quella indicata in Fig. 10.78a: se il cilindro scanalato del rotore che in figura appare visto di fronte corrisponde al polo S , esso, per attrazione con i denti del polo N_A e per repulsione con quelli dei poli S_A , si dispone come è indicato, cioè con i denti allineati con quelli di N_A e sfalsati rispetto a quelli di S_A , mentre il cilindro scanalato corrispondente al polo N , che è montato con uno sfalsamento di mezzo passo di scanalatura, ha contemporaneamente i propri denti allineati con quelli di S_A e sfalsati rispetto a quelli di N_A , cioè si trova in una condizione di equilibrio perfettamente congruente con quella del primo. Se, anziché la fase A , si alimenta la fase B in modo che il relativo campo magnetico abbia la polarità indicata in Fig. 10.78a, si ha una rotazione pari a un quarto di passo di scanalatura, dovendosi allineare i denti con quelli di N_B ; se si eccita di nuovo la fase A , ma con polarità invertita, si ha una rotazione di un altro quarto di passo di scanalatura nella stessa direzione, come pure se, successivamente, si eccita la sola fase B con polarità invertita: in definitiva il passo del motore corrisponde a un quarto del passo di scanalatura, per cui il motore presenta, come si è precedentemente accennato, 200 passi per giro. Sono possibili tutti e tre i tipi di pilotaggio indicati in Fig. 10.77 (nella spiegazione precedente si è fatto riferimento a quello di Fig. 10.77b): adottando il terzo si possono ottenere 400 passi per giro.

Il motore passo passo lineare

In Fig. 10.79 è rappresentato schematicamente un motore passo passo lineare di tipo bifase e bipolare: alimentando la sola fase A con polarità positiva, il flusso dovuto al magnete permanente, che si richiude attraverso i denti come è indicato in Fig. 10.79a, viene rinforzato in corrispondenza del polo 1 e indebolito in corrispondenza del polo 2, mentre rimane invariato in corrispondenza dei poli 3 e 4, per cui le due parti del motore si dispongono come è indicato nella stessa figura. In Fig. 10.79b è rappresentata la posizione corrispondente all'alimentazione con polarità positiva della sola fase B , in Fig. 10.79c quella corrispondente all'alimentazione con polarità negativa della sola fase A e, infine, in Fig. 10.79d quella corrispondente all'alimentazione con polarità negativa della sola fase B . In genere il numero di denti per polo è superiore a quello indicato nelle figure (ad esempio, sette). Il passo è dell'ordine del millimetro.

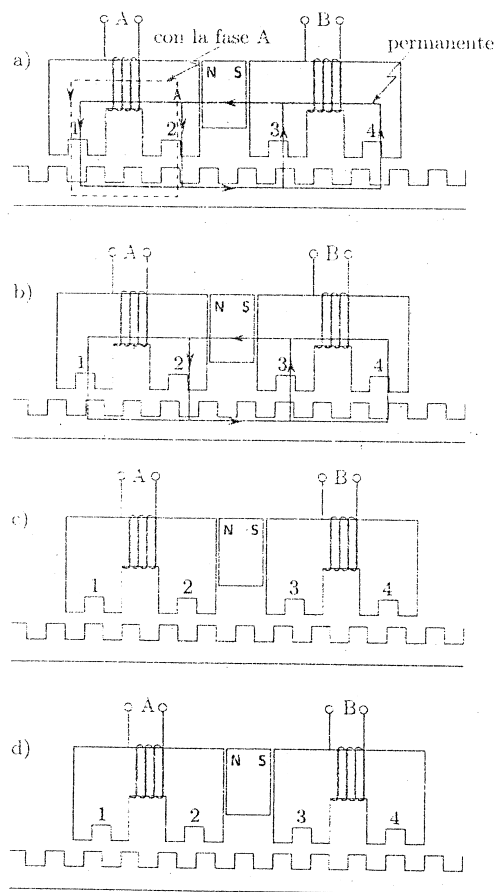
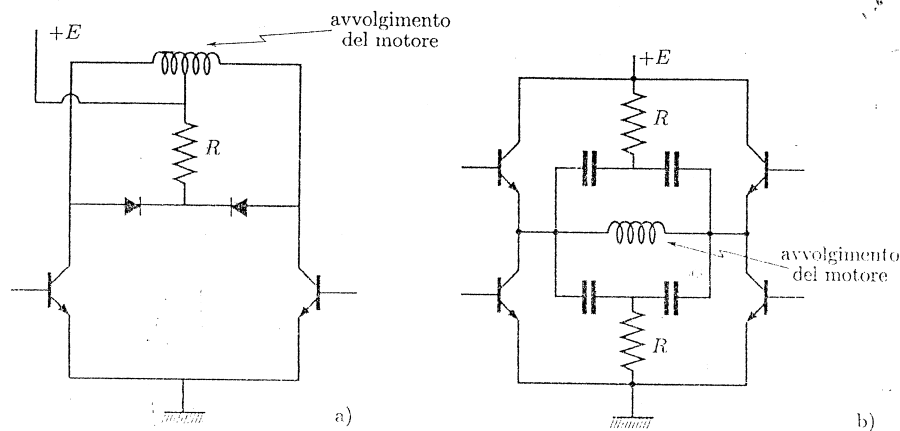


Figura 10.79

Motore passo passo lineare.

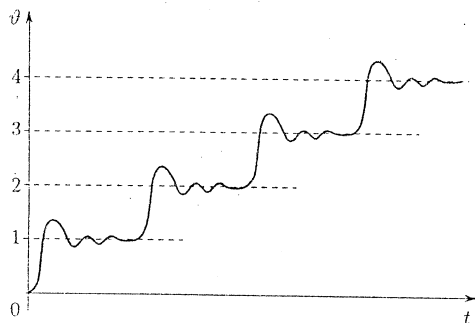
In Fig. 10.80 sono rappresentati due esempi di stadi di potenza per il pilotaggio di motori passo passo, realizzabili sia con transistori come indicato, sia con mosfet. Il primo si riferisce a un motore unipolare e il secondo a un motore bipolare. Ovviamente occorre uno di tali stadi di potenza per ogni fase. Poiché nei circuiti magnetici percorsi da corrente si accumula una notevole energia magnetica, occorre prevedere sistemi per dissipare tale energia quando i transistori passano dalla conduzione all'interdizione. In caso contrario si presenterebbero sovratensioni eccessive, che potrebbero portare a scariche negli avvolgimenti e a danneggiamento dei transistori. Quando l'alimentatore accetta ricircolo di corrente inversa si possono utilizzare diodi, uniti eventualmente a resistenze di dissipazione, come è indicato in Fig. 10.80a. In caso contrario si impiegano gruppi RC come è indicato in

**Figura 10.80**

Stadi di potenza per il pilotaggio dei motori passo passo.

Fig. 10.80b o gli stessi circuiti di pilotaggio con diodi di ricircolo utilizzati per i normali motori in corrente continua con o senza spazzole.

Il movimento dei motori passo passo è ovviamente discontinuo. La legge di avanzamento tipica è riportata in Fig. 10.81: il motore costituisce in effetti un sistema del secondo ordine con smorzamento relativamente basso, per cui ad ogni passo la posizione angolare subisce una notevole sovraelongazione rispetto al valore di regime: ciò, al crescere della velocità, dà luogo a comportamenti anomali, come risonanze a determinate frequenze, che possono causare perdite di sincronismo. Sono i fenomeni di questo tipo che limitano la velocità dei motori passo passo. Le risonanze sono particolarmente evidenti nei motori a riluttanza variabile trifasi. L'ampiezza delle oscillazioni smorzate che si presentano dopo ogni avanzamento dipende ovviamente anche dal carico, o, meglio, dal rapporto fra coppia resistente e momento d'inerzia del carico: lo smorzamento è tanto maggiore quanto più elevato è tale rapporto.

**Figura 10.81**

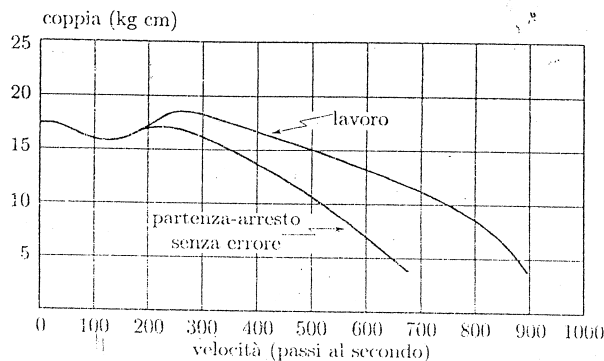
Legge del moto di un motore passo passo.

Lo smorzamento delle oscillazioni dipende anche dal tipo di eccitazione: il tipo di eccitazione schematizzato in Fig. 10.77a, in cui entrambe le fasi sono eccitate contemporaneamente, cosicché i poli di rotore si collocano, a regime, in posizione intermedia fra i poli di statore, pur essendo in apparenza meno conveniente di quello di Fig. 10.77b, in quanto la potenza elettrica dissipata è doppia, presenta il vantaggio di dar luogo a uno smorzamento maggiore perché entrambi gli avvolgimenti, anziché uno solo, sono sedi di correnti indotte durante le oscillazioni e funzionano da circuiti smorzatori.

Le caratteristiche meccaniche sono del tipo indicato in Fig. 10.82: per ogni velocità sono date la coppia massima applicabile senza perdita di sincronismo e la coppia massima sotto la quale il rotore può mettersi in rotazione a quella velocità senza errore. Velocità relativamente alte devono

Figura 10.82

Caratteristica meccanica
tipica di un motore passo
passo.



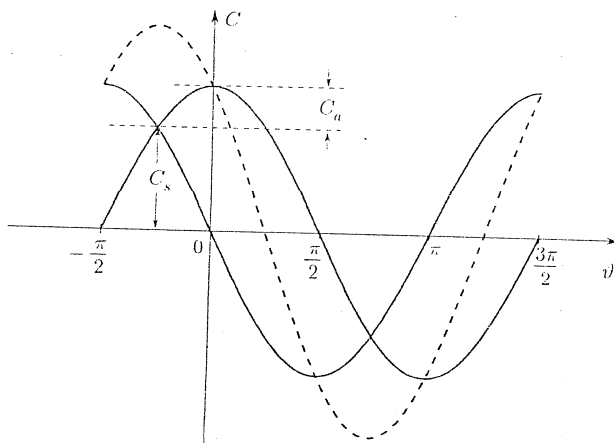
essere raggiunte per incrementi in più passi successivi della frequenza degli impulsi applicati, in modo da realizzare una fase di accelerazione del moto di una certa durata; un procedimento analogo si deve seguire in fase di decelerazione da velocità elevate.

I parametri caratteristici più importanti dei motori passo passo, oltre a, naturalmente, il *passo angolare* (o il numero dei passi per giro), sono la *coppia nominale*, cioè la coppia sviluppata dal motore in un certo campo di velocità, includente anche la velocità zero, la *coppia di tenuta* o *coppia statica*, cioè la coppia che si può applicare a motore eccitato e fermo senza provocare rotazione continua, la *coppia residua*, relativa al caso di motore non eccitato, l'*inerzia del rotore* e vari parametri elettrici relativi agli avvolgimenti (tensione e corrente nominali, resistenza, induttanza).

Come si è precedentemente accennato con riferimento al motore di Fig. 10.76, la coppia statica in funzione dello spostamento angolare ha un andamento approssimativamente sinusoidale. In Fig. 10.83 sono indicati, in funzione dello spostamento del rotore, l'andamento della coppia quando è alimentata la sola fase A, con punto di equilibrio stabile corrispondente a coppia nulla in $\vartheta_1 = 0 + 2k\pi$, con k intero, quello quando è alimentata la sola fase B, con punto di equilibrio stabile in $\vartheta_2 = \pi/2 + 2k\pi$. Quando sono alimentate entrambe le fasi, l'andamento è quello rappresentato a tratto, con punto di equilibrio in $\vartheta_2 = \pi/4 + 2k\pi$. Facendo riferimento ai grafici di figura, ci si può facilmente rendere conto del fatto che la coppia nominale (cioè in regime dinamico) è necessariamente inferiore alla coppia statica. Infatti la coppia allo spunto, quando si passa dall'alimentazione della sola fase A a quella della sola fase B, risulta pari a $C_s = C_m/\sqrt{2}$, in cui C_m indica la coppia statica o di tenuta. In figura con C_a si è indicata la coppia di accelerazione disponibile in funzione della posizione del rotore.

Figura 10.83

Distribuzione della coppia
statica lungo il passo.



Il posizionamento fine (microstepping) dei motori passo passo

Con una tecnica detta *microstepping*, facilmente attuabile parzializzando le tensioni applicate alle due fasi, i motori passo passo si possono pilotare in modo pressoché continuo. Ci si riferisca ancora a Fig. 10.83: le coppie dovute alle due fasi in funzione dell'angolo del rotore ϑ si possono esprimere con le relazioni

$$C_A = -C_m \sin \vartheta, \quad (10.47)$$

$$C_B = C_m \cos \vartheta, \quad (10.48)$$

in cui C_m indica la coppia di tenuta, proporzionale alla corrente che alimenta la fase.

Detti α l'angolo in corrispondenza del quale si vuole posizionare il rotore e k la costante di proporzionalità che lega la coppia alla corrente, se le due fasi vengono alimentate rispettivamente con correnti pari a $I_m \cos \alpha$ e $I_m \sin \alpha$, sommando le corrispondenti coppie si ottiene una coppia totale sviluppata pari a

$$C = k I_m (\cos \vartheta \sin \alpha - \sin \vartheta \cos \alpha) = -k I_m \sin(\vartheta - \alpha),$$

che assume valore nullo quando è $\vartheta = \alpha$: in assenza di coppia resistente il rotore si posiziona pertanto in corrispondenza dell'angolo α .

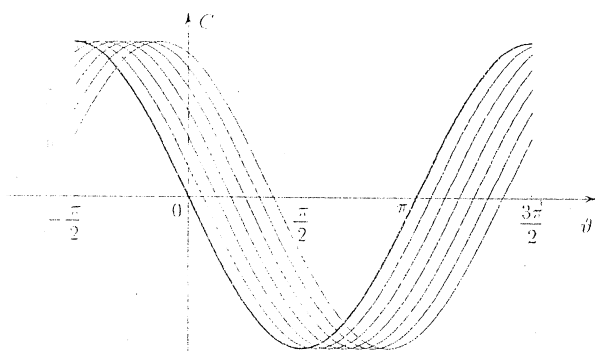


Figura 10.84
Microstepping con
 $\alpha = 2\pi/32$.

In Fig. 10.84 sono rappresentati gli andamenti della coppia di tenuta per incrementi fini di $2\pi/32$ (8 per passo), mentre in Fig. 10.85 è rappresentato un possibile modo di ottenere un asservimento di velocità utilizzando il microstepping: il segnale di riferimento viene inviato a un convertitore tensione-frequenza di precisione e quindi a un contatore bidirezionale ciclico con contenuto pari al numero di microstep per periodo. Questo memorizza il valore numerico di α . La generazione delle funzioni $E \sin \alpha$ ed $E \cos \alpha$, che costituiscono i riferimenti per due distinti parzializzatori con limitazione di corrente, viene effettuata da memorie digitali a sola lettura (ROM), analoghe a quelle presenti nel convertitore per inductosyn di Fig. 10.35. Il tutto, esclusi gli stadi di potenza, può essere realizzato anche con un microcontrollore⁽¹⁶⁾.

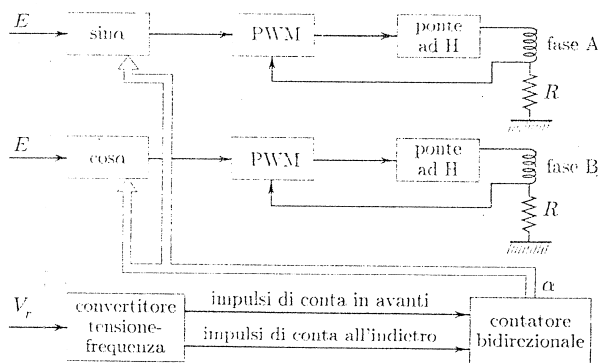


Figura 10.85
Regolazione di velocità
per motori passo passo.

⁽¹⁶⁾ Integrati che realizzano asservimenti per motori passo passo: UC3770A/3770B della Texas Instruments (ex Unitrode) e l'A3955 dell'Allegro Microsystems.

10.5. Esercizi

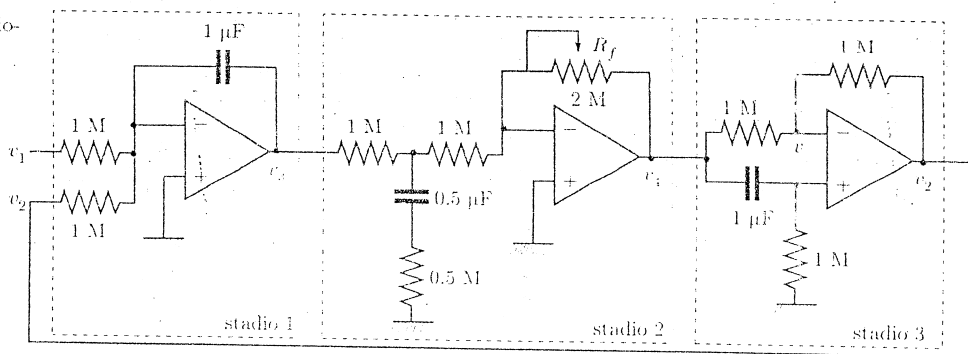
10.5.1 Si consideri il sistema in retroazione costituito dall'apparato di elaborazione analogica il cui schema è riportato in Fig. 10.86.

1. Si determinino le funzioni di trasferimento dei vari stadi in cui il sistema è suddiviso.

2. Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema in funzione del guadagno statico K del secondo stadio (regolabile agendo sul potenziometro R_f).

Figura 10.86

Circuito elettronico analogico.



Soluzione

1. Il primo stadio è un sommatore-integratore del tipo rappresentato in Fig. 10.5g. Applicando la corrispondente relazione ingresso-uscita si deduce

$$V_3(s) = -\frac{1}{s} (V_1(s) + V_2(s)).$$

Il secondo stadio si analizza applicando una trasformazione stella-triangolo della rete a T in ingresso e considerando che le due impedenze verso massa del triangolo ottenuto non hanno alcun effetto in quanto la prima costituisce semplicemente un carico per il primo stadio e la seconda, collegata fra punti allo stesso potenziale, non è percorsa da corrente. Si ricorda la relazione della trasformazione stella triangolo: $Z_{ij} = Z_i + Z_j + Z_i Z_j / Z_k$. Il secondo stadio è pertanto uno stadio invertente con impedenza d'ingresso pari a

$$\begin{aligned} Z_i &= 2 \cdot 10^6 + \frac{10^{12}}{5 \cdot 10^5 + 1/(5 \cdot 10^{-7} s)} = \\ &= 2 \cdot 10^6 \frac{1 + 0,5s}{1 + 0,25s} \Omega. \end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$\begin{aligned} V_4(s) &= -2 \cdot 10^6 \frac{K}{Z_i} = \\ &= -K \frac{1 + 0,25s}{1 + 0,5s} V_3(s), \quad 0 \leq K \leq 1. \end{aligned}$$

Il terzo stadio, infine, si studia immaginando di aprire il collegamento fra le due impedenze in ingresso e sovrapponendo gli effetti. Si ottiene

$$V_2(s) = \frac{2s}{1+s} V_4(s) - V_4(s) = -\frac{1-s}{1+s} V_4(s).$$

2. L'andamento qualitativo del luogo delle radici è rappresentato in Fig. 10.87.

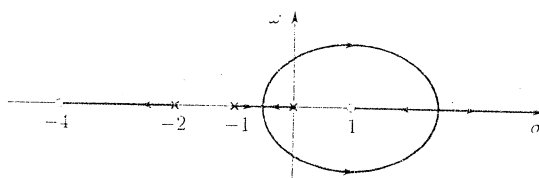


Figura 10.87 Luogo delle radici del sistema di Fig. 10.86.

10.5.2 Si consideri il circuito elettronico rappresentato in Fig. 10.88a (oscillatore a ponte di Wien). Esso si può considerare costituito da un amplificatore non invertente del tipo di Fig. 10.9a, retroazionato attraverso una rete RC. Detti A il guadagno dell'amplificatore e $H(s)$ la funzione di trasferimento della rete, il sistema si può rappresentare con il semplice schema a blocchi di Fig. 10.88b.

1. Si determini il campo di stabilità in A .

2. Si tracci l'andamento del luogo delle radici del sistema.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento $H(s)$ si può ricavare con procedimento analogo a quello seguito per la rete a ritardo e anticipo di Fig. 6.9a. Si ottiene

$$H(s) = \frac{\tau_{12}s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12}s},$$

$$\text{con } \tau_1 := R_1 C_1, \quad \tau_2 := R_2 C_2, \quad \tau_{12} := R_1 C_2.$$

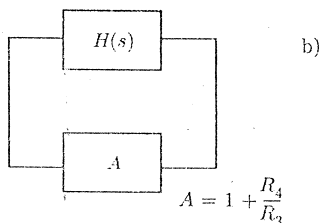
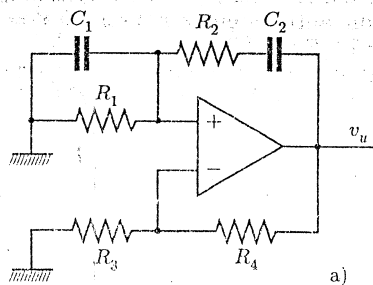


Figura 10.88 Oscillatore a ponte di Wien e relativo schema a blocchi.

I diagrammi di Bode della funzione $H(j\omega)$ sono riportati in Fig. 10.89a: in essi si è posto

$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \alpha_0 := \frac{\tau_{12}}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}$$

Assumendo, per fissare le idee, A come funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto, $H(s)$ come funzione di trasferimento del percorso di retroazione, si ricava

$$G_0(s) = \frac{A}{1 - AH(s)} = \frac{A((1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s - A\tau_{12} s}$$

Il sistema è stabile per $A < 1/\alpha_0$; per $A = 1/\alpha_0$ esso

presenta una coppia di poli immaginari, di valori $\pm j\omega_0$.

2. L'equazione caratteristica si può scrivere

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\delta(A) \frac{s}{\omega_0} + 1 = 0,$$

$$\text{con } \delta(A) := \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}(1 - A)}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig. 10.89b. Essendo ω_0 indipendente da A , nella parte che si riferisce a poli complessi esso è una circonferenza avente il centro nell'origine e raggio pari ad ω_0 .

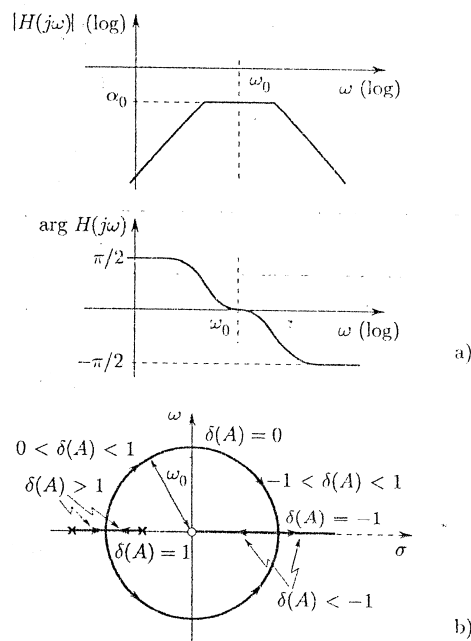


Figura 10.89 Diagrammi di Bode della rete di retroazione positiva e luogo delle radici del sistema.

10.5.3 Si consideri ancora il circuito di Fig. 10.88a, ma con l'amplificatore modificato come è indicato in Fig. 10.90a. Si suppone che i diodi zener abbiano il comportamento ideale rappresentato dalla caratteristica tensione-corrente di Fig. 10.90b.

1. Si determini la funzione descrittiva dell'amplificatore.

2. Posto $R_1 = R_2 = 100 \text{ K}\Omega$, $C_1 = C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $E = 5 \text{ V}$, si determini la pulsazione ω e l'ampiezza Y delle autooscillazioni all'uscita dell'amplificatore operazionale.

3. Nelle condizioni di cui al quesito precedente, si determini l'ampiezza Y_3 della terza armonica all'uscita.

Soluzione

1. La caratteristica ingresso-uscita dell'amplificatore è riportata in Fig. 10.91.

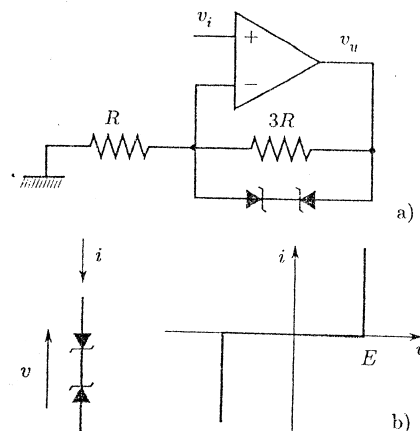


Figura 10.90 Amplificatore non lineare e caratteristica ideale della coppia di diodi zener.

Essa deriva dal fatto che la coppia di diodi zener è ininfluente quando la tensione ai suoi terminali è, in modulo, inferiore o uguale ad E , il che avviene per $-E/3 \leq v_i \leq E/3$, mentre fuori da tale campo per la condizione di cortocircuito virtuale degli ingressi si ha

$$v_u = \begin{cases} v_i + E & \text{per } v_i \geq E/3 \\ v_i - E & \text{per } v_i \leq -E/3 \end{cases}$$

La nonlinearietà è del tipo di Fig. 8.16a. La corrispondente funzione descrittiva è

$$F(X) = \begin{cases} 4 & \text{per } X \leq E/3 \\ 1 + 3\Phi\left(\frac{3X}{E}\right) & \text{per } X \geq E/3 \end{cases}$$

in cui X è l'ampiezza delle oscillazioni all'ingresso dell'amplificatore, misurata in volt.

2. Essendo in questo caso $\tau_1 = \tau_2 = \tau_{12} = 0,1$ sec, i parametri della rete di retroazione sono $\alpha_0 = 1/3$, $\omega_0 = 10$ rad/sec; poiché la funzione descrittiva è reale e la rete alla pulsazione ω_0 non sfasa, la pulsazione delle oscillazioni coincide ancora con ω_0 . Il limite di stabilità è $A_1 = 1/\alpha_0 = 3$, per cui l'ampiezza X si ricava dalla condizione $F(X) = 3$, cioè

$$\Phi\left(\frac{3X}{E}\right) = \frac{2}{3};$$

utilizzando il grafico di Fig. 8.8 si ottiene $3X/E =$

1,81, da cui $X = 0,60 E = 3,00$ V. L'ampiezza delle oscillazioni autosostenute in uscita è $Y = (4/3 + 0,6 - 1/3)E = 1,6 E = 8,00$ V.

3. Dal grafico di Fig. 8.8 relativo alla terza armonica si ricava $Y_3/Y_1 = 0,22$ per $X/X_1 = 1,81$. Si noti che la nonlinearietà di Fig. 10.91 si può considerare il parallelo di una saturazione e di un blocco lineare algebrico di guadagno unitario; quando la funzione descrittiva complessiva vale 3, solo i due terzi di essa sono dovuti alla saturazione, per cui è $Y_1 = 2Y/3 = 6,0$ V e pertanto $Y_3 = 0,22 \cdot 6,0 = 1,32$ V.

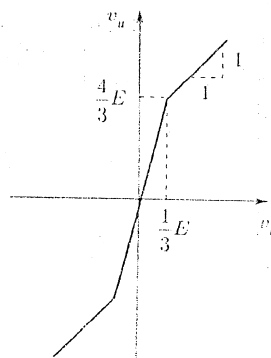


Figura 10.91 Caratteristica ingresso-uscita dell'amplificatore di Fig. 10.90a.

Complementi al Capitolo 10

C10.1. L'amplificatore operazionale reale e l'amplificatore a chopper

Al Paragrafo 10.1 si sono analizzati numerosi circuiti per amplificazione ed elaborazione analogica sotto l'ipotesi semplificativa di utilizzarvi un amplificatore operazionale ideale, cioè privo di correnti di ingresso, con impedenza di uscita nulla e guadagno G tanto elevato da potersi considerare infinito. Se i valori delle resistenze o, più in generale, delle impedenze delle reti cui l'amplificatore è collegato rientrano in determinati campi, in effetti esso può considerarsi ideale, cioè rappresentabile, con errore trascurabile, con il circuito equivalente di Fig. 10.1b; d'altronde risulta utile per il progettista conoscere le limitazioni degli amplificatori operazionali reali per verificare, caso per caso, l'adeguatezza delle ipotesi semplificative introdotte e acquisire sensibilità alle situazioni in cui tali ipotesi risultano più critiche.

Il circuito equivalente che, sempre nell'ipotesi di linearità, si assume per tener conto dei più importanti parametri caratterizzanti il comportamento degli amplificatori operazionali reali è riportato in Fig. 10.92a. I parametri indicati in figura sono:

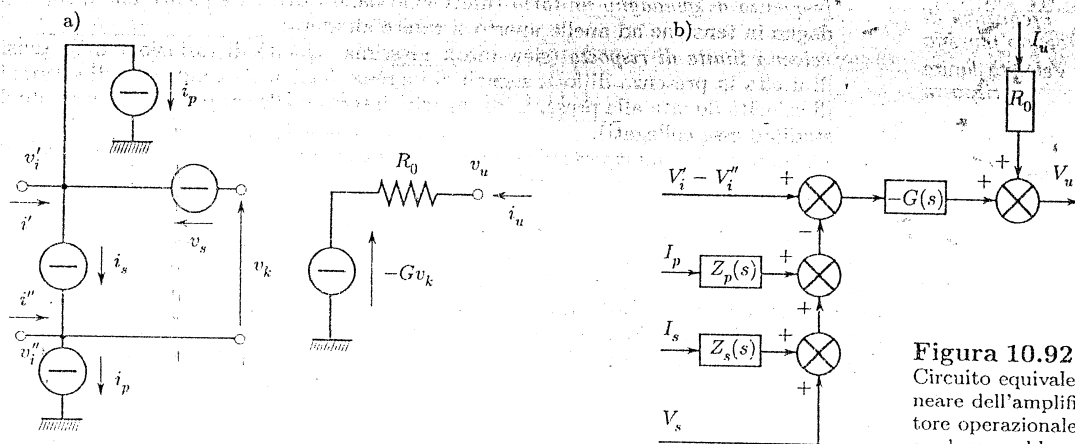


Figura 10.92

Circuito equivalente lineare dell'amplificatore operazionale reale e schema a blocchi corrispondente.

Tensione di fuori zero

Corrente di fuori zero

Corrente di polarizzazione

Guadagno di tensione ad anello aperto

Resistenza di uscita

Deriva

Tensione di modo comune

- tensione di fuori zero (input offset voltage) v_s : tensione che deve essere applicata fra i due ingressi per ottenere una tensione di uscita nulla;
- corrente di fuori zero (input offset current) i_s : differenza fra le correnti dei due ingressi quando la tensione di uscita è nulla;
- corrente di polarizzazione (input bias current) i_p : media delle correnti dei due ingressi quando la tensione di uscita è nulla;
- guadagno di tensione ad anello aperto (open-loop voltage gain) G_0 : rapporto fra la tensione di uscita e la differenza delle tensioni di ingresso che la produce, per piccoli segnali;
- resistenza di uscita (output resistance) R_0 : resistenza differenziale di uscita per piccoli segnali e con tensione di uscita nulla;

La tensione di fuori zero e la corrente di fuori zero sono dovute ad inevitabili asimmetrie dello stadio di ingresso e in produzione vengono tenute ai minimi livelli possibili; esse peraltro sono soggetti a *deriva* (drift), cioè a cambiare nel tempo per effetto di variazioni della temperatura, della tensione di alimentazione positiva E^+ , di quella negativa E^- e della variazione contemporanea delle tensioni di ingresso o *tensione di modo comune* (common-mode input voltage). I costruttori di regola forniscono i coefficienti che esprimono la dipendenza di v_s e di i_s da tali cause di perturbazione.

Il circuito equivalente di Fig. 10.92a costituisce un modello sufficientemente accurato del comportamento dell'amplificatore operazionale in regime lineare, cioè per piccoli segnali. In Fig. 10.92b è riportato il corrispondente schema a blocchi, da sostituire a quello a destra nello schema di Fig. 10.1b. Le impedenze in esso presenti sono definite dalle relazioni $Z_p(s) := Z'(s) - Z''(s)$ e $Z_s(s) := Z'(s) + Z''(s)$, in cui $Z'(s)$ e $Z''(s)$ indicano le impedenze delle reti esterne viste dagli ingressi dell'amplificatore (si suppone che gli ingressi facciano capo a due reti non collegate fra loro, per cui non si hanno influenze mutue).

Altri dati che occorre conoscere per impiegare correttamente l'amplificatore operazionale sono le *tensioni di alimentazione* E^+ ed E^- . In relazione ai loro valori tipici (ad esempio $+15\text{ V}$ e -15 V), di norma si specificano:

- *campo delle tensioni di ingresso* (input voltage range o common-mode range): intervallo di variazione delle tensioni di ingresso entro il quale l'amplificatore funziona correttamente, ad esempio $\pm 10\text{ V}$;
- *rapporto di reiezione di modo comune degli ingressi* (input common-mode rejection ratio): rapporto fra il campo delle tensioni di ingresso e la massima variazione della tensione di fuori zero provocata dalla variazione contemporanea di esse in tale campo;
- *campo della tensione di uscita* (output voltage swing): intervallo di variazione della tensione di uscita con massimo carico di corrente ottenibile senza saturazione, ad esempio $\pm 10\text{ V}$;
- *corrente di uscita* (output current): corrente ottenibile in uscita senza riduzione del campo della tensione di uscita;
- *guadagno di tensione a pieno segnale* (large-signal voltage gain): rapporto fra il campo della tensione di uscita e la variazione della differenza delle tensioni di ingresso necessaria per coprire completamente tale campo.

In relazione al comportamento dinamico dell'amplificatore, si specificano:

- *banda passante* (bandwidth): frequenza alla quale il guadagno in tensione si riduce di 3 dB rispetto al valore in continua;

Banda passante

Frequenza di
guadagno unitario
Velocità limite
di risposta

Tensione di rumore

- *frequenza di guadagno unitario* (unity gain bandwidth): frequenza alla quale il guadagno in tensione ad anello aperto si riduce all'unità;
- *velocità limite di risposta* (slew-rate): massima velocità di variazione della tensione di uscita in presenza di forti segnali di ingresso (cioè nella condizione di saturazione di velocità dovuta alla presenza di capacità interne e alla saturazione in corrente degli stadi ad esse collegati);
- *tensione di rumore riportata all'ingresso* (input noise voltage): densità spettrale della tensione di rumore, in $V/\sqrt{\text{Hz}}$, data a diverse frequenze (es. 10 Hz, 100 Hz, 1kHz).

Di tali parametri i costruttori forniscono i valori tipici (cioè i valori medi di produzione) e, in molti casi, i valori limite (minimo e massimo). A titolo esemplificativo, nella seguente tabella sono riportati i valori tipici di alcuni dei principali parametri di quattro amplificatori operazionali particolarmente interessanti nell'ambito della strumentazione elettronica: l'LF356 della National Semiconductors, amplificatore di impiego generale a bassa corrente di ingresso e buona velocità limite di risposta, il TLC 274 della Texas Instruments, con tecnologia CMOS e alimentabile sia a 0, 5 V che a 0, 10 V (o -5, +5 V) e, fra gli amplificatori di precisione a bassa tensione di fuori zero particolarmente adatti per ponti di misura, il TLC2652 della Texas Instruments e l'AD8571 della Analog Devices.

	LF356	TLC274	TLC2652	AD8571	
tensioni di alimentazione	-15, +15	-5, +5	-5, +5	0, +5	V
tensione di fuori zero v_s	3	1, 1	0,001	0,001	mV
corrente di fuori zero i_s	3	0, 1	2	10	pA
corrente di polarizzazione i_p	30	-0, 6	4	20	pA
guadagno di tensione G_0	200	35	10^4	10^4	V/mV
velocità limite di risposta	12	12	3	0, 4	V/ μsec
reiezione di modo comune	100	80	125	140	dB
insensibilità alle alimentaz.	100	95	140	130	$\mu\text{V/V}$
ingressi e uscita rail-to-rail	no	-E	no	si	—

Amplificatore Goldberg

La bassa tensione di fuori zero del TLC2652 e dell'AD8571 è ottenuta con la stabilizzazione a chopper, facilitata dalla tecnologia CMOS in essi adottata. La stabilizzazione a chopper degli amplificatori operazionali risale all'epoca in cui essi erano ancora realizzati a tubi ed è dovuta a Goldberg⁽¹⁷⁾, per cui per molto tempo questi tipi di amplificatori furono chiamati *amplificatori Goldberg*.

Lo schema dell'amplificatore Goldberg, praticamente identico a quello della pubblicazione originale del 1950, è rappresentato in Fig. 10.93a, mentre in Fig. 10.93b è riportato il relativo diagramma di Bode. Esso presenta un solo ingresso, quello invertente, intendendosi l'altro collegato a massa. L'amplificatore in alternata con chopper, seguito da un filtro passa basso, equivale ad un amplificatore in continua invertente a bassa tensione di fuori zero, con guadagno dell'ordine del migliaio. Questo amplificatore è detto *amplificatore di regolazione dello zero*, distinto dall'*amplificatore principale*. La tensione di fuori zero dell'amplificatore principale si riporta all'ingresso dividendola per il guadagno dell'amplificatore di regolazione dello zero e viene pertanto ridotta di circa tre ordini di grandezza.

L'amplificatore in alternata può essere del tipo rappresentato in Fig. 10.11d. Il segnale a monte del filtro ha l'andamento indicato in figura, dovuto al fatto che, se la resistenza di uscita dell'amplificatore è molto inferiore a quella del filtro, il condensatore C_u si carica alla tensione picco picco in uscita dell'amplificatore quando il chopper ne chiude un'estremità a massa e praticamente non si scarica quando è lasciato libero. Il chopper, che nelle prime versioni a tubi elettronici era meccanico e funzionava a frequenze dell'ordine del centinaio di Hz (evitando multipli della frequenza di rete per non convertire in continua i disturbi a tale frequenza), si può ora realizzare con interruttori a CMOS, con frequenze dell'ordine della decina di kHz. Nel diagramma di Bode di Fig. 10.93b ω_{f1} e ω_{f2} indicano rispettivamente la pulsazione di taglio dell'amplificatore di regolazione dello zero, dovuta

⁽¹⁷⁾ Goldberg, E.A., "Stabilization of wide-band direct-current amplifiers for zero and gain", *RCA Review*, pp. 297-300, June 1950.

Amplificatore di
regolazione dello zero
Amplificatore principale

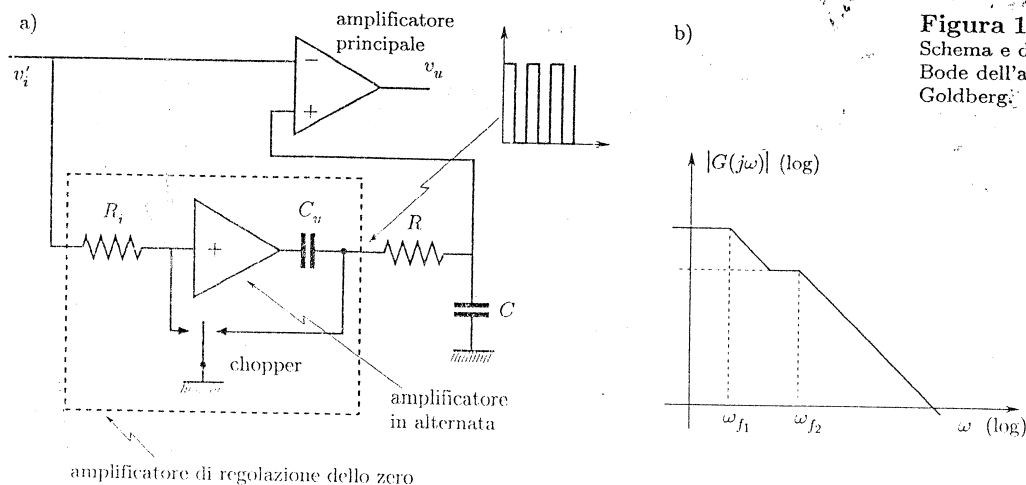


Figura 10.93
Schema e diagramma di Bode dell'amplificatore Goldberg.

al filtro passa basso, e la pulsazione di taglio dell'amplificatore principale. A monte del chopper d'ingresso dell'amplificatore di regolazione dello zero in genere è presente un filtro antialiasing.

In Fig. 10.94 è rappresentato lo schema degli amplificatori operazionali a chopper realizzati con tecnologia CMOS, come il TLC 2652 e l'AD8571 precedentemente menzionati. Tale schema fu descritto per la prima volta da Coln⁽¹⁸⁾. Contrariamente all'amplificatore Goldberg esso ha l'ingresso differenziale con possibilità di modo comune ed è pertanto del tutto simile, come funzionalità, ai normali amplificatori operazionali di impiego generale. Anch'esso è composto di un amplificatore principale e un amplificatore di regolazione dello zero. Entrambi gli amplificatori hanno un secondo stadio di ingresso, anch'esso differenziale, per la compensazione dei fuori zero, le cui tensioni di ingresso v_k' e v_k'' vengono amplificate come quelle principali v_i' e v_i'' . Di tale stadio nel primo amplificatore viene utilizzato l'ingresso non invertente v_k'' e nel secondo l'ingresso invertente v_k' , mentre l'altro ingresso in entrambi i casi viene collegato a massa.

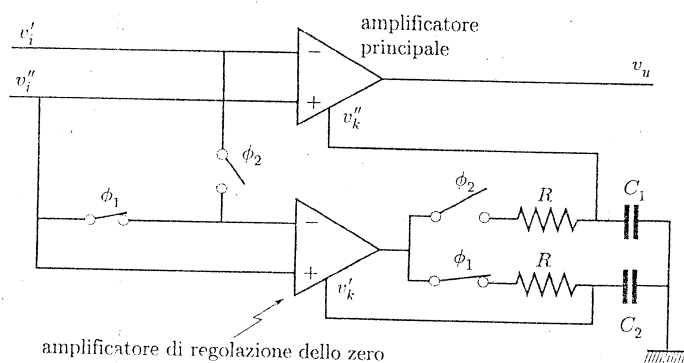


Figura 10.94
Schema di moderno amplificatore a chopper in tecnologia CMOS.

Gli interruttori elettronici ϕ_1 sono chiusi nella fase di regolazione dello zero e aperti nella fase di amplificazione, mentre gli interruttori ϕ_2 sono comandati in modo complementare. Si noti che, data la bassa corrente di polarizzazione dei mosfet, i condensatori C_1 e C_2 possono variare la loro tensione solo attraverso gli interruttori. In Fig. 10.95a è rappresentato lo schema a blocchi che si assume per ciascuno degli amplificatori: v_s è la tensione di fuori zero e A il guadagno, che nei due casi dell'amplificatore principale e dell'amplificatore di regolazione dello zero verranno indicati rispettivamente con v_{sm} , A_m e v_{sn} , A_n . Le tensioni di fuori zero si suppongono costanti. In Fig. 10.95b è rappresentato il collegamento dell'amplificatore di regolazione dello zero durante la fase di azzeramento: durante tale

⁽¹⁸⁾ Coln, M.C.W., "Chopper stabilization of MOS operational amplifiers using feedforward techniques", *IEEE Trans. JSSC*, vol. SC-16, pp. 745-748, 1981.

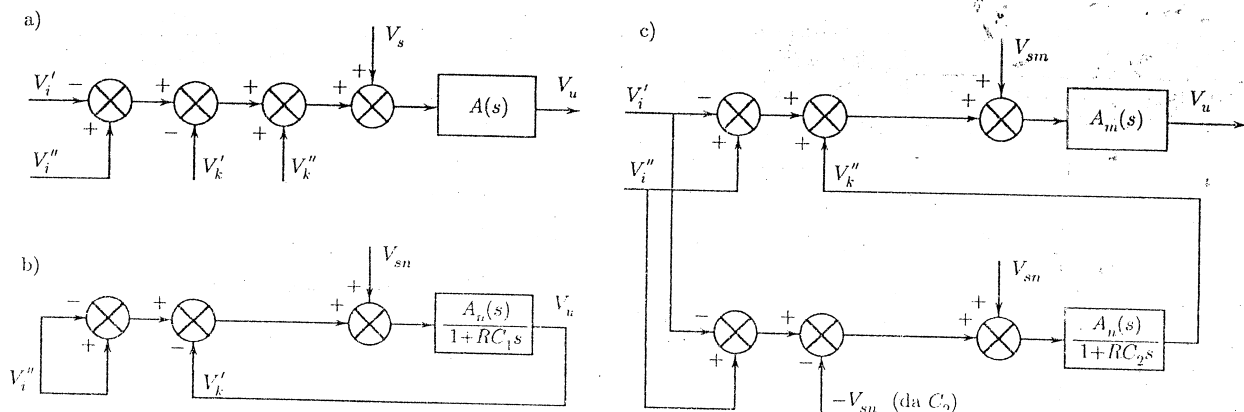


Figura 10.95

Illustrazione del funzionamento dell'amplificatore operazionale a chopper di Fig. 10.94.

fase il condensatore C_2 si porta gradualmente (in più cicli) alla tensione

$$-\frac{A_n(0)}{1+A_n(0)} v_{sn} \simeq -v_{sn},$$

in cui l'approssimazione è giustificata dal fatto che il guadagno A_n è molto elevato rispetto all'unità a frequenza zero. Durante tale fase l'amplificatore principale funziona normalmente, con la tensione di fuori zero compensata dalla tensione memorizzata in C_1 .

In Fig. 10.95c è rappresentato il collegamento relativo alla fase di amplificazione: la tensione di fuori zero dell'amplificatore di regolazione dello zero viene compensata con la tensione memorizzata in C_2 , mentre quella dell'amplificatore principale viene riportata all'ingresso divisa per A_n e, a regime, compensata con la tensione memorizzata in C_1 , che si mantiene durante la fase di amplificazione. Con un'opportuna scelta della costante di tempo RC_1 si ottiene un diagramma di Bode analogo a quello dell'amplificatore Goldberg, riportato in Fig. 10.93b.

C10.2. Realizzazione di funzioni di trasferimento generiche

Alla fine del Capitolo 2 (Esercizio C2.5.7) si sono mostrati i grafi di flusso di segnale di alcune realizzazioni di una funzione di trasferimento generica. Si mostrerà come i grafi di flusso relativi a sistemi elementari del primo e del secondo ordine si possano realizzare utilizzando amplificatori operazionali. La realizzazione parallela di una funzione di trasferimento generica si ottiene collegando in parallelo (e in serie nel caso di poli multipli) tali circuiti elementari.

Ci si riferisce al grafo di Fig. 10.96a, che riproduce una funzione di trasferimento generica del primo ordine. Infatti applicando la formula di Mason si ottiene

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{\beta s^{-1}}{1 - p s^{-1}} = \frac{\beta}{s - p}.$$

Assumendo che la costante β sia positiva e che p sia negativa (cioè che il sistema sia stabile) si può utilizzare il circuito di Fig. 10.96b.

Analogamente, il grafo di Fig. 10.96c riproduce una funzione di trasferimento generica del secondo ordine, con poli complessi $\sigma \pm j\omega$, come risulta da

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{\beta_1 s^{-1} + \beta_2 s^{-2}}{1 - 2\sigma s^{-1} + (\sigma^2 + \omega^2) s^{-2}} = \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} = \frac{\beta_1 s + \beta_2}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

e il corrispondente circuito, per σ negativa e le altre costanti tutte positive è riportato in Fig. 10.96d. I valori indicati per resistenze e capacità sono adimensionali: per ottenere valori veri ammissibili si può applicare uno stesso fattore a moltiplicare le resistenze e dividere le capacità (ad esempio si può supporre che i valori indicati siano rispettivamente M Ω e μ F). Valori negativi dei parametri si possono gestire inserendo opportuni invertitori di segno. Ad esempio se σ è positiva o β_1 negativa si collegano le relative resistenze al punto indicato con *.

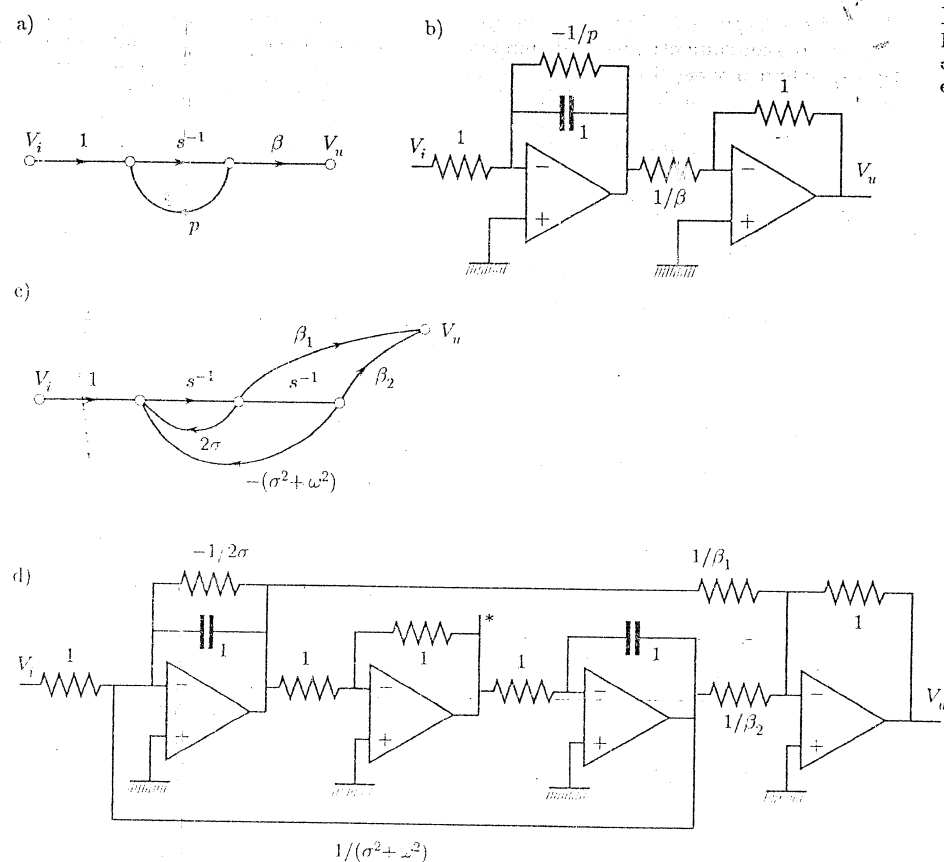


Figura 10.96
Realizzazione di funzioni
di trasferimento del primo
e del secondo ordine.

C10.3. Sistemi fluidodinamici

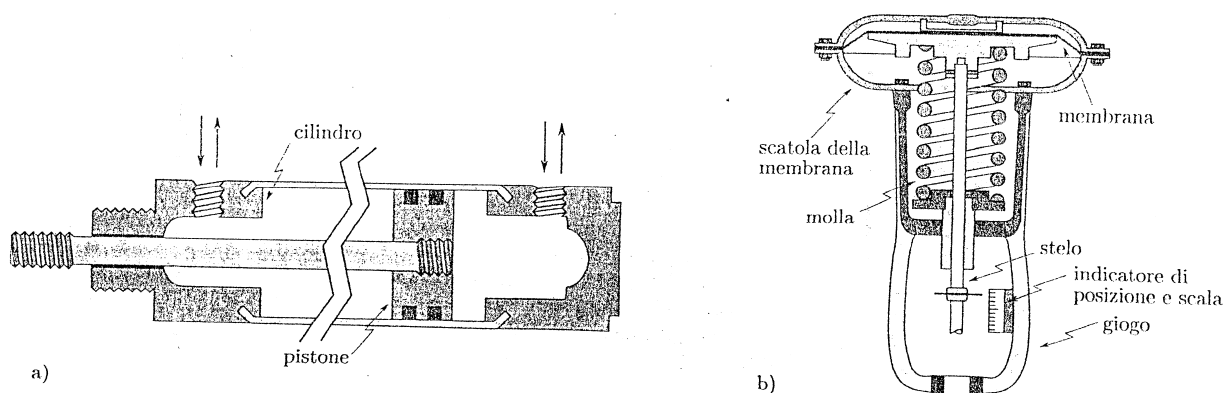
I *sistemi fluidodinamici* sono sistemi di controllo di posizione o di forza in cui l'amplificazione e l'attuazione di potenza sono basati sull'utilizzazione di un fluido in pressione. Questo fluido può essere aria compressa od olio in pressione, la cui portata viene regolata mediante un'elettrovalvola, comandata dal segnale elettrico proveniente da un regolatore PID locale o da un elaboratore centrale.

Sistemi fluidodinamici

Attuatori pneumatici

Tipici attuatori pneumatici sono il *cilindro pneumatico*, rappresentato in Fig. 10.97a e l'*attuatore pneumatico a membrana*, rappresentato in Fig. 10.97b.

Figura 10.97
Attuatori pneumatici.

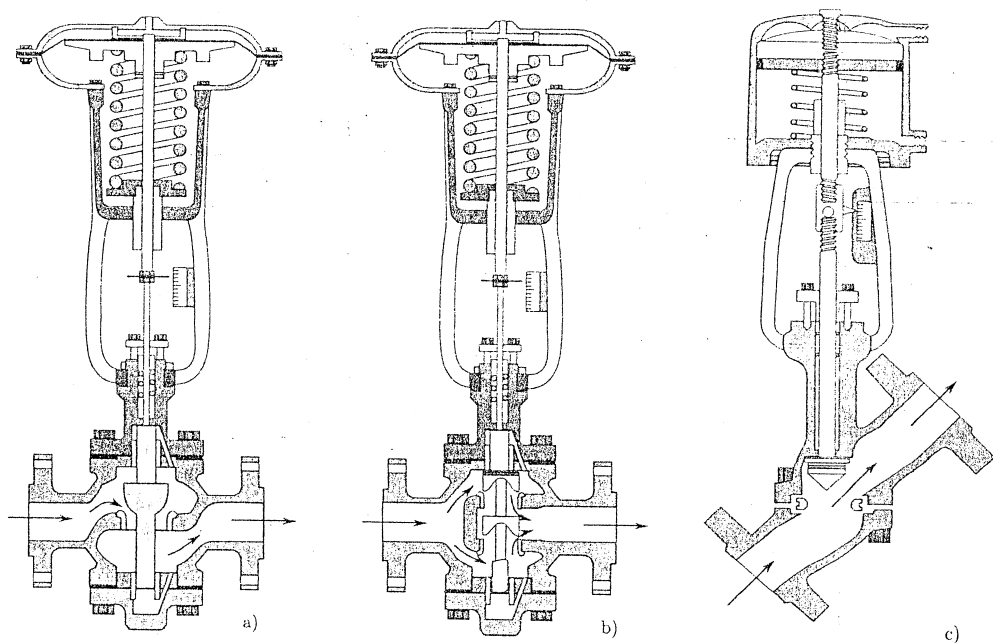


Il cilindro è largamente impiegato in macchine operatrici e confezionatrici in cui occorra eseguire posizionamenti lineari di numerosi organi con diverse corse. Infatti uno stesso tipo di cilindro viene fornito dal costruttore in una vasta gamma di lunghezze. Può essere a semplice effetto con molla di richiamo interna o a doppio effetto. Può essere comandato fra i due fine corsa, con elettrovalvole a solenoide o posizionato con continuità, con elettrovalvole proporzionali. In questo ultimo caso lo stelo è cavo nella parte interna per far posto a un elemento tubolare a chiusura stagna, avvitato dall'esterno all'estremità libera del cilindro e contenente un potenziometro lineare il cui cursore è azionato attraverso un piccolo magnete situato nel pistone.

L'attuatore a membrana viene impiegato per azionare le valvole nei grandi impianti chimici e petrolchimici: l'aria compressa proveniente da un'elettrovalvola agisce su una membrana, di area tanto maggiore quanto più elevata è la forza di azionamento che si vuole ottenere dall'attuatore: la membrana è a contatto con un disco metallico, fissato ad uno stelo il cui movimento è contrastato da una molla, che è progettata per ottenere la completa escursione al variare della pressione nel campo che normalmente si adotta in tale applicazione (3-15 psi). La linearità e la precisione del dispositivo come attuatore pressione-spostamento vengono ovviamente influenzate dalla variabilità del carico e dagli attriti che esso deve vincere, fattori determinanti per la scelta dell'entità delle forze in gioco e quindi per il calcolo dell'area della membrana.

Figura 10.98

Valvole ad azionamento pneumatico per la regolazione di portata di fluidi.



In Fig. 10.98a e in Fig. 10.98b sono rappresentate due tipiche valvole per la regolazione di portate di fluidi comandate con attuatori a membrana, la prima a sede singola, cioè con un unico otturatore, la seconda a doppia sede, cioè con due otturatori. La disposizione a doppia sede presenta il vantaggio di compensare le forze sullo stelo dovute alla caduta di pressione che inevitabilmente si verifica entro la valvola: una regolazione della portata, infatti, per essere efficace e consentire un'ampia variabilità in più e in meno, deve essere associata ad una perdita di carico nella valvola. In condizioni nominali tale perdita di carico viene scelta di circa il 30% della perdita di carico totale relativa alla condotta in cui la valvola è inserita. In Fig. 10.98c è rappresentata una valvola munita di *attuatore a pistone*, anziché a membrana, impiegato nei casi in cui la membrana risulterebbe di diametro troppo piccolo rispetto alla corsa. Sia gli attuatori a membrana sia quelli a pistone possono essere anche a doppio effetto: in questo caso occorrono due linee pneumatiche per l'azionamento e la funzione della molla è quella di richiamare in una delle posizioni estreme lo stelo quando il regolatore automatico è disinserito.

In Fig. 10.99a è schematizzata una valvola a solenoide per il comando a due posizioni di attuatori pneumatici a semplice effetto. La corrente elettrica nel solenoide produce l'attrazione del pistone (plunger) che, aprendo una valvola a sede conica, consente il passaggio dell'aria compressa da *P* ad *A*. Quando il solenoide non è alimentato, il condotto *A* è invece collegato al condotto di ricircolo *R*. In Fig. 10.99b è rappresentata una valvola a bassa inerzia (poppet valve), strutturalmente analoga a un relè, adatta per il controllo PWM.

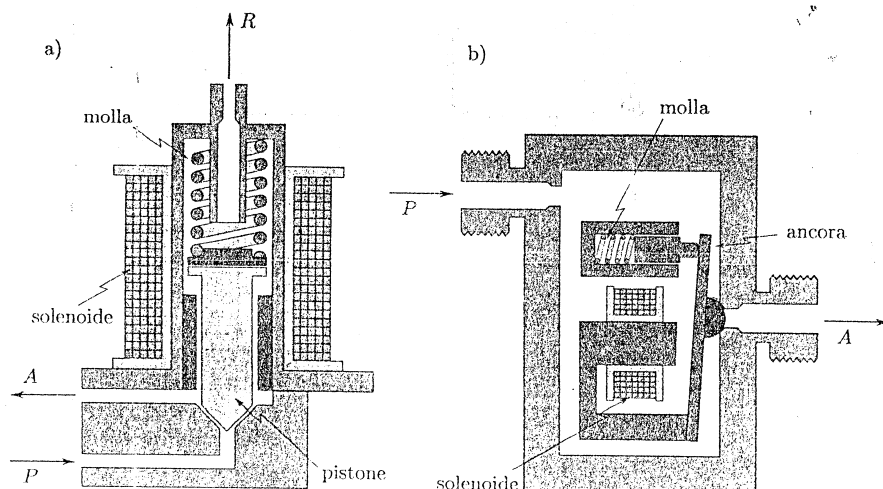


Figura 10.99
Valvola a solenoide normale e valvola a solenoide a bassa inerzia.

In Fig. 10.100 è rappresentata un'elettrovalvola pneumatica proporzionale a semplice effetto. La parte di circuito contenuta entro il rettangolo delimitato a tratto costituisce l'elettrovalvola vera e propria. L'azione proporzionale si ottiene mediante la parzialeizzazione, che equivale ad una variazione continua della sezione. Il controllo continuo della pressione è reso possibile dalla comprimibilità del fluido, che produce un'azione filtrante. Il segnale di retroazione è fornito da un sensore a semiconduttore contenuto entro la valvola stessa, ma può essere commutato su un trasduttore di posizione montato sull'attuatore a cilindro o a membrana. L'elettrovalvola a doppio effetto si ottiene con altre due valvole a solenoide a bassa inerzia comandate in modo incrociato insieme alle due già presenti.

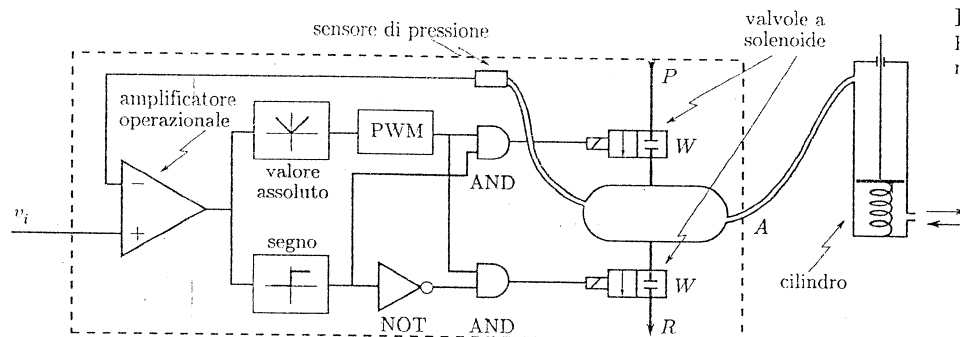


Figura 10.100
Elettrovalvola proporzionale a semplice effetto.

◆ Attuatori idraulici

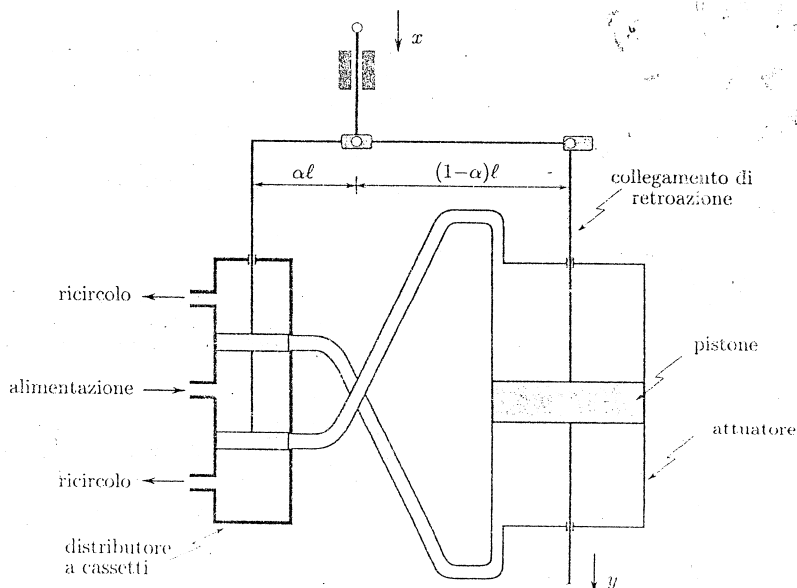
I sistemi pneumatici appena passati in rassegna si impiegano per realizzare azionamenti semplici e di basso costo per macchine operatrici o impianti complessi in cui il numero degli attuatori giustifichi un impianto di produzione e distribuzione di aria compressa. I sistemi idraulici, pur essendo anch'essi basati sull'utilizzazione di un fluido in pressione, hanno caratteristiche e impieghi molto diversi: si usano infatti in controlli di posizione in cui siano richieste una grande potenza, una scarsa sensibilità ai carichi e un'elevata precisione, come quelli impiegati nelle macchine utensili automatiche. In tale impiego si preferiscono spesso ai motori elettrici perché, essendo più facilmente realizzabili come attuatori lineari (non rotativi) in grado di esercitare forze notevoli direttamente sulle parti da posizionare (tavole e slitte), non presentano organi in moto veloce e riduttori ad ingranaggi, fonti di vibrazione spesso inaccettabili in lavorazioni di precisione.

Gli attuatori idraulici sono inoltre impiegati anche in posizionatori non in retroazione di grande potenza (scavatrici, bulldozer, carrelli per il sollevamento e il trasporto), in cui presentano una grande semplicità costruttiva (una valvola e un cilindro) e una maggiore compattezza e robustezza rispetto ai motori elettrici.

Lo schema di principio di un servomeccanismo di posizione idraulico è rappresentato in Fig. 10.101. Il fluido, in genere olio sintetico che può essere considerato incompressibile, proviene a pressione P_A da un'apposita centrale di alimentazione, dove viene ricondotto

Figura 10.101

Schema di principio di un servomeccanismo di posizione idraulico.



dopo l'utilizzazione. Il sistema comprende un *distributore a cassette* o *distributore a quattro vie* o *valvola pilota* e un *attuatore a pistone*. Uno spostamento dello stelo della valvola pilota rispetto alla posizione centrale (quella rappresentata in figura) comporta il collegamento di una delle due camere del cilindro all'alimentazione e dell'altra allo scarico, quindi il moto del pistone; uno spostamento in senso opposto produce il moto in senso opposto. L'equilibrio si raggiunge quando lo stelo della valvola è nella posizione centrale. Il sistema è evidentemente di tipo 1. Operando il collegamento di retroazione indicato in figura si realizza un cinematisimo con fulcro virtuale in A. Vale pertanto la relazione

$$y = \frac{1}{\alpha} x.$$

Poiché la forza necessaria per spostare lo stelo della valvola è molto piccola, il complesso costituisce un servomeccanismo di posizione con grande amplificazione di forza.

La pressione di alimentazione è dell'ordine di qualche decina di Kg/cm² (normalmente da 50 a 100 Kg/cm²). In alcuni sistemi di controllo in cui è indispensabile far uso di attuatori di modesto ingombro e peso, come quelli delle timonerie degli aerei, si impiegano alimentazioni a pressioni più elevate (standard è la pressione di 3000 psi, cioè 211 Kg/cm²). Le disposizioni costruttive possono subire sensibili variazioni rispetto allo schema di principio di Fig. 10.101, specie per ciò che riguarda il cinematisimo di retroazione.

Il distributore a cassette non è l'unico organo amplificatore impiegato nei sistemi di controllo idraulici. Per piccole potenze o come primo stadio di un amplificatore a due stadi si può impiegare anche l'*amplificatore idraulico a getto*, rappresentato schematicamente in Fig. 10.102. L'olio, che fuoriesce a velocità elevata da un ugello, va a colpire due aperture su una parete, collegate alle camere del cilindro: qualora il getto sia in posizione centrale, non si ha alcuna differenza di pressione, mentre, se il getto viene spostato, una delle aperture viene esposta maggiormente e si crea una differenza di pressione, che produce il movimento del pistone. Una pompa recupera l'olio dal contenitore in cui è situato l'ugello.

L'amplificatore a getto presenta, rispetto al distributore a cassette, una maggiore semplicità costruttiva e una minore criticità di lavorazione, nonché una più elevata affidabilità per la maggiore immunità da intasamenti. Gli inconvenienti, che ne limitano la diffusione, sono quelli di una minore compattezza, di un maggior consumo di olio (quindi minor rendimento) e di una minore adattabilità a pressioni di alimentazione variabili entro vasti campi.

Il distributore a cassette è un dispositivo che deve essere costruito con molta precisione e tolleranze molto strette, per ottenere un perfetto bilanciamento delle forze assiali e per evitare che si generino forze radiali che potrebbero accrescere in misura notevole l'attrito fra le parti in moto relativo.

Una prima caratteristica costruttiva è il *ricoprimento delle luci*: un ricoprimento nullo (Fig. 10.103a) non è praticamente attuabile per la presenza delle tolleranze di lavorazione e dell'usura, per cui occorre operare una scelta fra ricoprimento positivo (Fig. 10.103b), che presenta l'inconveniente di introdurre una soglia o zona di insensibilità, e ricoprimento

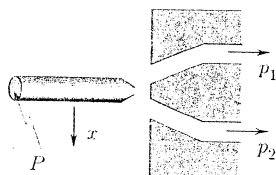


Figura 10.102

Amplificatore idraulico a getto.

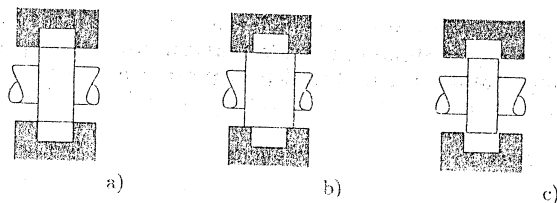


Figura 10.103
Ricoprimento delle luci in
un distributore a cassette.

negativo (Fig. 10.103c), che comporta l'assorbimento di una portata di olio non nulla anche in condizione di equilibrio. Usualmente nei servomeccanismi di posizione idraulici, in cui la linearità è indispensabile per avere un comportamento stabile, si ricorre a quest'ultima disposizione.

Un secondo punto del progetto del distributore riguarda le forze assiali. In condizioni di equilibrio, quando la portata verso l'attuatore è nulla, le forze agenti sui pistoncini si equilibrano perfettamente per simmetria. Per contro quando, in seguito allo spostamento assiale dello stelo, si stabilisce una condizione in cui il distributore è attraversato da portata non nulla, si genera una distribuzione interna di pressione non simmetrica che produce una forza assiale, normalmente di richiamo.

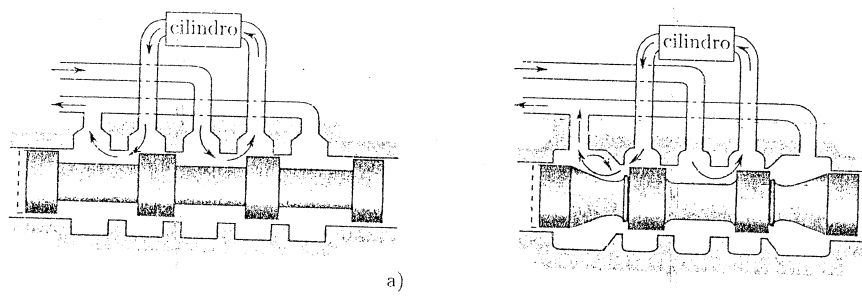


Figura 10.104
Tipi di distributori a cassette.

In Fig. 10.104a è rappresentato un distributore normale e in Fig. 10.104b un distributore progettato per la neutralizzazione della forza assiale: in realtà non è possibile l'eliminazione completa della forza assiale, bensì una notevole riduzione, all'incirca nel rapporto da 50 a 1, in corrispondenza dei valori massimi della forza stessa, che si manifestano per gli spostamenti massimi dello stelo. Le forze radiali si originano da squilibri di pressione dovuti al flusso di dispersione del fluido fra la parete del cilindro e il pistoncino, cioè in un canale di flusso che, per le inevitabili irregolarità di lavorazione, non può essere perfettamente cilindrico: se il pistoncino presenta una conicità nel senso di diffondere il fluido, si può generare una forza radiale che tende ad aumentare una sua eventuale eccentricità, provocandone l'impuntamento. Un rimedio a questo grave inconveniente è quello di lavorare i pistoncini in modo che siano lievemente conici in senso opposto, così da generare una forza assiale autocentrante, oppure di munirli di piccole scanalature che tendano ad equilibrare la pressione lungo la circonferenza.

In Fig. 10.105 sono rappresentati andamenti tipici delle caratteristiche statiche di un distributore a cassette: con P_A si indica la pressione di alimentazione, con p_u la pressione

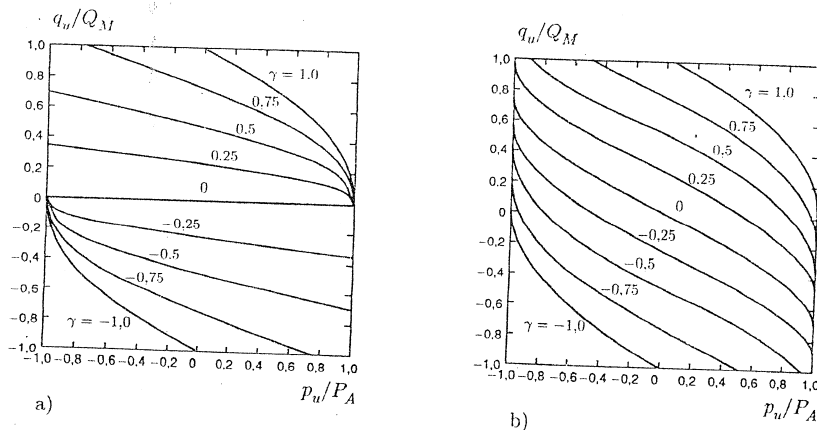
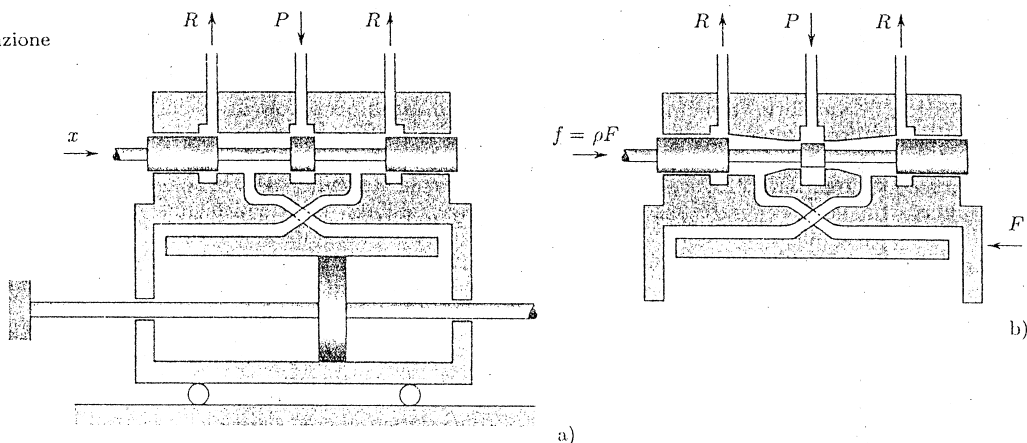


Figura 10.105
Caratteristiche di distributori a cassette.

differenziale in uscita (cioè quella utilizzata per il movimento dell'attuatore), con γ il grado di apertura della valvola, pari al rapporto fra lo spostamento dello stelo e lo spostamento massimo, con q_u la portata in uscita, con Q_M la portata massima. La Fig. 10.105a si riferisce al caso teorico di una valvola con ricoprimento nullo e la Fig. 10.105b al caso di una valvola con un notevole ricoprimento negativo: si può constatare come la presenza del ricoprimento negativo tenda a linearizzare le caratteristiche.

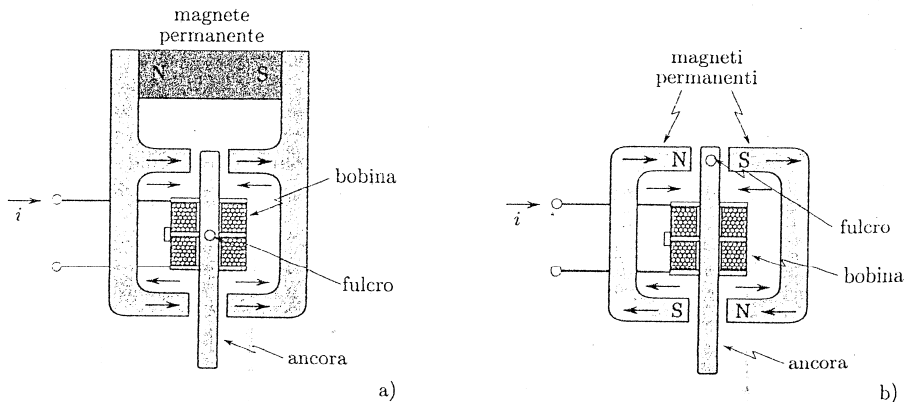
Figura 10.106
Inseguitore di posizione
idraulico.



La disposizione costruttiva di Fig. 10.104a non è la sola possibile per il distributore a cassette. Un'altra disposizione è rappresentata in Fig. 10.106a come particolare di un inseguitore di posizione idraulico: lo spostamento in ingresso x viene ripetuto dalla slitta, cui è solidale il gruppo distributore-cilindro, con possibilità di vincere grossi carichi senza sforzo in ingresso, dato che le forze sviluppate sui pistoncini del distributore si equilibrano perfettamente anche in presenza di differenza fra le pressioni delle due camere. In alcuni casi è preferibile avere una parziale *riflessione di forza*, cioè è preferibile che una frazione ρ della forza F esercitata sulla slitta si rifletta sullo stelo della valvola come forza di reazione f (esempio tipico è il servosterzo idraulico). Ciò si può ottenere utilizzando un distributore in cui la compensazione delle forze sui pistoncini sia solo parziale, come quello rappresentato in Fig. 10.106b: agendo sul rapporto fra le aree dei pistoncini si può variare a piacere il rapporto di riflessione di forza ρ .

I controlli di posizione più raffinati, come quelli utilizzati nelle macchine utensili automatiche e a controllo numerico, utilizzano spesso attuatori idraulici uniti a trasduttori di misura elettrici ed elaboratori elettronici: si pone pertanto il problema di convertire il segnale da elettrico a idraulico. I componenti che realizzano tale conversione si dicono *convertitori elettroidraulici* o *valvole elettroidrauliche*. Questi sono organi di elevata precisione, reperibili in commercio in un limitato numero di modelli messi a punto dalle maggiori case costruttrici di componenti per servosistemi fluidodinamici.

Figura 10.107
Convertitori corrente-coppia.



Il segnale elettrico di ingresso, consistente in una corrente in un avvolgimento o in una differenza di correnti in due avvolgimenti disposti in controfase, viene inviato ad un convertitore corrente-coppia (detto *motore di coppia*), realizzato comunemente secondo le disposizioni costruttive di Fig. 10.107: un'ancora mobile per un piccolo angolo in senso

rotatorio è disposta entro un circuito magnetico in cui è inserito un magnete permanente e dal quale è separata da quattro traferri. Il magnete permanente genera il flusso il cui andamento è indicato dalle frecce poste entro il circuito, mentre un'eventuale corrente nelle bobine, dando luogo al flusso il cui andamento è indicato dalle altre frecce, tende ad indebolire il flusso in due traferri e ad aumentarlo in altri due, in modo che si genera una coppia.

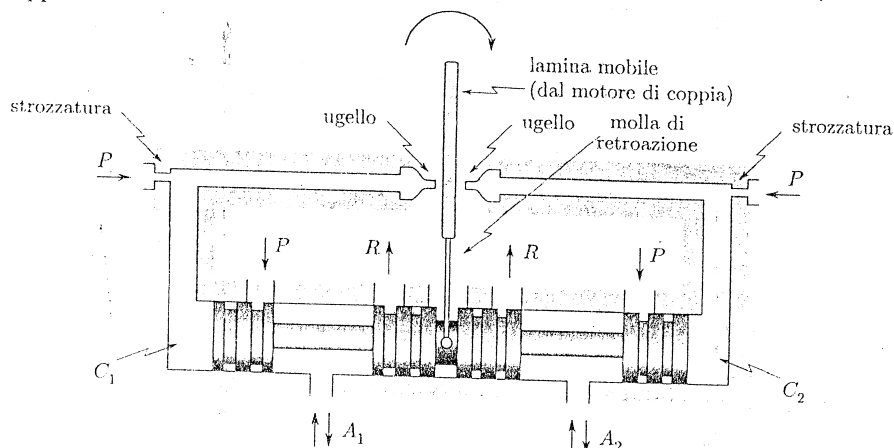


Figura 10.108
Una valvola elettroidraulica.

Le valvole elettroidrauliche comprendono, oltre al motore di coppia, almeno due stadi di amplificazione fluidica: il primo è realizzato con il sistema ugello-lamina (flapper-nozzle) già illustrato in Fig. 1.51b, il secondo è un distributore a cassette. Lo schema di una tipica valvola elettroidraulica è rappresentato in Fig. 10.108: una rotazione in senso orario della lamina mobile azionata dal motore di coppia produce una sovrappressione nella camera C_1 e una depressione nella camera C_2 , quindi lo spostamento verso destra del distributore, flusso di olio in A_2 e recupero in A_1 . Il sistema sarebbe di tipo 1 (trascurando per semplicità le forze assiali), ma viene reso proporzionale da una piccola molla laminare che produce una retroazione sul motore di coppia. Esistono valvole elettroidrauliche più complesse, in cui gli stadi di amplificazione sono tre, con un ulteriore distributore a cassette di dimensioni maggiori, e la linearizzazione avviene per retroazione sull'amplificatore elettronico di ingresso di un segnale elettrico fornito da un trasformatore differenziale che misura lo spostamento del distributore a cassette finale.

Spesso nelle valvole elettroidrauliche più semplici si sovrappone al segnale di ingresso un'oscillazione sinusoidale o triangolare a frequenza relativamente elevata, ad esempio 200 Hz. In tal modo si rende meno critica la costruzione della valvola, eliminando il rischio di impuntamento e linearizzandone le caratteristiche: anche una valvola con ricoprimento positivo può essere linearizzata con un'opportuna vibrazione imposta.

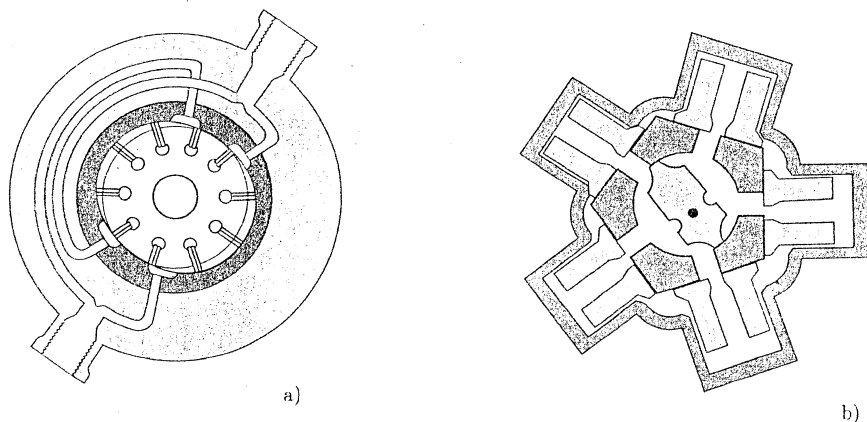
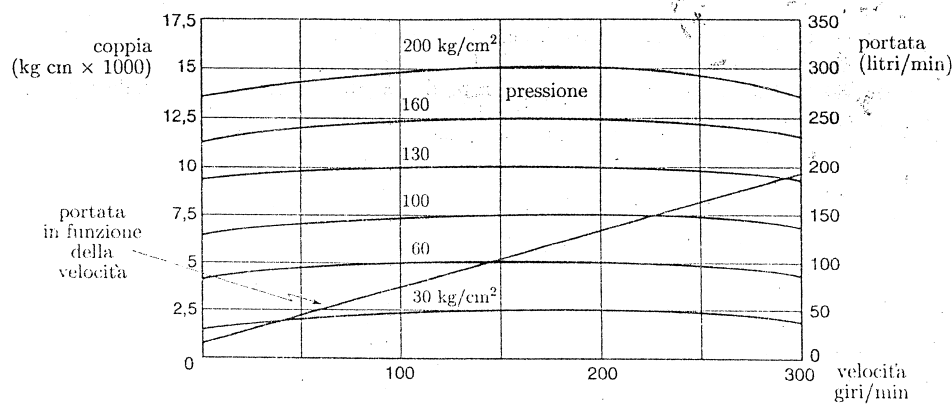


Figura 10.109
Motori oleodinamici rotativi.

Per ciò che riguarda gli attuatori, oltre al cilindro con pistone, che costituisce indiscutibilmente il più semplice motore lineare, esistono interessanti motori rotativi che, abbinati alle elettrovalvole, consentono di ottenere variazioni di velocità entro ampi limiti. Questi motori in genere sono sistemi volumetrici reversibili, cioè in grado di funzionare indifferentemente da motore o da pompa.

Tipici motori idraulici sono il motore a palette rientranti, rappresentato in Fig. 10.109a, e

Figura 10.110
Caratteristiche tipiche di un motore oleodinamico a cilindri radiali.



il motore a cilindri radiali, rappresentato in Fig. 10.109b. Il motore a palette è costituito da un corpo cilindrico munito di palette rientranti e rotante entro un vano non perfettamente cilindrico, ma conformato in modo da dar luogo ad una o più camere di espansione (due nel caso di Fig. 10.109a), ai cui estremi pervengono radialmente le condotte di alimentazione e scarico: una differenza di pressione fra tali condotte produce una forza sulle palette, che provoca la rotazione. Il motore a cilindri radiali è costituito da un eccentrico che provoca l'oscillazione, rispetto all'albero motore, di un corpo di forma pentagonale (nella versione a cinque cilindri mostrata in figura), il quale ha la funzione di un albero a gemiti, cioè di convertire in moto rotatorio la spinta esercitata dai cinque pistoncini. L'eccentrico, in cui sono ricavati opportuni passaggi per l'olio, funge anche da distributore rotante. Nell'albero motore si hanno due condotte longitudinali, una per l'alimentazione e l'altra per il ricircolo, che sfociano da una parte nel distributore rotante e dall'altra in corrispondenza di due diverse camere, non mostrate in figura, poste in comunicazione con le condotte di alimentazione e di scarico. Il motore a cilindri radiali risulta di maggior complessità di quello a palette, ma presenta un rendimento più elevato. In Fig. 10.110 è mostrato l'andamento tipico delle caratteristiche meccaniche per vari valori della pressione di alimentazione, insieme al grafico della portata assorbita in funzione della velocità: si noti che la coppia sviluppata resta praticamente costante al variare della velocità, a parità di differenza di pressione fra alimentazione e scarico.

C10.4. Esercizi

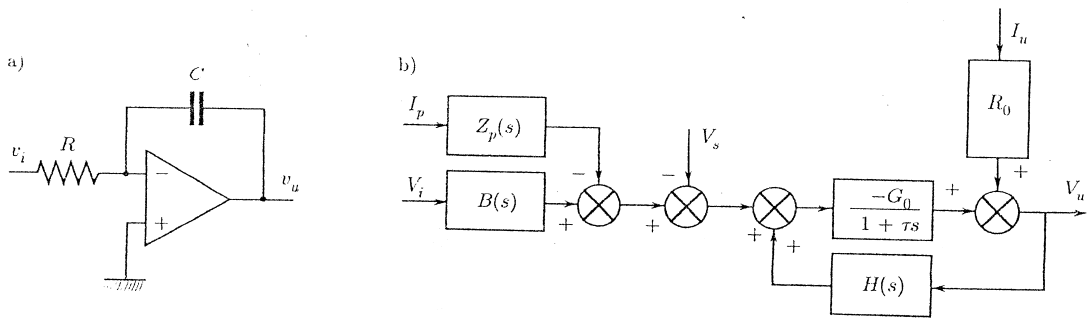
- C10.4.1** Si consideri l'integratore di Fig. 10.111a, realizzato con un amplificatore operazionale avente costante di tempo τ .
1. Determinare l'effetto all'uscita del fuori zero di tensione.
 2. Determinare l'effetto all'uscita della corrente di polarizzazione.
 3. Determinare l'espressione dell'impedenza di uscita.

Soluzione

1. Si consideri lo schema a blocchi della Fig. 10.4b, con l'amplificatore operazionale reale della Fig. 10.92b, ottenendo così lo schema a blocchi complessivo riportato in Fig. 10.111b. Le funzioni di trasferimento in esso indicate sono

$$B(s) = \frac{1}{1 + Ts}, \quad T = RC,$$

Figura 10.111
Integratore e relativo schema a blocchi.



$$H(s) = \frac{Ts}{1+Ts}, \quad T = RC,$$

$$Z_p(s) = \frac{R/(Cs)}{R + 1/(Cs)} = \frac{R}{1+Ts}.$$

Dallo schema a blocchi si ricava facilmente l'effetto del fuori zero di tensione:

$$V_{u,1}(s) = \frac{G_0(1+Ts)}{(1+\tau s)(1+Ts) + G_0Ts} V_s(s)$$

$$= \frac{1+Ts}{Ts + (1/G_0)(1+\tau s)(1+Ts)} V_s(s).$$

Considerando che è $G_0 \gg 1$, la precedente relazione si può approssimare con la

$$V_{u,1}(s) \simeq \left(1 + \frac{1}{Ts}\right) V_s(s),$$

da cui risulta che l'effetto della tensione di fuori zero sull'uscita è dato da un termine proporzionale (di regola

trascurabile) e uno integrale, che può dar luogo ad errori notevoli in impieghi a lungo termine.

2. Si utilizza ancora lo schema a blocchi di Fig. 10.111b. Risulta

$$V_{u,2}(s) = \frac{1+Ts}{Ts + (1/G_0)(1+\tau s)(1+Ts)} \frac{R}{1+Ts} I_p(s)$$

$$\simeq \frac{1+Ts}{Ts} \frac{R}{1+Ts} I_p(s) = \frac{R}{Ts} I_p(s);$$

si noti che è ancora presente un effetto integrale, che può causare un errore notevole a lungo termine.

3. L'impedenza di uscita è

$$Z_u(s) = \frac{R_0(1+\tau s)(1+Ts)}{(1+\tau s)(1+Ts) + G_0Ts}.$$

Si noti che $Z_u(j\omega)$ coincide con R_0 per pulsazioni molto basse rispetto a $1/G_0T$ e che in una vasta gamma di frequenze risulta $|Z_u(j\omega)| \ll R_0$ per la presenza del termine G_0Ts a denominatore.

C10.4.2 Con riferimento allo schema di Fig. 10.4b, in cui per l'amplificatore operazionale si assume il circuito equivalente di Fig. 10.92b, si determini la funzione di trasferimento fra v_i e v_u in presenza di un'impedenza di carico Z_c fra l'uscita e la terra.

Soluzione Lo schema a blocchi di Fig. 10.4b viene modificato, nella sua parte terminale, come è indicato in Fig. 10.112. Con riferimento a tale schema, la funzione di trasferimento richiesta si determina immediatamente. Risulta

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{-G(s) B_1(s)}{1 + G(s) H(s) + \frac{R_0}{Z_c(s)}}$$

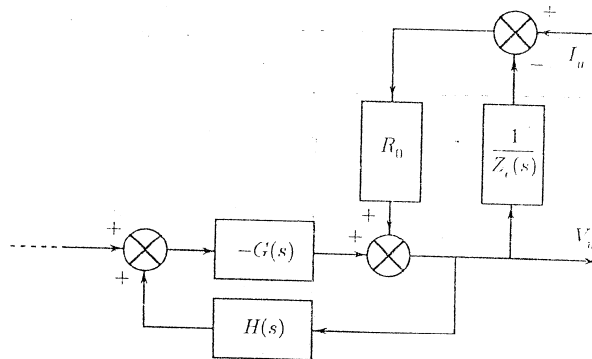


Figura 10.112 Modifica dello schema a blocchi della Fig. 10.4b per tener conto di un'impedenza di carico Z_c .

Appendice A

Tabella di trasformate di Laplace

Per eseguire le operazioni di trasformazione e antitrasformazione secondo Laplace sono di notevole utilità tabelle che riportino le trasformate più importanti. Una di tali tabelle è riprodotta in questa appendice. La funzione $\arg(\sigma + j\omega)$ che in essa spesso ricorre è definita dalla relazione

$$\arg(\sigma + j\omega) := \begin{cases} \arctan \frac{\omega}{\sigma} & \text{per } \sigma \geq 0, \\ \pi + \arctan \frac{\omega}{\sigma} & \text{per } \sigma < 0, \omega \geq 0, \\ -\pi + \arctan \frac{\omega}{\sigma} & \text{per } \sigma < 0, \omega < 0; \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

se la funzione viene programmata su un calcolatore, per non avere divisioni per zero (quando è $\sigma=0$), conviene usare l'espressione equivalente

$$\arg(\sigma + j\omega) := \begin{cases} \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} & \text{per } \sigma \geq 0, \\ \pi - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} & \text{per } \sigma < 0, \omega \geq 0, \\ -\pi - \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} & \text{per } \sigma < 0, \omega < 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

	$F(s)$	$f(t)$
1.	1	$\delta(t)$ (impulso unitario in $t = 0$)
2.	$\frac{1}{s}$	$u(t)$ (gradino unitario in $t = 0$)
3.	$\frac{1}{s^2}$	$tu(t)$ (funzione rampa)

	$F(s)$	$f(t)$
4.	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
5.	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$u(t-a)$ (gradino unitario in $t=a$)
6.	$\frac{1}{s} (1 - e^{-as})$	$u(t) - u(t-a)$ (impulso rettangolare)
7.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
7a.	$\frac{1}{1+\tau s}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
8.	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
8a.	$\frac{1}{(1+\tau s)^n}$	$\frac{1}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\tau}}$
9.	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$
9a.	$\frac{1}{s(1+\tau s)}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$
10.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
10a.	$\frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}})$
11.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} ((\alpha-a)e^{-at} - (\alpha-b)e^{-bt})$
11a.	$\frac{1+Ts}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\left(1 - \frac{T}{\tau_1}\right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(1 - \frac{T}{\tau_2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$
12.	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left(1 - \frac{b}{b-a} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt} \right)$
12a.	$\frac{1}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
13.	$\frac{s+\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left(\alpha - \frac{b(\alpha-a)}{b-a} e^{-at} - \frac{a(\alpha-b)}{a-b} e^{-bt} \right)$
13a.	$\frac{1+Ts}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2 - T}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
14.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{1}{(b-a)(c-a)} e^{-at} + \frac{1}{(c-b)(a-b)} e^{-bt} +$ $\frac{1}{(a-c)(b-c)} e^{-ct}$

	$F(s)$	$f(t)$
14a.	$\frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$\frac{\tau_1}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_3}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
15.	$\frac{s + \alpha}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{\alpha - a}{(b - a)(c - a)} e^{-at} + \frac{\alpha - b}{(c - b)(a - b)} e^{-bt} + \frac{\alpha - c}{(a - c)(b - c)} e^{-ct}$
15a.	$\frac{1 + Ts}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$\frac{\tau_1 - T}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - T}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_3 - T}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
16.	$\frac{1}{s(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{1}{abc} - \frac{1}{a(b - a)(c - a)} e^{-at} - \frac{1}{b(c - b)(a - b)} e^{-bt} - \frac{1}{c(a - c)(b - c)} e^{-ct}$
16a.	$\frac{1}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$1 - \frac{\tau_1^2}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \frac{\tau_3^2}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
17.	$\frac{s + \alpha}{s(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{\alpha}{abc} - \frac{\alpha - a}{a(b - a)(c - a)} e^{-at} - \frac{\alpha - b}{b(c - b)(a - b)} e^{-bt} - \frac{\alpha - c}{c(a - c)(b - c)} e^{-ct}$
17a.	$\frac{1 + Ts}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$1 - \frac{\tau_1(\tau_1 - T)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2(\tau_2 - T)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \frac{\tau_3(\tau_3 - T)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
18.	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
19.	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
20.	$\frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t \pm \varphi)$
21.	$\frac{s \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t \pm \varphi)$
22.	$\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha + j\omega)$
22a.	$\frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{1 + \omega_n^2 T^2} \sin(\omega_n t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 + j\omega_n T)$

	$F(s)$	$f(t)$
23.	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})$
24.	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
25.	$\frac{s + \alpha}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha + j\omega)$
25a.	$\frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s(s^2 + \omega_n^2)}$	$1 - \sqrt{1 + \omega_n^2 T^2} \cos(\omega_n t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 + j\omega_n T)$
26.	$\frac{1}{(s+a)(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{a^2 + \omega^2} e^{-at} + \frac{1}{\omega \sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha + j\omega)$
26a.	$\frac{\omega_n^2}{(1 + \tau s)(s^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n^2 \tau}{1 + \omega_n^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \omega_n^2 \tau^2}} \sin(\omega_n t - \varphi),$ $\varphi := \arg(1 + j\omega_n \tau)$
27.	$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{-at} \sin bt$
27a.	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t$
28.	$\frac{s + \alpha}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{\sqrt{(\alpha - a)^2 + b^2}}{b} e^{-at} \sin(bt + \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha - a + jb)$
28a.	$\frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1 - \delta^2})$
29.	$\frac{1}{s((s+a)^2 + b^2)}$	$\frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{1}{b\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-at} \sin(bt + \varphi),$ $\varphi := \arg(a + jb)^{(1)}$
29a.	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2})$

⁽¹⁾ Nel dedurre la relazione (29.) e altre successive si è fatto uso delle identità

$$-\arg(-\sigma + j\omega) = \arg(\sigma + j\omega) \pm \pi,$$

$$\sin(\vartheta \pm \pi) = -\sin \vartheta.$$

	$F(s)$	$f(t)$
30.	$\frac{s + \alpha}{s((s + a)^2 + b^2)}$	$\frac{\alpha}{a^2 + b^2} - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{(\alpha - a)^2 + b^2}{a^2 + b^2}} e^{-at} \sin(bt + \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha - a + jb) + \arg(a + jb)$
30a.	$\frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \sqrt{\frac{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \cdot$ $\sin(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1 - \delta^2}) +$ $\arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2})$
31.	$\frac{1}{(s + c)((s + a)^2 + b^2)}$	$\frac{1}{(c - a)^2 + b^2} e^{-ct} + \frac{1}{b\sqrt{(c - a)^2 + b^2}} e^{-at} \sin(bt + \varphi),$ $\varphi := \arg(c - a + jb)$
31a.	$\frac{\omega_n^2}{(1 + \tau s)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n^2 \tau}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \cdot$ $\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}} e^{-\delta\omega_n t} \cdot$ $\sin(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 - \delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau \sqrt{1 - \delta^2})$
32.	$\frac{1}{s(s + c)((s + a)^2 + b^2)}$	$\frac{1}{c(a^2 + b^2)} - \frac{1}{c((c - a)^2 + b^2)} e^{-ct} -$ $\frac{1}{b\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{(c - a)^2 + b^2}} e^{-at} \sin(bt + \varphi),$ $\varphi := \arg(a + jb) - \arg(c - a + jb)$
32a.	$\frac{\omega_n^2}{s(1 + \tau s)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \cdot$ $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}} e^{-\delta\omega_n t} \cdot$ $\sin(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2}) -$ $\arg(1 - \delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau \sqrt{1 - \delta^2})$
33.	$\frac{s + \alpha}{s(s + c)((s + a)^2 + b^2)}$	$\frac{\alpha}{c(a^2 + b^2)} + \frac{c - \alpha}{c((c - a)^2 + b^2)} e^{-ct} -$ $\frac{\sqrt{(\alpha - a)^2 + b^2}}{b\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{(c - a)^2 + b^2}} e^{-at} \sin(bt + \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha - a + jb) + \arg(a + jb) - \arg(c - a + jb)$

	$F(s)$	$f(t)$
33a.	$\frac{\omega_n^2(1+Ts)}{s(1+\tau s)(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 + \frac{\omega_n^2 \tau (T - \tau)}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$ $\sqrt{\frac{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}} e^{-\delta\omega_n t}$ $\sin(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1 - \delta^2}) +$ $\arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2}) -$ $\arg(1 - \delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau \sqrt{1 - \delta^2})$
34.	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 - e^{-at})$
34a.	$\frac{1}{s^2(1+\tau s)}$	$t - \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
35.	$\frac{s+\alpha}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(\alpha at + (a - \alpha)(1 - e^{-at}))$
35a.	$\frac{1+Ts}{s^2(1+\tau s)}$	$t + (T - \tau)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
36.	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1 - (1+at)e^{-at})$
36a.	$\frac{1}{s(1+\tau s)^2}$	$1 - \frac{\tau+t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
37.	$\frac{s+\alpha}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(\alpha + (a(a-\alpha)t - \alpha)e^{-at})$
37a.	$\frac{1+Ts}{s(1+\tau s)^2}$	$1 + \left(\frac{T-\tau}{\tau^2}t - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

Appendice B

Tabella di trasformate Z

funzione del tempo $f(t), t \geq 0$	trasformata di Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	trasformata Z $F(z) = \mathcal{Z}[f(t), T]$
$u(t) - u(t-a), \quad a < T$	$\frac{1 - e^{-as}}{s}$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{T^3}{6} \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2}{2} e^{-aT} \frac{z(z + e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^3}$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{z^2 - e^{-aT}(1+aT)z}{(z - e^{-aT})^2}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$

funzione del tempo $f(t), t \geq 0$	trasformata di Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	trasformata Z $F(z) = \mathcal{Z}[f(t), T]$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
$b e^{-bt} - a e^{-at}$	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(b-a)z^2 - (e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{(\sin \omega T)z}{z^2 - 2(\cos \omega T)z + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - (\cos \omega T)z}{z^2 - 2(\cos \omega T)z + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{e^{-aT}(\sin \omega T)z}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos \omega T)z + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - e^{-aT}(\cos \omega T)z}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos \omega T)z + e^{-2aT}}$

Appendice C

Tabella per la trasformata e antitrasformata Z nel caso di poli multipli

$$\begin{bmatrix} \frac{z}{z-p} \\ p \frac{z}{(z-p)^2} \\ p^2 \frac{z}{(z-p)^3} \\ p^3 \frac{z}{(z-p)^4} \\ p^4 \frac{z}{(z-p)^5} \\ p^5 \frac{z}{(z-p)^6} \\ p^6 \frac{z}{(z-p)^7} \\ p^7 \frac{z}{(z-p)^8} \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{z}{z^{-1}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 11/24 & -1/4 & 1/24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -5/12 & 7/24 & -1/12 & 1/120 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 137/360 & -5/16 & 17/144 & -1/48 & 1/720 & 0 \\ 0 & 1/7 & -7/20 & 29/90 & -7/48 & 5/144 & -1/240 & 1/5040 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^k \\ k p^k \\ k^2 p^k \\ k^3 p^k \\ k^4 p^k \\ k^5 p^k \\ k^6 p^k \\ k^7 p^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p^k \\ k p^k \\ k^2 p^k \\ k^3 p^k \\ k^4 p^k \\ k^5 p^k \\ k^6 p^k \\ k^7 p^k \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{z}{z^{-1}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 36 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 30 & 150 & 240 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 62 & 540 & 1560 & 1800 & 720 & 0 \\ 0 & 1 & 126 & 1806 & 8400 & 16800 & 15120 & 5040 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z}{z-p} \\ p \frac{z}{(z-p)^2} \\ p^2 \frac{z}{(z-p)^3} \\ p^3 \frac{z}{(z-p)^4} \\ p^4 \frac{z}{(z-p)^5} \\ p^5 \frac{z}{(z-p)^6} \\ p^6 \frac{z}{(z-p)^7} \\ p^7 \frac{z}{(z-p)^8} \end{bmatrix}$$

Appendice D

Le unità di misura

Poiché nell'ambito dei controlli automatici si considerano sistemi di varia natura fisica, si ritiene opportuno presentare una rapida rassegna delle unità di misura di più comune impiego.

Le specifiche di molte apparecchiature di controllo, specie quelle fluidiche, fanno riferimento ad unità del sistema inglese; è pertanto utile conoscere di tali unità il significato e i fattori di conversione alle unità di più comune impiego, cioè quelle del Sistema Internazionale (SI) e del sistema tecnico.

Il Sistema Internazionale (ex sistema MKS) si basa sulle tre unità fondamentali: metro per le misure di lunghezza (L), chilogrammo-massa per le misure di massa (M) e secondo per le misure di tempo (T), mentre il sistema tecnico assume il chilogrammo-forza come misura di forza (F).

D.1. Unità meccaniche

Grandezza	Dimensioni SI	Unità SI	Dimensioni sist. tecnico	Unità sist. tecnico
lunghezza	L	metro (m)	L	metro
massa	M	chilogrammo massa (kg)	$FL^{-1}T^2$	chilogrammo massa
tempo	T	secondo (s)	T	secondo
forza	MLT^{-2}	newton (N)	F	chilogrammo forza
velocità	LT^{-1}	metro/secondo	LT^{-1}	metro/secondo
accelerazione	LT^{-2}	metro/secondo ²	LT^{-2}	metro/secondo ²
velocità ang.	T^{-1}	secondo ⁻¹	T^{-1}	secondo ⁻¹
accel. ang.	T^{-2}	secondo ⁻²	T^{-2}	secondo ⁻²
potenza	ML^2T^{-3}	watt (W)	FLT^{-1}	kg m/s
lavoro, energia	ML^2T^{-2}	joule (J)	FL	kg m
pressione	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m ² o pascal (Pa)	FL^{-2}	kg/m ²

Le unità di forza e derivate del sistema tecnico sono diverse dalle corrispondenti unità del Sistema Internazionale; il fattore di conversione dalle prime alle seconde è l'accelerazione di gravità g :

$$\left. \begin{array}{l} \text{newton} \\ \text{watt} \\ \text{joule} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,10197 \rightarrow \\ \leftarrow 9,8066 \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{kg forza} \\ \text{kg m/s} \\ \text{kg m} \end{array} \right.$$

Unità di misura impiegate in UK ed USA:

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equiv. sist. tecnico
piede (ft)	lunghezza	$0,3048 \rightarrow$ $\leftarrow 3,281$	m
pollice (in)	lunghezza	$0,0254 \rightarrow$ $\leftarrow 39,37$	m
miglio (mile)	lunghezza	$1,609 \rightarrow$ $\leftarrow 0,6214$	km
yarda (yard)	lunghezza	$0,9144 \rightarrow$ $\leftarrow 1,094$	m
libbra (pound)	forza	$0,453 \rightarrow$ $\leftarrow 2,204$	kg
oncia (ounce)	forza	$0,0283 \rightarrow$ $\leftarrow 35,27$	kg
gallone (gallon) UK	volume	$4,546 \rightarrow$ $\leftarrow 0,2200$	ℓ (dm ³)
gallone (gallon) USA	volume	$3,785 \rightarrow$ $\leftarrow 0,6242$	ℓ
fluid ounce USA	volume	$0,0338 \rightarrow$ $\leftarrow 29,573$	ℓ
libbra per pollice quadrato (psi)	pressione	$0,0703 \rightarrow$ $\leftarrow 14,22$	kg/cm ²
cavallo vapore (HP)	potenza	$75 \rightarrow$ $\leftarrow 0,01334$	kg m/s

D.2. Unità termiche

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equiv. sist. tecnico
°C	temperatura	—	°C
kcal	quantità di calore	$426,9 \rightarrow$ $\leftarrow 0,002342$	kg m

Unità di misura impiegate in UK ed USA:

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equiv. sist. tecnico
British thermal unit (Btu)	quantità di calore	$0,252 \rightarrow$ $\leftarrow 3,968$ $107,6 \rightarrow$ $\leftarrow 0,009293$	kcal kg m
gradi Fahrenheit (°F)	temperatura	$(5/9)(f-32) \rightarrow$ $\leftarrow (9/5)c+32$	°C

D.3. Unità elettriche

Nel Sistema Internazionale (simile al sistema Giorgi razionalizzato) alle unità meccaniche si aggiunge l'unità di corrente (ampere).

Grandezza	Dimensioni	Unità di misura	Relazione di definizione
corrente elettrica	A	ampere (A)	
quantità di carica	T A	coulomb (C)	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}$
forza elettromotrice	$\text{ML}^2 \text{T}^{-3} \text{A}^{-1}$	volt (V)	$1 \text{ V} = 1 \text{ W}/1 \text{ A}$
induzione elettrica	$\text{L}^{-2} \text{T A}$	coulomb/m ²	
resistenza	$\text{ML}^2 \text{T}^{-3} \text{A}^{-2}$	ohm (Ω)	$1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$
induttanza	$\text{ML}^2 \text{T}^{-2} \text{A}^{-2}$	henry (H)	$1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ s}/1 \text{ A}$
capacità	$\text{M}^{-1} \text{L}^{-3} \text{T}^4 \text{A}^2$	farad (F)	$1 \text{ F} = 1 \text{ C}/1 \text{ V}$
costante dielettrica	$\text{M}^{-1} \text{L}^{-3} \text{T}^4 \text{A}^2$	farad/m	
flusso di induzione magnetica	$\text{ML}^2 \text{T}^{-2} \text{A}^{-1}$	weber (Wb)	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ s}$
induzione magnetica	$\text{MT}^{-2} \text{A}^{-1}$	weber/m ² o tesla (T)	
forza magnetomotrice	A	amperspira (Asp)	
campo magnetico	$\text{L}^{-1} \text{A}$	amperspira/m	
permeabilità magnetica	$\text{MLT}^{-2} \text{A}^{-2}$	henry/m	

D.4. Altre unità elettriche

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equivalente SI
maxwell (Mx)	flusso di induzione magnetica	$10^{-8} \rightarrow$ $\leftarrow 10^8$	weber
gauss (G)	induzione magnetica	$10^{-4} \rightarrow$ $\leftarrow 10^4$	weber/m ²
oersted (Oe)	campo magnetico	$10^3/4\pi \rightarrow$ $\leftarrow 4\pi/10^3$	amperspira/m
oersted cm o gilbert (Gb)	forza magnetomotrice	$10/4\pi \rightarrow$ $\leftarrow 4\pi/10$	amperspira

Riferimenti bibliografici

1. BODE, H. W., *Network analysis and feedback amplifier design*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1945.
2. EVANGELISTI, G., *La regolazione delle turbine idrauliche*, Zanichelli, Bologna, 1947.
3. CHESTNUT, H. E. e MAYER, R. W., *Servomechanisms and regulating system design*, 2 vol., J. Wiley & Sons, New York, 1951.
4. EVANS, W. R., *Control-system dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
5. TRUXAL, J. G., *Automatic feedback control system synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1955.
6. NEWTON, G. C., GOULD, L. A. e KAISER, J. F., *Analytical design of linear feedback controls*, J. Wiley & Sons, New York, 1957.
7. BOWER, J. L. e SCHULTHEISS, P. M., *Introduction to the design of servomechanisms*, J. Wiley & Sons, New York, 1958.
8. CAMPBELL, M. T., *Process dynamics - Dynamic behaviour of the production process*, J. Wiley & Sons, New York, 1958.
9. CHURCHILL, R. V., *Operational mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1958.
10. ECKMAN, D. P., *Automatic process control*, J. Wiley & Sons, New York, 1958.
11. CALDWELL, W. I., COON, G. A. e ZOISS, L. M., *Frequency response for process control*, McGraw-Hill, New York, 1959.
12. D'AZZO, J. J. e HOUPIS, C. H., *Feedback control system analysis and synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1960; rielaborato come *Linear control system analysis and design - Conventional and modern*, McGraw-Hill, New York, 1981.
13. DEL TORO, V. e PARKER, S. R., *Principles of control systems engineering*, McGraw-Hill, New York, 1960.
14. DURANT, E., *Solutions numériques des équations algébriques*, 2 vol., Masson, Paris, 1960.
15. THALER, G. J. e BROWN, R. G., *Analysis and design of feedback control systems*, McGraw-Hill, New York, 1960.
16. WILTS, C. H., *Principles of feedback control*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.
17. GRAHAM, D. e MCRUER, D., *Analysis of nonlinear control systems*, J. Wiley & Sons, New York, 1961.
18. CHOW, Y. e CASSIGNOL, E., *Linear signal-flow graphs and applications*, J. Wiley & Sons, New York, 1962.
19. KUO, B. C., *Automatic control systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962; 6ª ediz. rielaborata, 1991.
20. GIBSON, J. E., *Nonlinear automatic control*, McGraw-Hill, New York, 1963.
21. HOROWITZ, I. M., *Synthesis of feedback systems*, Academic Press, New York, 1963.

22. AIZERMAN, M. A. E GANTMACHER, F. R., *Absolute stability of regulator systems*, Holden Day, San Francisco, 1964.
23. LEPSCHY, A. E RUBERTI, A., *Lezioni di controlli automatici*, 2 vol., Siderea, Roma, 1965.
24. MEEROV, M. V., *Structural synthesis of high-accuracy automatic control systems*, Pergamon Press, New York, 1965.
25. DISTEFANO, J. J., STUBBERUD, A. R. E WILLIAMS, I. J., *Theory and problems of feedback and control systems*, Schaum, New York, 1967.
26. DORF, R. C., *Modern control systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967; 5^a ediz. rielaborata, 1989.
27. SHINSKEY, F. C., *Process-control systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.
28. BELARDINELLI, E., *Controlli automatici*, Pitagora, Bologna, 1971.
29. VOLTA, E., *Controlli automatici*, Etas Libri, Milano, 1974.
30. ISIDORI, A., *Sistemi di controllo*, Siderea, Roma, 1979.
31. LEPSCHY, A. E VIARO, U., *Guida allo studio dei controlli automatici*, Pàtron, Bologna, 1983.
32. FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D. ED EMAMI-NAEINI, A., *Feedback control of dynamic systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986; 3^a ediz. rielaborata, 1994.
33. PHILLIPS, C. L. E HARBOR, R. D., *Feedback control systems*, 2^a ediz., Prentice-Hall International Editions, 1992.
34. DORF, R. C. E BISHHOP, R. H., *Modern control systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1995.
35. KUČERA, V., *Analysis and design of discrete linear control systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
36. ÅSTRÖM, K. J. E HÄGGLUND, T., *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, ISA, Research Triangle Park, North Carolina 27709, 1995.
37. BONIVENTO, C., MELCHIORRI, C. E ZANASI, R., *Sistemi di controllo digitale*, Progetto Leonardo, Bologna, 1995.
38. BOLZERN, P., SCATTOLINI, R. E SCHIAVONI, N., *Fondamenti di controlli automatici*, McGraw-Hill Libri Italia, 1998.
39. FERRANTE, A., LEPSCHY, A. E VIARO, U., *Introduzione ai controlli automatici*, UTET, Torino, 2000.
40. NISE, N. S., *Control system engineering*, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 2000.

Riferimenti bibliografici sui componenti:

1. GIBSON, J. E., E TUTEUR, F. B., *Control system components*, McGraw-Hill, New York, 1958.
2. DAVIS, S. A., E LEDGERWOOD, B. K., *Electromechanical components for servomechanisms*, McGraw-Hill, New York, 1961.
3. DOEBELIN, E. O., *Measurement systems: application and design*, McGraw-Hill, New York, 1966; 3^a ediz. rielaborata, 1983.
4. DEL TORO, V., *Electromechanical devices for energy conversion and control systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.
5. GRAEME, J. G., TOBEY, G. E. E HUELSMAN, L., *Operational amplifiers: design and applications*, McGraw-Hill, New York, 1971.
6. CHARKEY, E. S., *Electromechanical system components*, J. Wiley & Sons, New York, 1972.
7. ELECTRO-CRAFT CORP., *Dc motors, speed control, servo systems*, Pergamon Press, New York, 1977.
8. KENJO, T., *Stepping motors and their microprocessor controls*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
9. KENJO, T. E NAGAMORI, S., *Permanent-magnet and brushless dc motors*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
10. DE SILVA, C. W., *Control sensors and actuators*, Prentice Hall, 1989.
11. JOHNSON, C. D., *Process control instrumentation technology*, Prentice Hall, 2000.
12. MALONEY, T. J., *Modern industrial electronics*, 4th edition, Prentice Hall, 2001.

Indice analitico

A

accelerometro, 428
alias, 337
aliasing, 337, 348
allocazione dei poli, 273, 277
Alnico, 435
ammortizzatore, 20
amplificatore
- con regolazione del guadagno, 399
- di isolamento, 402
- di potenza, 16, 335
- di regolazione dello zero, 452
- di segnale, 16, 335
- differenziale, 396, 402
- Goldberg, 452
- idraulico a getto, 458
- in alternata, 404
- invertente, 399
- non invertente, 401
- operativo, 395
- - reale, 450
- principale, 452
amplificazione
- idraulica, 32
- pneumatica, 31
analizzatore di risposta
armonica, 120
anello, 8, 27
- di retroazione, 11
antitrasformata
- di Fourier, 89, 117
- di Laplace, 41
- Z , 339
antitrasformazione, 41
- delle funzioni razionali, 49
- - poli multipli, 344
- - poli semplici, 343
approssimanti di Padé, 151
approssimazione discreta
- della derivata, 389

- dell'integrale, 389
argomento, 37
armoniche, 116
ascissa di convergenza, 74
asintoti, 178
asse immaginario, 38
asse reale, 38
attrito
- al distacco, 20
- coulombiano, 20
- secco, 20
- viscoso, 20
attuatore, 9, 16, 335
- a pistone, 456, 458
- pneumatico a membrana, 455
automatica, 1
automazione, 1
autosintonia dei regolatori
PID, 233
azionamento per motore, 436
azione
- diretta, 282
- forzante, 39
- in avanti, 282

B

banda passante, 137, 158, 451
banda proporzionale, 228
- di pendolazione, 233
baricentro del luogo delle radici, 191
blocchi
- in cascata, 7
- in parallelo, 7
Bode, 91
buffer, 402

C

calcolatore analogico, 22
campionamento 336
- con impulsi di Dirac, 347
campo
- magnetizzante, 435
- trapezoidale, 431
cancellazione polo-zero, 217
caratteristica
- a forma di spezzata, 300
- di permeanza, 435
- statica ingresso-uscita, 3
carta
- di Nichols, 157
- logaritmica, 91
- semilogaritmica, 91
Cauchy, 72
Cauchy-Riemann, 71
causa, 2, 39
causalità, 39, 353
cella di carico, 428
ciclo limite, 292
- instabile, 297
- stabile, 297
cilindro pneumatico, 455
circuiti elettrici, 17
codice Gray, 419
coefficiente
- di anello, 27
- di percorso, 27
- di ramo, 25
- di smorzamento, 53, 64
- di un grafo, 28
comparatore di tensione, 405
compensatore, 283
compensazione
- ad azione diretta, 198
- con reti a ritardo e anticipo, 221
- con reti a T , 221
- con reti anticipatrici, 213
- con reti ritardatrici, 208

- per cancellazione polo-zero, 217
- componenti
 - dei sistemi di controllo, 395
 - elettrici, 17
 - meccanici, 20
- condizione
 - di analiticità, 71
 - di equilibrio, 3, 121
 - di quiete, 4, 121
 - iniziale, 4, 39
- continuità nel campo complesso, 71
- contorno delle radici, 173, 187
 - per variazione di un polo, 188
 - per variazione di uno zero, 188
- controllo
 - digitale, 335
 - ad azione diretta, 10, 11
 - bang-bang, 164
 - di armatura, 432
 - di campo, 432
 - di livello, 13, 31
 - di temperatura, 15
 - in catena aperta, 10
 - in catena chiusa, 11
 - in retroazione, 11, 12
 - integrale, 151
- controllore, 1
- conversione analogico-digitale ad inseguimento, 417
- convertitore
 - A/D, 336
 - analogico-digitale, 120, 336
 - D/A, 336
 - - moltiplicativo, 407
 - digitale-analogico, 336
 - frequenza-tensione, 422
 - tensione-frequenza, 418
 - elettroidraulici, 460
- coppia
 - di tenuta, 446
 - nominale, 446
 - residua, 446
 - statica, 446
- correlatore, 119
- corrente
 - di armatura, 431
 - di eccitazione, 430
 - di fuori zero, 451

- di polarizzazione, 451
- cortocircuito virtuale, 399
- cosinusoide, 43
- costante
 - di accelerazione, 94, 141, 368
 - di controllo, 10, 369
 - di guadagno, 94, 367
 - di posizione, 140, 367
 - di regolazione, 10, 369
 - di tempo, 52, 63, 232
 - - dell'azione derivativa, 228, 376
 - - dell'azione integrale, 228, 376
 - di velocità, 94, 140, 367
- tachimetrica, 421
- criterio
 - del cerchio, 310
 - del cerchio in forma estesa, 333
 - di Nyquist, 143, 171, 369, 371
 - di Popov, 311
 - di Routh, 126

D

- dati di specifica, 197
- decibel, 91
- deriva, 14, 451
- derivata
 - generalizzata, 44
 - logaritmica, 168
- derivatore, 399
- derivazione nel campo complesso, 71
- determinante di un grafo, 28
- diagramma
 - alfa, 91
 - beta, 91
 - degli argomenti, 91
 - dei moduli, 91
 - delle ampiezze, 91
 - delle fasi, 91
 - di Popov, 311
 - polare, 240
- diagrammi
 - di Bode, 91, 365, 372
 - - del termine del primo ordine, 96
 - - del termine del secondo ordine, 98
 - di Nichols, 108, 112, 365, 372

- logaritmi di risposta armonica, 91
- polari, 108
- differenza
 - prima, 389
 - seconda, 389
- dimostrazione del criterio di Nyquist, 167
- dinamo tachimetrica, 421
- Dirac, 44
- dispositivi
 - di controllo, 1
 - di tenuta, 360
 - - di ordine uno, 359
 - - di ordine zero, 338, 358
- distributore
 - a cassette, 458
 - a quattro vie, 458
 - di tenuta, 360
- distribuzione, 44
- disturbo, 2, 10
 - di misura, 10
 - sulla misura, 133
- divisione dei polinomi, 273
 - per potenze crescenti, 275
 - per potenze decrescenti, 274
- divisione estesa, 346
- dominio di convergenza, 41, 74, 339
- Duhamel, 58

E

- eccitazione, 4
- effetto, 2, 39
- elettrovalvola, 455
- encoder, 418
 - assoluto, 418
 - incrementale, 419
- equazione
 - ausiliaria, 129
 - caratteristica, 49, 126
 - di Bézout, 275
 - diofantea, 275
 - - soluzione, 276
- equilibrio
 - condizione di, 3
 - posizione di, 3
 - stato di, 3
- errore a regime, 366
 - nella risposta al gradino, 139
 - nella risposta alla parabola, 141

- nella risposta alla rampa, 140
- errore, 10, 139
- di accelerazione, 141, 368
- di posizione, 139, 367
- di velocità, 140, 367, 416
- riferito all'ingresso, 10, 142, 369
- riferito all'uscita, 10, 142, 369
- esempi di luoghi delle radici, 179
- esponenziale, 42
- come funzione analitica, 73
- estensimetro, 422
- a semiconduttore, 423
- Eulero, 43
- evoluzione
 - forzata, 40
 - libera, 40

F

- fattore di scala, 21
- fattorizzazione, 381
- filtro
 - anti-aliasing, 337, 382
 - attivo, 404
 - di Bessel, 260, 381
 - di Butterworth, 259, 381
 - di grado relativo, 283
- forma
 - cartesiana, 37
 - con costanti di tempo, 94
 - fattorizzata, 49, 94
 - minima, 8
 - di un grafo, 26
 - polare, 37
 - polinomiale, 94
- formula
 - di Bode, 104
 - di Eulero, 43
 - di Mason, 26, 27
 - di Vaschy, 61
- formula di inversione, 218
- della rete anticipatrice, 218
- della rete ritardatrice, 218, 242
- forza coercitiva, 435
- Fourier, 89, 115
- frequenza
 - di campionamento, 382
 - di guadagno unitario, 452

- funzione
 - continua a tratti, 39
 - di risposta armonica, 88
 - - discreta, 364
 - di sensibilità, 13, 136
 - - complementare, 136
 - - del controllo, 235
 - di variabile complessa, 38
 - ponderatrice, 59, 104
- funzione descrittiva, 293
- del gioco, 306, 332
- del relè con isteresi, 304, 332
- del relè con soglia, 303, 331
- del relè ideale, 301, 331
- della generica spezzata, 300
- della saturazione, 295, 330
- della saturazione non netta, 300
- della soglia, 298
- della soglia con saturazione, 299
- estesa, 308
- funzione di trasferimento, 47
- a fase minima, 104
- campione, 252
- del trasduttore di segnale di retroazione, 132
- della catena di amplificazione M diretta, 132
- di anello, 369
- di un sistema a tempo discreto, 353
- funzioni
 - analitiche, 71
 - ortogonali, 116

G

- Gauss, 38
- generatore di impulsi a induzione, 421
- gioco, 306, 332
- giunzione sommanente, 7
- gradiente tachimetrico, 421
- gradino, 5
- unitario, 42
- grado relativo, 49
- grafi di flusso di segnale, 25
- grafico per l'utilizzazione della formula di Bode, 106

- gruppo Ward-Leonard, 48
- guadagno
 - di anello, 14, 132, 369
 - di tensione ad anello aperto, 451
 - limite, 132
 - statico, 94, 232

I

- impulso, 43
- di Dirac, 44
- inductosyn, 416
- assoluto, 417
- incrementale, 417
- inerzia del rotore, 446
- ingresso, 39
- invertente, 396
- non invertente, 396
- inseguimento, 10
- di modello, 251
- inseguitore di posizione idraulico, 32
- instabilità, 14
- integrale
 - di convoluzione, 58
 - di Duhamel, 58
 - di Fourier, 116
- integratore, 84, 399
- integrazione nel campo complesso, 72
- interconnessione di grafi, 30
- interruttore elettronico, 405
- intervallo
 - di preazione, 285
 - di preconnoscenza, 282
- inversione di un percorso in un grafo, 29
- invertitore di segno, 399
- istante di massima sovraregolazione, 64, 80
- isteresi negativa, 320

L

- laminatoio, 149
- Laplace, 40, 74
- Laurent, 72
- legame fra coefficiente di smorzamento e picco di risonanza, 101
- limite nel campo complesso, 71
- linearità, 5, 42, 353

logaritmo

- come funzione analitica, 73
- principale, 73

luogo

- a M costante, 153
- a N costante, 153
- delle radici, 173, 373
- - costruzione grafica del, 192

LVDT, 409

M

macchina

- in corrente alternata, 431
- in corrente continua, 430

magneti permanenti, 435

magnetismo residuo, 435

magnetoresistività, 429

marginale

- di ampiezza, 148, 372
- di fase, 148, 372
- di stabilità, 148, 372

Mason, 26

massa, 20

massima sovraelongazione, 64, 80

massimo comun divisore di due polinomi, 275

massimo sorpasso, 64

MEMS, 427

metodo

- ϵ , 128
 - del luogo delle radici, 173
 - di Ziegler-Nichols, 232
- microinterruttore, 329
- microstepping, 447
- minimax, 279
- miscelatore, 15
- modello
- analogico, 21
 - di riferimento, 252, 376, 380
 - interno, 141
 - lineare, 5
 - matematico, 3
 - - dinamico, 4
 - - puramente algebrico, 3
 - - statico, 3
 - non lineare, 5
 - non stazionario, 6
 - stazionario, 6
- modi, 123
- modulo, 37

molla, 20

motore

- a cilindri radiali, 462
- a palette rientranti, 461
- brushless, 438
- di coppia, 460
- elettrico in corrente alternata, 431
- elettrico in corrente continua, 2, 3, 11, 22, 430
- - a magneti permanenti, 434
- - senza spazzole, 438
- passo passo, 441, 442
- - a magnete permanente, 441
- - a riluttanza variabile, 441
- - unipolare a quattro fasi, 442
- multiplexer analogico, 406

N

Nichols, 112

nodo, 25

- comparatore, 16
 - dipendente, 25
 - indipendente, 25
 - sorgente, 25
- Nyquist, 143, 167

O

ondulazione introdotta dai dispositivi di tenuta, 360

operatore D, 17

OR esclusivo, 419

ordine di un'equazione differenziale, 39

orizzonte

- infinito, 286
 - recedente, 286
- orologio ad acqua, 30
- oscillatore a ponte di Wien, 448
- osservatore dello stato, 357

P

Padé, 151

parabola unitaria, 42

parte immaginaria, 37

parte reale, 37

parzializzazione, 322, 437

passo angolare, 446

percorso di segnale, 27

periodo di campionamento, 336

permalloy, 429

piano

- di Gauss, 38
 - w, 352, 372
- picco di risonanza, 100, 158
- poli, 50
- dominanti, 148
 - semplici, 50
- polinomi
- coprimi, 275
 - primi fra loro, 275
 - monico, 49, 275
- polo, 73
- ponte di resistenze, 403
- Popov, 309
- posicast, 70
- posizione di equilibrio, 3
- potenza come funzione analitica, 73

potenziometro, 407

preazione, 197, 282

preconoscenza, 282

predittore di Smith, 270

prefiltro, 282

principio del modello interno, 141

progetto analitico, 266

prontezza, 197

proprietà

- di sovrapposizione degli effetti, 5
 - di traslazione nel tempo di cause ed effetti, 6
- pulsazione
- di fase π greco, 148
 - di guadagno unitario, 208, 372
 - di incrocio, 136, 138, 148, 208, 372
 - di intersezione, 148, 208, 372
 - di risonanza, 100, 158
 - naturale, 53, 64

punto

- di diramazione, 7
- di emergenza, 179
- di equilibrio, 290
- - globalmente asintoticamente stabile, 123
- - globalmente stabile, 123

- di prelievo di segnale, 7
- di rottura, 97
- singolare, 73
- PWM, 437

Q

- quantizzazione, 336
- radice, 49
- n -esima come funzione
 - analitica, 73
- principale, 73
- multipla, 177
- raggio di convergenza, 339
- ramo orientato, 25
- rampa unitaria, 42
- rapporto di ritardo, 232
- realizzabilità fisica, 39
- realizzazione, 84, 354
 - parallela, 84
- regime
 - sinusoidale, 166
 - stazionario, 3
 - transitorio, 4
- regolatore, 1
 - di Watt, 31
 - integrale (I), 228, 376
 - PD, 403
 - PI, 401, 403
 - PID, 401
 - proporzionale (P), 228, 376
 - proporzionale-derivativo (PD), 228, 376
 - proporzionale-integrale (PI), 228, 376
 - proporzionale-integrale-derivativo (PID), 228, 376
 - a due gradi di libertà, 282, 284
 - standard, 227, 375
- regole per tracciare i diagrammi polari, 110
- reiezione di un disturbo, 136
- relè, 314, 329
 - autooscillante, 326
 - con isteresi, 304, 332
 - con soglia, 303, 331
 - ideale, 301, 331
- relazioni di Cauchy-Riemann, 71
- residuo, 50, 73
- resistenza di uscita, 451
- resolver, 413

- rete
 - a ritardo e anticipo, 205
 - a sella, 205
 - a T, 206
 - anticipatrice, 203, 383, 401
 - - con ripresa del guadagno statico, 404
 - compensatrice, 198
 - correttiva, 15, 16, 198
 - derivatrice, 201
 - integratrice, 200
 - ritardatrice, 203, 401
- retroazione
 - negativa, 11
 - positiva, 11
 - tachimetrica, 225
- rettificatore di precisione, 406
- ricoprimento delle luci, 458
- ricostruzione di un segnale a tempo continuo, 337
- riduzione
 - degli schemi a blocchi, 7
 - di un grafo di flusso, 25
 - diretta, 26
 - per semplificazioni successive, 26
- riflessione di forza, 460
- riga ottica, 420
- risposta, 4
 - al gradino, 57
 - all'impulso, 57, 125
 - canonica, 56
 - convergente asintoticamente a zero, 122
 - divergente, 122
 - impulsiva, 57
 - indiciale, 57
 - limitata, 122
- ritardo
 - finito, 47, 149, 266
 - unitario, 355
- robustezza, 13
- Routh, 126

S

- saturazione, 163, 295, 330
 - non netta, 300
- schema a blocchi, 7
 - in forma minima, 8
- segnale, 1
 - di ingresso, 39
 - di retroazione, 16

- di riferimento, 10, 16, 132
- errore, 16, 132, 335
- di saggio, 42
- tipico, 42
- sensibilità
 - ai disturbi, 135, 197
 - alla variazione di parametri, 134
 - di un grafo, 28
 - proporzionale, 228, 376
- senso
 - di campo magnetico, 429
 - di temperatura a semiconduttore, 426
- servomeccanismo di posizione, 33
- sincro, 411
 - di coppia, 413
- sincrotrasformatore di controllo, 412
- sincrotrasmettitore di controllo, 412
- singularità, 73
 - essenziale, 73
- sintesi
 - della rete anticipatrice nel piano w , 383
 - diretta, 251, 376
 - - di sistema con ritardo finito, 392
 - - di sistema di tipo 1, 384
 - - di sistema di tipo 2, 385, 386
 - nel piano w di regolatore PI, 383
 - per tentativi, 251
- sinusoide, 43
- sistema, 1
 - a fase non minima, 81
 - a molte variabili, 3
 - a stabilità condizionata, 147
 - a tempo discreto di tipo 0, 367
 - ad una sola variabile, 3
 - asintoticamente stabile, 122
 - autonomo, 291
 - bistabile, 329
 - controllato, 1
 - di tipo 0, 139
 - di tipo 1, 139
 - di tipo 2, 139, 264
 - discreto di tipo 1, 367
 - discreto di tipo 2, 367

- elementare del primo ordine, 63
- elementare del secondo ordine, 64
- globalmente asintoticamente stabile, 123
- globalmente stabile, 123
- incerto, 13
- inizialmente in quiete, 4
- instabile, 122
- lineare, 5
 - a costanti distribuite, 61
 - non stazionario, 62
 - non lineare, 5
 - non stazionario, 6
 - orientato, 2
 - stabile, 122
 - stazionario, 6
- strettamente stabile, 122
- tecnico, 475
- "tutto o niente", 34
- a relè, 34, 314
- linearizzazione, 321
- metodo grafico, 314
- a segnali campionati, 33, 335
- con ritardi finiti, 149
- di controllo a due posizioni, 301
- di controllo a tempo discreto, 335
- di controllo a tre posizioni, 301
- fluidodinamico, 455
- meccanico, 20
- termico, 23

Sistema Internazionale (SI), 475

- Smith, 270
- soglia, 298
 - con saturazione, 299
- somma
 - di fratti semplici, 49
 - di una successione, 389
- sommatore, 400
 - integratore, 400
- sommatoria di convoluzione, 353
- sottoelongazione, 80
- sovrapposizione degli effetti, 5
- specifiche
 - nel dominio del tempo, 158

- nel dominio della frequenza, 158
- spettro, 115
- stabilità, 56, 121, 197
 - a seguito di perturbazioni, 125, 357
 - asintotica, 122, 166
 - globale, 291
 - assoluta, 311
 - dei sistemi a tempo discreto, 357
 - i.l.u.l., 125, 165, 166
 - ingresso limitato - uscita limitata, 125, 357
- stabilizzazione del magnete, 435
- stato
 - di equilibrio, 3
 - di regime stazionario, 3
 - iniziale, 4, 40
 - di quiete, 353
 - di un sistema a tempo discreto, 355
- zero, 353
- stazionarietà, 6, 353
- stella di raggi nel piano complesso, 186
- stepping motor, 441
- striscia
 - complementare, 349
 - primaria, 349
- sviluppo in serie
 - di Fourier, 115
 - di Laurent, 72
 - di Taylor, 72

T

- tabella
 - di Routh, 126
 - di trasformate Z , 471
- taratura dei regolatori standard, 231
- Taylor, 72
- tempo
 - di assestamento, 64
 - di ritardo, 64, 232
 - di salita, 64
- tensione
 - di fuori zero, 451
 - di modo comune, 451
 - di rumore, 452
- teorema
 - dei residui, 73

- del campionamento, 337
- del regime sinusoidale dei sistemi lineari stazionari, 88
- del valore finale, 76, 342, 387
- del valore iniziale, 76, 342, 388
- della convoluzione, 343, 388
- della trasformata del prodotto integrale, 57, 77
- della trasformata della derivata, 44, 75
 - generalizzata, 45
- della trasformata dell'integrale, 44, 75
- della trasformata di una successione periodica, 388
- della traslazione in s , 77
- della traslazione in z , 342, 387
- della traslazione nel tempo, 43, 76, 342, 387
- dell'indice logaritmico, 167
- di Cauchy, 72
- di Shannon, 337
- sulla trasformata Z , 387
- termine noto, 39
- termini
 - del primo ordine, 52
 - del secondo ordine, 52
- termistore, 425
- termocoppia, 424
- termoresistenza, 425
- terre rare, 436
- trasduttore, 9
 - a effetto Hall, 426
 - di forza, 428
 - di pressione, 428
 - di velocità, 421
 - microelettromeccanico, 427
- trasformata
 - di Fourier, 89, 117
 - di Laplace, 41
 - di una funzione periodica, 78
 - tabella di, 464
- trasformata Z , 339
 - dell'esponenziale, 340
 - del gradino unitario, 341
 - dell'impulso unitario, 341
 - del seno, 341
 - del coseno, 341

– modificata, 390
– tabella, 471
trasformatore differenziale,
409

trasformazione

– bilineare, 352
– di Laplace, 40, 74
– funzionale, 40
– inversa, 41

traslazione nel tempo di
cause ed effetti, 6

trasmittanza

– di anello, 27
– di percorso, 27
– di ramo, 25
– di un grafo, 28

U

unità

– di misura, 475
– di regolazione asintotica,
267
– elettriche, 477
– meccaniche, 475
– stabilizzante, 267, 281
– termiche, 476
uscita, 39

V

valvola pilota, 458
valvole elettroidrauliche, 460
variabile, 1
– controllata, 9, 132
– di ingresso, 2
– di riferimento, 10
– di uscita, 2
– dipendente, 2

– indipendente, 2
– manipolabile, 2
– non manipolabile, 2
variazione
– di un polo, 188
– di uno zero, 188
– parametrica, 10
Vaschy, 61
velocità
– di risposta, 232
– limite di risposta, 452
vibrazione imposta, 321

W

Ward-Leonard, 48
zeri, 49, 50
Ziegler-Nichols, 232
zona morta, 298

