

UNIVERSITÀ DI ROMA “LA SAPIENZA”

Dipartimento di Fisica

ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

PARTE I

Anno Accademico 2006-2007

N. Cabibbo¹

L. Maiani²

O. Benhar³

¹e-mail: nicola.cabibbo@roma1.infn.it

²e-mail: luciano.maiani@roma1.infn.it

³e-mail: omar.benhar@roma1.infn.it

AA 2006-2007, II Trimestre

WORK IN PROGRESS

Commenti, correzioni e suggerimenti, in particolare da parte degli studenti del Corso, sono apprezzati.

Indice

1	INTRODUZIONE	3
1.1	Unità di misura, Rappresentazione di Heisenberg e di Schroedinger, ecc.	5
2	INTEGRALI DI FEYNMAN	7
2.1	L'ampiezza di transizione	7
2.2	L'approssimazione reticolare	10
2.3	Il limite classico	10
2.4	Il tempo come variabile complessa	11
2.5	La meccanica statistica	12
2.6	Le funzioni di Green	13
3	PASSAGGIO ALLA TEORIA DI CAMPI	17
3.1	Il funzionale generatore	19
3.2	L'oscillatore armonico	22
3.3	Campi scalari liberi	26
3.4	Campi scalari liberi — Stati a una particella	28
3.5	Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo	30
4	TEORIA DELLE PERTURBAZIONI PER LE FUNZIONI DI GREEN	33
4.1	Lo sviluppo perturbativo	34
4.2	Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green	37

4.3	Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto	42
4.4	La funzione di Green a due punti.	44
5	PROCESSI DI DIFFUSIONE, MATRICE S.	49
5.1	Stati "in" e stati "out"	50
5.2	Ampiezze di diffusione e Matrice S.	52
5.3	Grandezze conservate	54
5.4	Le formule di riduzione LSZ	54
5.5	Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni.	60
5.6	Diagrammi di Feynman per la matrice S	63
6	Il campo elettromagnetico	67
6.1	La scelta di gauge	67
6.2	Il metodo di deWitt-Faddeev-Popov	70
6.3	Il funzionale generatore e il propagatore	73
6.4	Gli stati a un fotone	74
6.5	Fotoni virtuali	76
7	Campi Fermionici	81
7.1	L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi	81
7.1.1	Variabili anticommutanti	83
7.1.2	Somma sui cammini per i due oscillatori	84
7.1.3	Integrali gaussiani per variabili anticommutanti	87
7.2	Quantizzazione del campo di Dirac	89
7.2.1	Propagatore del fermione	91
7.2.2	Il teorema di spin e statistica	92
7.2.3	Stati ad una particella del campo di Dirac	93

A	Ampiezza di Transizione in assenza di Potenziale	97
B	Grafici connessi	99
C	Invarianza di Lorentz e stati a una particella.	103
D	Integrali	105

Capitolo 1

INTRODUZIONE

In questo corso ci occuperemo di elettrodinamica quantistica, la teoria di campo che descrive l'interazione di particelle cariche con il campo elettromagnetico. L'elettrodinamica quantistica o QED (Quantum Electro Dynamics) è una teoria incompleta, dato che tutte le particelle elementari sono anche sottoposte all'azione delle interazioni deboli, e nel caso dei quark alla azione delle interazioni forti.

FERMIONS			matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...		
Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c ²	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
ν_e electron neutrino	$<1 \times 10^{-8}$	0	U up	0.003	2/3
e electron	0.000511	-1	d down	0.006	-1/3
ν_μ muon neutrino	<0.0002	0	C charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	-1	S strange	0.1	-1/3
ν_τ tau neutrino	<0.02	0	t top	175	2/3
τ tau	1.7771	-1	b bottom	4.3	-1/3

Figura 1.1: Fermioni Elementari (<http://particleadventure.org/>)

Una teoria più completa, che tiene conto sia delle interazioni elettromagnetiche che di quelle deboli e forti, è offerta dal cosiddetto Modello Standard. Anche il Modello Standard è incompleto, dato

che non tiene conto delle interazioni gravitazionali¹. Malgrado queste limitazioni la QED è molto interessante per varie ragioni:

- La QED ha un'ampio campo di applicazioni di interesse fisico, che vanno dalla interazione dei fotoni ed elettroni con la materia alla struttura fine dei livelli atomici.
- La QED è stata la prima teoria di campo ad essere stata studiata in dettaglio, in particolare per quanto riguarda il metodo dei diagrammi di Feynman, il fenomeno delle divergenze infrarosse e ultraviolette, e l'uso della rinormalizzazione.
- La QED è una teoria di gauge, ed è quindi il prototipo del Modello Standard. Uno studio della QED è un'utile premessa allo studio del Modello Standard.
- Alcune delle predizioni della QED sono, tra le predizioni del Modello Standard, quelle verificate con maggiore accuratezza.

La più precisa verifica della QED è attualmente data dal valore sperimentale della anomalia magnetica dell'elettrone. L'equazione di Dirac assegna all'elettrone un momento magnetico pari a un magnetone di Bohr, $e/2m$, ma questo risultato va corretto a causa dell'interazione con il campo di radiazione per un fattore $(1+a_e)$, dove a_e è appunto la *anomalia magnetica*, che può essere espressa come una serie di potenze di α , la costante di struttura fine:

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} + \dots$$

I valori sperimentali per elettrone e positrone sono conosciuti con errori dell'ordine di 4 parti per miliardo:

$$\begin{aligned} a_{e^-}^{\text{Exp}} &= (1159652.1884 \pm 0.0043) \times 10^{-9} \\ a_{e^+}^{\text{Exp}} &= (1159652.1879 \pm 0.0043) \times 10^{-9} \end{aligned} \quad (1.1)$$

da paragonare alla previsione teorica:

$$a_{e^-}^{\text{Th}} = (1159652.1535 \pm 0.0240) \times 10^{-9} \quad (21 \text{ parti per miliardo}) \quad (1.2)$$

L'errore citato per la previsione teorica è in massima parte dovuto all'incertezza sul valore di α , ottenuto da una misura dell'effetto Hall quantistico. La previsione teorica si basa sul calcolo di a_e sino a termini in α^4 .

In questo corso tratteremo della elettrodinamica quantistica usando il metodo degli integrali di Feynman. Seguendo questa strada ci possiamo attrezzare per poter discutere in un prossimo corso del Modello Standard. Il metodo degli integrali di Feynman si è infatti rivelato decisamente superiore al più tradizionale metodo della Quantizzazione Canonica [1] per trattare teorie quantistiche caratterizzate da simmetrie di gauge. Ricordiamo che l'elettromagnetismo è caratterizzato dall'invarianza di

¹Mentre a livello di fisica classica (non quantistica) le interazioni gravitazionali sono descritte con grande successo dalla teoria della relatività generale di Einstein, e in molti casi la teoria di Newton si dimostra del tutto sufficiente, non esiste ancora una versione quantistica universalmente accettata di questa teoria. L'opinione più diffusa è che sia necessario passare da una teoria di campo a una teoria di stringhe, argomento al di fuori dai limiti di questo corso.

tutte le grandezze osservabili, ad esempio i campi elettrico e magnetico $\vec{E}, \vec{H}$ rispetto a trasformazioni dei potenziali vettori

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \quad (1.3)$$

dove f è una funzione arbitraria. Possiamo considerare questa trasformazione come dovuta ad un operatore di trasformazione U_f , e scrivere

$$U_f A_\mu U_f^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f \quad (1.4)$$

Se eseguiamo due trasformazioni in successione, U_f, U_g , avremo

$$U_g U_f A_\mu U_f^{-1} U_g^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f + \partial_\mu g \quad (1.5)$$

e possiamo facilmente verificare che l'insieme delle U_f forma un gruppo commutativo (abeliano):

$$U_g U_f = U_f U_g = U_{g+f} \quad (1.6)$$

Nel caso dell'elettromagnetismo ci troviamo quindi di fronte a un tipo di invarianza di gauge particolarmente semplice, mentre nel Modello Standard avremo a che fare con simmetrie di gauge non commutative (non abeliane). Anche se metodo degli integrali di Feynman non è indispensabile per la descrizione quantistica dell'elettromagnetismo, è quello preferito nel caso del Modello Standard.

1.1 Unità di misura, Rappresentazione di Heisenberg e di Schroedinger, ecc.

Nel seguito useremo principalmente la rappresentazione di Heisenberg, dove gli operatori hanno una dipendenza dal tempo:

$$O(t) = e^{itH} O e^{-itH}, \quad O = O(0) \quad (1.7)$$

Noteremo i passaggi in cui sia conveniente passare alla rappresentazione di Schroedinger. In ogni caso operatori e stati per cui non sia indicata una dipendenza esplicita dal tempo, ad esempio $O|m\rangle$, si intendono essere operatori e stati fissi, equivalenti a $O(t=0)|m\rangle$ nella rappresentazione di Heisenberg e a $O|m, t=0\rangle$ nella rappresentazione di Schroedinger.

Useremo unità di misura in cui $\hbar = 1$ e $c = 1$.

Useremo le convenzioni del [2] per quanto riguarda i quadrivettori e le matrici di Dirac. In particolare il prodotto scalare tra due quadrivettori $p = \{p^0, \vec{p}\}$ e $q = \{q^0, \vec{q}\}$ sarà indicato con $pq \equiv p^\mu q_\mu = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q}$.

Capitolo 2

La meccanica quantistica con l' integrale di Feynman

In questo capitolo vogliamo derivare la somma sui cammini dalla formulazione usuale della meccanica quantistica. Lo faremo nel caso particolarmente semplice di un sistema quantistico con un solo grado di libertà. Dopo avere ricavato l'espressione delle ampiezze di transizione mediante la somma sui cammini, faremo vedere come questo metodo permetta anche di calcolare le funzioni di Green in meccanica quantistica. Conchiuderemo il capitolo indicando come questi risultati vadano estesi al caso di sistemi con più gradi di libertà e alla teoria di campo.

Come ulteriore dimostrazione della equivalenza tra le differenti formulazioni della meccanica quantistica, in un successivo capitolo useremo la formulazione con la somma sui cammini per dedurre le regole di commutazione canoniche,

$$\left[p^m(t_0), q^k(t_0) \right] = -i\hbar \delta^{mk}$$

2.1 L'ampiezza di transizione

Per introdurre il metodo degli integrali di Feynmann, consideriamo il caso più semplice, quello di un sistema quantistico unidimensionale descritto da una variabile dinamica q e l'impulso coniugato p , con un hamiltoniano

$$H = K + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.1)$$

dove indichiamo con K l'energia cinetica e V l'energia potenziale.

Vogliamo calcolare l'ampiezza di transizione da uno stato $|q_1\rangle$ al tempo $t = t_1$ ad uno stato $|q_2\rangle$ al tempo $t = t_2 = t_1 + T$. Usando unità di misura in cui $\hbar = 1$ troviamo¹

$$\begin{aligned} |q_1\rangle &= \text{stato per } t = t_1 \\ e^{-iT H} |q_1\rangle &= \text{stato per } t = t_1 + T \\ \text{Ampiezza di transizione a } |q_2\rangle : & \langle q_2 | e^{-iT H} | q_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

¹In questo passaggio stiamo usando la rappresentazione di Schroedinger.

Conoscere l'ampiezza di transizione in funzione di q_1, q_2, T è equivalente ad avere una descrizione completa del nostro sistema quantistico. Vedremo qualche esempio di questa affermazione, rimanendo però al testo di Feynman e Hibbs [3] per maggiori dettagli. Ricordiamo sin d'ora che nella fisica delle particelle elementari siamo interessati proprio al calcolo delle ampiezze di transizione e in particolare agli elementi di matrice S . Consideriamo anzitutto il caso in cui $V(q) = 0$. Si ottiene allora direttamente (vedi appendice A):

$$\langle q_2 | e^{-iTK} | q_1 \rangle = \langle q_2 | e^{-i\frac{Tp^2}{2m}} | q_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} e^{i\frac{m(q_2 - q_1)^2}{2T}} \quad (V(q) = 0) \quad (2.3)$$

Notiamo anche che il risultato può essere riscritto in termini della velocità media v ,

$$\langle q_2 | e^{-i\frac{Tp^2}{2m}} | q_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} e^{iT\frac{mv^2}{2}}$$

$$v = (q_2 - q_1)/T$$

Questo risultato ha una interpretazione molto semplice: nel limite classico il sistema si muoverebbe a velocità costante v . La fase della ampiezza di transizione è data dalla *azione lungo la traiettoria classica*:

$$S_{cl} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m\dot{q}^2}{2} = T \frac{mv^2}{2}$$

$$\langle q_2 | e^{-i\frac{Tp^2}{2m}} | q_1 \rangle \propto e^{iS_{cl}}$$

La corrispondenza tra l' ampiezza di transizione quantistica e l' azione classica è stata per la prima volta messa in evidenza da Dirac [4].

Nel caso generale, con un potenziale $V(q)$ arbitrario, possiamo calcolare la ampiezza di transizione mediante un processo di limite che ci porterà a definire l'integrale di Feynman o integrale sui cammini. Suddividendo l'intervallo di tempo T in N intervalli $\epsilon = T/N$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle &= \\ &= \int dq^1 \dots dq^{N-1} \langle q_2 | e^{-i\epsilon H} | q^{N-1} \rangle \langle q^{N-1} | e^{-i\epsilon H} | q^{N-2} \rangle \dots \langle q^1 | e^{-i\epsilon H} | q_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

Notiamo che, dato che K e V non commutano,

$$e^{-i\epsilon(K+V)} = 1 - i\epsilon(K+V) - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + KV + VK) \quad (2.5)$$

mentre

$$e^{-i\epsilon V} e^{-i\epsilon K} = 1 - i\epsilon(K+V) - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + 2VK) \quad (2.6)$$

quindi possiamo scrivere

$$e^{-i\epsilon H} = e^{-i\epsilon V} e^{-i\epsilon K} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.7)$$

e notiamo che un errore $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ripetuto N volte equivale ad un errore globale $\mathcal{O}(\epsilon)$, che diventerà trascurabile nel limite $\epsilon \rightarrow 0$. Ciascuno dei fattori nella (2.4) può quindi essere approssimato come

$$\langle q^k | e^{-i\epsilon H} | q^{k-1} \rangle \approx \langle q^k | e^{-i\epsilon V} e^{-i\epsilon K} | q^{k-1} \rangle \quad (2.8)$$

$$= e^{-i\epsilon V(q^k)} \langle q^k | e^{-i\epsilon K} | q^{k-1} \rangle \quad (2.9)$$

e, usando la (2.3),

$$= \sqrt{\frac{k}{2\pi i \epsilon}} e^{i\epsilon \left(\frac{m(q^k - q^{k-1})^2}{2\epsilon^2} - V(q^k) \right)} = \quad (2.10)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} e^{i\epsilon \left(\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k) \right)} \quad (2.11)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito la velocità nell'intervallo k -mo come

$$v^k = \frac{(q^k - q^{k-1})}{\epsilon} \quad (2.12)$$

di modo che possiamo riconoscere nel fattore di fase il lagrangiano $L = mv^2/2 - V(q)$. Se adesso sostituiamo nella (2.4) otteniamo

$$\langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle \approx \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} \right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq^k \exp \left(i \sum_k \epsilon \left[\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k) \right] \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.13)$$

Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ l'insieme di punti $\{q^N = q_2, q^{N-1}, \dots, q^1, q^0 = q_1\}$ formano una traiettoria $q(t)$ dal punto iniziale q_1 al punto finale q_2 . Il fattore di fase nella (2.13) diviene semplicemente l'azione classica lungo questa traiettoria,

$$\sum_k \epsilon \left[\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k) \right] \rightarrow \int dt L(q(t), \dot{q}(t)) = S(q(t))$$

mentre l'integrale della (2.13) si può interpretare come una *somma sulle traiettorie*. Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ la somma diventa un integrale nello spazio delle traiettorie $q(t)$. La misura di integrazione è *definita* dalla equazione:

$$\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} \right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq^k \rightarrow \int D[q(t)]$$

Passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$, otteniamo infine:

$$\langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle = \int D[q(t)] e^{iS(q(t))} \quad (2.14)$$

L'integrale è esteso su tutte le traiettorie $q(t)$ tali che $q(t_1) = q_1$, e $q(t_2) = q_2$.

2.2 L'approssimazione reticolare

L'integrale di Feynman è un *integrale funzionale*, cioè un integrale che si estende su tutte le funzioni $q(t)$ definite nell'intervallo t_1, t_2 . È interessante considerare la (2.13) come una espressione approssimata che in linea di principio si può prestare a un calcolo esplicito. Questo tipo di approssimazione è largamente utilizzata nella teoria dei campi, in quanto si presta alla esecuzione di calcoli numerici in situazioni in cui non è possibile ottenere risultati esatti, e dove falliscono i metodi perturbativi che illustreremo nel caso della elettrodinamica quantistica. Questo tipo di approssimazione numerica si è rivelata di particolare utilità nella Quantum Chromo Dynamics (QCD), la teoria dei quark e delle loro interazioni forti, che non si presta a calcoli perturbativi se non in casi particolari. Si parla allora di “approssimazione reticolare”: nella (2.13), ad esempio, il tempo t è rappresentato tramite un reticolo di punti, $t^k = t_1 + k\epsilon$, e la funzione $q(t)$ tramite il valore che essa assume ai tempi t^i , $q^i = q(t^i)$.

La approssimazione alla ampiezza di transizione della (2.13) ha errori $\mathcal{O}(\epsilon)$, e tanto bastava nella discussione precedente per indicare una convergenza al risultato della (2.14). Se l'interesse è centrato su metodi di calcolo numerico, diviene di grande importanza pratica la velocità con cui il risultato approssimato converge a quello esatto. Ad esempio, come il lettore potrà facilmente dimostrare, una semplice modifica della eq. (2.7),

$$e^{-i\epsilon H} = e^{-i\epsilon V/2} e^{-i\epsilon K} e^{-i\epsilon V/2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.15)$$

permette di costruire uno schema di calcolo che converge molto più rapidamente al risultato esatto.

2.3 Il limite classico

La formulazione della meccanica quantistica mediante la somma sui cammini, eq. (2.14) si presta particolarmente alla discussione del limite classico di una teoria quantistica. Teniamo presente che in ogni caso la teoria “vera” è quella quantistica e che la teoria classica non è che un particolare limite di questa. Il limite classico si ottiene quando $\hbar \rightarrow 0$, quindi conviene riscrivere la (2.14) esplicitando la presenza di $\hbar$,

$$\langle q_2 | e^{-iTH/\hbar} | q_1 \rangle = \int D[q(t)] e^{iS(q(t))/\hbar} \quad (2.14')$$

La situazione diviene approssimativamente classica se il valore dell'azione è molto grande rispetto ad $\hbar$. Supponiamo che esista una traiettoria $q_c(t)$, tale che $q_c(t_1) = q_1$, e $q_c(t_2) = q_c(t_1 + T) = q_2$ che renda estrema l'azione. La condizione $\delta S = 0$ implica che traiettorie vicine alla $q_c(t)$ contribuiscano all'integrale (2.14') con la stessa fase (o fasi vicine), e quindi interferiscono in modo costruttivo. Al contrario, vicino ad ogni traiettoria che *non* estremizza l'azione ve ne sono altre con fase differente e che interferiscono distruttivamente. Quindi l'integrale sarà dominato dal contributo di un fascetto di traiettorie vicine a $q_c(t)$, traiettorie la cui azione differisce da $S(q_c(t))$ per meno di $\hbar$.

Nel limite $\hbar \rightarrow 0$ il moto del sistema quantistico sarà ben descritto dalla traiettoria “classica” $q_c(t)$.

È certo interessante notare che questo argomento permetta di spiegare un fatto altrimenti piuttosto misterioso. Il principio d'azione $\delta S = 0$ viene normalmente dimostrato partendo dalle equazioni del moto di Newton, ma questa derivazione non spiega la ragione della sua esistenza. L'origine

del principio d'azione invece è chiara se ricordiamo che la meccanica classica altro non è che un particolare limite della meccanica quantistica.

2.4 Il tempo come variabile complessa

Sinora abbiamo discusso della somma sui cammini senza preoccuparci eccessivamente della convergenza degli integrali, ad esempio quello che appare nella eq. (2.14). In realtà, guardando la (2.14) si vede subito che c'è un problema: l'integrando $e^{iS(q(t))}$ è di modulo = 1, quindi la definizione dell'integrale richiede qualche cura. In realtà avevamo già incontrato lo stesso problema nel calcolare (vedi appendice A) l'ampiezza di transizione in assenza di forze, eq. (2.3). In quel caso abbiamo visto che occorre definire l'ampiezza di transizione relativa ad un tempo T come limite, per $\eta \rightarrow 0^+$, dell'ampiezza relativa ad un intervallo di tempo $T - i\eta$. Applicheremo lo stesso metodo per definire l'integrale sui cammini della (2.14), che riscriviamo ancora una volta in forma più esplicita,

$$\langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle = \int D[q(t)] \exp(iS) = \int D[q(t)] \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right]\right) \quad (2.16)$$

Per dare al tempo una parte immaginaria negativa poniamo $t = (1 - i\chi)\tau$, con χ costante e piccola, di modo da poter approssimare $(1 - i\chi)^{-1}$ con $(1 + i\chi)$,

$$t = (1 - i\chi)\tau, \quad \text{di modo che} \quad \begin{cases} dt = (1 - i\chi)\tau \\ \dot{q} = \frac{dq}{dt} = (1 + i\chi) \frac{dq}{d\tau} \end{cases} \quad (2.17)$$

e l'integrando della (2.16) diviene $\exp(iS_\chi)$, dove S_χ è l'azione calcolata con il tempo modificato:

$$\exp(iS_\chi) = \exp\left(i \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - V(q) \right]\right) \cdot \exp\left(-\chi \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right]\right) \quad (2.18)$$

A questo punto l'integrando $\exp(iS_\chi)$ ha modulo eguale a $\exp(-\chi I)$ dove I è l'integrale

$$I = \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] = \int d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q})$$

Notiamo anzitutto che $\mathcal{H}(q, \dot{q})$ l'energia della particella². Per quanto riguarda la convergenza dell'integrale funzionale nella eq. (2.16) possiamo distinguere vari casi a seconda del comportamento della energia potenziale $V(q)$:

V(q) = 0 Questo è il caso della particella libera, dove si può esplicitamente calcolare l'integrale funzionale con il processo di limite delineato nella sezione 2.1 e i metodi elementari sviluppati nella Appendice A; l'integrale funzionale risulta convergente

V(q) definito positivo In questo caso $I > I_0$, dove I_0 è il valore di I calcolato a parità di traiettoria per $V(q) = 0$. Quindi si ha almeno la stessa convergenza del caso precedente.

²Notiamo per chiarezza che, dato che $q(t)$ è una traiettoria arbitraria, in generale $\mathcal{H}(q, \dot{q})$ non è indipendente dal tempo.

V(q) limitato inferiormente In questo caso, se $V(q) > V_0$, $I > I_0 + V_0 T$. L'aggiunta di una costante $V_0 T$ non muta la convergenza rispetto ai due casi precedenti.

V(q) non limitato inferiormente Bisogna valutare caso per caso. Se ad esempio $V(q) = -q^n$ la convergenza dell'integrale funzionale dipende dal valore dell'esponente n . Si può dimostrare che l'integrale funzionale converge se $0 \geq n \geq -1$, e non converge se $n > 0$ o $n < -1$. Notiamo che il potenziale coulombiano è un caso limite.

Notiamo che i casi esclusi sono quelli in cui falliscono anche le formulazioni alternative della meccanica quantistica, ad esempio quella basata sulla meccanica ondulatoria.

2.5 La meccanica statistica

Nelle considerazioni precedenti, abbiamo sostituito l'integrazione sull'asse reale del tempo, con una integrazione nel piano complesso di t , lungo la retta individuata da:

$$t = (1 - i\chi)\tau \simeq e^{-i\chi}\tau \quad (2.19)$$

Il risultato converge anche per valori di χ non infinitesimi e possiamo spingerci al caso estremo in cui $\chi = \pi/2$. Troviamo allora la seguente espressione per l'ampiezza di transizione tra tempi immaginari (!) $t_1 = 0, t_2 = -i\beta$

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-\beta H} | q_1 \rangle &= \int D[q(\tau)] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] \right) \\ &= \int D[q(\tau)] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q}) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

dove l'integrale è sui cammini che vanno da q_1 per $\tau = 0$ a q_2 per $\tau = \beta$. Questo assomiglia stranamente ad una funzione di partizione in meccanica statistica, ed è proprio così, se restringiamo l'integrale funzionali ai *cammini periodici* con $q_1 = q(0) = q_2 = q(-i\beta)$.

Assumiamo che gli autostati della nostra particella quantistica siano $|m\rangle$ con energia E_m . Con l'aiuto della (2.20) la funzione di partizione della particella in equilibrio termico ad una temperatura inversa³ β si può esprimere come integrale sui cammini,

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \sum_m e^{-\beta E_m} = \\ &= \sum_m \langle m | e^{-\beta H} | m \rangle \quad (\text{cioè una traccia...}) \\ &= \text{Tr} e^{-\beta H} = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$= \int D[q(\tau)] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q}) \right) \quad (\dots \text{un integrale sui cammini}) \quad (2.22)$$

³Ricordiamo che $\beta = 1/kT$, con T la temperatura assoluta e k la costante di Boltzman. Per non fare confusione con il tempo nel testo usiamo β e non la temperatura.

dove l'integrale è su tutti i cammini ciclici, che partono da un arbitrario valore di q a $t = 0$ e tornano allo stesso punto per $t = -i\beta$. Così definito l'integrale sui cammini assorbe l'integrazione che proviene dalla traccia (penultimo passo della eq. 2.21).

Notiamo anche che nel limite $\beta \rightarrow \infty$ la funzione di partizione è dominata dallo stato fondamentale:

$$Z(\beta) \xrightarrow{(\beta \rightarrow \infty)} \exp(-\beta E_0)(1 + \text{termini esponenzialmente piccoli in } \beta) \quad (2.23)$$

2.6 Le funzioni di Green

Definiamo come funzioni di Green i valori di aspettazione nello stato fondamentale del prodotto di operatori, ad esempio, nel caso della particella in moto unidimensionale, i prodotti della variabile $q(t)$ presa a tempi diversi, $t_1, t_2, \dots, t_N$ *in ordine decrescente*,

$$\langle 0 | q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N) | 0 \rangle \quad (t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N)$$

Abbiamo qui adottato la rappresentazione di Heisenberg, di modo che

$$q(t_1) = e^{itH} q e^{-itH}$$

Come vedremo una espressione di questo tipo può essere semplicemente scritta come somma sui cammini.

Per estendere la definizione anche al caso di tempi arbitrari $t_1, t_2, \dots, t_N$, introduciamo il concetto di prodotto ordinato nel tempo, $T(q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N))$, che è semplicemente il prodotto degli stessi operatori ordinati *in ordine di tempo decrescente*. Per due operatori:

$$T(q(t_1) q(t_2)) = \begin{cases} q(t_1) q(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ q(t_2) q(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Possiamo allora definire la funzione di Green ad N tempi come

$$G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle 0 | T(q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N)) | 0 \rangle \quad (2.25)$$

Questa definizione va in qualche modo motivata: perchè dare particolare importanza al valore di aspettazione nello stato fondamentale $|0\rangle$? Perchè l'ordinamento temporale? La risposta a queste domande si troverà nella teoria dei campi a cui ci stiamo preparando. In termini semplici lo stato fondamentale della teoria dei campi è lo stato "vuoto", cioè privo di particelle. Il vuoto ha varie caratteristiche che lo rendono unicamente degno di interesse: dal vuoto si possono creare tutti gli altri stati mediante operatori di creazione; il vuoto è l'unico stato di una teoria di campo che sia invariante sotto traslazioni nello spazio e nel tempo e sotto trasformazioni di Lorentz e rotazioni, e si potrebbe continuare. Per quanto riguarda l'ordinamento temporale vedremo che esiste un rapporto diretto tra le funzioni di Green così definite e gli elementi della matrice S . Peraltro, già sappiamo (cfr. la formula di Dyson, in [1]) che il prodotto T -ordinato assume un ruolo centrale nella teoria delle perturbazioni.

Dimostriamo adesso che la (2.25) può essere trasformata nella seguente somma sui cammini

$$G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\int D[q(t)] \exp(iS) q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N)}{\int D[q(t)] \exp(iS)} \quad (2.26)$$

Nel numeratore e nel denominatore, l'integrale è esteso su tutti cammini tra $t = -\infty$ e $t = \infty$, tali che $q(+\infty) = q(-\infty)$. Si deve intendere, inoltre, che i tempi si ottengono come limite di tempi complessi, secondo quanto discusso nella sezione 2.4. Più precisamente:

$$G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\int D[q(t')] \exp(iS)(q(t'_1) q(t'_2) \dots q(t'_N))}{\int D[q(t')] \exp(iS)} \right] \quad (2.27)$$

e gli integrali sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1 - i\chi)$ e $t = T' = T(1 - i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t'_{1,2,\dots} = (1 - i\chi) t_{1,2,\dots}$.

Per dimostrare l'equivalenza tra (2.27) e (2.25) consideriamo per semplicità il caso di due operatori, ed esplicitiamo la dipendenza dal tempo degli operatori in (2.25). Consideriamo il caso in cui $t_1 \geq t_2$

$$\begin{aligned} G_2(t_1, t_2) &= \langle 0 | q(t_1) q(t_2) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{it_1 H} q e^{-i(t_1-t_2)H} q e^{-it_2 H} | 0 \rangle \quad (t_1 \geq t_2) \\ &= \frac{\langle 0 | e^{-i(T-t_1)H} q e^{-i(t_1-t_2)H} q e^{-i(t_2+T)H} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-2iTH} | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nel secondo passo T è un tempo arbitrario, ma tale che $T > t_1, t_2 > -T$. Il termine a denominatore, $\langle 0 | e^{-2iTH} | 0 \rangle = \exp(-2iTE_0)$ compensa l'introduzione di due fattori e^{-iTH} nel numeratore, di modo che il risultato non dipende da T . A questo punto introduciamo i tempi complessi, e scriviamo:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\langle 0 | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-2iT'H} | 0 \rangle} \right]$$

dove $T' = (1 - i\chi)T$, $t'_{1,2} = (1 - i\chi) t_{1,2}$. Il limite $T \rightarrow \infty$ è in apparenza inutile, dato che come abbiamo osservato il termine in parentesi quadra è indipendente da T . Tuttavia esso ci permette di passare dal valore di aspettazione in $|0\rangle$ alla traccia degli operatori sia a numeratore che a denominatore:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_m \langle m | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | m \rangle}{\sum_m \langle m | e^{-2iT'H} | m \rangle} \right]$$

Infatti per ogni $\chi > 0$ e per T "grande" il contributo degli stati eccitati $|m\rangle \neq |0\rangle$ è depresso sia a numeratore che a denominatore per un fattore $\exp(-2\chi T(E_m - E_0))$ rispetto a quello dello stato fondamentale, e svanisce nel limite $T \rightarrow \infty$, che è eseguito *prima* di quello $\chi \rightarrow 0^+$: l'ordine dei limiti è importante!

Dato che la traccia è indipendente dalla base scelta per descrivere gli stati, possiamo usare la base degli autostati della posizione, $|q\rangle$,

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-2iT'H} | \tilde{q} \rangle} \right]$$

Per completare la dimostrazione basta mostrare che l'espressione tra parentesi quadre è identica a quella che otterremmo dalla (2.27) nel caso di due operatori,

$$\begin{aligned} & \frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-2iT'H} | \tilde{q} \rangle} \\ &= \frac{\int D[q(t')] \exp(iS)(q(t'_1) q(t'_2))}{\int D[q(t')] \exp(iS)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

In effetti il numeratore e il denominatore nelle due espressioni sono separatamente eguali. Per quanto riguarda il denominatore, $\langle \tilde{q} | e^{-2iT'H} | \tilde{q} \rangle$ è una ampiezza di transizione, che possiamo esprimere come $\int D[q(t')] \exp(iS)$, dove l'integrazione è su tutti i cammini che partono da $\tilde{q}$ a $t = -T'$ e tornano allo stesso punto per $t = T'$. Per eseguire l'integrazione su $\tilde{q}$ basta estendere l'integrale sui cammini a tutti quelli che, partendo da *qualsiasi* punto per $t = -T'$, tornano al punto di partenza per $t = T'$. I due denominatori sono quindi eguali.

Per il numeratore, assumiamo che sia $T > t_1, t_2 > -T$, e introduciamo accanto ai due operatori q somme sul sistema completo di stati, $\int dq |q\rangle \langle q| = 1$:

$$\begin{aligned} & \int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle \\ &= \iiint d\tilde{q} dq_1 dq_2 \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} | q_1 \rangle \langle q_1 | q e^{-i(t'_1-t'_2)H} | q_2 \rangle \langle q_2 | q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle \\ &= \iiint d\tilde{q} dq_1 dq_2 q_1 q_2 \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i(t'_1-t'_2)H} | q_2 \rangle \langle q_2 | e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle \end{aligned}$$

L'ultima espressione contiene il prodotto di tre ampiezze di transizione, che possiamo scrivere come una singola somma sui cammini che passano rispettivamente per q_1 al tempo t'_1 e per q_2 a t'_2 :

$$[q(-T') = \tilde{q}] \rightarrow [q(t'_2) = q_2] \rightarrow [q(t'_1) = q_1] \rightarrow [q(T') = \tilde{q}]$$

l'integrazione su $\tilde{q}, q_1, q_2$ significa estendere l'integrale funzionale su tutti i cammini periodici tali cioè che $[q(T') = q(-T')]$, sostituendo il fattore $q_1 q_2$ con $q(t'_1)q(t'_2)$, e si ottiene così il numeratore del secondo membro della eguaglianza (2.29). Lasciamo come esercizio la dimostrazione che il risultato è corretto anche per l'altro possibile ordinamento dei tempi, $t_2 > t_1$. La dimostrazione si estende facilmente, seguendo gli stessi passi, al caso in cui siano presenti più di due operatori.

Capitolo 3

PASSAGGIO ALLA TEORIA DI CAMPI

Quello che abbiamo fatto per un grado di libertà si estende direttamente al caso di un numero finito di gradi di libertà. Tutti i risultati ottenuti valgono direttamente per un sistema con n gradi di libertà, purchè si intenda che il simbolo q venga interpretato come un vettore ad n componenti, $q = \{q_1 \dots q_n\}$. Ad esempio una funzione di Green può essere definita come

$$G_{k_1, k_2, \dots, k_N}(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle 0 | T(q_{k_1}(t_1) q_{k_2}(t_2) \dots q_{k_N}(t_N)) | 0 \rangle \quad (3.1)$$

Per “cammino” si intende la traiettoria del vettore $q_k(t)$ tra il tempo iniziale t_1 e il tempo finale t_2 , cioè l’insieme delle funzioni $q_k(t)$ nell’intervallo $t_1 \leq t \leq t_2$.

Queste idee si estendono facilmente, almeno in modo formale, a una teoria di campo. Consideriamo il caso di un campo scalare reale $\phi(\vec{x}, t)$. Possiamo definire il lagrangiano L come integrale di una densità di Lagrangiana e l’azione come l’integrale sul tempo del Lagrangiano. In formule:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \\ L &= \int d^3x \mathcal{L} \\ S &= \int dt L = \int d^4x \mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Possiamo pensare questo sistema come limite di un campo definito su un reticolo di punti $\vec{x}_k$ a distanza a , il *passo reticolare*, che coprono un cubo di lato L . Si tratta di un doppio limite $a \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$. Per ogni valore di a , L abbiamo un numero finito $n = (L/a)^3$ di punti, e il campo risulta descritto dalle n variabili dinamiche $\phi_k(t) = \phi(\vec{x}_k, t)$. Nella versione discretizzata, scriveremo l’azione come

$$S = \int dt \sum_k a^3 \mathcal{L}_k$$

Dove $\mathcal{L}_k$ è la densità di lagrangiano nel punto $\vec{x}_k$, calcolata approssimando le derivate del campo con differenze, ad esempio

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}_k, t)}{\partial x} \approx \frac{\phi(x_k + a, y_k, z_k, t) - \phi(x_k, y_k, z_k, t)}{a}$$

La descrizione di un campo mediante un reticolo di punti, e un passaggio al limite del continuo, può essere usata per definire formalmente una teoria di campo, ma anche per eseguire calcoli numerici di grandezze interessanti, ad esempio le funzioni di Green. In questo secondo caso conviene di solito rappresentare anche il tempo come variabile discreta, come avevamo accennato nella sezione 2.2.

In conclusione una teoria di campo può essere considerata come caso limite di un sistema a molti gradi di libertà, e la corrispondente teoria quantistica può essere definita mediante la somma sui cammini. Per “cammino”, con dati valori di a, L si intende l'insieme delle funzioni $\phi_k(t)$ nel dato intervallo temporale. Nel limite $a \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$ questo diviene il valore della funzione $\phi(\vec{x}, t)$ per tutti i valori di $\vec{x}$ e per t nell'intervallo dato. Rimane da dimostrare la convergenza del processo di limite, cosa che non si sa fare in generale, se non nel caso più semplice, quello di campi liberi, e in pochi altri casi. Per campi in interazione si può ricorrere alla teoria delle perturbazioni, che discuteremo nel seguito. Vedremo allora che un passo essenziale è costituito dalla procedura di rinormalizzazione, necessaria per eliminare (o meglio interpretare) le divergenze che emergono nel limite di piccole distanze, $a \rightarrow 0$.

Supponendo di avere risolto i problemi relativi al passaggio al limite, quello che abbiamo detto nelle sezioni precedenti si applica direttamente a una teoria di campo. Ad esempio possiamo definire la funzione di Green ad N punti come:

$$G(x_1, x_2, \dots x_N) = \langle 0 | T (\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_N)) | 0 \rangle \quad (3.3)$$

($|0\rangle$ indica lo stato vuoto, e x_k il quadrivettore $\vec{x}_k, t_k$). Come nel caso finito-dimensionale, G può essere espressa come integrale funzionale:

$$G(x_1, \dots x_N) = \frac{\int D[\phi(x)] \exp(iS) \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_N)}{\int D[\phi(x)] \exp(iS)} \quad (3.4)$$

dove $D[\phi(x)]$ rappresenta la misura sullo spazio delle funzioni. Anche in questo caso, come nella sezione 2.6, questa espressione va intesa come limite,

$$G(x_1, \dots x_N) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} \left[\frac{\int D[\phi(\vec{x}, t')] \exp(iS) \phi(\vec{x}_1, t'_1) \phi(\vec{x}_2, t'_2) \dots \phi(\vec{x}_N, t'_N)}{\int D[\phi(\vec{x}, t')] \exp(iS)} \right] \quad (3.5)$$

dove in parentesi quadra l'integrale si estende su tutte le funzioni $\phi(\vec{x}, t')$ in cui $t' = (1 - i\chi)t$ si estende tra $\pm(1 - i\chi)T$, e periodiche sia nel tempo che nello spazio:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, (1 - i\chi)T) &= \phi(\vec{x}, -(1 - i\chi)T) \\ \phi(x, y, z, t) &= \phi(x + L, y, z, t) = \phi(x, y + L, z, t) = \phi(x, y, z + L, t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

La periodicità sia nella direzione temporale che nella direzione spaziale permette di eseguire liberamente integrazioni per parti, ad esempio

$$\int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) = - \int d^4x (\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi) \quad (3.7)$$

Queste espressioni si generalizzano al caso di più campi, $\phi_k(x)$, ($k = 1 \dots n$) ad esempio

$$\begin{aligned} G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots x_N) &= \langle 0 | T (\phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N)) | 0 \rangle \\ &= \frac{\int \prod_{k=1}^n D[\phi_k(x)] \exp(iS) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N)}{\int \prod_{k=1}^n D[\phi_k(x)] \exp(iS)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Il caso di un campo complesso si può ricondurre a quello di due campi reali¹,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2); \quad \phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \quad (3.9)$$

Il fattore $1/\sqrt{2}$ è scelto in modo che $D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] = D[\phi_1(x)]D[\phi_2(x)]$ come si verifica dallo Jacobiano. Usando questa relazione il calcolo delle funzione di Green si riconduce alla (3.8), e si ottiene in generale ad esempio

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x_1) \dots \phi(x_N) \phi^\dagger(y_1) \dots \phi^\dagger(y_M))|0\rangle \\ = \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \phi^\dagger(y_1) \dots \phi^\dagger(y_M)}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

e nel caso semplice di una funzione a due punti,

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x) \phi^\dagger(y))|0\rangle \\ = \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \phi(x) \phi^\dagger(y)}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La dimostrazione delle eqq. 3.10 e 3.11 è elementare, basta notare che le funzioni di Green definite tramite i valori di aspettazione sono lineari nei campi in ciascun punto, e che questo è ovviamente vero per la loro definizione in termini di somma sui cammini, per cui

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\dots (\phi_1(x) \pm i\phi_2(x)) \dots)|0\rangle &= \langle 0|T(\dots \phi_1(x) \dots)|0\rangle \pm i \langle 0|T(\dots \phi_2(x) \dots)|0\rangle \\ &= \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \dots (\phi_1(x) \pm i\phi_2(x)) \dots}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)} \end{aligned}$$

3.1 Il funzionale generatore

In questa sezione introduciamo il funzionale generatore, una tecnica che permette di esprimere in modo compatto l'insieme delle funzioni di Green. Consideriamo il caso di un sistema con n gradi di libertà $q_k(t)$, ($k = 1 \dots n$). Definiamo il funzionale generatore Z come

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t), \dots, J_n(t)] = \int D[q(t)] \exp\left(iS(q(t)) - i \int dt \sum_k q_k(t) J_k(t)\right) \quad (3.12)$$

dove le $J_k(t)$ sono n funzioni del tempo, e l'integrale funzionale va definito come limite

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t), \dots, J_n(t)] = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \int D[q(t')] \exp\left(iS(q(t')) - i \int dt' \sum_k q_k(t') J_k(t')\right) \quad (3.13)$$

dove, seguendo la discussione nelle sezioni precedenti, gli integrali nella parentesi quadra sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1 - i\chi)$ e $t = T' = T(1 - i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t' = (1 - i\chi)t$.

¹Useremo il simbolo $\dagger$ sia per indicare la coniugazione hermitiana nel caso di operatori, che la coniugazione complessa delle funzioni numeriche che rappresentano le traiettorie delle stesse grandezze.

Le funzioni di Green si ottengono allora come derivate funzionali di $Z[J]$.

Per chi non lo avesse ancora incontrato, il concetto di “derivata funzionale” è molto semplice. Consideriamo una funzione $f(x)$, e un funzionale $X[f(x)]$. Consideriamo poi una variazione $f(x) \rightarrow f(x) + \epsilon(x)$. Il valore di $X[f + \epsilon]$ può essere sviluppato in potenze di ϵ , e questo sviluppo ci permette di definire implicitamente, in analogia con lo sviluppo di Taylor, le derivate funzionali di X rispetto ad f :

$$\begin{aligned} X[f + \epsilon] = & X[f] + \int dx \frac{\delta X}{\delta \epsilon(x)} \epsilon(x) + \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 X}{\delta \epsilon(x_1) \delta \epsilon(x_2)} \epsilon(x_1) \epsilon(x_2) \\ & \dots + \frac{1}{N!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \frac{\delta^N X}{\delta \epsilon(x_1) \dots \delta \epsilon(x_N)} \epsilon(x_1) \dots \epsilon(x_N) + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se analogamente eseguiamo uno sviluppo di Taylor della $Z[J]$ in potenze di J ,

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^N}{N!} \right] \int D[q(t)] \exp(iS) \left(\int dt \sum_k q_k(t) J_k(t) \right)^N, \quad (3.15)$$

e in particolare

$$Z[0] = \int D[q(t)] \exp(iS), \quad (3.16)$$

Alla luce della (2.26) possiamo riscrivere questo risultato come un polinomio nelle $J_k(t)$ i cui coefficienti sono le funzioni di Green,

$$Z[J] = Z[0] \sum_{N=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^N}{N!} \right] \int dt_1 \dots dt_N J_{k_1}(t_1) \dots J_{k_N}(t_N) G_{k_1, \dots, k_N}(t_1, \dots, t_N), \quad (3.17)$$

da cui le singole funzioni di Green possono essere estratte con una appropriata derivata funzionale,

$$G_{k_1, \dots, k_N}(t_1, \dots, t_N) = (i)^N \frac{1}{Z[0]} \left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_{k_1}(t_1) \dots \delta J_{k_N}(t_N)} \right]_{J=0} \quad (3.18)$$

Questi concetti si applicano direttamente alle teorie di campo. Assumiamo che ci siano N campi $\phi_1(x) \dots \phi_N(x)$, dove $x = \{\vec{x}, t\}$. Definiremo il funzionale generatore in termini di N funzioni di x , $J_k(x)$, ($k = 1 \dots N$),

$$Z[J] = \int D[\phi(x)] \exp \left(iS(\phi(x)) - i \int d^4x \sum_k \phi_k(x) J_k(x) \right) \quad (3.19)$$

La definizione di questo integrale segue le prescrizioni di limite e periodicità specificate nella sezione precedente, eqs. (3.5), (3.6). Le funzioni di Green a N punti risultano allora:

$$\begin{aligned} G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) &= \langle 0 | T(\phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{\int D[\phi(x)] \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N) \exp(iS(\phi(x)))}{\int D[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} = \\ &= (i)^N \frac{1}{Z[0]} \left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_{k_1}(x_1) \dots \delta J_{k_N}(x_N)} \right]_{J=0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Una corrispondenza notevole: la (3.20) si ottiene con la semplice regola di sostituzione

$$\phi_k(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J_k(x)}, \quad (3.21)$$

che possiamo ad esempio utilizzare nel modo seguente: se $F[\phi]$ è un arbitrario funzionale dei campi, otteniamo che

$$\int D[q(t)] \exp(iS) F[\phi] = \left[F\left[i \frac{\delta}{\delta J}\right] Z[J] \right]_{J=0}, \quad (3.22)$$

un risultato che utilizzeremo per ricavare lo sviluppo perturbativo di una teoria di campo.

Per un campo complesso possiamo definire un funzionale generatore mediante due funzioni reali J_1, J_2 o, meglio, in termini di una funzione complessa J e della sua coniugata $J^\dagger$,

$$Z(J, J^\dagger) = \int D[\phi(x)] D[\phi^\dagger(x)] \exp\left(iS(\phi(x), \phi^\dagger(x)) - i \int d^4x (\phi^\dagger(x) J(x) + J^\dagger(x) \phi(x))\right) \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

Le funzioni di Green si ottengono allora dalla regola di sostituzione (vedi eq. 3.21)

$$\phi(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J^\dagger(x)}, \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J(x)} \quad (3.25)$$

che si estende in modo ovvio al caso di più campi reali o complessi.

Invarianza per traslazioni e conservazione del quadri-momento. La forma delle funzioni di Green data nella seconda riga della (3.20) permette di discutere in modo molto semplice l' invarianza per traslazioni. Se consideriamo una traslazione di a^μ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} G_{k_1, \dots, k_N}(x_1 + a, \dots, x_N + a) &= \frac{\int D[\phi(x)] \phi(x_1 + a) \dots \phi(x_N + a) \exp(iS(\phi(x)))}{\int D[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} = \\ &= \frac{\int D[\phi(x)] \phi(x_1 + a) \dots \phi(x_N + a) \exp(iS(\phi(x + a)))}{\int D[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} = \\ &= \frac{\int D[\phi(x)] \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \exp(iS(\phi(x)))}{\int D[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} = G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove abbiamo usato l' invarianza per traslazioni dell' azione e l' ultimo passaggio segue dall' invarianza della misura di integrazione funzionale per la sostituzione: $\phi(x) \rightarrow \phi(x + a)$.

Le funzioni di Green, sono funzioni solo delle differenze delle x_k e quindi la loro trasformata di Fourier deve contenere una funzione delta della conservazione del quadri-momento:

$$\int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{i[(p_1 x_1) + \dots + (p_N x_N)]} G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) = (2\pi)^4 \tilde{G}(p_1, \dots, p_N) \quad (3.27)$$

dove $\tilde{G}$ è una funzione regolare dei quadri-momenti. Lasciamo al lettore di dimostrare la (3.27) a partire dalla (3.26).

3.2 L'oscillatore armonico

In questa sezione applicheremo i concetti che abbiamo illustrati a un caso particolarmente semplice, quello di un oscillatore armonico di massa $m = 1$, con un hamiltoniano e lagrangiano rispettivamente dati da

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2); \quad L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \quad (3.28)$$

Vogliamo usare la tecnica del funzionale Z per calcolare le funzioni di Green. Seguiremo i calcoli in qualche dettaglio, dato che essi si applicano direttamente a situazioni interessanti, ad esempio alla teoria dei campi. Prima di procedere con il funzionale Z , calcoliamo la funzione di Green a due punti partendo dalla normale formulazione della Meccanica Quantistica in modo da poter verificare la equivalenza delle due formulazioni.

Ricordiamo che, in termini degli operatori di creazione e distruzione (vedi ad esempio [5]), abbiamo

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger); \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad a|1\rangle = |0\rangle; \quad H|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle, \quad H|1\rangle = \frac{3\omega}{2}|1\rangle$$

$$\text{e quindi,} \quad q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}|1\rangle; \quad q|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}|0\rangle$$

Considerando prima il caso in cui $t_1 > t_2$ abbiamo

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \langle 0|e^{iHt_1}q e^{-iH(t_1-t_2)}q e^{-iHt_2}|0\rangle \\ &= \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(t_1-t_2)}; \quad (t_1 > t_2) \end{aligned}$$

e, mettendo assieme il risultato per $t_2 > t_1$,

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{2\omega} \left(e^{-i\omega(t_1-t_2)}\theta(t_1-t_2) + e^{-i\omega(t_2-t_1)}\theta(t_2-t_1) \right) \quad (3.29)$$

Per quanto riguarda il metodo della somma sui cammini, notiamo anzitutto che con una integrazione per parti

$$S = \frac{1}{2} \int dt (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) = -\frac{1}{2} \int dt (q\ddot{q} - \omega^2 q^2) = -\frac{1}{2} \int dt (q\mathcal{O}q) \quad (3.30)$$

dove $\mathcal{O}$ è l'operatore differenziale

$$\mathcal{O} = \partial_t^2 + \omega^2 \quad (3.31)$$

Il funzionale generatore sarà quindi

$$Z[J] = \int D[q(t)] \exp \left[\frac{-i}{2} \int dt (q\mathcal{O}q + 2qJ) \right] \quad (3.32)$$

La strategia per eseguire l'integrale è quella standard per integrare funzioni del tipo $\exp(-ax^2 + bx)$, usata ad esempio nella Appendice A, e consiste nel riscrivere l'esponente come quadrato perfetto, per

ottenere un integrale gaussiano. Procediamo formalmente, riscrivendo la (3.32) come²

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[q(t)] \exp \frac{-i}{2} \int dt ((q + \mathcal{O}^{-1}J) \mathcal{O} (q + \mathcal{O}^{-1}J) - (\mathcal{O}^{-1}J) \mathcal{O} (\mathcal{O}^{-1}J)) \\ &= \exp \left[\frac{i}{2} \int dt (\mathcal{O}^{-1}J) \mathcal{O} (\mathcal{O}^{-1}J) \right] \int D[q(t)] \exp \left[\frac{-i}{2} \int dt (q + \mathcal{O}^{-1}J) \mathcal{O} (q + \mathcal{O}^{-1}J) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

L'integrale funzionale nell'ultima espressione è in realtà una costante indipendente da J , come si vede con un cambiamento di variabili³ $q \rightarrow q' = q + \mathcal{O}^{-1}J$, e in conclusione

$$Z[J] = K \exp \left[\frac{i}{2} \int dt (\mathcal{O}^{-1}J) \mathcal{O} (\mathcal{O}^{-1}J) \right] \quad (3.34)$$

Una costante moltiplicativa non ha alcun effetto sul valore delle funzioni di Green (vedi ad esempio la eq. (3.18)). per cui possiamo semplicemente scrivere

$$Z[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int dt J \mathcal{O}^{-1}J \right] \quad (3.35)$$

L'inverso di $\mathcal{O}$ sarà un operatore integrale:

$$(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = - \int dt' G(t-t') J(t') \quad (3.36)$$

La funzione G è detta "propagatore". Il segno è stato scelto in vista di quanto faremo poi sulla teoria dei campi e delle convenzioni esistenti, e deve essere:

$$\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = J(t)$$

quindi la funzione $G(t)$ deve obbedire l'equazione differenziale

$$\mathcal{O} G(t) = -\delta(t) \quad (3.37)$$

Dobbiamo però ricordare che la $Z[J]$ è definita (eq. 3.13) come limite partendo da valori del tempo con una piccola⁴ parte immaginaria negativa, $t' = (1 - i\chi)t$. Per χ piccolo ma non nullo, l'operatore differenziale $\mathcal{O}$ diventa

$$\mathcal{O} = \partial_{t'}^2 + \omega^2 = (1 + 2i\chi)\partial_t^2 + \omega^2 \quad (3.38)$$

²Per verificare questo risultato, notare che, con due integrazioni per parti,

$$\int dt (\mathcal{O}^{-1}J) \mathcal{O} \phi = \int dt (\mathcal{O} (\mathcal{O}^{-1}J)) \phi = \int dt J \phi$$

³Ricordiamo che l'integrale funzionale si estende su tutte le orbite periodiche, $q(+\infty) = q(-\infty)$, quindi vogliamo che anche q' sia periodico. Occorre quindi imporre qualche restrizione su $J(t)$, ad esempio che le funzioni $J(t)$ ammissibili tendano abbastanza rapidamente a zero per $t \rightarrow \pm\infty$. Una analoga restrizione si dovrà applicare nel caso della teoria dei campi.

⁴Nelle seguenti manipolazioni trascureremo termini $\propto \chi^2$.

e il propagatore $G(t)$ sarà il limite per $\chi \rightarrow 0$ di una funzione $G(t, \chi)$ che obbedisce l'equazione⁵, vedi la eq. (2.17),

$$((1 + 2i\chi)\partial_t^2 + \omega^2)G(t, \chi) = -\delta(t) \quad (3.39)$$

La soluzione generale di questa equazione è la somma di una soluzione particolare e della soluzione generale della equazione omogenea, che possiamo scrivere, sempre trascurando termini $\mathcal{O}(\chi^2)$,

$$\partial^2 G = -((1 - i\chi)\omega)^2 G; \quad \rightarrow \quad G = a e^{-it\omega(1-i\chi)} + b e^{it\omega(1-i\chi)}$$

Per trovare una soluzione della (3.39) passiamo alle trasformate di Fourier,

$$G(t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int dE G(E, \chi) e^{-iEt} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int dE e^{-iEt} \quad (3.40)$$

Quindi

$$G(E, \chi) = \frac{-1}{\omega^2 - E^2(1 + 2i\chi)} = \frac{(1 - 2i\chi)}{E^2 - \omega^2(1 - 2i\chi)} \quad (3.41)$$

e trascurando il fattore moltiplicativo $(1 - 2i\chi)$,

$$G(E, \chi) = \frac{1}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} \quad \text{oppure} \quad = \frac{1}{E^2 - (\omega - i\eta)^2} \quad (3.42)$$

dove $\epsilon = 2\chi\omega^2$, $\eta = \chi\omega$

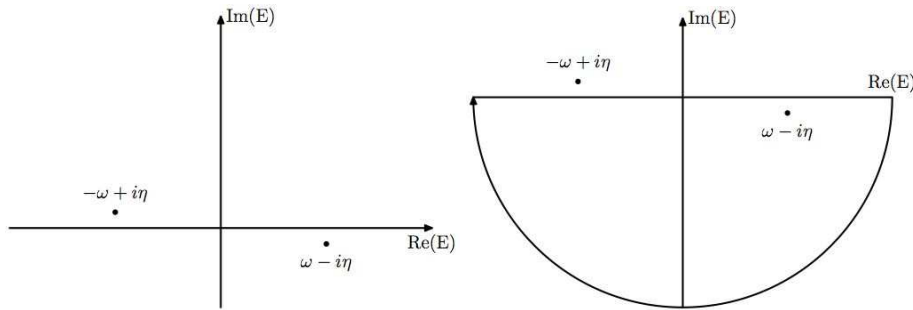


Figura 3.1: Posizione dei poli nella funzione $G(x, \chi)$ e cammino di integrazione per tempi positivi

Possiamo adesso calcolare $G(t, \chi)$,

$$G(t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int dE \frac{e^{-iEt}}{E^2 - (\omega - i\eta)^2} \quad (3.43)$$

⁵Stiamo trascurando fattori moltiplicativi che tendono ad uno quando $\chi \rightarrow 0$. Ad esempio avremmo dovuto scrivere $\delta(t') = \delta(t)/(1 - i\chi)$, ma questo fattore è irrilevante nel limite.

per $t > 0$ il cammino di integrazione può essere completato sul semipiano inferiore — figura 3.2 — e comprende il polo di destra, mentre per $t < 0$ il cammino di integrazione va chiuso nel semipiano superiore e comprende il polo di sinistra. Notiamo che la presenza di una parte immaginaria del tempo risulta in una selezione del polo che contribuisce all'integrazione. Applicando il teorema dei residui in ciascuno dei due casi, $t > 0$ e $t < 0$, otteniamo quindi una soluzione particolare della (3.39),

$$G(t, \chi) = \frac{-i}{2\omega} \left(e^{-it\omega(1-i\chi)} \theta(t) + e^{it\omega(1-i\chi)} \theta(-t) \right) \quad (3.44)$$

mentre la soluzione generale sarà

$$G(t, \chi) = \frac{-i}{2\omega} \left(e^{-it\omega(1-i\chi)} \theta(t) + e^{it\omega(1-i\chi)} \theta(-t) \right) + a e^{-it\omega(1-i\chi)} + b e^{it\omega(1-i\chi)} \quad (3.45)$$

Per determinare le costanti a, b ricordiamo che, per eseguire il calcolo che porta alla (3.35) abbiamo eseguito un cambiamento di variabili nella integrazione sui cammini,

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) - \delta q(t); \quad \delta q(t) = \int dt' G(t-t') J(t') = q(t)$$

Dato che l'integrale è esteso su tutti i cammini periodici tra $t = \pm\infty$, anche i cammini trasformati devono essere periodici, qualunque sia la funzione $J(t)$. Quindi $\delta q(t)$ deve essere periodica. La soluzione particolare soddisfa questa condizione, dato che tende a zero sia per $x \rightarrow \infty$ che per $x \rightarrow -\infty$ (ricordiamo che questo limite va preso prima di mandare $\chi \rightarrow 0$) grazie alla presenza delle funzioni $\theta(\pm t)$. Quindi dobbiamo considerare l'effetto dei termini aggiuntivi. Se prendiamo $J(t) = \delta(t - t_1)$, con t_1 un tempo arbitrario dai termini aggiuntivi a, b della (3.45) otteniamo

$$\delta q(t) = a e^{-i(t-t_1)\omega(1-i\chi)} + b e^{i(t-t_1)\omega(1-i\chi)}$$

Il primo termine diverge per $t \rightarrow -\infty$, il secondo per $t \rightarrow \infty$, quindi la sola soluzione accettabile per la (3.39) è quella in cui $a = b = 0$, cioè la soluzione (3.44) che passando al limite $\chi \rightarrow 0$ diviene

$$G(t) = \frac{-i}{2\omega} \left(e^{-i\omega t} \theta(t) + e^{i\omega t} \theta(-t) \right) \quad (3.46)$$

Il funzionale generatore — eq. (3.35), (3.36) — può essere scritto

$$Z[J] = \exp \left[\frac{-i}{2} \iint dt dt' J(t) G(t-t') J(t') \right] \quad (3.47)$$

Quindi — vedi eq. (3.18), ma qui abbiamo solo un grado di libertà —

$$G(t, t') = \langle 0 | T(q(t) q(t')) | 0 \rangle = -\frac{1}{Z(0)} \left[\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t) \delta J(t')} \right]_{J=0} = i G(t-t') \quad (3.48)$$

e sostituendo la (3.46) si ottiene il risultato della (3.29).

Abbiamo apparentemente fatto molto più lavoro che nella formulazione usuale — ma in quel caso avevamo dato per conosciute le proprietà degli operatori di creazione e distruzione, quindi il paragone non è interamente calzante — ma abbiamo ottenuto di più, dato che nel funzionale generatore della eq. (3.47) sono racchiuse tutte le possibili funzioni di Green dell'oscillatore armonico. Ad

esempio potremmo calcolare in due righe — lo lasciamo come esercizio — il valore della funzione di Green a quattro punti, $\langle 0|T(q(t_1)q(t_2)q(t_3)q(t_4))|0\rangle$.

E' interessante a questo punto fingere di non sapere nulla sulla struttura degli stati eccitati dell'oscillatore armonico e vedere cosa possiamo direttamente imparare dalla conoscenza delle funzioni di Green, cioè dalla (3.29), che riscriviamo per comodità, nel caso $t_1 > t_2$

$$\langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(t_1-t_2)}; \quad (t_1 > t_2) \quad (3.49)$$

D'altra parte, introducendo un insieme completo di stati,

$$\langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \sum_X \langle 0|q(t_1)|X\rangle \langle X|q(t_2)|0\rangle; \quad (t_1 > t_2) \quad (3.50)$$

e paragonando con il risultato precedente concludiamo che deve esistere uno stato $|1\rangle$ tale che

$$\langle 0|q(t_1)|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t_1} \quad (3.51)$$

e quindi $E_1 = E_0 + \omega$. Dalla funzione di Green a quattro punti possiamo imparare qualcosa del secondo stato eccitato, e così via. Il funzionale $Z[J]$ contiene informazioni sull'intero spettro degli stati.

3.3 Campi scalari liberi — Propagatore e funzionale generatore

Il lavoro svolto nella precedente sezione permetta di saltare direttamente alla teoria dei campi, senza comportare novità concettuali. Consideriamo quì il caso più semplice, quello di un campo scalare reale $\phi(\vec{x}, t)$ che scriveremo anche $\phi(x)$ dove x denota il quadrivettore $\{\vec{x}, t\}$. Ricordiamo naturalmente che nelle nostre unità di misura la velocità della luce è $c = 1$. La densità di lagrangiano è, per un campo senza interazioni,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2] \quad (3.52)$$

In analogia con quanto fatto per l'oscillatore armonico vogliamo calcolare il valore di aspettazione nel vuoto del prodotto ordinato nel tempo di due operatori di campo, $\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle$. Seguendo i passi eseguiti nel caso dell'oscillatore armonico, calcoliamo il funzionale generatore (eq. 3.19). Con una integrazione per parti⁶ possiamo scrivere la azione come

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2] \\ &= - \int d^4x \frac{1}{2} [\phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi^2] = - \int d^4x \frac{1}{2} (\phi K \phi) \end{aligned} \quad (3.53)$$

⁶Nel fare integrazioni per parti assumiamo una periodicità di $\phi(x)$ sia nel tempo che nello spazio, come descritto in dettaglio nella sezione ??.

dove K è l'operatore differenziale di Klein Gordon,

$$K = \partial_\mu \partial^\mu + m^2 = \square + m^2 \quad (3.54)$$

Possiamo allora calcolare il funzionale generatore (3.19) — notiamo l'analogia passo a passo con il metodo usato nella sezione precedente

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[\phi(x)] \exp \left(iS(\phi(x)) - \int d^4x \phi(x) J(x) \right) \\ &= \int D[\phi(x)] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x [\phi K \phi + 2\phi(x) J(x)] \right) \\ &= \int D[\phi(x)] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x [(\phi + K^{-1}J)K(\phi + K^{-1}J) - J K^{-1}J] \right) \\ &= \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x J K^{-1}J \right) \int D[\phi(x)] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x [(\phi + K^{-1}J)K(\phi + K^{-1}J)] \right) \end{aligned}$$

Il residuo integrale funzionale può essere eseguito con un cambiamento di variabili, $\phi \rightarrow \phi' = \phi + K^{-1}J$ ed è una costante che può essere omessa, e possiamo semplicemente scrivere

$$Z[J] = \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x J K^{-1}J \right)$$

L'inverso dell'operatore differenziale K sarà un operatore integrale, che (per riprodurre l'usuale convenzione di segno sulla funzione Δ_F) possiamo scrivere

$$K^{-1}J(x) = - \int dy \Delta_F(x-y) J(y) \quad (3.55)$$

Δ_F deve obbedire l'equazione

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x) \quad (3.56)$$

Anche questa volta, come nel caso dell'oscillatore armonico, dobbiamo stare attenti al limite da tempi immaginari per cui riscriviamo l'operatore K come (vedi eq. 3.38)

$$K = (1 + 2i\chi)\partial_t^2 - (\vec{\nabla})^2 + m^2 \quad (3.57)$$

che passando alle trasformate di Fourier,

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \Delta_F(p) e^{-ipx} \quad \delta^4(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \quad (3.58)$$

con p il quadrivettore $\{E, \vec{p}\}$, porta a (vedi discussione nella sessione precedente)

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.59)$$

Il termine $i\epsilon$ specifica il cammino di integrazione come discusso precedentemente.

Naturalmente, lo stesso risultato per la funzione di Green a due punti, inclusa la prescrizione dell' $i\epsilon$, si ottiene a partire dalla quantizzazione canonica del campo scalare, cfr. [1].

In conclusione il funzionale generatore per un campo scalare reale è

$$Z[J] = \exp \left(\frac{-i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right) \quad (3.60)$$

da cui possiamo ricavare le differenti funzioni di Green. In particolare quella a due punti è semplicemente

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = i \Delta_F(x-y) \quad (3.61)$$

La funzione $\Delta_F(x)$ è detta il propagatore del campo ϕ .

Quanto abbiamo fatto in questa sezione si estende semplicemente al caso di un campo complesso privo di interazioni con massa m , equivalente (vedi eq. 3.9) a due campi reali, il cui lagrangiano si può scrivere

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_k(x) \partial^\mu \phi_k(x) - m^2 \phi_k^2] = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (3.62)$$

Anche in questo caso $Z[J]$ (vedi eq. 3.23) si calcola esplicitamente ripetendo i passi sviluppati in precedenza, per arrivare a

$$Z[J, J^\dagger] = \exp \left(-i \iint d^4x d^4y J^\dagger(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right) \quad (3.63)$$

La funzione a due punti si calcola con le regole di sostituzione (3.25), e si ottiene

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = i \Delta_F(x-y) \quad (3.64)$$

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | T(\phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = 0 \quad (3.65)$$

Lasciamo la derivazione di questi ultimi risultati come esercizio.

3.4 Campi scalari liberi — Stati a una particella

Possiamo usare le eq. (3.64), (3.65) per studiare lo spettro degli stati nella teoria scalare, come avevamo fatto precedentemente per l'oscillatore armonico. Troveremo che un campo scalare complesso descrive due particelle della stessa massa, che potremo chiamare la *particella P* e la *antiparticella A*. Ciascuna delle due può esistere in stati caratterizzati da una quantità di moto $\vec{p}$ e energia $\omega_p = \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)}$.

Riscriviamo la (3.64) usando le (3.58), (3.59)

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \left[\frac{1}{(2\pi)} \int dE \frac{e^{-iE(t_x-t_y)}}{E^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} \right]$$

L'integrale in parentesi quadre è quello della eq. (3.43), che già conosciamo dalla (3.46), quindi:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left(\phi(x) \phi^\dagger(y) \right) | 0 \rangle &= i \Delta_F(x-y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_p(t_y-t_x)} \theta(t_y-t_x) \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Se consideriamo la trasformata di Fourier sulla variabile y , definendo

$$\phi(\vec{q}, t_y) = \int d^3 y e^{-i\vec{q}y} \phi(\vec{y}, t_y); \quad \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) = \int d^3 y e^{i\vec{q}y} \phi^\dagger(\vec{y}, t_y) \quad (3.67)$$

otteniamo

$$\langle 0 | T \left(\phi(\vec{x}, t_x) \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) \right) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} \left(e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \theta(t_y-t_x) \right)$$

Consideriamo separatamente i casi $t_x > t_y$ e $t_y > t_x$,

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x) \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \quad (t_x > t_y) \quad (3.68)$$

$$\langle 0 | \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) \phi(\vec{x}, t_x) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \quad (t_y > t_x) \quad (3.69)$$

Se definiamo due famiglie di stati $|P, \vec{q}\rangle$ e $|A, \vec{q}\rangle$,

$$|P, \vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}} \phi^\dagger(\vec{q}, 0) | 0 \rangle, \quad (3.70)$$

$$|A, \vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}} \phi(-\vec{q}, 0) | 0 \rangle \quad (3.71)$$

Dalla (3.68) otteniamo

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x) | P; \vec{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)} \quad (3.72)$$

e dal complesso coniugato della (3.69),

$$\langle 0 | \phi^\dagger(\vec{x}, t_x) | A; \vec{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)} \quad (3.73)$$

Questo ci dice già⁷ che gli stati $|P, \vec{q}\rangle$ e $|A, \vec{q}\rangle$ hanno energia $\omega_q = \sqrt{m^2 + \vec{q}^2}$ ed impulso $\vec{q}$, e sono quindi interpretabili come stati⁸ di una particella di massa m .

⁷Possiamo scrivere $\phi(\vec{x}, t) = e^{i(Ht - \vec{P}\vec{x})} \phi(0, 0) e^{-i(Ht - \vec{P}\vec{x})}$ dove H è l'hamiltoniano e $\vec{P}$ l'operatore impulso.

⁸la normalizzazione dei ket che compaiono nelle (3.70, 3.71) corrisponde al limite di volume infinito e sarà discussa in dettaglio nella prossima Sezione

Con una seconda trasformata di Fourier su $\vec{x}$ ricaviamo anche i prodotti scalari di due stati P , o due stati A :

$$\langle P; \vec{p} | P; \vec{q} \rangle = \langle A; \vec{p} | A; \vec{q} \rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (3.74)$$

Se adesso ripetiamo l'esercizio a partire dalla funzione di Green con due ϕ , (3.65), possiamo dimostrare che gli stati $|P\rangle$ e $|A\rangle$ sono ortogonali tra loro,

$$\langle P; \vec{p} | A; \vec{q} \rangle = 0 \quad (3.75)$$

Si tratta quindi di stati di due particelle differenti, ambedue di massa m .

Che i due tipi di particella siano in rapporto particella-antiparticella non si vede in una teoria così semplice, che descrive particelle prive di interazione. Introducendo però l'interazione con un campo elettromagnetico potremmo facilmente dimostrare che le due particelle hanno carica elettrica opposta. Quale chiamare particella e quale antiparticella rimane una scelta arbitraria.

Nel caso di un campo scalare reale la trattazione è più semplice, e abbiamo un solo tipo di particella.

3.5 Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo

È utile collegare gli argomenti precedenti alla formulazione del campo scalare libero in termini di operatori di creazione e distruzione (cfr. [1]). Ci poniamo all'inizio in un volume finito, per poi introdurre una normalizzazione degli stati e degli operatori di creazione appropriata nel limite di volume infinito.

Consideriamo i campi in un cubo di volume V con condizioni periodiche. Definiamo un sistema di soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon (K-G) a frequenza positiva:

$$f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{q})V}} e^{-iqx}; \quad (\square + m^2)f_q = 0; \\ \mathbf{q} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3); \quad \omega(\mathbf{q}) = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \quad (3.76)$$

dove $n_{1,2,3}$ sono interi e L è il lato del cubo, $V = L^3$. Le funzioni (3.76) sono normalizzate in V come:

$$\int_V d^3x f_q^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_t f_{q'}(x) = \delta_{q,q'} \quad (3.77)$$

dove abbiamo introdotto l'abbreviazione:

$$f \overleftrightarrow{\partial}_t g = f(\partial_t g) - (\partial_t f)g \quad (3.78)$$

Possiamo costruire gli operatori di creazione e distruzione a partire da ϕ e dalle f_q come:

$$a_q = \int d^3x \left[f_q(x)^* i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right]; \quad (\text{distruzione}) \\ a_q^\dagger = (a_q)^\dagger \quad (\text{creazione}) \\ [a_q, a_{q'}^\dagger] = i\delta_{q,q'} \quad (3.79)$$

Dopo l' integrazione spaziale, gli operatori a_q potrebbero dipendere dal tempo ma è immediato mostrare che di fatto sono costanti, in virtù dell' equazione di K-G:

$$\begin{aligned}\partial_t a_q &= i \int d^3x [f_q(x)^* (\partial_t^2 \phi(x)) - (\partial_t^2 f_q(x)^*) \phi(x)] = \\ &= i \int d^3x [f_q(x)^* (\square \phi(x)) - (\square f_q(x)^*) \phi(x)] = \\ &= i \int d^3x [f_q(x)^* (\square + m^2) \phi(x)] = 0\end{aligned}\quad (3.80)$$

poiché sia f_q che ϕ soddisfano l' equazione di K-G.

Per passare al limite continuo, introduciamo l' operatore di proiezione sugli stati con momento compreso in un intervallo tridimensionale, $\Delta^3 n$:

$$P = \sum_{\Delta^3 n} |p\rangle \langle p| \quad (3.81)$$

$P^2 = P$ in virtù della ortonormalità degli stati $|p\rangle$. Se adesso passiamo al limite di volume infinito, otteniamo:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |p\rangle \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \langle p| \quad (3.82)$$

La (3.82) suggerisce di definire dei ket normalizzati al continuo:

$$|\tilde{p}\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} |p\rangle \quad (3.83)$$

per i quali:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |\tilde{p}\rangle d^3 p \langle \tilde{p}| \quad (3.84)$$

La condizione $P^2 = P$ richiede, come condizione di normalizzazione dei nuovi ket:

$$\langle \tilde{p}' | \tilde{p} \rangle = \delta^{(3)}(p' - p) \quad (3.85)$$

Gli operatori di distruzione e creazione che corrispondono ai nuovi stati sono, evidentemente:

$$\tilde{a}_p = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_p; \quad \tilde{a}_p^\dagger = (\tilde{a}_p)^\dagger \quad (3.86)$$

e le nuove regole di commutazione si ottengono dalla (3.85):

$$\delta^{(3)}(p' - p) = \langle 0 | \tilde{a}_{p'} \tilde{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger] | 0 \rangle; \quad (3.87)$$

ovvero:

$$[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger] = \delta^{(3)}(p' - p) \quad (3.88)$$

Lo sviluppo del campo si scrive adesso come:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})V}} \left[a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right] = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} \left[\tilde{a}_p e^{-ipx} + \tilde{a}_p^\dagger e^{ipx} \right]\end{aligned}\quad (3.89)$$

I nuovi stati sono normalizzati ad avere, piuttosto che una particella nel volume di riferimento, una densità di particelle costante. Questo si vede calcolando l'energia del campo, che risulta pari a (introduciamo qui il prodotto normale degli operatori, come definito in [1]):

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \frac{1}{2} \left[:(\partial_t \phi)^2: + :(\nabla \phi)^2: + m^2 : \phi^2: \right] = \\ &= \int d^3p \omega(\mathbf{p}) \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_p; \\ E_p &= \langle \tilde{p} | H | \tilde{p} \rangle = \delta^{(3)}(0) \omega(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \omega(\mathbf{p})\end{aligned}\quad (3.90)$$

Si vede quindi che la densità di particelle nello stato $|\tilde{p}\rangle$ è: $\rho = 1/(2\pi)^3$.

Infine, notiamo che la relazione che lega i campi agli operatori di distruzione, si scrive:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_q &= \int d^3x \left[\tilde{f}_q(x)^* i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right]; \\ \tilde{f}_q(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} e^{-ipx}\end{aligned}\quad (3.91)$$

Nel seguito, adotteremo la normalizzazione del continuo, omettendo per brevità la tilde sugli operatori e sulle funzioni f_q .

Capitolo 4

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI PER LE FUNZIONI DI GREEN

Nel precedente capitolo abbiamo applicato il metodo della somma sui cammini a teorie di campo molto semplici, in particolare a campi scalari reali o complessi *liberi*, che corrispondono a particelle di spin zero. Come vedremo, questi metodi si applicano egualmente ai campi di particelle di spin 1/2, ad esempio l'elettrone e di spin 1, ad esempio il fotone. Nel primo caso dovremo imparare come trattare la quantizzazione di campi fermionici, nel secondo dovremo affrontare il problema della invarianza di gauge. In ogni caso è solamente nel caso di campi liberi che si può portare a conclusione il calcolo delle varie grandezze che caratterizzano la teoria, in particolare le funzioni di Green e il funzionale generatore. Per campi *liberi* si intende parlare di campi che descrivono particelle che non interagiscono tra loro. Questo si traduce nella richiesta che il Lagrangiano non contenga termini che sono il prodotto di più di due campi, e a questo tipo di lagrangiano corrispondono equazioni del moto lineari nei campi. Ad esempio per i campi scalari l'equazione di Klein Gordon,

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0,$$

per campi liberi di spin 1/2 l'equazione di Dirac, per il fotone le equazioni di Maxwell. In tutti questi casi la soluzione generale delle eq. del moto è data da una sovrapposizione di onde piane, che corrispondono ai diversi possibili stati di impulso definito delle particelle. In tutti i casi interessanti la situazione è molto più complessa: il lagrangiano contiene termini del terzo o quarto ordine (o di ordine ancora superiore) e le equazioni del moto non sono lineari, e si ottengono teorie non risolubili esattamente. Si ricorre allora a metodi approssimati, tra cui in primo luogo la teoria delle perturbazioni.

Anche se in questo corso vogliamo soprattutto occuparci di elettrodinamica quantistica, cominciamo con il considerare il caso semplice di un campo scalare reale con una interazione $\lambda\phi^4$, e cioè con un lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (4.1)$$

cui corrisponde una equazione del moto non lineare,

$$(\square + m^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

di cui non si conosce una soluzione generale nemmeno a livello classico.

4.1 Lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore e i diagrammi di Feynman

Anche se non sappiamo risolvere la teoria corrispondente al lagrangiano (4.1) possiamo esprimere, almeno formalmente, le grandezze di interesse fisico come serie di potenze nella *costante d'accoppiamento* λ , la cosiddetta *serie perturbativa*. In particolare possiamo esprimere le funzioni di Green come serie di potenze in λ . Se λ è piccolo, i primi termini di questa serie potranno dare una buona approssimazione della grandezza di interesse fisico.

Supponiamo di poter suddividere il lagrangiano in due termini,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}^0(\phi, \partial_\mu \phi) + \mathcal{L}^1(\phi) \quad (4.2)$$

dove $\mathcal{L}^0$ è un lagrangiano libero, ad esempio quello studiato nella sezione 3.3, $\mathcal{L}^1$ un termine di interazione¹. Il funzionale generatore sarà allora (eq. 3.19)

$$Z[J] = \int D[\phi(x)] \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}^1(\phi)\right) \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L}^0(\phi, \partial_\mu \phi) - \phi(x)J(x))\right),$$

che possiamo riscrivere (vedi eq. 3.22) come

$$Z[J] = \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}^1\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) Z^0[J], \quad (4.3)$$

dove $Z^0[J]$ è il funzionale d'azione ottenuto dal lagrangiano imperturbato $\mathcal{L}^0$. Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$, eq. (4.1), $Z^0[J]$ è quello dalla (3.60), che riportiamo per convenienza,

$$Z^0[J] = \exp\left(\frac{-i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right) \quad (4.4)$$

mentre uno sviluppo formale del funzionale generatore in potenze di λ è dato da

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right) Z^0[J] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \left(\int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)^n Z^0[J] = \\ &= Z^0[J] - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z^0[J] + \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \iint d^4x d^4y \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \left(i \frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4 Z^0[J] + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

¹Abbiamo supposto che $\mathcal{L}^1$ dipenda dai campi e non dalle loro derivate, una limitazione che semplifica i seguenti sviluppi formali ma che può essere superata senza particolari difficoltà. Pure per semplicità considereremo qui il caso di un singolo campo

Per procedere col calcolo, ordine per ordine, dobbiamo eseguire materialmente le derivate funzionali. Notiamo che (eq. 4.4)

$$i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z^0[J] = \int d^4 y \Delta_F(x-y) J(y) Z^0[J] = \int d^4 y \Delta_F(x-y) J(y) Z^0[J] \quad (4.6)$$

La prima derivata che si esegue “cala” un fattore $\Delta_F J$ dall’esponenziale, mentre quelle successive possono “calare” ulteriori fattori, o “catturare” la J da un fattore $\Delta_F J$ “calato” da una derivata precedente, ad esempio per la derivata seconda

$$i \frac{\delta}{\delta J(x')} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z^0[J] \right) = \left(\int d^4 y' \Delta_F(x'-y') J(y') \right) \left(\int d^4 y \Delta_F(x-y) J(y) \right) Z^0[J] + i \Delta_F(x-x') Z^0[J] \quad (4.7)$$

Per dominare meglio la complicazione di questi calcoli, che cresce rapidamente di derivata in derivata, si ricorre ad una rappresentazione grafica. Ad ogni fattore $(i\delta/\delta J(x))^4$ corrisponde un punto, detto “vertice” da cui escono quattro linee. Ogni linea può finire in un altro vertice di cui ha “catturato” una J (o nello stesso vertice se cattura una J prodotta da una precedente derivata), oppure in un pallino, che rappresenta una J non catturata da altre derivate. Nel primo caso la linea (che diremo “linea interna”) corrisponde a un propagatore $i\Delta_F$, nel secondo (linea “esterna”) a un fattore $\Delta_F J$. Ad esempio i due termini della derivata seconda possono essere rappresentati dai due diagrammi della figura 4.1. Naturalmente in questo caso da ciascuno dei due punti x, x' esce una sola linea. Per unificare la descrizione dei due tipi di linee ci conviene riscrivere il termine che corrisponde a una linea che termina in un pallino come $\Delta_F J = (i\Delta_F)(-iJ)$ di modo che ad ogni linea, interna o esterna, corrisponda un fattore $i\Delta_F$.



Figura 4.1: Rappresentazione grafica dei due termini della eq. (4.7). I pallini grandi tratteggiati corrispondono ciascuno ad un fattore $-iJ$.

Al termine di ordine λ della $Z[J]$ (eq. 4.5) corrisponderanno diagrammi con un singolo vertice, e ci si convince facilmente che le sole possibilità sono i diagrammi (a,b,c) della figura 4.2. Il diagramma (a), dove tutte le J sono state “catturate”, e che è privo di linee esterne, viene detto un diagramma *vuoto-vuoto*.

Il diagramma (b) rappresenta una modificazione al propagatore di una singola particella, che all’ordine λ^0 è quello che abbiamo calcolato in precedenza (sezione 3.3), e che potremmo rappresentare come diagramma senza vertici, come in (d). Anche su questo tema torneremo nel seguito. Intanto però diamo una occhiata ai diagrammi dello stesso tipo che si incontrano al secondo ordine perturbativo, nella figura 4.3. Sorge il sospetto che il diagramma (a) di questa figura sia, assieme a (d) e (b) della figura precedente, l’inizio di una serie interessante. Sospetto come vedremo del tutto giustificato.

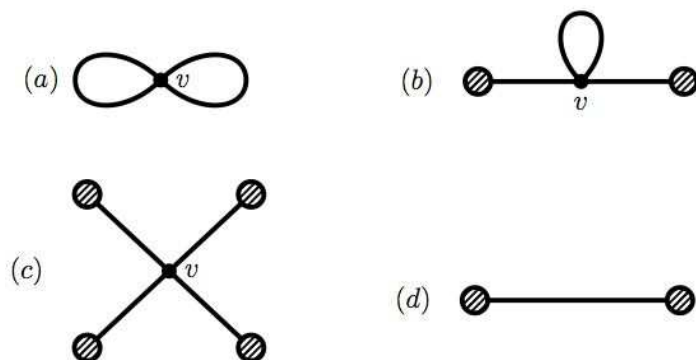


Figura 4.2: I diagrammi al primo ordine perturbativo

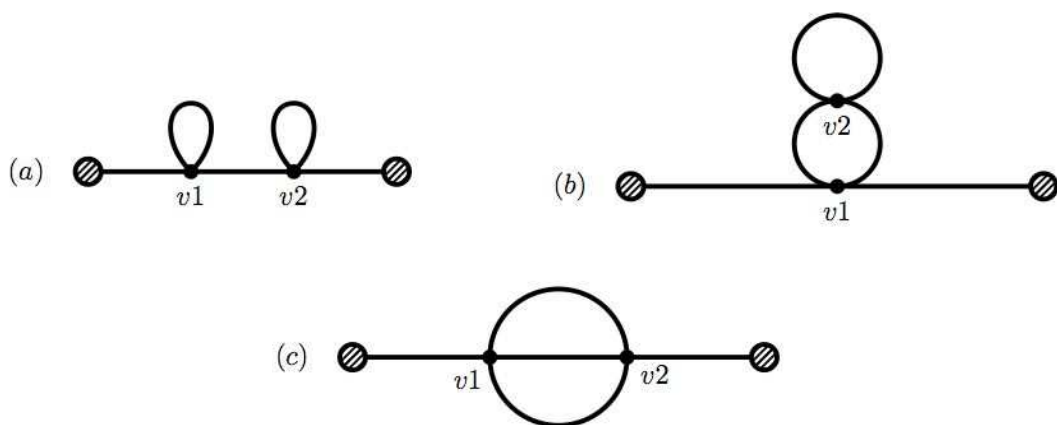


Figura 4.3: Correzioni al propagatore al secondo ordine perturbativo

Il diagramma (c) della figura 4.2, infine, rappresenta lo scattering di due particelle. Come vedremo questo è direttamente connesso all'elemento della matrice S che descrive questo processo, o meglio alla approssimazione al primo ordine λ a questo processo. Anche in questo caso esistono correzioni di ordine superiore, al secondo ordine quelli della figura 4.4

La corrispondenza tra diagrammi della teoria $\lambda\phi^4$ e termini in $Z[J]$ si ottiene con alcune semplici regole:

pallino	$-i \int d^4x J(x)$	
vertice	$\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4v$	(4.8)
linea da x a y	$i\Delta_F(x-y)$	

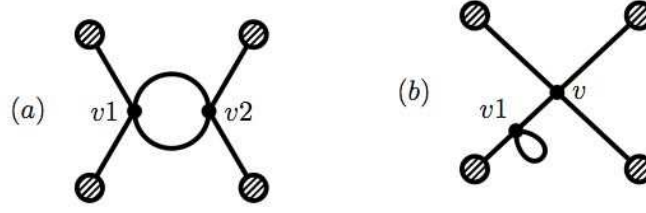


Figura 4.4: Correzioni al vertice al secondo ordine perturbativo

a queste si deve aggiungere una regola per calcolare il fattore combinatorio da applicare al contributo di ciascun diagramma. Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$ quest'ultima regola è parecchio più complicata che nel caso della elettrodinamica quantistica. Nel nostro contesto, in cui la $\lambda\phi^4$ ci serve come modello semplice per la QED, conviene soprassedere a questa discussione. È sempre possibile, una volta identificata — con le regole che abbiamo dato — la forma di un particolare contributo alla $Z[J]$, tornare alla (4.5) per ottenere il fattore combinatorio corretto.

A ogni vertice o pallino si associa un punto nello spazio-tempo (x, v) , su cui viene eseguita una integrazione, e l'argomento delle Δ_F è la differenza tra le posizioni degli estremi, siano essi vertici o pallino. Quindi al diagramma (c) della figura 4.2 corrisponde un termine in $Z[J]$ che possiamo chiamare D_1 (è il primo diagramma che calcoliamo!)

$$D_1[J] = (-i)^4 \int d^4 x_1 J(x_1) \int d^4 x_2 J(x_2) \int d^4 x_3 J(x_3) \int d^4 x_4 J(x_4) \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 v \quad (4.9)$$

$$(i)^4 \Delta_F(x_1 - v) \Delta_F(x_2 - v) \Delta_F(x_3 - v) \Delta_F(x_4 - v)$$

che rappresenta il primo ordine in λ del termine in $Z[J]$ proporzionale a J^4 . Le correzioni di ordine λ^2 sono date dai diagrammi della fig. 4.4; (a) corrisponde a

$$D_2[J] = (-i)^4 (6^2) \int d^4 x_1 J(x_1) \int d^4 x_2 J(x_2) \int d^4 x_3 J(x_3) \int d^4 x_4 J(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \iint d^4 v_1 d^4 v_2$$

$$(i)^6 \Delta_F(x_1 - v_1) \Delta_F(x_2 - v_1) \Delta_F(x_3 - v_2) \Delta_F(x_4 - v_2) \Delta_F(v_1 - v_2) \Delta_F(v_1 - v_2)$$

dove (6^2) è un fattore combinatorio. Avremmo potuto direttamente ottenere questi risultati, incluso il fattore (6^2) , isolando i termini J^4 nella eq. (4.5). Lasciamo questo compito ai lettori come esercizio. Del diagramma (b) della figura 4.4 discuteremo a parte: si tratta di una correzione sulle linee esterne.

4.2 Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green

Consideriamo la funzione di Green del campo scalare reale a $2k$ punti (nella teoria con interazione $\lambda\phi^4$ si ottiene un risultato non nullo solo per un numero pari di punti²). Riassumendo le formule

²Il lagrangiano di questa teoria, eq. (4.1), è simmetrico sotto l'operazione $\phi \rightarrow -\phi$. Deve quindi esistere un operatore unitario $\mathbf{P}$ sullo spazio degli stati, tale che $\mathbf{P}\phi\mathbf{P} = -\phi$. Nel linguaggio degli operatori di creazione e distruzione si verifica facilmente che se $|n\rangle$ è un stato ad n particelle, $\mathbf{P}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle$. Dato che il vuoto ($n=0$) è pari, ne segue che $\langle n|\phi|0\rangle = 0$ se n è pari.

precedenti, abbiamo:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) &= \int D[\phi(x)] \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_{2k}) \exp[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)] = \\ &= \left[\left(i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) \dots \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})} \right) Z[J] \right]_{J=0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ed inoltre, secondo lo sviluppo perturbativo:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[\phi(x)] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}^1(\phi)] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}^0 - i \int d^4x J(x) \phi(x)] = \\ &= \exp[i \int d^4x \mathcal{L}^1(i \frac{\delta}{\delta J(x)})] Z^0[J] = \sum_n \left(\frac{i}{n!} \right)^n \left[\int d^4x \mathcal{L}^1(i \frac{\delta}{\delta J(x)}) \right]^n Z^0[J] \end{aligned} \quad (4.11)$$

con:

$$Z^0[J] = \frac{-i}{2} \int \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) = \frac{-i}{2} (J \Delta_F J) \quad (4.12)$$

Lo sviluppo perturbativo di G prende quindi la forma:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) &= \sum_n G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}); \\ G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) &= \\ &= \left\{ \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) \dots \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})} \right) \frac{1}{n!} \left[i \int d^4x \mathcal{L}^1(i \frac{\delta}{\delta J(x)}) \right]^n Z^0[J] \right\}_{J=0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Poiché dobbiamo porre alla fine $J = 0$, nello sviluppo di Z^0 in potenze di $(J \Delta_F J)$ conta solo il termine di grado pari al numero di derivate funzionali che compaiono nella eq. (4.13). Specializzandoci al caso dell' interazione $\lambda \phi^4$, possiamo scrivere, in conclusione:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) &= \\ &= \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) \dots \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})} \right) \frac{1}{n!} \left[i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right]^n \cdot \\ &\cdot \frac{1}{M!} \left[\frac{-i}{2} (J \Delta_F J) \right]^M \end{aligned} \quad (4.14)$$

con $M = k + 2n$.

Le derivate funzionali possono essere eseguite, naturalmente, in molti modi diversi. Ciascuno di essi può essere rappresentato con un *grafico di Feynman*, un grafico nello spazio-tempo in cui M linee, i propagatori $i\Delta_F$, connettono i punti $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$ tra loro e/o con gli n punti in cui sono localizzate le interazioni, i *vertici*. Ciascuno di questi grafici è associato ad un' ampiezza che è il prodotto di propagatori, costanti di accoppiamento λ e fattori numerici, determinati dalla struttura della (4.14). Esplicitamente, possiamo vedere dalla (4.14) che:

- ogni volta che due derivate agiscono sullo stesso propagatore, otteniamo un fattore 2 e quindi il risultato è un fattore $i\Delta_F$ calcolato nei punti associati dalle derivate funzionali in questione;

- i ruoli dei propagatori possono essere permutati senza cambiare il risultato: questo semplifica il fattore $1/M!$;
- similmente, i ruoli dei vertici possono essere permutati ottenendo $n!$ contributi identici, che semplifica il fattore $1/n!$

Le considerazioni appena svolte si riassumono in prescrizioni semplici ed eleganti per ottenere la funzione di Green di $2k$ punti all'ordine n della teoria delle perturbazioni, che prendono il nome di *regole di Feynman*.

Grafici di Feynman Iniziamo con l'individuazione delle ampiezze indipendenti che contribuiscono alla funzione di Green, costruendo i grafici di Feynman corrispondenti.

- Fissiamo i punti esterni $(x_1, x_2, \dots, x_{2k})$ ed i punti $(x, y, z, \dots)$ dove sono localizzate le interazioni (vertici);
- disegniamo i grafici in cui M linee connettono tra loro punti esterni e vertici in tutti i modi topologicamente indipendenti;

Regole di Feynman Ad ogni grafico è associata un'ampiezza, secondo le regole seguenti.

- un fattore $i\Delta_F(u - v)$ per ogni linea che inizia nel punto u e finisce in v ;
- un fattore $i\lambda$ per ogni vertice;
- un fattore numerico, da calcolare caso per caso, che nasce dalla incompleta cancellazione dei fattori $1/4!$ nei vertici con la molteplicità dei modi in cui si eseguono le derivate corrispondenti al grafico;
- integriamo l'ampiezza sulle coordinate di tutti i vertici;
- la funzione di Green è la somma delle ampiezze corrispondenti a ciascun grafico.

Diamo come esempio il calcolo della funzione a due e quattro punti al primo ordine in λ .

Calcolo di $G^{(1)}(x_1, x_2)$. Con un vertice e due punti esterni possiamo costruire due grafici indipendenti, Fig. 4.5. Calcoliamo adesso i fattori numerici relativi ai due grafici eseguendo esplicitamente le derivate funzionali (per brevità scriviamo 1, 2 al posto di $x_{1,2}$):

$$G^{(1)}(1,2) = (i\frac{\delta}{\delta J(1)})(i\frac{\delta}{\delta J(2)})\frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\frac{1}{3!}[\frac{-i}{2}(J\Delta_F J)]^3 \quad (4.15)$$

Eseguiamo le derivate rispetto a $J(1)$ e $J(2)$. Le due derivate possono agire: (a) sullo stesso propagatore, (b) su propagatori diversi:

$$\begin{aligned} G_{2a} &= i\Delta_F(1-2)\frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\frac{1}{2!}(\frac{-i}{2}J\Delta_F J)^2; \\ G_{2b} &= \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \times \\ &\times \int \int d^4u d^4v [i\Delta_F(1-u)(-iJ(u))] [i\Delta_F(2-v)(-iJ(v))] (\frac{-i}{2}J\Delta_F J) \end{aligned} \quad (4.16)$$

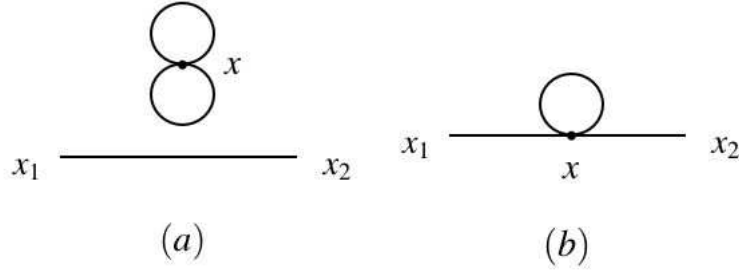


Figura 4.5: Grafici di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a due punti.

Nel caso di G_{2a} , eseguiamo una prima derivata e troviamo:

$$G_{2a} = i\Delta_F(1-2) \frac{i\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \int d^4u \Delta_F(x-u) J(u) \left[\frac{-i}{2} (J\Delta_F J)\right] \quad (4.17)$$

Una delle altre tre derivate deve agire su $J(u)$, il che può avvenire in tre modi diversi, le altre due eliminano le correnti in $(J\Delta_F J)$. Quindi:

$$G_{2a} = C_a [i\Delta_F(1-2)] (i\lambda) [i\Delta_F(0)]^2; \quad C_a = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8} \quad (4.18)$$

Nel caso di G_{2b} , due derivate devono operare sulle correnti $J(u)$ e $J(v)$, che può avvenire in $4 \cdot 3$ modi diversi, mentre le altre due agiscono su $(J\Delta_F J)$. In totale, troviamo quindi:

$$G_{2b} = C_b i\lambda [i\Delta_F(1-x)] [i\Delta_F(2-x) i\Delta_F(0)]; \quad C_b = \frac{12}{4!} = \frac{1}{2} \quad (4.19)$$

Calcolo di $G^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Riportiamo in Fig. 4.6 i grafici di Feynman della funzione a quattro punti al primo ordine.

Il calcolo esplicito si effettua a partire dall'espressione:

$$G^{(1)}(1,2,3,4) = \left(i \frac{\delta}{\delta J(1)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(2)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(3)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(4)}\right) \frac{i\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \frac{1}{4!} \left[\frac{-i}{2} (J\Delta_F J)\right]^4 \quad (4.20)$$

Il grafico (a) corrisponde a far agire due a due le derivate rispetto alle correnti dei punti esterni su due propagatori. Otteniamo così:

$$G_{4a} = \frac{i\lambda}{4!} i\Delta_F(1-2) i\Delta_F(3-4) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \frac{1}{2!} \left[\frac{-i}{2} (J\Delta_F J)\right]^2 + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \quad (4.21)$$

Ripetendo l'argomento che ci ha portato alla (4.18) troviamo quindi:

$$G_{4a} = \frac{3}{4!} i\lambda i\Delta_F(1-2) i\Delta_F(3-4) [i\Delta_F(0)]^2 + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \quad (4.22)$$

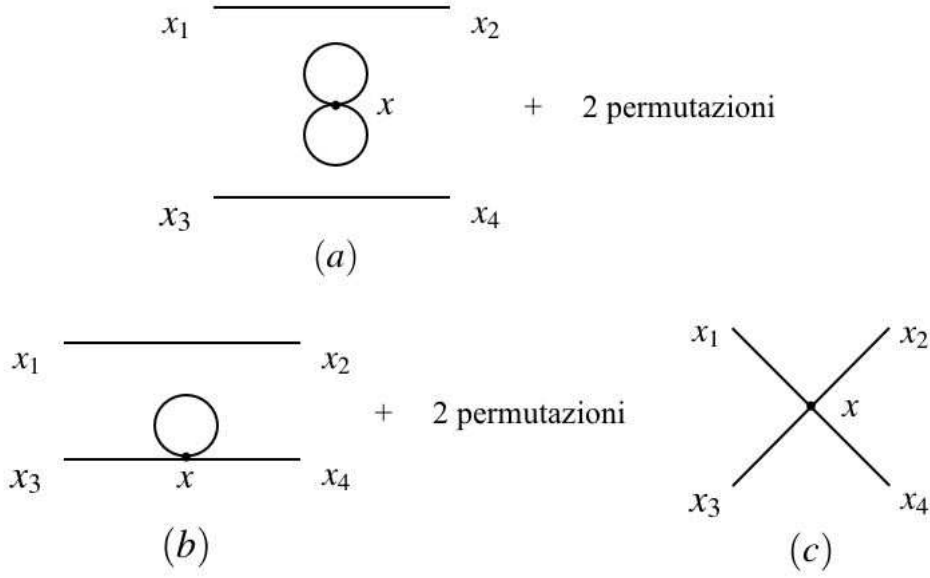


Figura 4.6: Grafici di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a quattro punti.

Per il grafico (b), solo due delle derivate rispetto alle correnti nei punti esterni vanno sullo stesso propagatore. Troviamo quindi:

$$G_{4b} = \frac{i\lambda}{4!} i\Delta_F(1-2) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \times \\ \times \int \int d^4u d^4v \Delta_F(3-u) \Delta_F(4-v) J(u) J(v) \left[\frac{-i}{2} (J\Delta_F J) \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \quad (4.23)$$

Procedendo come per la (4.19) troviamo quindi:

$$G_{4b} = \frac{12}{4!} i\lambda i\Delta_F(1-2) i\Delta_F(3-x) i\Delta_F(4-x) i\Delta_F(0) + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \quad (4.24)$$

Calcoliamo infine il grafico (c). In questo caso le derivate rispetto alle correnti nei punti esterni devono agire tutte su propagatori diversi. Troviamo quindi:

$$G_{4c} = \frac{i\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \int \int \int \int d^4u d^4v d^4w d^4z \\ \Delta_F(1-u) \Delta_F(2-v) \Delta_F(3-w) \Delta_F(4-z) J(u) J(v) J(w) J(z) \quad (4.25)$$

In questo caso la cancellazione del fattore $1/4!$ è completa e troviamo:

$$G_{4c} = i\lambda i\Delta_F(1-x) i\Delta_F(2-x) i\Delta_F(3-x) i\Delta_F(4-x). \quad (4.26)$$

A chiusura della Sezione, riportiamo alcuni commenti di ordine generale.

Grafici di Feynman e somma sui cammini. L'analisi delle funzioni di Green in termini dei grafici di Feynman corrisponde in pieno all'idea della somma sui cammini che abbiamo introdotto all'inizio del volume. Possiamo interpretare la funzione di Green con, ad esempio, 4 punti come l'ampiezza quantistica di un processo nello spazio-tempo in cui due particelle vengono create in x_1 ed x_2 ed assorbite in x_3 ed x_4 . Ogni grafico indipendente, fissate le posizioni dei vertici, corrisponde ad un cammino possibile e l'ampiezza corrispondente è data dal prodotto delle ampiezze delle diverse componenti del cammino: ampiezza di propagazione, $i\Delta_F(x-y)$, e interazione, $i\lambda$. Lo sviluppo perturbativo corrisponde ad avere una, due, ..., n , interazioni lungo i cammini delle diverse particelle.

La posizione dei punti esterni non determina quante interazioni avvengono nel processo né fissano i punti dello spazio-tempo dove avvengono le interazioni stesse. Secondo i principi generali della Meccanica Quantistica, dobbiamo quindi integrare sullo spazio-tempo le coordinate delle interazioni (vertici) per ciascun grafico e sommare le ampiezze dei grafici indipendenti.

Ampiezze di diffusione e grafici connessi. È naturale suddividere i grafici di una data funzione di Green in grafici *connessi* e *sconnessi* (ad esempio, nella Fig. 4.6, i grafici (a) e (b) sono sconnessi, mentre il grafico (c) è connesso). Le ampiezze dei grafici sconnessi sono il prodotto di due o più ampiezze, ciascuna relativa ad un gruppo distinto di punti nello spazio tempo. Queste ampiezze corrispondono a processi indipendenti che avvengono in regioni che possono essere anche macroscopicamente lontane tra loro, senza che l'ampiezza si riduca a zero con la distanza. Nel confrontare con i processi di diffusione osservati siamo interessati solo alle ampiezze irriducibili, che corrispondono ai grafici connessi. Nella prossima Sezione analizzeremo come ci si possa ridurre alla componente connessa del funzionale generatore, $Z[J]$.

Contrazioni nello stesso vertice.

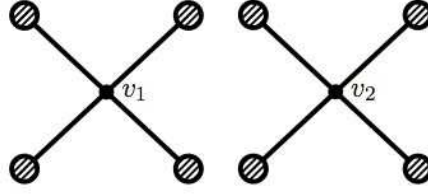
4.3 Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto

Torniamo a considerare lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore, $Z[J]$.

I diagrammi che abbiamo mostrato nelle figure 4.2 – 4.4 sono tutti topologicamente connessi. In ciascuno di essi ci si può spostare da qualsiasi vertice o pallino a qualsiasi altro muovendosi lungo le linee del diagramma. Esistono anche diagrammi non connessi. Ad esempio tra i termini del secondo ordine in λ nella eq. (4.5) ne esiste uno in cui ciascuna delle otto derivate “cala” un fattore $\Delta_F J$, il che risulta semplicemente nel quadrato del termine della eq. (4.9). Questo termine è rappresentato dalla figura 4.7, un diagramma composto da due parti topologicamente separate centrate sui due vertici ν_1, ν_2 . A un diagramma non connesso corrisponde un termine (un funzionale di J) che si fattorizza nel prodotto di due o più funzionali di J , e nel caso della figura 4.7 si ottiene³ $(D_1[J])^2/2$.

Dal punto di vista fisico ciascuna delle due parti del diagramma nella fig. 4.7 rappresenta un processo di scattering tra due particelle. La combinazione delle due parti rappresenta due processi di scattering indipendenti tra loro: possiamo immaginare che il primo avvenga al CERN, il secondo a Frascati. L'ampiezza di probabilità per la combinazione di più processi indipendenti è semplicemente il prodotto delle ampiezze di ciascuno di essi, e la probabilità che tutti avvengano è il prodotto delle

³La giustificazione di questo risultato si troverà nella appendice B, eq. (B.14).

Figura 4.7: Un diagramma sconnesso al secondo ordine in λ .

singole probabilità. Non c'è altro da imparare dallo studio di processi indipendenti, quindi conviene concentrarci sui singoli processi, che corrispondono a diagrammi connessi.

Abbiamo visto che tramite la teoria delle perturbazioni il funzionale $Z[J]$ può essere espresso come una somma di diagrammi, di cui alcuni connessi, altri non connessi. È possibile definire un funzionale $W[J]$ che genera solo i diagrammi connessi,

$$W[J] = \sum_{(\text{diag. connessi})} D_i[J] \quad (4.27)$$

Il rapporto tra $W[J]$ e $Z[J]$ è semplicemente dato da:

$$Z[J] = \exp(W[J]) \quad (4.28)$$

La dimostrazione di questo risultato è riportato nella appendice B.

Notiamo ancora che per $J = 0$ otteniamo

$$Z[0] = \exp(W[0]) \quad (4.29)$$

dove $W[0]$ corrisponde alla somma dei diagrammi connessi vuoto-vuoto, quelli che non hanno “palino”, gli unici che non si annullano per $J = 0$. Possiamo quindi scrivere

$$Z[J] = Z[0] \exp(W'[J]) \quad (4.30)$$

dove $W'[J]$ è la somma dei diagrammi connessi che non siano del tipo vuoto-vuoto, quindi dei diagrammi provvisti di gambe esterne. L'effetto dei diagrammi vuoto-vuoto sul funzionale generatore $Z[J]$ consiste quindi in una costante moltiplicativa $Z[0]$. Come si vede dalla (3.20) il fattore $Z[0]$ non contribuisce al calcolo delle funzioni di Green, e possiamo semplicemente tralasciarlo.

Possiamo applicare questo concetto direttamente alle funzioni di Green, definendo le funzioni di Green *connesse* tramite le derivate del funzionale $W[J]$, o in modo equivalente del funzionale $W'[J]$, dato che i due differiscono per una costante $W[0]$ che non contribuisce alle derivate:

$$\langle 0 | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_N)) | 0 \rangle_{\text{Conn.}} = \frac{i\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{i\delta}{\delta J_N(x_N)} W[J] \Big|_{J=0} \quad (4.31)$$

Alla funzione di Green connessa ad N punti contribuiranno i diagrammi connessi con esattamente N linee esterne, quindi N fattori J . Se guardiamo alle regole per i diagrammi della (4.8), vediamo

che le derivate funzionali $i\delta/\delta J(x_k)$ della (4.31) sopprimono i fattori $-iJ(x)$ delle linee esterne, e fissano ad x_k la terminazione di ciascuna linea. Si passa quindi dai diagrammi per il funzionale generatore a quelli per la funzione di Green semplicemente sopprimendo i pallini e il relativo fattore, $-i \int d^4x J(x)$, e fissando l'estremità di ciascuna linea alla coordinata di uno dei campi presenti nella funzione di Green. Consideriamo ad esempio la funzione a quattro punti: il diagramma di ordine minore che vi contribuisce è il (c) della figura 4.2, da cui (vedi la eq. 4.9) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_4))|0\rangle \Big|_{\text{Conn.}} &= \\ &= -i\lambda \int d^4v (i)^4 \Delta_F(x_1 - v) \Delta_F(x_2 - v) \Delta_F(x_3 - v) \Delta_F(x_4 - v) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Notiamo che la derivata quarta a primo membro ha anche eliminato il fattore $1/4!$ della (4.9). A

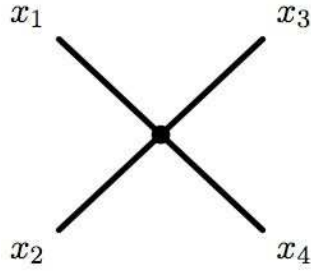


Figura 4.8: Il grafico di ordine λ per la funzione a quattro punti.

livello grafico possiamo rappresentare i diagrammi della funzione di Green sostituendo ai “pallini” l’indicazione delle coordinate dei punti in cui terminano le linee esterne, come ad esempio mostrato nella figura 4.8.

4.4 La funzione di Green a due punti.

In questa sezione studiamo la forma esatta della funzione di Green a due punti per un campo scalare reale. In una teoria di campo con interazioni non è possibile calcolare esattamente le funzioni di Green, ma la richiesta di invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz e una ragionevole ipotesi sulla struttura degli stati ad una e più particelle permette di stabilire una *rappresentazione spettrale* della funzione a due punti. Nella prossima sezione useremo questa rappresentazione per stabilire una relazione tra funzioni di Green a più punti e gli elementi della matrice S che descrivono l’ampiezza di transizione negli urti tra particelle.

L’idea della rappresentazione spettrale è molto semplice: scriviamo, per $x^0 > 0$

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \sum_{\alpha} \langle 0|\phi(x)|\alpha\rangle \langle \alpha|\phi(0)|0\rangle \quad (4.33)$$

Alla somma sugli stati intermedi possono contribuire stati ad una particella $|\mathbf{p}\rangle$ e stati con due o più particelle. quindi dividiamo la somma (e il risultato) in due parti:

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_1 + \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{(2+)} \quad (4.34)$$

Il contributo degli stati a una particella può essere scritto esplicitamente, cfr. l' eq. (3.84):

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle_1 = \int d^3 p \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \phi(0) | 0 \rangle \quad (4.35)$$

Procediamo adesso in due passi.

- La dipendenza da x si ottiene dalla relazione:

$$\phi(x) = e^{iP_x} \phi(0) e^{-iP_x} \quad (4.36)$$

dove P_μ sono gli operatori che rappresentano il quadri-momento totale, da cui:

$$\langle 0 | \phi(x) | p \rangle = e^{-ipx} \langle 0 | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle \quad (4.37)$$

- L' elemento di matrice di $\phi(0)$ si parametrizza come:

$$\langle 0 | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z(p)}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})}} \quad (4.38)$$

per cui:

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle_1 = \int d^3 p \frac{Z(p)}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx} \quad (4.39)$$

Il punto cruciale è che la $Z(p)$ definita dalla (4.38) *risulta essere Lorentz-invariante*. Essa deve essere quindi una funzione dell' unico invariante che possiamo costruire con il quadri-momento della particella, cioè funzione di $p_\mu p^\mu = m^2$ che è una costante, indipendente dal valore di $\mathbf{p}$. La dimostrazione esplicita di questa affermazione è riportata in Appendice C. In modo più intuitivo, ma sostanzialmente corretto, si può argomentare come segue.

(1) La funzione di Green è Lorentz invariante e così la sua restrizione agli stati intermedi ad una particella, il primo membro della (4.39).

(2) Nel secondo membro della (4.39), la misura $d^3 p / (2\omega(\mathbf{p}))$ è Lorentz invariante e così l' esponenziale $\exp(-ipx)$, da cui, per avere un risultato invariante, segue l' invarianza di $Z(p)$.

Possiamo quindi portare $Z(p) = Z(m^2) = Z$ fuori dell' integrale e ottenere:

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle_1 = Z \int d^3 p \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx}; \quad (x^0 > 0) \quad (4.40)$$

Se ripetiamo questi passi nel caso $x^0 < 0$ otteniamo, per il contributo degli stati a una particella,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\phi(x) \phi(0)) | 0 \rangle_1 = \\ \frac{Z}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x})}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(e^{-i\omega(\mathbf{p})x^0} \theta(x^0) + e^{i\omega(\mathbf{p})x^0} \theta(-x^0) \right) \end{aligned}$$

e, paragonando con la (3.66) otteniamo

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(0)) | 0 \rangle_1 = i Z \Delta_F(x; m) \quad (4.41)$$

dove abbiamo introdotto la notazione $\Delta_F(x; m)$ per indicare il propagatore di Feynman relativo a particelle di massa m . La costante Z è indicata col nome di costante di rinormalizzazione del campo.

Gli stati a due o più particelle possono essere caratterizzati sulla base del loro impulso $\mathbf{p}$, della loro massa invariante, M , e della loro energia $E = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$. Al contrario degli stati di singola particella, che corrispondono a un valore preciso di m , gli stati a due o più particelle presentano uno spettro continuo di valori di M a partire da una certa soglia M_s . Ad esempio gli stati a due particelle di impulso totale nullo, per i quali $E = M$, saranno composti da due particelle di impulso opposto, $\pm \mathbf{p}$, e quindi $M = E = 2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \geq M_s = 2m$. Nella teoria $\lambda\phi^4$, come abbiamo visto, non sono possibili funzioni di Green con numero dispari di punti, ovvero transizioni tra stati con un numero pari e un numero dispari di particelle: la soglia effettiva è $M_s = 3m$. Gli stati che contribuiscono alla somma (4.33) sono creati da ϕ che opera sul vuoto, e avranno momento angolare intrinseco nullo. Quindi anche a questi stati si applicano le considerazioni fatte sugli stati di singola particella, e il contributo degli stati di massa M risulterà proporzionale a $i\Delta_F(x; M)$. Possiamo quindi dare l'espressione generale per la funzione a due punti in una teoria scalare:

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(0)) | 0 \rangle = iZ\Delta_F(x; m) + i \int_{M^2=M_s^2}^{\infty} dM^2 \sigma(M^2) \Delta_F(x; M) \quad (4.42)$$

che dipende da due sole grandezze incognite: la costante di rinormalizzazione Z e la funzione $\sigma(M^2)$ che prende il nome di *funzione spettrale*.

Notiamo che in teoria delle perturbazioni possiamo sviluppare la funzione a due punti in potenze della costante di accoppiamento (λ nella teoria scalare che adottiamo come modello in questo capitolo). Quindi sia la costante di rinormalizzazione Z che la funzione spettrale $\sigma(M^2)$ devono essere considerate come serie di potenze nella costante di accoppiamento. All'ordine zero ci si riduce ai risultati della teoria libera (vedi ad esempio la eq. 3.61), cioè

$$Z = 1; \quad \sigma(M^2) = 0 \quad (\text{ordine zero in teoria delle perturbazioni}) \quad (4.43)$$

Nella teoria $\lambda\phi^4$ le prime correzioni a Z e $\sigma(M^2)$ provengono dal diagramma (c) nella figura 4.3, e sono $\propto \lambda^2$.

Più formalmente ... Possiamo dare una costruzione formale del secondo termine nella (4.42) al modo seguente.

Consideriamo per primo il caso $x^0 > 0$. Il contributo degli stati con tre o più particelle si scrive:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) | \phi(0) | 0 \rangle_{2+} &= \langle 0 | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle_{2+} = \sum_n \langle 0 | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_n e^{-P_n x} \langle 0 | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.44)$$

Gli stati $|n\rangle$ sono stati con 3 o più particelle, caratterizzati dal quadri-momento totale P_n , più altri numeri quantici che non dobbiamo specificare. Inseriamo nella (4.44) due funzioni delta, che si

integrano esplicitamente ad uno:

$$\begin{aligned}
 \sum_n \langle 0 | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle &= \\
 &= \int dM^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(p^2 - M^2) \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - P_n) e^{-iP_n x} \langle 0 | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle = \\
 &= \int dM^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(p^2 - M^2) e^{-ipx} \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - P_n) \langle 0 | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle
 \end{aligned} \quad (4.45)$$

dove abbiamo portato l'esponenziale fuori della somma usando la funzione delta.

Il punto cruciale è che, come nel caso della singola particella, la somma sugli stati da una funzione del quadri-momento p che è *invariante di Lorentz*. Quindi la somma deve essere una funzione di p^2 ovvero, in virtù della seconda funzione delta, di M^2 . Possiamo denotare questa funzione come:

$$(2\pi)\sigma(M^2) = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - P_n) \langle 0 | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \quad (M^2 = p^2) \quad (4.46)$$

ed ottenere:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle_{2+} &= \int dM^2 \sigma(M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} = \\
 &= \int dM^2 \sigma(M^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(p, M)} e^{-i(\omega(p, M)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}
 \end{aligned} \quad (4.47)$$

dove $\omega(p, M)$ è l'energia che corrisponde ad una particella di quadri-momento p e massa M .

Ripetiamo l'argomento per $x^0 < 0$ e cambiamo la variabile di integrazione $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$. Troviamo:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \phi(0) \phi(x) | 0 \rangle_{2+} &= \int dM^2 \sigma(M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{+ipx} = \\
 &= \int dM^2 \sigma(M^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(p, M)} e^{+i(\omega(p, M)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}
 \end{aligned} \quad (4.48)$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T [\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle_{2+} &= \\
 &= \int dM^2 \sigma(M^2) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(p, M)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \left[\theta(x^0) e^{-i(\omega(p, M)t} + \theta(-x^0) e^{+i(\omega(p, M)t} \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Confrontando con la ((3.66)) troviamo infine:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T [\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle_{2+} &= \\
 &= i \int dM^2 \sigma(M^2) \Delta_F(x, M)
 \end{aligned} \quad (4.50)$$

La funzione $\sigma(M^2)$ è diversa da zero solo per quei valori di M^2 che corrispondono alla massa di qualche possibile stato intermedio, cioè per $M^2 > (3m)^2$, quindi i limiti di integrazione vanno da $(3m)^2$ all'infinito e ritroviamo proprio il secondo termine della (4.42).

Capitolo 5

PROCESSI DI DIFFUSIONE, MATRICE S .

Possiamo descrivere un processo di collisione tra due particelle al modo seguente.

All'istante iniziale, indichiamolo con $-T/2$, le particelle sono preparate in uno stato corrispondente a due pacchetti d'onda localizzati in regioni dello spazio molto lontane tra loro. A tutti gli effetti, al tempo $-T/2$, possiamo trascurare l'interazione tra le due particelle.

Successivamente, il sistema evolve senza influenze dall'esterno per un tempo T , durante il quale le particelle interagiscono tra loro e danno luogo ai prodotti della collisione. Questi ultimi vengono rivelati, al tempo $+T/2$, da opportuni apparati sperimentali. Anche al momento della rivelazione, il sistema consiste di due particelle (o più particelle, per collisioni ad energie relativistiche) molto lontane tra loro e quindi di nuovo non interagenti.

L'intervallo di tempo T durante il quale si svolge l'esperimento è, in genere, molto più lungo dei tempi tipici su cui avviene l'interazione. T è determinato dalle dimensioni lineari degli apparati di produzione e rivelazione che sono macroscopiche, dell'ordine, diciamo, del metro. Quindi $T \approx 10^{-9} - 10^{-8}$ secondi. L'interazione, invece, avviene quando le particelle sono a distanza di qualche Fermi l'una dall'altra (1 Fermi = 10^{-15} m) e quindi su tempi dell'ordine di 10^{-23} secondi, molto inferiore a T . A tutti gli effetti, il processo si svolge tra i tempi $t = \pm\infty$.

A differenza di quanto avviene nella Meccanica Classica, anche se partiamo da uno stato perfettamente definito non possiamo prevedere, in genere, il risultato di un particolare esperimento. Tutto quello che la Meccanica Quantistica può dare sono le ampiezze di diffusione, numeri complessi i cui moduli quadri danno la probabilità dei possibili risultati dell'esperimento. Le ampiezze di diffusione possono, a loro volta, essere descritte dagli elementi di matrice di un operatore, la *matrice* S , o matrice di scattering, che quindi è l'elemento centrale della teoria della diffusione.

Lo studio delle collisioni tra particelle rappresenta pressochè l'unico metodo di indagine a nostra disposizione per investigare la struttura delle interazioni fondamentali. Lo studio sperimentale della diffusione ed il calcolo teorico della matrice S sono quindi il punto di contatto tra teoria ed esperimento.

5.1 Stati “in” e stati “out”

Come abbiamo detto, al tempo $-T/2$ lo stato iniziale del processo di diffusione è costituito da particelle separate tra loro e praticamente non interagenti. Possiamo descrivere questi stati con una sovrapposizione di onde piane, caratterizzate dalla quantità di moto di ciascuna particella:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta\rangle \quad (\text{al tempo } t = -T/2) \quad (5.1)$$

dove α e β rappresentano altri numeri quantici, in aggiunta alla quantità di moto, eventualmente necessari per caratterizzare lo stato di moto delle particelle stesse (ad esempio le componenti dello spin lungo la direzione del moto).

Nella rappresentazione di Schroedinger, lo stato (5.1) evolve nel tempo in modo complicato, descrivendo una traiettoria nello spazio degli stati, traiettoria che è determinata dall'Hamiltoniana esatta del problema, H . La stessa traiettoria, nella rappresentazione di Heisenberg, è individuata da un vettore fisso, anch'esso determinato dalle quantità di moto p_1 e p_2 , che caratterizzano le condizioni del sistema al tempo $-T/2 \rightarrow -\infty$. Chiameremo questo stato uno stato “in” e lo indicheremo con:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta; in\rangle \quad (5.2)$$

Il complesso di tutti gli stati di questo tipo, cioè degli stati di Heisenberg, con un numero arbitrario di particelle,¹ che si riducono ad onde piane per $t = -T/2 \rightarrow -\infty$, è la base “in”, cfr. ad esempio [6] [7]). La base degli stati “in” costituisce, ovviamente, una base ortonormale. Ci possiamo chiedere se questa base sia anche completa.

In ultima analisi, questa domanda equivale a chiederci se possiamo raggiungere tutti gli stati di moto del sistema a partire da stati di particelle molto lontane tra loro. I processi di diffusione sono l'unico modo con cui possiamo studiare i sistemi microscopici, quindi la risposta non può che essere affermativa, ma con una precisazione importante che faremo tra un momento.

L'ipotesi che gli stati in siano un insieme completo di stati prende anche il nome di *Ipotesi asintotica* e si caratterizza con la relazione:

$$\sum_i |i; in\rangle \langle i; in| = 1 \quad (\text{completezza "in"}) \quad (5.3)$$

Naturalmente, nei casi in cui possiamo risolvere le equazioni del moto a partire dall'Hamiltoniana, possiamo anche decidere la composizione degli stati “in” ed accertare se la (5.11) è valida oppure no. In alcune formulazioni assiomatiche della teoria dei campi, la condizione (5.11) è considerata uno degli assiomi di base.

Completezza degli stati in. Consideriamo dapprima il caso di una particella non relativistica in un potenziale assegnato, con uno spettro discreto per $E < 0$, e continuo per $E > 0$ (ad esempio un elettrone nel potenziale di un protone, considerato come una sorgente fissa).

Possiamo costruire pacchetti d'onda normalizzati sovrapponendo autostati con $E > 0$. E' immediato dimostrare che, per questi stati, il moto si svolge prevalentemente all'infinito, in quanto il valore

¹Lo stato che non contiene alcuna particella, il cosiddetto “stato di vuoto”, è indicato con $|0\rangle$, ed è lo stato di energia minima, $E = 0$. Come sarà discusso in seguito, lo stato di vuoto svolge un ruolo fondamentale nelle teorie di campo.

medio nel tempo della probabilità di trovare la particella in una qualsiasi regione limitata dello spazio è zero (cfr. la discussione in [8]). Infatti:

$$|\psi(x, t)|^2 = \int \int dE dE' c(E)^* c(E') \Psi_E(x)^* \Psi_{E'}(x) e^{+i(E-E')t} \quad (5.4)$$

ed inoltre, per $T \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{+i(E-E')t} \rightarrow \frac{2\pi}{T} \delta(E' - E) \quad (5.5)$$

da cui:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V dx |\psi(x, t)|^2 = \frac{2\pi}{T} \int dE |c(E)|^2 \int_V dx |\Psi_E(x)|^2 \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

Uno stato arbitrario del tipo (5.4), a tempi sufficientemente remoti, sarà rappresentato da sovrapposizione di stati liberi, e quindi è raggiungibile dagli stati "in".

Al contrario, se il pacchetto d'onda è costruito come sovrapposizione delle autofunzioni dello spettro discreto:

$$|\psi(x, t)|^2 = \sum_{n, n'} c_n(E)^* c_{n'}(E') \Psi_n(x)^* \Psi_{n'}(x) e^{+i(E_n - E_{n'})t} \quad (5.7)$$

la (5.5) sarà rimpiazzata da:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{+i(E_n - E_{n'})t} = \delta_{n, n'} \quad (5.8)$$

e la probabilità media (5.6) è diversa da zero:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V dx |\psi(x, t)|^2 = \sum_n |c_n(E)|^2 \int_V |\Psi_n(x)|^2 \neq 0 \quad (5.9)$$

Il moto si svolge permanentemente nella zona dove la particella è legata al potenziale.

In questo caso, la base degli stati "in", evidentemente, non è completa ma piuttosto (l'indice i rappresenta il complesso dei numeri quantici che caratterizzano i vari stati):

$$\sum_i |i; in\rangle \langle i; in| = 1 - \sum_n |E_n\rangle \langle E_n| \quad (5.10)$$

dove al secondo membro compare il proiettore sugli stati legati.

In una teoria invariante per traslazioni, in cui permettiamo anche al protone di muoversi, lo spettro dell'energia totale è sempre continuo e tutti gli stati localizzati, prima o poi, finiscono all'infinito. Tuttavia gli stati con un elettrone ed un protone lontani tra loro non danno una base completa: le due particelle possono allontanarsi all'infinito restando legate tra loro.

Se però includiamo nella base "in" anche quegli stati che, al tempo $-T/2 \rightarrow -\infty$, contengono degli stati legati (ad esempio l'atomo di idrogeno nel livello fondamentale) possiamo ritenere che gli stati "in" formino una base completa²

$$\sum_i |i; in\rangle \langle i; in| = 1 \quad (\text{completezza "in"}) \quad (5.11)$$

²In generale, non esiste un unico tempo $-T/2$ a cui tutti gli stati possibili si sono ridotti a stati di particelle non-interagenti. La convergenza degli stati alle condizioni asintotiche non è uniforme, e la base degli stati "in" diventa completa solo nel limite $-T/2 \rightarrow -\infty$. Questo punto è importante nella discussione delle formule di riduzione discusse nel seguito.

In termini concreti, questo vuol dire che, per determinare completamente la fisica del sistema elettrone-protone, dovremo studiare anche esperimenti di diffusione che coinvolgano, tra gli stati iniziali, l'atomo di idrogeno ad esempio:

$$e + H \rightarrow e + e + P \quad (5.12)$$

Naturalmente, nei casi in cui possiamo risolvere le equazioni del moto a partire dall'Hamiltoniana, possiamo anche decidere la composizione degli stati "in" ed accertare se la (5.11) è valida oppure no. In alcune formulazioni assiomatiche della teoria dei campi, la condizione (5.11) è considerata uno degli assiomi di base.

Accanto alla base "in", possiamo adesso introdurre la base completa degli stati "out". Questi stati descrivono degli stati di moto, nella rappresentazione di Heisenberg, che si riducono, al tempo $t = +T/2 \rightarrow +\infty$, a stati con un certo numero di particelle libere, ciascuna con quantità di moto definita.

In analogia con la (5.2), indicheremo questi stati con:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta; out > \quad (5.13)$$

nel caso di due particelle.

La discussione sulla completezza della base "out" procede allo stesso modo che per quella "in", e quindi, con le stesse qualifiche di prima, concludiamo che deve essere:

$$\sum_n |n; out > \langle n; out| = 1 \quad (\text{completezza "out"}) \quad (5.14)$$

In assenza di interazione, i numeri quantici che caratterizzano gli stati "in" o "out", ad esempio la quantità di moto delle singole particelle, sono tutti conservati. In questo caso, gli stati "in" e "out" coincidono.

Anche in presenza di interazione, tuttavia, la distinzione tra stati "in" e "out" non si applica nei casi seguenti.

i. Lo stato privo di particelle (stato di vuoto) è stabile, in quanto stato di energia minima. Quindi

$$|0; in > = |0; out > = |0 > \quad (5.15)$$

ii. Per gli stati ce contengono una sola particella, la quantità di moto e la componente dello spin nella direzione del moto della particella stessa sono grandezze conservate, per cui:

$$|p, \alpha; in > = |p, \alpha; out > = |p, \alpha > \quad (5.16)$$

5.2 Ampiezze di diffusione e Matrice S.

Possiamo caratterizzare lo stato $|p'_1, \alpha'; p'_2, \beta'; out >$ come quello in cui, con certezza, i nostri rivelatori troveranno due particelle con quantità di moto p'_1 e p'_2 e gli altri numeri quantici con i valori α' e β' rispettivamente, al tempo $+T/2$. Analogamente, lo stato $|p_1, \alpha; p_2, \beta; in >$ è quello in cui, con certezza, due particelle con numeri quantici p_1, α e p_2, β sono presenti al tempo $-T/2$. Il loro prodotto scalare dá, quindi, l'ampiezza di probabilità della reazione:

$$(p_1, \alpha) + (p_2, \beta) \rightarrow (p'_1, \alpha') + (p'_2, \beta')$$

Piú in generale, l'ampiezza di diffusione è data da:

$$S_{fi} = \langle f; out | i; in \rangle \quad (5.17)$$

dove f ed i sono i valori dei numeri quantici che caratterizzano lo stato finale ed iniziale, rispettivamente. Per stati normalizzati, il modulo quadro:

$$| \langle f; out | i; in \rangle |^2 = P(i \rightarrow f) \quad (5.18)$$

dá la probabilità della reazione. Per la relazione che lega la probabilità (5.18) alla sezione d'urto, cfr. Meccanica Quantistica Relativistica.

In termini degli stati "in" e "out", la matrice S si può scrivere come:

$$S = \sum_n |n; in\rangle \langle n, out| \quad (5.19)$$

da cui troviamo:

$$S_{fi} = \langle f; out | i; in \rangle = \langle f; in | S | i; in \rangle = \langle f; out | S | i; out \rangle \quad (5.20)$$

Si verifica subito dalla (5.19) che l'operatore S trasforma la base "out" nella base "in":

$$S | m; out \rangle = | m; in \rangle \quad (5.21)$$

quindi, dalla completezza delle due basi, segue che S è unitario:

$$S^+ S = S S^+ = 1 \quad (5.22)$$

Se scriviamo l'elemento di matrice diagonale della (5.22) come:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle i; out | S^+ S | i; out \rangle = \\ &= \sum_f \langle f; out | S | i; out \rangle^2 = \sum_f P(i \rightarrow f) \end{aligned} \quad (5.23)$$

vediamo che l'unitarietà di S equivale a richiedere che la somma delle probabilità (5.18) su tutti gli stati f sia pari all'unità. L'insieme di questi stati deve quindi coincidere con tutti i possibili stati finali in un esperimento di diffusione, come infatti è il caso se la base di questi stati è completa.

Le relazioni (5.20) mostrano la relazione tra la definizione della matrice S nella rappresentazione di Heisenberg e la definizione più elementare, in termini della rappresentazione di interazione, cfr. [1].

Nelle (5.20) sia il bra sia il ket si riferiscono allo stesso tempo, che esso sia nel passato o nel futuro, quindi non fanno piú riferimento ad una data rappresentazione. Possiamo interpretare $|f; out\rangle$ e $|i; out\rangle$ semplicemente come i vettori dello spazio di Hilbert, $|f\rangle$ e $|i\rangle$ rispettivamente, che individuano gli stati di ingresso e di uscita del processo di diffusione. In questo caso, il vettore $S|i\rangle$ rappresenta lo stato in cui evolve $|i\rangle$ nella rappresentazione di interazione. e la proiezione $\langle f | S | i \rangle$ rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare questo stato in $|f\rangle$. Nella teoria delle perturbazioni, S è data dalla usuale rappresentazione mediante la formula di Dyson [1].

5.3 Grandezze conservate

La relazione tra la matrice S e le grandezze conservate si discute molto semplicemente. Consideriamo una grandezza conservata, Q . Dato che Q commuta con H , possiamo scegliere sia gli stati "in" sia gli stati "out" in modo che siano autostati simultanei di Q ed H . Poiché Q è una costante del moto, lo stato "in" che corrisponde ad un valore q di Q deve trasformarsi, per $t \rightarrow +\infty$ in uno stato con lo stesso autovalore, cioè:

$$\langle f, q'; out | i, q; in \rangle = 0, \text{ se } q' \neq q \quad (5.24)$$

Un altro modo di dire la stessa cosa è di usare il fatto che S commuta con tutte le costanti del moto, per cui:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, q'; in | [Q, S] | i, q; in \rangle = \\ &= (q' - q) \langle f, q'; in | S | i, q; in \rangle \end{aligned} \quad (5.25)$$

Quindi l'elemento di matrice è nullo se $q \neq q'$. Per lo stesso motivo:

$$U(R) S U(R)^+ = S \quad (5.26)$$

se $U(R)$ è l'operatore unitario associato ad una simmetria esatta (che non coinvolga l'inversione temporale).

Per i sistemi invarianti sotto traslazioni, la matrice S deve essere diagonale nella base degli stati con quantità di moto ed energia definiti, quindi i suoi elementi di matrice hanno la forma ($f \neq i$):

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum P_{fin} - \sum P_{in}) \mathcal{M}_{fi} \quad (5.27)$$

5.4 Le formule di riduzione LSZ

In questa Sezione vogliamo ricavare le relazioni che legano la funzione di Green a q punti con l'elemento di matrice S della reazione tra p particelle iniziali per dare $q-p$ particelle finali (con $p \leq q-2$). Queste relazioni sono state ottenute da H. Lehman, K. Szymanski e W. Zimmermann [9] e sono note come *formule di riduzione LSZ*. Per semplicità, ci riferiamo al caso di particelle descritte da un campo scalare neutro con interazione $\lambda \phi^4$, la generalizzazione a casi più complessi è, infatti, immediata. Successivamente, estenderemo le regole di Feynman ricavate per le funzioni di Green a quelle per gli elementi di matrice S .

Prima di dimostrare le formule di riduzione, tuttavia, dobbiamo introdurre la cosiddetta *ipotesi asintotica* per i campi nella rappresentazione di Heisenberg ed i corrispondenti campi asintotici, $\phi_{in}(x)$ e $\phi_{out}(x)$.

I campi asintotici, $\phi_{in}(x)$ e $\phi_{out}(x)$ Fissare lo stato quantistico nella rappresentazione di Heisenberg corrisponde, in Meccanica Classica, a determinare la traiettoria nello spazio delle fasi del sistema dando le condizioni iniziali ad un dato tempo, t_0 . Si comprende quindi perchè il vettore di

stato, in questa rappresentazione, non cambia al variare del tempo. Per fissare le idee, assumiamo di scegliere gli stati nella base in, quindi $t_0 = -T/2$.

Quelle che variano, al variare del tempo, sono le variabili dinamiche del sistema, quindi i campi che sono funzioni del punto nello spazio e del tempo:

$$\phi = \phi(\vec{x}, t) = \phi(x). \quad (5.28)$$

Nella teoria libera, il campo applicato al vuoto crea uno stato di singola particella per qualunque valore di tempo. Questo non è più vero nella teoria in interazione, in cui il campo ha elementi di matrice non nulli anche tra il vuoto e gli stati con tre o più particelle, cfr. la Sez. 4.4. Tuttavia, come discusso nel capitolo precedente, ci aspettiamo che la situazione fisica tenda a quella della teoria libera quando il tempo tende a $\pm T/2 \simeq \pm\infty$. Poiché lo stato è comunque fisso, la richiesta precedente, che si indica col termine di *condizione asintotica* deve significare che il campo, in questi limiti, deve tendere in qualche senso al campo libero.

Consideriamo il limite $t \rightarrow +\infty$. La condizione asintotica si formula richiedendo che i valori di aspettazione del campo, quindi gli elementi di matrice, convergano ai corrispondenti elementi di matrice di un campo libero, che indichiamo con ϕ_{out} , eventualmente moltiplicati per una costante di proporzionalità³. La costante è definita in modo tale che $\phi_{out}(x)$ risulti normalizzato come un campo canonico. In formule:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \phi(\vec{x}, t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_+} \langle \alpha | \phi_{out}(\vec{x}, t) | \beta \rangle \quad (5.29)$$

$$(-\square - m^2)\phi_{out}(x) = 0 \quad (5.30)$$

Il limite $t \rightarrow -\infty$ si tratta analogamente e porta alla definizione del campo in:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \phi(\vec{x}, t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_-} \langle \alpha | \phi_{in}(\vec{x}, t) | \beta \rangle$$

$$(-\square - m^2)\phi_{in}(x) = 0 \quad (5.31)$$

I campi ϕ_{out} applicati al vuoto creano stati a molte particelle non interagenti al tempo $t = +\infty$, quindi generano la base degli stati out. Analogamente, l'applicazione di ϕ_{in} al vuoto genera la base in. Limitandoci al caso out, possiamo sviluppare il campo in operatori di creazione e distruzione nel continuo, cfr. l'eq. (3.89):

$$\phi_{out}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left[a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (5.32)$$

L'eq. (5.32) si inverte facilmente, cfr. Sez. 3.91, per ottenere;

$$a_{out}(\mathbf{p}) = \int d^3x f_{\mathbf{p}}(x)^* i \overleftrightarrow{\partial} \phi_{out}(x); \quad f_{\mathbf{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})(2\pi)^3}} e^{-ipx} \quad (5.33)$$

Gli operatori di distruzione definiti dalla (5.33) sono indipendenti dal tempo, in virtù dell'equazione di Klein-Gordon.

³non si può chiedere di più che una *convergenza debole* altrimenti si ricadrebbe nella teoria libera a tutti i tempi.

Poichè il campo out è normalizzato come un campo canonico, a_{out} e $a_{out}^\dagger$ obbediscono alle regole di commutazione canoniche e sono proprio gli operatori di creazione e distruzione degli stati out. Quindi⁴:

$$|p_1, p_2, \dots; out\rangle = a_{out}(p_1)^\dagger a_{out}(p_2)^\dagger \dots |0\rangle \quad (5.34)$$

Formule analoghe valgono per il campo e gli stati in.

Gli stati ad una particella in ed out coincidono: per questo abbiamo usato, nelle (5.29) e (5.31), la stessa massa. È facile dimostrare che, per lo stesso motivo, anche le costanti di normalizzazione nelle (5.29) e (5.31) sono uguali tra loro ed uguali alla costante introdotta nella Sez. 4.4.

Per ottenere questo risultato, consideriamo l' elemento di matrice del campo out tra il vuoto e lo stato ad una particella:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle &= \sqrt{Z_+} \langle 0 | \phi_{out}(x) | \mathbf{p} \rangle = \\ &= \sqrt{Z_+} \langle 0 | \phi_{out}(x) | \mathbf{p}; out \rangle = \sqrt{\frac{Z_+}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}} e^{-ipx} \end{aligned} \quad (5.35)$$

dove abbiamo usato lo sviluppo (5.32).

D' altro canto, la parametrizzazione generale dell' eq. (4.38) ci dá l' elemento di matrice del campo a *tutti i tempi*:

$$\langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p}; out \rangle = \sqrt{\frac{Z}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}} e^{-ipx} \quad (5.36)$$

e, quindi, anche nel limite $t \rightarrow +\infty$. Confrontando con la (5.35) otteniamo: $Z_+ = Z$. Ripetendo l' argomento nel limite $t \rightarrow -\infty$ otteniamo analogamente: $Z_- = Z = Z_+$.

Le formule di riduzione LSZ Consideriamo, per essere definiti, la funzione di Green a quattro punti connessa:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (5.37)$$

che vogliamo collegare alla matrice S della reazione:

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4 \quad (5.38)$$

Se ricordiamo le regole di Feynman con cui si costruisce G, vediamo che in ogni caso dal punto x_1 origina una linea che lo collega al resto del grafico. In termini di ampiezze, questo vuol dire che, per quanto riguarda la dipendenza da x_1 :

$$G = \int d^4x \Delta_F(x_1 - x) \times \dots \quad (5.39)$$

dove x è la coordinata di uno dei vertici del grafico. La trasformata di Fourier su x_1 di G, con momento p_1 , quindi, deve contenere un fattore corrispondente alla trasformata di Fourier di Δ_F , cioè:

$$i\tilde{\Delta}_F(p_1) = \frac{i}{p_1^2 - m^2} \quad (5.40)$$

⁴ricordiamo che $|0; out\rangle = |0; in\rangle = |0\rangle$.

La trasformata di Fourier di G rispetto ad x_1 ha quindi un polo quando p_1 va sul mass-shell, cioè per $p_1^2 \rightarrow m^2$. Possiamo isolare il residuo sul polo moltiplicando la trasformata di Fourier di G per $p_1^2 - m^2$ e passando al limite per $p_1^2 = m^2$.

In realtà, come abbiamo visto nello studio del propagatore, di poli ce ne sono due, in corrispondenza ai due segni possibili della frequenza, $p_1^0 = \pm \omega(\mathbf{p}_1) = \pm \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2}$. Selezioniamo il segno di p^0 scrivendo il fattore esponenziale nella trasformata di Fourier come $e^{-ip_1 x_1}$ per una particella entrante, come nella eq. (5.38), ovvero $e^{+ip_1 x_1}$ per una particella uscente, con $p^0 = +\omega(\mathbf{p})$ in entrambi i casi. In formule:

$$R(p_1, \dots) = \lim_{p_1^2 \rightarrow m^2} (p_1^2 - m^2) \int d^4 x_1 e^{-ip_1 x_1} G(x_1, \dots) \quad (5.41)$$

Per collegare il residuo R all' elemento di matrice S , scriviamo esplicitamente la funzione di Green come valore di aspettazione sul vuoto del T prodotto dei campi:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4)] | 0 \rangle \quad (5.42)$$

e quindi R :

$$R(p_1, \dots) = \lim_{p_1^2 \rightarrow m^2} (p_1^2 - m^2) \int d^4 x_1 e^{-ip_1 x_1} \langle 0 | T [\phi(x_1) \dots] | 0 \rangle \quad (5.43)$$

La moltiplicazione per p_1^2 , nella (5.43), equivale all' azione di $-\square$ sull' esponenziale. Integrando per parti, otteniamo (il passaggio al limite è, d' ora in avanti, sottinteso):

$$R(p_1, \dots) = \int d^4 x_1 e^{-ip_1 x_1} (-\square - m^2) \langle 0 | T [\phi(x_1) \dots] | 0 \rangle \quad (5.44)$$

Nel limite l' esponenziale stesso soddisfa l' equazione di Klein-Gordon, per cui possiamo anche scrivere:

$$R(p_1, \dots) = - \int d^4 x_1 e^{-ip_1 x_1} \overleftrightarrow{\square} \langle 0 | T [\phi(x_1) \dots] | 0 \rangle \quad (5.45)$$

dove $\overleftrightarrow{\square}$ indica $\overrightarrow{\square} - \overleftarrow{\square}$. A sua volta la differenza di due $\square$ si può scrivere come una derivata totale:

$$F(x) \overleftrightarrow{\square} G(x) = \partial_\mu \left[F(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu G(x) \right] \quad (5.46)$$

Scartando le derivate spaziali che si integrano comunque a zero, otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} R(p_1, \dots) &= - \int_{-T/2}^{+T/2} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 x_1 e^{-ip_1 x_1} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0 | T [\phi(x_1) \dots] | 0 \rangle = \\ &= - \int d^3 x_1 e^{-ip_1 x_1} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0 | \phi(\vec{x}_1, +T/2) T [\phi(x_2) \dots] | 0 \rangle + \\ &+ \int d^3 x_1 e^{-ip_1 x_1} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle 0 | T [\phi(x_2) \dots] \phi(\vec{x}_1, -T/2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.47)$$

Abbiamo portato fuori del T prodotto i campi $\phi(\vec{x}_1, \pm T/2)$ in quanto i tempi in x_2, x_3 , etc. sono sicuramente maggiori di $-T/2$ e minori di $+T/2$. I campi valutati in $\pm T/2$ si possono identificare con i campi out e in rispettivamente. Inoltre, confrontando con la (5.33) vediamo che:

$$\begin{aligned} R(p_1, \dots) &= i\sqrt{2\omega(2\pi)^3} \left[\langle 0 | \sqrt{Z} a_{out}(p_1)^\dagger T[\phi(x_2) \dots] | 0 \rangle - \langle 0 | T[\phi(x_2) \dots] \sqrt{Z} a_{in}(p_1)^\dagger | 0 \rangle \right] = \\ &= -i\sqrt{Z} \sqrt{2\omega(2\pi)^3} \langle 0 | T[\phi(x_2) \dots] | p_1; in \rangle \end{aligned} \quad (5.48)$$

dove abbiamo usato le relazioni:

$$\langle 0 | a_{out}(p_1)^\dagger = 0; \quad a_{in}(p_1)^\dagger | 0 \rangle = | p_1; in \rangle \quad (5.49)$$

Prendendo il residuo nel polo della funzione di Green di quattro campi per $p_1^2 = m^2$, abbiamo ottenuto l' elemento di matrice del T prodotto di tre campi tra il vuoto e lo stato con una particella di momento p_1 . Evidentemente possiamo procedere nel processo di *riduzione* dei campi prendendo i residui nei poli per $p_2^2 = m^2$, etc. (con gli appropriati segni degli esponenziali per particelle iniziali e finali) fino ad eliminare del tutto il T prodotto. Il risultato finale è:

$$\begin{aligned} \lim_{p_i^2 \rightarrow m^2} \Pi \frac{(p_i^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}} \int \Pi (d^4 x_i e^{\mp i p_i x_i}) G(x_1, x_2, \dots) = \\ = \Pi \left(\mp \sqrt{2\omega(p_i)(2\pi)^3} \right) \langle p_3, p_4; out | p_1, p_2; in \rangle = \Pi \left(\mp \sqrt{2\omega(p_i)(2\pi)^3} \right) S_{i,f} \end{aligned} \quad (5.50)$$

dove il segno - (+) nell' esponenziale si riferisce alle particelle entranti (uscenti) nella reazione (5.38). Il fattore $\sqrt{Z}$ si ottiene dal calcolo della funzione di Green a due punti, Sez. 4.4.

La formula di riduzione (5.50) si può evidentemente estendere ad una reazione con un numero arbitrario di particelle entranti e uscenti.

Le formule di riduzione (5.50) ci danno la relazione desiderata tra funzioni di Green e elementi di matrice S. Alcune osservazioni.

Invarianza di Lorentz, sezione d' urto. La funzione di Green è Lorentz invariante ed inoltre è invariante per traslazioni. Quest' ultima affermazione vuol dire che G dipende solo dalle differenze $x_1 - x_2$, etc. Per la trasformata di Fourier, questo significa (cfr. [1]) che:

$$\tilde{G}(p_1, p_2, \dots) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin}) \mathcal{G}(p_1, p_2, \dots) \quad (5.51)$$

dove $\mathcal{G}$ è una funzione regolare e Lorentz-invariante dei momenti. Lo stesso si applica evidentemente al residuo di G nei poli. Quindi, trascurando segni inessenziali, possiamo scrivere:

$$S_{fi} = \langle p_3, p_4, \dots; out | p_1, p_2; in \rangle = \Pi \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin}) \mathcal{M}(p_1, p_2, \dots) \quad (5.52)$$

dove $\mathcal{M}$ è l' ampiezza di Feynman, una funzione Lorentz-invariante dei suoi argomenti. Dalla (5.52) si calcola la sezione d' urto del processo $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + \dots$ a partire dalla formula generale, cfr. [1]:

$$(\rho v_{rel} N) d\sigma = \sum_{fin} \frac{|S_{fi}|^2}{T} \quad (5.53)$$

I nostri stati *non* sono normalizzati a una particella nel volume V , di qui il fattore N a primo membro, che indica il numero di particelle bersaglio in V . Con la normalizzazione del continuo, $N = V/(2\pi)^3$, cfr. l'eq. (3.90). $\rho = 1/(2\pi)^3$ è la densità delle particelle proiettile, e v_{rel} la velocità relativa.

Lasciamo al lettore la dimostrazione delle seguenti formule.

- sezione d'urto:

$$d\sigma = \frac{1}{4\omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2)v_{rel}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin}) \prod_{i=3,\dots} \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p}_i)} \right] |\mathcal{M}|^2 \quad (5.54)$$

dove $v_{rel} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ è la velocità relativa delle particelle iniziali.

- spazio delle fasi invariante:

$$\frac{d^3 p}{2\omega(\mathbf{p}_i)} = d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \quad (5.55)$$

- fattore invariante di flusso:

$$\omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2} \quad (5.56)$$

Le equazioni (5.55) e (5.56), sostituite nella (5.54), mostrano che $d\sigma$ è Lorentz-invariante.

Ipotesi asintotica e correzioni di auto-energia. L'ipotesi asintotica alla base della teoria della matrice S , richiede una qualificazione importante. Quello che è ragionevole attendersi, quando il tempo tende a $\pm\infty$, è che tenda a zero l'interazione tra *particelle diverse*. Non possiamo tuttavia isolare una particella dall'azione del campo da essa stessa generato. Questo è il problema dell'*auto-energia* della particella, già noto in fisica classica.

Nel caso di una particella classica elettricamente carica, l'energia del campo coulombiano da essa stessa generato è facilmente calcolabile e dipende dall'inverso del raggio della particella stessa: è divergente per una carica esattamente puntiforme. In virtù della relazione di Einstein, il campo generato dalla particella dà un termine aggiuntivo alla massa inerziale della particella stessa, massa che, quindi, *non è la stessa* che la particella avrebbe in assenza di campo, ovvero nel limite in cui mandiamo a zero la sua carica elettrica.

Il problema si ripropone in meccanica quantistica. Consideriamo, per semplicità la teoria $\lambda\phi^4$. Il propagatore calcolato nella (3.61), che compare nei grafici di Feynman delle funzioni di Green, corrisponde alla teoria libera. La massa che compare in esso, che possiamo meglio indicare con m_0 è la massa che avrebbe la particella *nel limite* $\lambda \rightarrow 0$. In genere, la massa m_0 che compare nella Lagrangiana si indica con il termine *massa nuda*. Invece, la massa, m che compare nell'equazione di Klein-Gordon dei campi in e out deve essere la massa fisica dei quanti del campo, indicata anche come *massa rinormalizzata*, la massa inerziale che essi hanno quando sono lontani tra loro, ma in presenza della interazione con i campi da essi stessi generati.

Se $m \neq m_0$, come avviene in meccanica classica e quantistica per le particelle cariche, ci possiamo chiedere come sia possibile che le singolarità delle funzioni di Green, in cui compare il propagatore $i\Delta_F(x-y)$ relativo alla massa m_0 siano cancellate dal fattore $p^2 - m^2$ che si annulla per il valore della massa fisica. La risposta ci porta al caso più semplice di rinormalizzazione, che discutiamo nella prossima Sezione.

5.5 Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni.

I grafici di Feynman connessi per la funzione a due punti, fino all'ordine λ^2 nella teoria $\lambda\phi^4$, sono riportati nella Fig. 5.1.

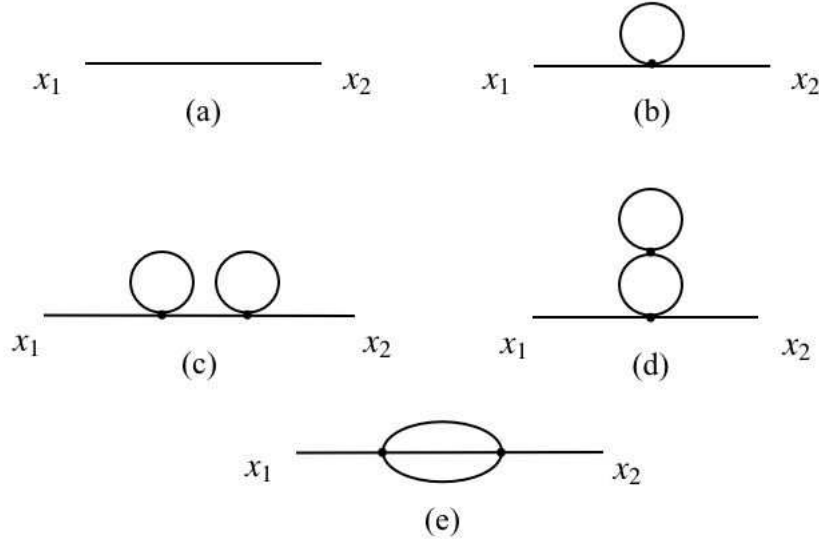


Figura 5.1: I diagrammi connessi per la funzione a due punti nella teoria $\lambda\phi^4$, al secondo ordine perturbativo.

Consideriamo la trasformata di Fourier:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{-i(p_1 x_1)} e^{+i(p_2 x_2)} G(x_1, x_2) \quad (5.57)$$

limitandoci, in un primo momento, ai termini al primo ordine in λ , Fig. 5.1, (a) e (b). Rifacendoci alle eq. (4.18) e (4.19), possiamo scrivere direttamente:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, p_2) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) G_{(a+b)}(p_1); \\ G_{(a+b)}(p) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda C_1) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (5.58)$$

dove abbiamo posto:

$$C_1 = i \frac{1}{2} \Delta_F(0) \quad (5.59)$$

Nella (5.58) compare la *massa nuda*, m_0 , secondo la discussione della Sezione precedente. Notiamo che il propagatore ha un polo doppio in m_0 . Introduciamo adesso la *massa rinormalizzata*, m , scrivendo:

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2 \quad (5.60)$$

δm^2 deve dipendere da λ , in particolare deve essere $\delta m^2 = \mathcal{O}(\lambda)$ poiché $m^2 \rightarrow m_0^2$ se mandiamo $\lambda \rightarrow 0$. Possiamo sviluppare il primo termine nella (5.58) utilizzando la relazione:

$$\frac{1}{A + \epsilon} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A^2} \epsilon + \frac{1}{A^3} \epsilon^2 + \dots \quad (5.61)$$

e fermandoci al primo ordine in δm^2 . Otteniamo:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} \delta m^2 + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (5.62)$$

Se ci limitiamo al primo ordine in λ , trascurando termini di ordine λ^2 , possiamo invece identificare m_0^2 con m^2 nel secondo termine della (5.58). In totale abbiamo quindi:

$$G_{(a+b)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [\delta m^2 - \lambda C_1] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (5.63)$$

Se m è la massa fisica, secondo gli argomenti della Sez. 4.4, la funzione di Green deve avere un polo semplice per $p^2 = m^2$. Questo fissa $\delta m^2 = \lambda C_1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$. A questo ordine, otteniamo l'eq. (4.42) con:

$$Z = 1; \quad \sigma(M^2) = 0 \quad (5.64)$$

Aggiungendo le correzioni del secondo ordine, Fig. 5.1, (c), (d), (e) si ottiene un risultato non triviale anche per Z e σ .

Estensione all' ordine λ^2 . Possiamo determinare la forma del propagatore al secondo ordine abbastanza semplicemente, come segue.

I grafici in Fig. 5.1, (c), (d), (e) corrispondono ad aggiungere alla (5.58), rispettivamente, i termini:

$$\begin{aligned} G_c &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda C_1) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda C_1) \frac{i}{p^2 - m_0^2} \\ G_d &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda^2 C_2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} \\ G_e &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} [i\lambda^2 F(p^2)] \frac{i}{p^2 - m_0^2} \end{aligned} \quad (5.65)$$

In questi termini, che sono già del secondo ordine, possiamo identificare m_0 con m .

Abbiamo indicato, come prima, con $i\lambda C_1$ la costante corrispondente alla singola bolla nelle Figure 5.1, (b) e (c), e con $i\lambda^2 C_2$ il contributo, sempre una costante, della doppia bolla in Fig. 5.1, (d). Il calcolo esplicito di G_e è alquanto più difficile e non siamo ancora in grado di farlo. Tuttavia, ci basta sapere che l'ampiezza corrispondente al circuito chiuso (*loop*) nella Fig. 5.1, (e) si può scrivere come $i\lambda^2 F(p^2)$, con F una funzione non triviale di p^2 , regolare in $p^2 = m^2$.

Possiamo rappresentare la funzione $F(p^2)$ al modo seguente:

$$F(p^2) = F(m^2) + (p^2 - m^2)F'(m^2) + (p^2 - m^2)R(p^2) \quad (5.66)$$

dove $R(p^2)$ è una funzione regolare che si annulla⁵ per $p^2 = m^2$.

Per quanto riguarda la (5.58), dobbiamo adesso sviluppare il primo termine fino al secondo ordine in δm^2 e il secondo termine fino al primo ordine. Otteniamo:

$$\begin{aligned} G_{a+b}(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [\delta m^2 - \lambda C_1] + \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3} [(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2 (\lambda C_1)] \end{aligned} \quad (5.67)$$

Per quanto riguarda G_e , usando la rappresentazione (5.66), troviamo:

$$G_e = \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [-\lambda^2 F(m^2)] + \frac{i}{(p^2 - m^2)} [-\lambda^2 F'(m^2)] + \frac{i}{p^2 - m^2} [-\lambda^2 R(p^2)] \quad (5.68)$$

Ponendo tutto insieme, abbiamo:

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i[1 - \lambda^2 F'(m^2)]}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [\delta m^2 - \lambda C_1 - \lambda^2 C_2 - \lambda^2 F(m^2)] + \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3} [(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2 (\lambda C_1) + \lambda^2 C_1^2] + \\ &+ i \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (5.69)$$

Per cancellare il residuo nel doppio polo dobbiamo adesso porre:

$$\delta m^2 = \lambda C_1 - \lambda^2 C_2 - \lambda^2 F(m^2) + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (5.70)$$

e con questa posizione, si cancella anche il residuo del polo triplo. Il risultato finale è quindi:

$$G(p^2) = \frac{i[1 - \lambda^2 F'(m^2)]}{p^2 - m^2} + i \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (5.71)$$

Abbiamo ottenuto una rappresentazione della funzione a due punti composta da un termine di polo (il primo) ed un termine regolare in $p^2 = m^2$, in quanto $R(m^2) = 0$. Il risultato ha la forma data nella (4.42) se identifichiamo:

$$\begin{aligned} Z &= 1 - \lambda^2 F'(m^2); \\ \mathcal{R}(p^2) &= \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} = \int_{(3m)^2}^{+\infty} \frac{\sigma(M^2)}{p^2 - M^2} dM^2 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Uno studio più approfondito mostra che la funzione al primo membro della (5.72) è una funzione analitica della variabile complessa p^2 con un taglio sull'asse reale positivo di p^2 che parte da $p^2 = (3m)^2$ e arriva a $+\infty$. Il secondo membro della (5.72) è quindi la familiare rappresentazione di Cauchy di una funzione analitica, come integrale della discontinuità sul taglio. La discontinuità è proprio la funzione spettrale $\sigma(M^2)$ che, come anticipato, risulta essere di $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Esplicitamente:

$$\sigma(M^2) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\mathcal{R}(M^2 + i\epsilon) - \mathcal{R}(M^2 - i\epsilon)] \quad (5.73)$$

⁵ $(p^2 - m^2)R(p^2)$ è il resto di Taylor dello sviluppo al primo ordine di $F(p^2)$ in $p^2 = m^2$, ed è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $p^2 - m^2$.

5.6 Diagrammi di Feynman per la matrice S

Utilizzando la formula di riduzione possiamo tradurre le regole per il calcolo dei diagrammi di Feynman per le funzioni di Green, discusse nella sezione 4.3 e nella (4.8), in regole per il calcolo di elementi della matrice S. Il punto di partenza è la trasformata di Fourier che appare nella formula di riduzione, eq. (5.50). Per semplificare la notazione consideriamo tutte le particelle come se appartenessero allo stato iniziale; per una particella nello stato finale basta cambiare segno all'impulso e all'energia. Dobbiamo quindi calcolare la seguente espressione

$$\prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{p_k^2 - m^2}{i\sqrt{Z}} \right) \int \prod_{k=1}^{k=n} d^4 x_k \prod_{k=1}^{k=n} e^{-ip_k x_k} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle \quad (5.74)$$

e per ottenere quella della (5.50) basterà porre $p = q$ per le particelle nello stato iniziale, e $p = -q$ per quelle nello stato finale.

Per quanto riguarda la funzione di Green, dobbiamo considerare solo i grafici di Feynman connessi con $n \geq 3$ linee esterne. Possiamo dividere ulteriormente questi grafici in due categorie, a seconda che siano *riducibili ad una particella* (1-particle irreducible, 1PI) *sulle linee esterne* o no.

Un grafico è riducibile ad una particella sulle linee esterne se, tagliando una sola linea, possiamo separare un grafico della funzione a due punti con un'interazione non triviale. Nella Fig. 5.2 riportiamo i grafici connessi per la funzione a quattro punti, al secondo ordine in λ^2 . I grafici (a) e (c) sono 1PI, mentre il grafico (b) e le corrispondenti permutazioni sono riducibili ad una particella sulle linee esterne. Naturalmente, grafici di ordine superiore possono essere 1P riducibili anche relativamente a più linee esterne, come quello riportato in Fig. 5.3.

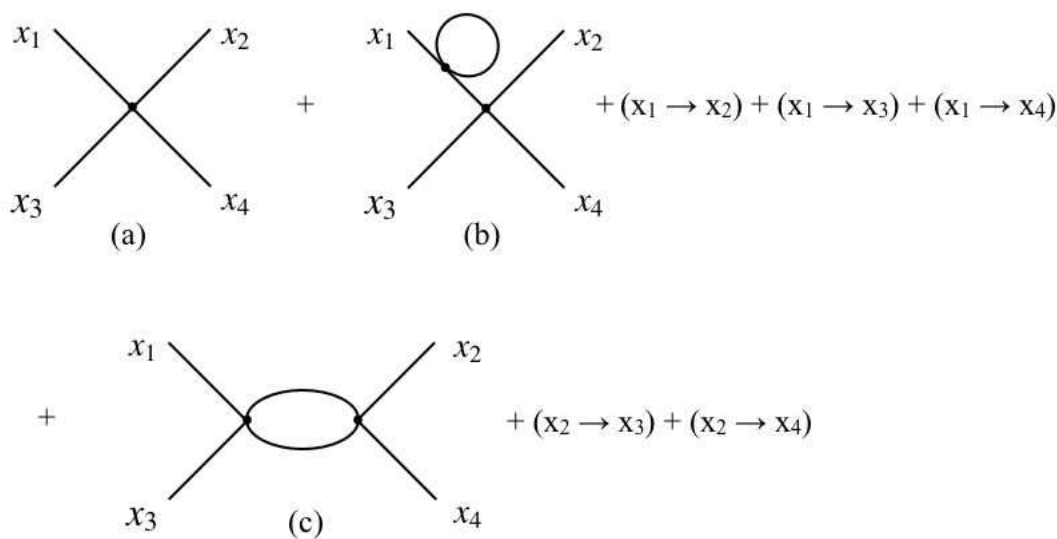


Figura 5.2: Diagrammi connessi per la funzione a quattro punti nella teoria $\lambda\phi^4$, al secondo ordine perturbativo.

Tenendo conto che l'ampiezza di un grafico è il prodotto delle sue diverse componenti, possiamo rappresentare il complesso di tutti i grafici connessi con un grafico a blocchi in cui ogni linea esterna

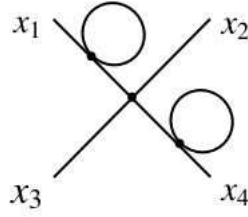


Figura 5.3: Esempio di diagramma connesso, riducibile ad una particella su due linee esterne.

è rimpiazzata dalla funzione a due punti esatta mentre la funzione di Green restante è 1PI su tutte le linee esterne, vedi Fig. 5.4 nel caso della funzione a quattro punti.

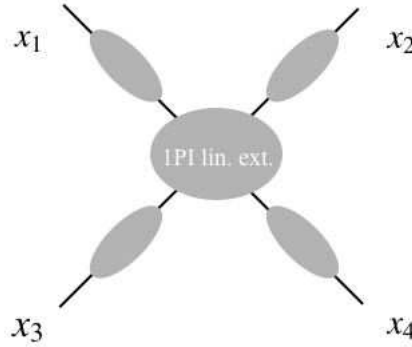


Figura 5.4: Rappresentazione a blocchi della funzione di Green a quattro punti connessa. Le linee esterne rappresentano le funzioni a due punti esatte, il blocco centrale la funzione di Green a quattro punti, 1PI sulle linee esterne.

Lo sviluppo della funzione 1PI sulle linee esterne è mostrato in Fig. 5.5 sempre per la funzione a quattro punti.

Riprendendo il risultato della Sez. 4.4, eq. (4.42), possiamo scrivere:

$$G(x, y)|_{conn} = iZ\Delta_F(x - y, m) + i\mathcal{R}(x - y) \quad (5.75)$$

dove m è la massa rinormalizzata e $\mathcal{R}(x-y)$ è una funzione la cui trasformata di Fourier è regolare quando $p^2 \rightarrow m^2$. Nel diagramma a blocchi della Fig. 5.4, le coordinate dei campi appaiono come terminazione delle linee esterne. Quindi ciascuna linea esterna è rappresentata da (vedi anche eq. 3.58, 3.59)

$$i\Delta_F(v - x_k) = \frac{iZ}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipv} e^{ip_k x_k}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + i\mathcal{R}(v - x_k) \quad (5.76)$$

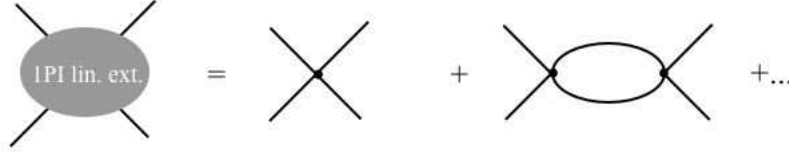


Figura 5.5: Sviluppo della funzione di Green a quattro punti connessa e 1PI sulle linee esterne.

dove v è la coordinata del vertice cui la linea è attaccata, e x_k la coordinata di uno dei punti della funzione di Green. Una volta applicata la trasformata di Fourier e moltiplicato per il fattore $-i(p_k^2 - m^2)/\sqrt{Z}$, si seleziona il residuo nel polo ed otteniamo:

$$\lim_{p_k^2 \rightarrow m^2} \frac{(p_k^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}} \int d^4 x_k e^{-ip_k x_k} (iZ \Delta_F(v - x_k)) = \sqrt{Z} e^{-ip_k v} \quad (5.77)$$

Eseguire il limite richiesto dalla formula di riduzione si riduce a moltiplicare per $\sqrt{Z}$ e assegnare alla linea esterna l'impulso della corrispondente particella fisica, con $p_k = q_k$ per particelle nello stato iniziale, $p_k = -q_k$ per particelle nello stato finale. Nell'elemento di matrice S, alla linea esterna resta anche associato il fattore: $1/(\sqrt{2\omega(q)}(2\pi)^3)$

I grafici 1PI sulle linee esterne contengono linee interne cui è associato il *propagatore nudo*, $i\Delta_F(x - y, m_0)$. Una linea interna che connette due vertici con coordinate v_1, v_2 , corrisponde un fattore

$$i\Delta_F(v_2 - v_1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ipv_2} e^{ipv_1}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.78)$$

Con riferimento a quanto abbiamo visto per le linee esterne, un fattore e^{-ipv_2} corrisponde ad un impulso p che entra nel vertice v_2 ed esce dal vertice v_1 . Ad ogni vertice risultano così associati i fattori $e^{\pm ipv}$ delle linee, interne o esterne che vi confluiscono, e l'integrazione nella coordinata del vertice risulta allora in una funzione δ che garantisce la conservazione dell'energia e dell'impulso portato dalle linee che confluiscono in ciascun vertice,

$$\int d^4 x e^{ix \sum (\pm p_i)} = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum (\pm p_i) \right) \quad (5.79)$$

Per un grafico con n vertici, le n funzioni delta, eq. (5.79), permettono di eliminare l'integrazione su $(n-1)$ momenti interni, in quanto possiamo estrarre da esse una funzione delta che corrisponde alla conservazione del quadri-momento della reazione complessiva e che quindi non dipende dai momenti interni.

Riassumiamo le regole per i diagrammi che rappresentano gli elementi di matrice S.

- Si devono considerare i grafici di Feynman connessi e 1PI sulle linee esterne;
- ai diversi elementi di ogni grafico, vertici, linee interne, linee esterne, sono associate delle

ampiezze come segue:

$$\begin{aligned} \text{Vertice} & \quad \frac{-i\lambda}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_{\text{in}} - \sum p_{\text{out}}) \\ \text{Linea interna} & \quad \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\text{Linea esterna} \quad \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega_p} (2\pi)^3} \quad (5.81)$$

Rimane da definire il coefficiente combinatorio da assegnare a ciascun diagramma, di cui abbiamo visto esempi particolari nella Sezione precedente, ma non discuteremo questo problema in generale, nel caso della teoria $\lambda\phi^4$.

Come esempio, consideriamo l' ampiezza per lo scattering di due particelle.

Dobbiamo partire dai diagrammi della Fig. 5.5. Considereremo p_1, p_2 come particelle iniziali (entranti), p_3, p_4 come particelle finali (uscenti). Il valore del primo diagramma è semplicemente

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) Z^2 (-i\lambda) \prod \frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}} \quad (5.82)$$

Il valore del secondo diagramma risulta:

$$\begin{aligned} & C(-i\lambda)^2 Z^2 \prod \frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{q_2^2 - m_0^2 + i\epsilon} \\ & (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_3 - p_4) \end{aligned}$$

dove q_1 e q_2 sono i momenti associati alle linee interne e C rappresenta un fattore combinatorio, in cui abbiamo incorporato gli $1/4!$. Le due δ si possono combinare in una che garantisce la conservazione dell'impulso e dell'energia tra particelle entranti e particelle uscenti e una seconda δ che elimina una delle integrazioni, fissando $q_2 = p_1 + p_2 - q_1$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} D_2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) Z^2 C(-i\lambda)^2 \prod \frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}} \\ & \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q_1)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Notiamo che l'integrale residuo è divergente: per grandi valori di q_1 si comporta come $\int d^4 q / q^4$, una divergenza logaritmica. Delle divergenze in teoria delle perturbazioni, e di come curarle, parleremo nel caso dell'elettrodinamica. In quella occasione discuteremo anche del calcolo della costante di rinormalizzazione Z e di come eliminare in modo sistematico le quantità *nude*, massa, m_0 , e costante di accoppiamento, in favore delle costanti fisicamente misurabili, le quantità *rinormalizzate*.

Capitolo 6

Il campo elettromagnetico

In questo capitolo ci occuperemo della quantizzazione del campo elettromagnetico con il metodo dei cammini di Feynman. Anche in questo caso adotteremo le convenzioni del Mandl e Shaw, [2]. In particolare il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ può essere espresso in termini dei potenziali A^μ tramite la

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (6.1)$$

Le equazioni di Maxwell per il campo libero

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad (6.2)$$

possono essere derivate da una densità di Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.3)$$

Una trasformazione dei potenziali:

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (6.4)$$

dove $\Lambda(x)$ è una funzione arbitraria, lascia invarianti sia il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ che la densità di lagrangiano $\mathcal{L}$, e quindi l'integrale d'azione. Più in generale una trasformazione di gauge non deve avere alcun effetto su qualsiasi processo fisico, e in particolare sui risultati di qualunque misura. Un corollario di questa affermazione è che i potenziali elettromagnetici A^μ non sono essi stessi misurabili.

L'invarianza di gauge è centrale nella teoria del campo elettromagnetico e delle sue interazioni. La richiesta che anche in presenza di interazioni la teoria sia invariante rispetto alla trasformazione di gauge determina il tipo di interazione possibile con altri campi. La teoria del campo elettromagnetico è il prototipo delle moderne teorie delle interazioni fondamentali, tutte basate sulla esistenza di particolari invarianze di gauge.

6.1 La scelta di gauge

Per descrivere la teoria quantistica del campo elettromagnetico mediante la somma sui cammini dobbiamo superare un problema legato alla invarianza di gauge.

Dove è il problema? I lettori ricorderanno che per definire una teoria quantistica abbiamo dovuto garantire la convergenza degli integrali funzionali che definiscono la somma sui cammini. Per ottenere questo risultato abbiamo considerato una continuazione analitica nel piano complesso della variabile tempo, tramite la ricetta $t \rightarrow t(1 - i\chi)$. Nel caso del campo elettromagnetico la invarianza di gauge introduce un nuovo tipo di divergenza che è immune a questo rimedio. Consideriamo infatti l'integrale funzionale:

$$I = \int \mathcal{D}[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu] \quad (6.5)$$

$\mathcal{O}[A^\mu]$ è un funzionale delle A^μ invariante di gauge, che quindi può rappresentare una qualche grandezza fisica. Come al solito, l'integrale funzionale è esteso sugli A^μ periodici tra $t = \pm\infty$.

Secondo i principi generali dell'integrale sui cammini, la quantità I nella (6.5) deve rappresentare l'elemento di matrice di $\mathcal{O}$ sul vuoto, a meno di una costante moltiplicativa indipendente da $\mathcal{O}$. Tuttavia è immediato convincersi che l'integrale I definito dalla $\mathcal{O}[A^\mu]$ è in realtà, infinito. Dato che $S[A^\mu]$ è invariante di gauge, per ogni cammino $A^\mu(t, \mathbf{x})$ ne esistono infiniti altri, ottenuti con una trasformazione di gauge, per i quali l'integrando ha lo stesso valore. Dato che lo spazio delle possibili trasformazioni di gauge, lo spazio delle funzioni $\Lambda(x)$, è infinito, l'integrale è necessariamente divergente.

Per dominare questa divergenza occorre trovare il modo di metterla a fattore di ogni integrale del tipo (6.5). L'insieme dei cammini $A^\mu(x)$ connessi da trasformazioni di gauge è detto una *traiettoria di gauge*. Quello che vorremmo fare è stabilire un sistema di coordinate nello spazio dei cammini tali che un sottoinsieme di tali coordinate (le linee orizzontali nella figura 6.1) corrispondano alle traiettorie di gauge e le rimanenti coordinate (la linea verticale) servano a distinguere cammini non equivalenti sotto trasformazioni di gauge, quindi fisicamente distinti.

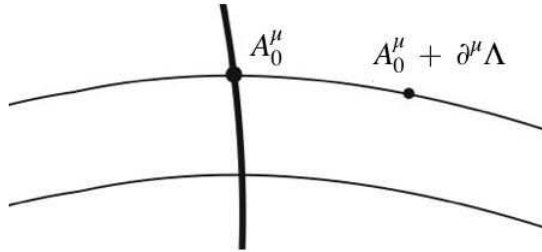


Figura 6.1: Lo spazio delle funzioni $A^\mu(x)$ può essere affettato secondo traiettorie (linee orizzontali) composte da cammini connessi da trasformazioni di gauge. Lungo le coordinate ortogonali alle traiettorie di gauge (linea verticale) troviamo cammini fisicamente distinti.

Se questo fosse possibile, potremmo riesprimere l'integrale (6.5) come

$$\int \mathcal{D}[\Lambda] \int \mathcal{D}[A_0^\mu] e^{iS[A_0^\mu]} \mathcal{O}[A_0^\mu],$$

ma dato che l'integrando è per ipotesi invariante di gauge, questo potrebbe essere riscritto come

$$\left[\int \mathcal{D}[\Lambda] \right] \int \mathcal{D}[A_0^\mu] e^{iS[A_0^\mu]} \mathcal{O}[A_0^\mu]$$

e l'integrale sulle trasformazioni di gauge, sia pure divergente, diverrebbe un fattore moltiplicativo comune in tutti gli integrali del tipo (6.5) e potrebbe essere omissso nel calcolo delle funzioni di Green che sono (vedi (2.26)) *rapporti* di integrali di questo tipo. Naturalmente le cose non sono così semplici dato che, trattandosi di un cambiamento di variabili, dobbiamo anche includere lo jacobiano della trasformazione da A^μ a $\{A_0^\mu, \Lambda\}$.

Per fare quello che abbiamo appena detto, dobbiamo prima di tutto imporre una “condizione di gauge” che rende trattabile l'integrale funzionale. Una tale condizione viene anche detta una “scelta di gauge” (*gauge fixing*, in inglese).

Un esempio di condizione di gauge che è stata discussa in corsi precedenti è quella che porta alla cosiddetta “gauge di Coulomb”, $\nabla \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Dato che siamo interessati a mantenere in evidenza l'invarianza relativistica, consideriamo invece la “gauge di Lorentz”, caratterizzata dalla condizione

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (6.6)$$

Nella gauge di Lorentz le equazioni di Maxwell si riducono alla equazione delle onde per ciascuna componente di A^μ ,

$$\square A^\mu = 0 \quad (6.7)$$

In realtà non conviene imporre direttamente la condizione¹ (6.6), ma piuttosto modificare la densità di lagrangiano (ovvero l'azione) in maniera che le equazioni del moto divengano appunto quelle della (6.7). L'azione originale si può scrivere come

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{2} \int d^4x ((\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu) - (\partial_\nu A^\nu)^2),$$

come si verifica facilmente². Se potessimo sopprimere il secondo termine avremmo l'azione proposta da E. Fermi,

$$S_F = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu), \quad (6.8)$$

che porta alle equazioni del moto della (6.7). Dobbiamo naturalmente dimostrare che il cambiamento della azione non modifica il valore di integrali funzionali del tipo della (6.5), almeno per quanto riguarda gli integrali in cui compaiono funzionali gauge-invarianti. Per ottenere questo risultato, conviene procedere in modo formale, introducendo alcune definizioni e dimostrando due teoremi (diamo qui una versione semplificata della trattazione riportata in [13].)

¹Imporre la condizione (6.6) comporta notevoli complicazioni, discusse ad esempio nel Mandl e Shaw, cap. 5.2. La procedura presentata in queste lezioni ha il vantaggio di essere utilizzabile anche nel caso di teorie dotate di simmetrie di gauge non abeliane, ad esempio il Modello Standard.

²Il secondo termine richiede due integrazioni per parti:

$$\int d^4x (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu) = - \int d^4x (\partial_\mu \partial^\nu A^\mu)(A_\nu) = \int d^4x (\partial_\mu \partial^\mu A^\mu)(\partial^\nu A_\nu)$$

6.2 Il metodo di deWitt-Faddeev-Popov

Per semplificare le notazioni, indichiamo con $f(A(x))$, o semplicemente $f(A)$, la funzione di A^μ che fissa la gauge, ad esempio:

$$f(A(x)) = \partial_\mu A^\mu(x), \quad (\text{gauge di Lorentz}) \quad (6.9)$$

e con $B[f(A)]$ un funzionale di f che introduce un fattore di convergenza lungo le orbite di gauge nella Fig. 6.1: $A^\mu = A_0^\mu + \partial^\mu \Lambda$, con $f(A_0) = 0$. Per restringere l'integrazione alla linea verticale in Fig. 6.1, potremmo usare una funzione delta:

$$B[f] = \delta[f(A)] \quad (6.10)$$

Per una trattazione più generale, conviene adottare il funzionale gaussiano:

$$B[f] = e^{\frac{-i}{2\alpha} \int d^4x f(x)^2} = e^{\frac{-i}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu u A^\mu)^2} \quad (6.11)$$

(la funzione delta si può riottenere dalla (6.11) passando al limite $\alpha \rightarrow 0$).

Indichiamo inoltre con A^Λ il potenziale trasformato di gauge di A con una trasformazione Λ :

$$(A^\Lambda)_\mu = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (6.12)$$

Introduciamo infine il determinante jacobiano:

$$\Delta[A] = \det \left[\frac{\delta f(A^\lambda(x))}{\delta \lambda(y)} \Big|_{\lambda=0} \right] = \det [K_{FP}(x, y)] \quad (6.13)$$

Il determinante nella (6.13) è comunemente indicato come determinante di Faddeev-Popov.

Possiamo adesso dimostrare il:

Teorema 1. L'integrale funzionale:

$$\int \mathcal{D}[\Lambda] \Delta[A^\Lambda] B[f(A^\Lambda)] = \mathcal{C} \quad (6.14)$$

è una costante indipendente dal valore di A (ma dipendente dalla particolare scelta di f e di $B[f]$).

Dim. Usando la trasformazione (6.12) due volte, possiamo scrivere:

$$[(A^\Lambda)^\lambda]_\mu = (A^\Lambda)_\mu + \partial_\mu \lambda = A_\mu + \partial_\mu \Lambda + \partial_\mu \lambda = A_\mu + \partial_\mu (\Lambda + \lambda) = (A^{\Lambda+\lambda})_\mu \quad (6.15)$$

e quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \det \left[\frac{\delta f((A^\Lambda)^\lambda(x))}{\delta \lambda(y)} \Big|_{\lambda=0} \right] &= \det \left[\frac{\delta f(A^{\Lambda+\lambda})}{\delta \lambda(y)} \Big|_{\lambda=0} \right] = \\ &= \det \left[\frac{\delta f(A^\Lambda(x))}{\delta \Lambda(y)} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

e quindi la (6.14) diventa:

$$\mathcal{C} = \int \mathcal{D}[\Lambda] \det \left[\frac{\delta f(A^\Lambda(x))}{\delta \Lambda(y)} \right] B[f(A^\Lambda)] = \int \mathcal{D}[f] B[f] = \text{indipendente da } A \quad (6.17)$$

Quello che succede è che possiamo parametrizzare l'orbita di gauge nella Fig. 6.1 con la funzione f invece che con Λ , e lo jacobiano nella (6.14) trasforma l'integrazione funzionale su Λ in una integrazione su f con un risultato che adesso non dipende più dal valore di A .

Nota Affinché il cambiamento di variabile sia valido occorre che la relazione tra f e Λ sia univoca. Questo implica che, al variare di Λ il punto sull'orbita di gauge nella Fig. 6.1 non ritorni mai allo stesso valore di A . In altri termini, non devono esistere soluzioni multiple dell'equazione:

$$f(A_0) = \partial_\mu A_0^\mu = 0 \quad (6.18)$$

La possibilità di soluzioni multiple della condizione di gauge, per teorie di gauge non abeliane, è stata considerata da V. N. Gribov [14] e le eventuali soluzioni diverse prendono il nome di *copie di Gribov* che si pensa possano giocare un ruolo nella teoria del confinamento dei quark. Noi resteremo nell'ambito della teoria delle perturbazioni in cui ci muoviamo in un intorno infinitesimo di A_0 , dove non si incontrano copie di Gribov, e possiamo quindi ignorare il problema.

Sulla base del risultato precedente possiamo dimostrare il seguente

Teorema 2. Se $\mathcal{O}[A]$ è un funzionale invariante di gauge, vale la seguente formula ($\mathcal{C}$ è la costante introdotta nella (6.17)):

$$\mathcal{C} \int \mathcal{D}[A_\mu] e^{iS[A]} \mathcal{O}[A] = \text{Cost} \cdot \int \mathcal{D}[A_\mu] e^{iS[A]} \mathcal{O}[A] \Delta[A] B[f(A)] \quad (6.19)$$

dove $S[A]$ è l'azione di Maxwell e Cost una costante inessenziale.

Dim. Scriviamo esplicitamente la costante $\mathcal{C}$ come integrale funzionale sull'orbita di gauge, usando la (6.17) e usiamo l'invarianza di gauge dell'azione di Maxwell e di $\mathcal{O}[A]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \int \mathcal{D}[A_\mu] e^{iS[A]} \mathcal{O}[A] &= \int \mathcal{D}[\Lambda] \int \mathcal{D}[A_\mu] e^{iS[A]} \mathcal{O}[A] \Delta[A^\Lambda] B[f(A^\Lambda)] = \\ &= \int \mathcal{D}[\Lambda] \int \mathcal{D}[A_\mu] e^{iS[A^\Lambda]} \mathcal{O}[A^\Lambda] \Delta[A^\Lambda] B[f(A^\Lambda)] = \\ &= \int \mathcal{D}[\Lambda] \int \mathcal{D}[A_\mu^\Lambda] e^{iS[A^\Lambda]} \mathcal{O}[A^\Lambda] \Delta[A^\Lambda] B[f(A^\Lambda)] \end{aligned} \quad (6.20)$$

dove abbiamo ulteriormente usato l'invarianza di gauge della misura su A (il cambiamento $A \rightarrow A^\Lambda$ corrisponde ad una traslazione nello spazio delle funzioni di x). Adesso la sostituzione $A^\Lambda \rightarrow A$ nell'integrale su A equivale ad un (inessenziale) cambiamento di nome alla variabile di integrazione e quindi dalla (6.20) otteniamo la (6.19), come richiesto, con $\text{Cost} = \int \mathcal{D}[\Lambda]$.

In conclusione, se consideriamo l' elemento di matrice sul vuoto dell' osservabile $\mathcal{O}[A]$ e semplifichiamo costanti comuni al numeratore e al denominatore, otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{O}[A]|0\rangle &= \frac{\int \mathcal{D}[A] e^{iS[A]} \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}[A] e^{iS[A]}} = \frac{\int \mathcal{D}[A_\mu] e^{iS[A]} \mathcal{O}[A] \Delta[A] B[f(A)]}{\int \mathcal{D}[A_\mu] e^{iS[A]} \Delta[A] B[f(A)]} = \\ &= \frac{\int \mathcal{D}[A_\mu] \Delta[A] e^{iS_{new}[A]} \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}[A_\mu] \Delta[A] e^{iS_{new}[A]}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

La prima frazione corrisponde alla prescrizione originale, eq. (6.5), derivata per analogia con il caso del campo scalare, e soddisfa formalmente l' invarianza di gauge, se $\mathcal{O}[A]$ è gauge-invariante. Tuttavia il numeratore ed il denominatore sono entrambi separatamente divergenti a causa del volume delle orbite di gauge. Nella seconda frazione, il funzionale $B[f]$ fornisce un fattore di convergenza lungo le orbite di gauge e sia il numeratore sia il denominatore sono separatamente convergenti. Nella terza frazione abbiamo inglobato, per convenienza, il funzionale $B[f]$ in un' azione complessiva, S_{new} :

$$e^{iS_{new}[A]} = e^{iS[A]} B[f(A)] \quad (6.22)$$

L' azione complessiva, S_{new} è diversa dall' azione di Maxwell e *non è invariante di gauge*. Tuttavia, l' eguaglianza (6.21) che abbiamo appena derivato, mostra che *per grandezze gauge invarianti* la terza frazione dá il risultato gauge-invariante desiderato.

Nel caso considerato nelle (6.9) e (6.11) possiamo esplicitare le formule di cui sopra come segue.

- Il determinante di Faddev-Popov si calcola dalla legge di trasformazione dei campi (6.12):

$$\begin{aligned} \partial_\mu (A^\lambda)^\mu &= \partial_\mu (A)^\mu + \square \lambda; \\ \det \left[\frac{\delta f(A^\lambda(x))}{\delta \lambda(y)} \Big|_{\lambda=0} \right] &= \det(\square). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Il determinante di Faddev-Popov è, in questo caso, indipendente dal campo di gauge, può essere portato fuori dell' integrale funzionale e contribuisce con una costante moltiplicativa inessenziale. La sparizione del determinante è conseguenza della linearità delle trasformazioni di gauge abeliane. Nel caso non-abeliano il formalismo generale resta immutato ma il determinante di Faddev-Popov dipende dai campi e dá un contributo assolutamente non banale.

- L' azione modificata è:

$$\begin{aligned} S_{new}[A] &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu) (\partial_\nu A^\nu) \right] = \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu \left[g^{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu \end{aligned} \quad (6.24)$$

Notiamo che per $\alpha = 1$ otteniamo l' azione di Fermi, S_F , eq. (6.8).

La scelta di α è arbitraria. Noi sceglieremo frequentemente il valore $\alpha = 1$. Questa scelta di gauge prende anche il nome di "gauge di Feynman".

In conclusione la identità (6.21) giustifica, per il calcolo di grandezze gauge-invarianti, l' uso dell' azione di Fermi (6.8), che d'ora in poi chiameremo semplicemente S .

6.3 Il funzionale generatore e il propagatore

Le funzioni di Green del campo elettromagnetico,

$$\langle 0 | T (A^{\mu_1}(x_1) \cdots A^{\mu_n}(x_n)) | 0 \rangle$$

possono essere dedotte da un funzionale generatore dipendente da una funzione ausiliaria $J_\mu(x)$,

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}[A^\mu] \exp \left[\frac{-i}{2} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu + 2J_\mu A^\mu) \right] \quad (6.25)$$

tramite la regola di corrispondenza

$$A^\mu(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \quad (6.26)$$

Se riscriviamo $Z[J]$ con una integrazione per parti come

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}[A^\mu] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x (A^\mu \square A_\mu - 2A^\mu J_\mu) \right]$$

possiamo completare un quadrato perfetto all'esponente definendo

$$\square^{-1} J_\mu(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y;0) J_\mu(y)$$

di modo che

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] &= \exp \left[\frac{-i}{2} \int d^4x (J^\mu \square^{-1} J_\mu) \right] \\ &\int \mathcal{D}[A^\mu] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x (A^\mu - \square^{-1} J^\mu) \square (A_\mu - \square^{-1} J_\mu) \right] \end{aligned}$$

Anche in questo caso l'integrale funzionale residuo è un fattore costante che può essere omissso, e otteniamo

$$Z[J_\mu] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_F(x-y;0) J_\mu(y) \right] \quad (6.27)$$

e la funzione a due punti, nella gauge di Feynman, diviene

$$\langle 0 | T (A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = i \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = -i g^{\mu\nu} \Delta_F(x-y;0) \quad (6.28)$$

Propagatore nella gauge generica. È utile calcolare il propagatore del fotone anche nella gauge più generale in cui la Lagrangiana prende la forma dell' Eq. (6.24). Invece che l' inverso dell' operatore $\square$, dobbiamo calcolare l' inverso di

$$g^{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu$$

ovvero, per la trasformata di Fourier, l' inverso di:

$$K^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} p^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) p^\mu p^\nu \quad (6.29)$$

Se scriviamo l' operatore desiderato come:

$$D^{\mu\nu} = A(p^2) g^{\mu\nu} + B(p^2) p^\mu p^\nu$$

e imponiamo:

$$D^{\mu\nu} K_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu \quad (6.30)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{p^2}; \quad B = (\alpha - 1) \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2)^2} \\ D^{\mu\nu} &= \frac{1}{p^2} \left[g^{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

In conclusione, diamo il propagatore del fotone nella gauge generica:

$$i[\Delta_F^{(\alpha)}]_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} (-g^{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}) \quad (6.32)$$

Per $\alpha = 1$ si ottiene il propagatore nella gauge di Feynman. Per $\alpha = 0$ si ottiene invece la cosiddetta *gauge di Landau*, in cui il propagatore soddisfa la condizione di Lorentz. Questo é in accordo con il fatto, già notato, che il limite $\alpha \rightarrow 0$ corrisponde ad effettuare l' integrale funzionale nella (6.21) con il funzionale $B[f]=\delta(f)$, e l' integrale funzionale è quindi ristretto ai campi che soddisfano la condizione di Lorentz esattamente.

6.4 Gli stati a un fotone

Se consideriamo il campo elettromagnetico libero (in assenza di cariche e correnti) nella gauge di Coulomb³ la condizione $\nabla \mathbf{A} = 0$ implica che $\Delta \phi = 0$ e quindi possiamo porre $\phi = 0$. Per un fotone di impulso $\mathbf{k}$ dalla condizione $\nabla \mathbf{A} = 0$ segue che il vettore di polarizzazione ϵ deve essere ortogonale a $\mathbf{k}$. Un fotone di impulso $\mathbf{k}$ può quindi avere due stati di polarizzazione che corrispondono a due vettori ϵ_r tali che $\epsilon_r \mathbf{k} = 0$ e $\epsilon_r \epsilon_s = \delta_{rs}$ ($r = 1, 2$).

Queste conclusioni, che sono di chiaro significato fisico, devono essere indipendenti da qualsiasi scelta di gauge, e dal metodo di quantizzazione, e devono quindi essere valide anche se procediamo con una quantizzazione nella gauge di Feynman, come abbiamo fatto nelle sezioni precedenti. Su questo punto sorge un problema piuttosto sottile. La azione di Fermi (6.8) tratta in modo simmetrico le quattro componenti del campo A^μ , e sebbene il lagrangiano di Fermi sia equivalente a quello gauge-invariante della (6.3) purché $\partial_\mu A^\mu = 0$, questa condizione non segue direttamente dal lagrangiano di Fermi, o dalle equazioni del moto (6.7). In effetti nella gauge di Feynman sono apparentemente presenti quattro stati di polarizzazione, e una sorpresa! Vediamo quale.

³Per una discussione della gauge di Coulomb rimandiamo al Mandl e Shaw [2], in particolare il primo capitolo.

La funzione a due punti nel caso $t_x > t_y$ può essere calcolata direttamente dalla espressione di Δ_F (vedi 3.66),

$$\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\omega_p} e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}$$

Se adesso definiamo le trasformate di Fourier spaziali (tenendo presente che $A^\nu(x)$ è reale)

$$A^\mu(\mathbf{k}, t_x) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} A^\mu(\mathbf{x}, t_x)$$

$$A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, t_y) = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3y e^{i\mathbf{q}\mathbf{y}} A^\nu(\mathbf{y}, t_y) = A^\nu(-\mathbf{q}, t_y)$$

otteniamo da una trasformata di Fourier in $\mathbf{y}$

$$\langle 0|A^\mu(x)A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, t_y)|0\rangle = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)}, \quad (6.33)$$

da cui, ponendo $\mu = \nu$, impariamo che lo stato

$$|\mu; \mathbf{q}\rangle = A^{\mu\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle$$

ha impulso $\mathbf{q}$ e energia $\omega_q = \sqrt{\mathbf{q}^2}$. Questo stato descrive quindi una particella di massa nulla. Una seconda trasformata in $\mathbf{x}$, e nel limite $t_x = t_y = 0$ porta a

$$\langle \mu; \mathbf{k} | \nu; \mathbf{q} \rangle = \langle 0|A^\mu(\mathbf{k}, 0)A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle = -g^{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \quad (6.34)$$

Ecco quindi la sorpresa: non solo per ogni valore di $\mathbf{q}$ ci sono quattro stati, e non i due che ci aspettiamo, ma mentre gli stati con $\mu = 1, 2, 3$ sono di modulo quadro positivo, dato che $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$,

$$\langle \mu; \mathbf{k} | \nu; \mathbf{q} \rangle = \langle 0|A^\mu(\mathbf{k}, 0)A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle = \delta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

lo stato $|\mu = 0; \mathbf{q}\rangle$ ha modulo quadro negativo,

$$\langle 0; \mathbf{k} | 0; \mathbf{q} \rangle = \langle 0|A^0(\mathbf{k}, 0)A^{0\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle = -\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})$$

Una situazione che sembra in aperto contrasto con i dettami della meccanica quantistica: si tratta di uno stato di probabilità negativa.

La soluzione di questo problema deriva dalla invarianza di gauge dell'elettromagnetismo, che non è del tutto obliterata dalla scelta della gauge di Feynman. Infatti l'azione di Fermi è invariante sotto una classe ristretta di trasformazioni di gauge, caratterizzate da funzioni $f(x)$ tali che $\square f(x) = 0$: Infatti (vedi 6.8)

$$\int d^4x \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \int d^4x (\partial^\nu A^\mu) (\partial_\nu A_\mu)$$

$$+ \int d^4x (\partial^\nu \partial^\mu f) \partial_\nu A_\mu + \int d^4x (\partial^\nu A^\mu) (\partial_\nu \partial_\mu f) + \int d^4x (\partial^\nu \partial^\mu f) (\partial_\nu \partial_\mu f)$$

e con una integrazione per parti si verifica che tutti i termini della seconda riga si annullano se $\square f(x) = 0$.

Nella prossima Sezione vedremo come la presenza di questa invarianza risolva il problema degli stati addizionali che appaiono nella gauge di Feynman⁴.

Per ogni valore di $\mathbf{q}$ possiamo scegliere quattro vettori di polarizzazione:

ϵ_1, ϵ_2 Le due polarizzazioni *trasverse*: $\epsilon_{1,2}^\mu = \{0, \epsilon_{1,2}\}$, con $(\epsilon_{1,2}\mathbf{k}) = 0$.

ϵ_3 La polarizzazione *longitudinale*: un vettore spaziale parallelo a $\mathbf{q}$: $\epsilon_3^\mu = \{0, \hat{q}\}$.

ϵ_0 La polarizzazione *temporale*: un vettore di tipo tempo, $\epsilon_0^\mu = \eta^\mu = \{1, 0\}$

In corrispondenza dei quattro vettori parleremo di fotoni trasversi, longitudinali o temporali. Se ad esempio $\mathbf{q}$ è nella direzione 3, possiamo scegliere i quattro vettori come

$$\epsilon_1 = \{0, 1, 0, 0\}, \quad \epsilon_2 = \{0, 0, 1, 0\} \quad \epsilon_L = \{0, 0, 0, 1\} \quad \epsilon_T = \{1, 0, 0, 0\}$$

Per gli stati trasversi possiamo, per ogni valore di $\mathbf{q}$ scegliere due vettori di polarizzazione $\epsilon_r^\nu(\mathbf{q})$ ($\mathbf{r} = 1, 2$) puramente spaziali ($\epsilon_{1,2}^0 = 0$), tali che

$$\mathbf{q}\epsilon_r = \mathbf{0}; \quad \epsilon_r\epsilon_s = \delta_{rs}$$

Se quindi definiamo gli stati a un fotone come

$$|\gamma; \mathbf{q}, r\rangle = \epsilon_r^\nu(\mathbf{q}) A_\nu^\dagger(\mathbf{q}, 0)|0\rangle$$

dalla (6.34) otteniamo

$$\langle\gamma; \mathbf{k}, s|\gamma; \mathbf{q}, r\rangle = \delta_{rs}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (6.35)$$

e, dalla (6.33),

$$\langle 0|A^\mu(x)|\gamma; \mathbf{q}, r\rangle = \frac{\epsilon_r^\mu(\mathbf{q})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} e^{-i\omega_q(t_x - t_y)}, \quad (6.36)$$

Quest'ultima risulterà utile per stabilire le regole di calcolo per la matrice S . Nel presente testo consideriamo i vettori ϵ_r^ν come vettori a componenti *reali*, che descrivono fotoni a polarizzazione lineare. Ricordiamo però che per descrivere stati con polarizzazione circolare, in particolare fotoni di elicità definita si devono usare vettori ϵ_r^ν a componenti *complesse*.

6.5 Fotoni virtuali

L'interazione tra il campo elettromagnetico e la materia avviene attraverso la corrente elettromagnetica [1]:

$$\mathcal{L}_I = e A_\mu(x) J^\mu(x). \quad (6.37)$$

⁴Una discussione più approfondita e citazioni della letteratura originale, in particolare al lavoro di Gupta e Bleuler, si trovano nel capitolo 5 del Mandl e Shaw [2].

L' invarianza di gauge prescrive che la corrente sia conservata:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (6.38)$$

Nella QED dell' elettrone:

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (6.39)$$

e la conservazione della corrente è garantita dal teorema di Noether.

Il piú semplice complesso con cui possiamo sperimentare sul campo elettromagnetico è costituito da un' antenna e da un ricevitore. Nell' antenna, un elettrone compie una transizione da uno stato A ad uno stato B, nel ricevitore un' altro elettrone passa da A' a B'.

L' ampiezza della transizione complessiva: $A \rightarrow B, A' \rightarrow B'$ al secondo ordine della teoria delle perturbazione è data da:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle B, B' | \int d^4x d^4y T [\mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y)] | A, A' \rangle \\ &= \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x d^4y \langle B, B' | T [A_\mu(x) J^\mu(x) A_\nu(y) J^\nu(y)] | A, A' \rangle \end{aligned} \quad (6.40)$$

Fattorizzando gli stati quantistici di antenna e ricevitore ($|A, A'\rangle = |A\rangle |A'\rangle$, etc.) e tenendo conto che, a questo ordine, le correnti commutano tra loro e con il potenziale vettore, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x d^4y (\langle B | J^\mu(x) | A \rangle \langle B' | J^\nu(y) | A' \rangle + x \leftrightarrow y) \langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle = \\ &= (ie)^2 \int d^4x d^4y \langle B | J^\mu(x) | A \rangle \langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle \langle B' | J^\nu(y) | A' \rangle \end{aligned} \quad (6.41)$$

dove abbiamo usato la simmetria tra le variabili di integrazione x ed y per cancellare il fattore 1/2. Possiamo rappresentare l' ampiezza (6.41) con il grafico di Feynman in Fig. 6.2. La linea ondulata rappresenta il propagatore del fotone. Si dice, in questo caso, che tra le due correnti si scambia un *fotone virtuale*.

Passando alle trasformate di Fourier ed usando la (6.32) otteniamo:

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^\mu(-p) \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \alpha) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \tilde{J}_{B'A'}^\nu(p) \quad (6.42)$$

Una prima conseguenza della (6.42) è che S_{fi} è indipendente dalla gauge: i termini dipendenti da α nel propagatore danno contributo nullo grazie alla conservazione della corrente (6.38), che implica $p_\mu J^\mu(p) = 0$.

Possiamo quindi scrivere:

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\tilde{J}_{BA})^\mu(-p) \frac{i(-g_{\mu\nu})}{p^2 + i\epsilon} (\tilde{J}_{B'A'})^\nu(p) \quad (6.43)$$

Questa equazione fa pensare ci sia ancora un problema: il residuo nel polo a $p^2 = 0$ è proporzionale a $-g_{\mu\nu}$, il che sembra indicare che tutti e quattro i tipi di fotoni possano contribuire, vedi la (6.34). La patologia, tuttavia, è solo apparente ed è di nuovo curata dalla conservazione della corrente⁵.

⁵Notiamo che l' ampiezza si può anche scrivere come $\int d^4x J_{A'B'}^\mu(x) (A_{AB})_\mu(x)$, dove $(A_{AB})_\mu(x)$ è il campo classico generato dalla corrente $J_{AB}^\mu(x)$. La discussione a questo punto segue quasi parola per parola quella riportata in [1] a proposito della funzione di Green del campo elettromagnetico classico.

Con riferimento al 4-momento p , introduciamo i quattro vettori di polarizzazione $\epsilon^\mu(p)$, Eq. (6.4) che formano una base ortonormale nello spazio delle p (naturalmente in relazione alla metrica $g^{\mu\nu}$). È facile convincersi che la relazione di completezza per questa base si scrive:

$$\begin{aligned} -g^{\mu\nu} &= \sum_{i=0,\dots,3} x_i \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu = \\ x_0 &= -1, \quad x_{1,2,3} = +1 \end{aligned} \quad (6.44)$$

ovvero:

$$-g^{\mu\nu} = \left(\sum_{i=1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu \right) + (\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) \quad (6.45)$$

Se esprimiamo ϵ_3 in funzione di p e di η^μ , otteniamo:

$$\epsilon_3^\mu = \frac{1}{|\mathbf{p}|} (p^\mu - p^0 \eta^\mu); \quad (6.46)$$

$$(\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) = \frac{p^2}{|\mathbf{p}|} \eta^\mu \eta^\nu + \dots \quad (6.47)$$

dove i punti di sospensione indicano termini proporzionali a p^μ e/o a p^ν , che danno zero quando inseriti nella (6.42), sempre in virtù della conservazione della corrente.

In conclusione, con questa sostituzione, la (6.42) diventa:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^\mu(-p) \frac{i (\sum_{i=1,2} (\epsilon_i)_\mu (\epsilon_i)_\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{J}_{B'A'}^\nu(p) + \\ &+ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^0(-p) \frac{-i}{|\mathbf{p}|} \tilde{J}_{B'A'}^0(p) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Il primo termine a secondo membro della (6.48) mostra che al polo in $p^2 = 0$ contribuiscono solo i fotoni trasversi, che sono quindi gli unici stati presenti a grande distanza dall' interazione. Non ci sono fotoni di altro tipo negli stati "in e "out introdotti nel capitolo precedente. Il contributo dei fotoni longitudinali e temporali si combina, in virtù della conservazione della corrente, nel secondo

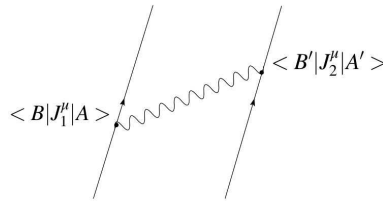


Figura 6.2: Il grafico di Feynman rappresenta l' ampiezza per l' interazione antenna-ricevitore dovuta allo scambio di un fotone virtuale. Le linee continue raffigurano, nello spazio-tempo, le linee-universo di antenna e ricevitore, la linea ondulata scambiata tra i vertici rappresenta la propagazione del campo elettromagnetico.

termine che, come si vede dal fattore $1/|\mathbf{p}|$, non è altro che l' interazione coulombiana istantanea tra le due correnti.

In effetti, tornando allo spazio $\mathbf{x}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^0(-p) \frac{-i}{|\mathbf{p}|} \tilde{J}_{B'A'}^0(p) &= \int d^4 x d^4 y J_{BA}^0(x) J_{B'A'}^0(y) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{-i}{|\mathbf{p}|} = \\ &= -i \int d^4 x d^4 y J_{BA}^0(x) \delta(x^0 - y^0) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} J_{B'A'}^0(y) \end{aligned} \quad (6.49)$$

che non è altro che $-i$ moltiplicato per l' elemento di matrice dell' Hamiltoniana di interazione elettrostatica tra le due correnti.

Se avessimo effettuato il calcolo nella gauge di Coulomb, avremmo scritto l' Hamiltoniana di interazione come somma dell' interazione della corrente con i fotoni trasversi (di ordine e) più l' interazione coulombiana tra le densità di carica, di ordine e^2 :

$$H_I = e \int d^3 x \mathbf{A}(x, t) \mathbf{j}(x, t) + \frac{e^2}{2} \int d^3 x d^3 y j_0(x, t) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j_0(y, t) \quad (6.50)$$

L' ampiezza (6.48) si ottiene prendendo, nella matrice S , l' interazione coulombiana al primo ordine e l' interazione con i fotoni trasversi al secondo ordine. Il vantaggio decisivo della formulazione relativistica è di calcolare *tutto insieme*, con il solo grafico della Fig. 6.2.

Capitolo 7

Campi Fermionici

7.1 L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi

In questo capitolo passiamo dalla trattazione di campi scalari a quella di campi di Dirac che descrivono particelle di spin $1/2$. Il problema che si pone è come trattare campi che devono obbedire leggi di anticommutazione e al principio di Pauli. Nelle trattazioni elementari della teoria dei campi abbiamo visto che un campo libero che descrive particelle bosoniche non interagenti è equivalente a un insieme di oscillatori armonici, uno per ciascun stato in cui si può trovare una particella. Concentrandoci su un singolo oscillatore possiamo definire gli operatori di creazione e distruzione, $a^\dagger$, a che obbediscono a regole di commutazione

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (7.1)$$

Se indichiamo con $|n\rangle$ lo stato in cui l'oscillatore contiene n particelle, avremo

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle; \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \quad (\text{bosoni}) \quad (7.2)$$

Anche un campo spinoriale può essere sviluppato in "oscillatori", ma oscillatori di tipo diverso, gli *oscillatori di Fermi*. Ciascuno di questi oscillatori può contenere al massimo una particella, e l'azione dei corrispondenti operatori di creazione e distruzione su stati a 0,1 particelle è

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle; \quad a^\dagger|1\rangle = 0; \quad a|1\rangle = |0\rangle; \quad a|0\rangle = 0; \quad (\text{fermioni}) \quad (7.3)$$

Questo dà luogo a regole di anticommutazione,

$$\{a, a^\dagger\} = 1 \quad (7.4)$$

In ambedue i casi l'hamiltoniano diviene¹

$$H = \hbar\omega a^\dagger a \quad (7.5)$$

¹Come diverrà chiaro fra poco conviene in questa fase esplicitare la dipendenza dalla costante di Planck.

con ω l'energia della particella. Possiamo ricavare formalmente questo hamiltoniano da un lagrangiano

$$L = i\hbar a^\dagger \dot{a} - \hbar\omega a^\dagger a \quad (7.6)$$

dal quale si ottiene l'hamiltoniano corretto

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = i\hbar a^\dagger; \quad H = \pi \dot{a} - L = \hbar\omega a^\dagger a \quad (7.7)$$

Notiamo che $\partial L / \partial \dot{a}^\dagger = 0$, dato che L non dipende da $\dot{a}^\dagger$. In realtà la relazione tra a ed $a^\dagger$ è simmetrica, dato che con una integrazione per parti possiamo esprimere l'azione in due modi equivalenti in cui i ruoli di a , e $a^\dagger$ sono scambiati,

$$S = \hbar \int dt (i a^\dagger \dot{a} - \omega a^\dagger a) = \hbar \int dt (-i \dot{a}^\dagger a - \omega a^\dagger a)$$

Se applichiamo le regole di commutazione canoniche otteniamo il risultato “bosonico”,

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{i\hbar} [a, \pi] = \frac{1}{i\hbar} \cdot i\hbar = 1 \quad (7.8)$$

Sappiamo già come derivare tutte le proprietà dell'oscillatore armonico bosonico mediante la somma sui cammini della variabile $q(t)$. Come vedremo fra poco, possiamo direttamente usare cammini nelle variabili $a(t)$ e $a^\dagger(t)$. Come modificare la somma sui cammini per ottenere risultati fermionici? L'idea giusta nasce considerando, invece di $a, a^\dagger$, le variabili $\tilde{a} = \sqrt{\hbar}a$, $\tilde{a}^\dagger = \sqrt{\hbar}a^\dagger$, che non dipendono dalla costante di Planck, e sono quindi variabili classiche:

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad \tilde{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \quad (7.9)$$

In termini di queste il lagrangiano diviene

$$L = i\tilde{a}^\dagger \dot{\tilde{a}} - \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \quad (7.10)$$

e le regole di commutazione

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = \hbar \quad (7.11)$$

Nella somma sui cammini $\tilde{a}(t), \tilde{a}^\dagger(t)$ sono trattate come funzioni a valore numerico, cioè come grandezze che commutano. Quindi è come se si prendesse un limite classico, $\hbar \rightarrow 0$, nel quale $\tilde{a}(t), \tilde{a}^\dagger(t)$ divengono grandezze commutanti,

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 0 \quad (7.12)$$

Nel caso fermionico si parte da regole di anticommutazione che nel limite $\hbar \rightarrow 0$ divengono semplicemente

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 0 \quad (7.13)$$

quindi i cammini nel caso fermionico devono essere descritti da una funzione il cui valore non è un normale numero, ma una quantità che anticommuta, una variabile di Grassman.

Nel seguito torniamo ad usare unità di misura in cui $\hbar = 1$.

7.1.1 Variabili anticommutanti

Le regole di calcolo con grandezze anticommutanti sono molto semplici, e la pagina che segue contiene un intero manuale di calcolo differenziale e integrale con variabili di Grassmann. Supponiamo di avere n variabili di questo tipo, $a_1 \cdots a_n$, tali quindi che

$$\{a_h, a_k\} = 0 \quad (7.14)$$

il che in particolare implica che $(a_i)^2 = 0$. Valgono allora le seguenti regole:

Coefficienti numerici, combinazioni lineari Una variabile anticommutante può essere moltiplicata per un numero ordinario c , con cui commuta, $ca = ac$. Si possono fare combinazioni lineari: $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots$.

Funzioni Dato che $a_k^2 = 0$, la più generale funzione è un polinomio di ordine n

$$F = C_0 + \sum_k C_1(k) a_k + \sum_{h>k} C_2(h, k) a_h a_k \cdots + C_n a_1 a_2 \cdots a_n \quad (7.15)$$

dove le C sono coefficienti numerici.

Differenziali e derivate Il differenziale da di una grandezza anticommutante a è esso stesso anticommutante: dato che $a_1 a_2 = -a_2 a_1$, deve essere $a_1 da_2 = -da_2 a_1$. La derivata rispetto a una variabile anticommutante d/da_k è definita dalle seguenti regole:

- $\frac{d}{da_k} 1 = 0$; $\frac{d}{da_k} a_h = \delta_{hk}$
- L'operazione d/da_k anticommuta con altre variabili grassmaniane. Questo si può capire considerando un prodotto di grandezze anticommutanti $cd \cdots a \cdots$: d/da "sfila" a dal prodotto e per far questo deve portare a in prima posizione. Quindi $d/da (b \cdot a) = d/da (-a \cdot b) = -b$ ovvero $d/da b \cdot a = -b \cdot d/da a$, e così via.
- Le derivate anticommutano tra loro, ad esempio $d/da d/db (ba) = 1$ mentre $d/db d/da (ba) = d/db (-b) = -1$

Integrali Gli integrali di variabili anticommutanti è definito con le seguenti regole:

$$\int da = 0; \quad \int da a = 1 \quad (7.16)$$

ne segue che per variabili anticommutanti l'integrale e la derivata sono la stessa operazione.

$$\int da F = \frac{d}{da} F \quad (7.17)$$

Questa definizione è motivata nel modo seguente: gli integrali $\int da$ e $\int da a$ devono essere definiti come costanti che non dipendono da nessuna grandezza anticommutante, quindi come numeri ordinari. Allo stesso tempo, dato che da è anticommutante $\int da$ dovrebbe essere anticommutante, quindi l'unica possibilità è che sia 0 , l'unico numero ordinario che sia anche anticommutante, $0x = -x0$. Il secondo integrale, $\int da a$, può essere un numero qualsiasi: porre $\int da a = 1$ equivale a definire la normalizzazione delle a . Se ad esempio avessimo $\int da a = X$, potremmo definire una nuova variabile, $a = a' X^{1/2}$ tale che $\int da' a' = 1$.

Notiamo che se P_i indica prodotti di un numero pari di grandezze anticommutanti e A_k prodotti di un numero dispari, si ha

$$P_i P_k = P_k P_i; \quad P_i A_k = A_k P_i; \quad A_i A_k = -A_k A_i \quad (7.18)$$

ad esempio, se a, b, c, d sono anticommutanti, $(ab)(cd) = (cd)(ab)$, $(ab)c = c(ab)$, mentre $(abc)d = -d(abc)$. Quindi il prodotto di un numero pari di grandezze anticommutanti si comporta come una grandezza commutante.

7.1.2 Somma sui cammini per i due oscillatori

In questa sezione sviluppiamo le regole di calcolo della somma sui cammini di grandezze anticommutanti applicandole a un caso concreto: l'oscillatore di Fermi definito nella sezione 7.1. Come vedremo la somma sui cammini porta a risultati che sono in pieno accordo con quelli ottenuti in modo tradizionale.

Nella sezione 3.2 abbiamo calcolato il funzionale generatore dell'oscillatore armonico nel linguaggio delle $q(t)$. Vogliamo adesso rifarlo nel linguaggio delle $a(t)$, $a^\dagger(t)$, stando attenti a fare operazioni che siano egualmente valide sia nel caso che queste variabili commutino (caso bosonico) che anticommutino (caso fermionico) e notando via via le differenze tra i due casi. Definiamo quindi $Z(J, J^\dagger)$ come

$$Z(J, J^\dagger) = \int \mathcal{D}a(t) \mathcal{D}a^\dagger(t) \exp \left[i \int dt \left(a^\dagger(t) D a(t) - J^\dagger(t) a(t) - a^\dagger(t) J(t) \right) \right] \quad (7.19)$$

dove (vedi eq. 7.10) l'operatore differenziale² D è dato da

$$D = i \frac{d}{dt} - \omega \quad (7.20)$$

Dato che l'azione deve in ogni caso essere una grandezza commutante, nel caso fermionico sia J che $J^\dagger$ devono essere anticommutanti. Come abbiamo fatto nella sezione 3.2 introduciamo una funzione $S(t)$ tale che

$$D S(t) = \delta(t); \quad \rightarrow \quad \dot{S}(t) = -i\omega S(t) - i\delta(t) \quad (7.21)$$

Possiamo riscrivere il termine in $(a^\dagger J)$ della (7.19) come

$$\int dt a^\dagger(t) J(t) = \int dt a^\dagger(t) D \left(\int dt' S(t-t') J(t') \right)$$

mentre il termine in $(J^\dagger a)$ può essere scritto come

$$\int dt J^\dagger(t) a(t) = \int dt \left(\int dt' J^\dagger(t') S(t'-t) \right) D a(t)$$

²Questo non è altro che l'operatore di Dirac ($i\gamma^\mu \partial_\mu - m$), ma in uno spazio ad una sola dimensione.

come si verifica con una integrazione per parti,

$$\begin{aligned} & \int dt \left(\int dt' J^\dagger(t') S(t' - t) \right) \left(i \frac{d}{dt} - \omega \right) a(t) \\ &= \int dt \left(-i \frac{d}{dt} - \omega \right) \int dt' J^\dagger(t') S(t' - t) a(t) \end{aligned}$$

e notando che

$$\left(-i \frac{d}{dt} - \omega \right) S(t' - t) = \left(i \frac{d}{d(t' - t)} - \omega \right) S(t' - t) = \delta(t' - t).$$

Possiamo allora riscrivere il funzionale generatore come

$$\begin{aligned} Z(J, J^\dagger) &= \exp \left[-i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t' - t) J(t) \right] \int \mathcal{D}a(t) \mathcal{D}a^\dagger(t) \\ &\exp \left[i \int dt \left(a^\dagger(t) - \int dt' J^\dagger(t') S(t' - t) \right) D \left(a(t) - \int dt' S(t - t') J(t') \right) \right] \end{aligned}$$

L'integrale funzionale residuo viene eseguito con un cambiamento di variabile

$$a(t) \rightarrow a'(t) = a(t) - \int dt' S(t - t') J(t')$$

e analogamente per $a^\dagger$, e si riduce a una costante moltiplicativa che coincide con il valore di $Z[0]$ e può essere omessa. Questi cambiamenti di variabile sono però legittimi solo se (vedi la sezione 3.2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t(1 - i\chi)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t(1 - i\chi)) = 0 \quad (7.22)$$

La soluzione generale della (7.21) è $S(t) = A e^{-i\omega t} - i\theta(t) e^{-i\omega t}$, ma la (7.22) impone $A = 0$, quindi

$$S(t) = -i\theta(t) e^{-i\omega t} \quad (7.23)$$

e il funzionale generatore diviene

$$Z(J, J^\dagger) = \exp \left[-i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t' - t) J(t) \right] \quad (7.24)$$

Dato che siamo stati attenti a non cambiare l'ordinamento delle grandezze che nel caso fermionico anticommutano tra loro, quanto fatto sinora vale sia per il caso bosonico che per quello fermionico. Delle differenze appaiono nel calcolo delle funzioni di Green, dove bisogna tenere conto del carattere anticommutante degli operatori. Ad esempio, se a è una grandezza anticommutante, la (2.24) va ridefinita come

$$T(a(t_1) a(t_2)) = \begin{cases} a(t_1) a(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ -a(t_2) a(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases} \quad \text{Fermioni} \quad (7.25)$$

e quindi anche

$$T(a(t_1) a(t_2)) = -T(a(t_2) a(t_1)) \quad (7.26)$$

e queste proprietà si estendono al prodotto ordinato nel tempo di più operatori e quindi anche alle funzioni di Green.

Le regole per l'uso del funzionale generatore sono anche leggermente diverse nei due casi. Infatti, mentre la regola di corrispondenza

$$a(t) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)} \quad \text{Bosoni o Fermioni} \quad (7.27)$$

è la stessa nei due casi, si ha

$$a^\dagger(t) \rightarrow \begin{cases} i \frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Bosoni} \\ -i \frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Fermioni} \end{cases} \quad (7.28)$$

come si vede dalla (7.19) notando che nel caso fermionico $\frac{\delta}{\delta J(t)}$ anticommuta con $a^\dagger(t)$. Calcoliamo alcune funzioni di Green: Per la funzione a due punti otteniamo, sia nel caso fermionico che nel caso bosonico (lasciamo la derivazione ai lettori),

$$\begin{aligned} \langle 0|T(a(t)a^\dagger(\tau))|0\rangle &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)} \frac{\delta}{\delta J(\tau)} Z[J, J^\dagger] \Big|_{J=J^\dagger=0} \\ &= iS(t-\tau) = \theta(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} \end{aligned} \quad (7.29)$$

Consideriamo anzitutto il caso $t > \tau$, per cui otteniamo, assegnando una energia $E_0 = 0$ allo stato $|0\rangle$,

$$\langle 0|a(t)a^\dagger(\tau)|0\rangle \equiv \langle 0|a e^{-iH(t-\tau)} a^\dagger|0\rangle = e^{-i\omega(t-\tau)}$$

Questo risultato ci dice che³ esiste uno stato $|1\rangle$ con energia $E_1 = \omega$, e che $|\langle 1|a^\dagger|0\rangle|^2 = 1$. Quindi possiamo definire la fase dello stato $|1\rangle$ in modo che $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$. Al contrario, se $\tau > t$ otteniamo

$$\langle 0|a^\dagger(\tau)a(t)|0\rangle = 0$$

e introducendo un insieme completo di stati $|A\rangle$ con energia E_A ,

$$\sum_A |\langle A|a|0\rangle|^2 e^{iE_A(\tau-t)} = 0$$

da cui si ottiene (considerando il caso $\tau = t$) $a|0\rangle = 0$.

Per la funzione a quattro punti c'è una differenza tra il caso bosonico e quello fermionico. Nei passaggi che seguono, dove appare il simbolo $\pm$ si intende che il segno $+$ si applica al caso bosonico, il $-$ al caso fermionico, e dove non appare il risultato è lo stesso nei due casi.

$$\begin{aligned} &\langle 0|T(a(t_1)a(t_2)a^\dagger(\tau_1)a^\dagger(\tau_2))|0\rangle \\ &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} \frac{1}{2} \left[-i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t'-t) J(t) \right]^2 \\ &= -\frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} \left[\int dt' J^\dagger(t') S(t'-\tau_1) \right] \left[\int dt'' J^\dagger(t'') S(t''-\tau_2) \right] \\ &= -[S(t_2-\tau_1) S(t_1-\tau_2) \pm S(t_1-\tau_1) S(t_2-\tau_2)] \\ &= e^{i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} [\theta(t_2-\tau_1)\theta(t_1-\tau_2) \pm \theta(t_1-\tau_1)\theta(t_2-\tau_2)] \end{aligned}$$

³Vedi la discussione alla fine della sezione 3.2.

Il segno – che appare nel caso fermionico riflette il principio di Pauli. Ad esempio, nel caso $t_1 > t_2 > \tau_1 > \tau_2$ si ottiene

$$\langle 0 | (a(t_1) a(t_2) a^\dagger(\tau_1) a^\dagger(\tau_2)) | 0 \rangle = \begin{cases} 2 e^{-i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} & \text{Bosone} \\ 0 & \text{Fermione} \end{cases} \quad (7.30)$$

Se in questa espressione passiamo al limite $t_1 \rightarrow t_2$ e $\tau_1 \rightarrow \tau_2$, nel caso bosonico otteniamo

$$\langle 0 | [a(t_2)]^2 [a^\dagger(\tau_2)]^2 | 0 \rangle = 2 e^{-i2\omega(t_2-\tau_2)} \quad (7.31)$$

e da questo impariamo che esiste uno stato $|2\rangle$ con energia $E_2 = 2\omega$, e che $[a^\dagger]^2|0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$. Dato che $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$, deve essere $a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$. Analogamente deduciamo che $a^2|2\rangle = \sqrt{2}|0\rangle$. Nel caso fermionico impariamo invece che, come segue dal principio di Pauli, $[a^\dagger]^2|0\rangle = 0$ — non esiste un secondo stato eccitato dell'oscillatore di Fermi.

7.1.3 Integrali gaussiani per variabili anticommutanti

Per usi successivi, riportiamo qui il calcolo degli integrali gaussiani su variabili anticommutanti, da confrontare con il risultato per gli analoghi integrali su variabili commutanti.

L'integrale più semplice è:

$$A(\lambda) = \int da^\dagger da e^{-\lambda a^\dagger a} \quad (7.32)$$

e si effettua utilizzando le regole date sopra:

$$A(\lambda) = \int da^\dagger da (1 - \lambda a^\dagger a) = \lambda \int da^\dagger a^\dagger da a = \lambda \quad (7.33)$$

Il risultato (7.33) si generalizza immediatamente al caso di N coppie di variabili:

$$A(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \int (\prod_i da_i^\dagger da_i) e^{\sum_k \lambda_k a_k^\dagger a_k} = \prod_i \lambda_i \quad (7.34)$$

e quindi al caso di una forma bilineare:

$$\begin{aligned} A(\Lambda) &= \int (\prod_i da_i^\dagger da_i) e^{(a^\dagger \Lambda a)}; \\ (a^\dagger \Lambda a) &= \sum_{ij} a_i^\dagger \Lambda_{ij} a_j \end{aligned} \quad (7.35)$$

In questo caso, diagonalizziamo la matrice Λ con una trasformazione unitaria:

$$\tilde{a}_i = \sum_k U_{ik} a_k; \quad U^\dagger U = 1 \quad (7.36)$$

in modo tale che:

$$(a^\dagger \Lambda a) = \sum_k \lambda_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k \quad (7.37)$$

dove le λ_k sono gli autovalori di Λ . Da notare che lo jacobiano della trasformazione tra le variabili $a^\dagger, a$ e le $\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}$ vale uno:

$$\begin{aligned} J &= \det \left[\frac{\partial(\tilde{a}^\dagger, \tilde{a})}{\partial(a^\dagger, a)} \right] = \\ &= \det \left[\frac{\partial(\tilde{a}^\dagger)}{\partial(a^\dagger)} \right] \det \left[\frac{\partial(\tilde{a})}{\partial(a)} \right] = |\det U|^2 = 1 \end{aligned} \quad (7.38)$$

da cui:

$$A(\Lambda) = \int \left(\prod_i d\tilde{a}_i^\dagger d\tilde{a}_i \right) e^{\sum_k \lambda_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k} = \det \Lambda \quad (7.39)$$

Questo risultato si può confrontare con quello relativo all' integrale gaussiano su variabili commutanti:

$$C(\Lambda) = \int \left(\prod_i dx_i^\dagger dx_i \right) e^{-(x^\dagger \Lambda x)} \quad (7.40)$$

Nella base in cui Λ è diagonale, poniamo:

$$x_i = \frac{u_i + i v_i}{\sqrt{2}}; \quad x_i^\dagger = \frac{u_i - i v_i}{i\sqrt{2}} \quad (7.41)$$

da cui otteniamo:

$$C(\Lambda) = \int \prod \left(du_i dv_i e^{-\frac{\lambda_i(u_i^2 + v_i^2)}{2}} \right) = \prod_i \left(\frac{2\pi}{\lambda_i} \right) = \left[\det \left(\frac{2\pi}{\Lambda} \right) \right]^{-1} \quad (7.42)$$

Il passaggio da variabili anticommutanti a commutanti comporta il cambiamento: $\det \Lambda \rightarrow [\det \Lambda]^{-1}$, a meno di una inessenziale costante moltiplicativa.

Con l' aiuto delle formule precedenti, possiamo considerare il caso di integrali funzionali gaussiani della forma:

$$\begin{aligned} A(D) &= \int [\mathcal{D}\psi^\dagger(x)] [\mathcal{D}\psi(x)] e^{-(\psi^\dagger D \psi)}; \\ (\psi^\dagger D \psi) &= \int dx dy \psi^\dagger(x) D(x, y) \psi(y) \end{aligned} \quad (7.43)$$

Determinato il sistema delle autofunzioni dell' operatore D :

$$\int D(x, y) \psi_i(y) = \lambda_i \psi_i(x) \quad (7.44)$$

possiamo sviluppare le funzioni anticommutanti nella base delle autofunzioni:

$$\psi(x) = \sum_i a_i \psi_i(x) \quad (7.45)$$

dove le a_i sono variabili anticommutanti. Nella nuova base, scriviamo l' integrale funzionale come:

$$A(D) = \int \prod_i da_i^\dagger da_i e^{-(a^\dagger D a)}; \quad D_{ij} = \int dx dy \psi_i^\dagger(x) D(x, y) \psi_j(y) \quad (7.46)$$

da cui, come prima:

$$A(D) = \det D \quad (7.47)$$

con il determinante di D dato dalla (7.39). Il caso di variabili commutanti si tratta in modo analogo.

7.2 Quantizzazione del campo di Dirac

In questa sezione calcoliamo esplicitamente il funzionale generatore per un campo di Dirac libero e la funzione a due punti. Daremo per nota la descrizione standard di questo sistema, basata sulle regole di quantizzazione canonica, e le proprietà delle matrici γ e delle soluzioni ad onda piana della equazione di Dirac. Adotteremo le notazioni e convenzioni del Mandl e Shaw [2] in particolare la Appendice A di quel testo.

Ricordiamo che esistono due tipi di quadrispinori: il tipo “normale”, rappresentato dal campo di Dirac $\psi(x)$ e il tipo “aggiunto” rappresentato dal campo $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0$. In genere ometteremo gli indici spinoriali intendendo in particolare che due indici contigui, uno “normale” ed uno “aggiunto” siano sommati. Nelle matrici di Dirac il primo indice va considerato “normale” e il secondo “aggiunto”.

La equazione di Dirac per una particella di massa m sarà scritta come

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (7.48)$$

e può essere derivata da una densità di lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (7.49)$$

La (7.49) sarà il nostro punto di partenza. In analogia a quanto abbiamo fatto per l'oscillatore, definiamo il funzionale generatore introducendo due funzioni ausiliarie $J_\rho(x)$, $\bar{J}_\rho(x)$.

$$Z(J, \bar{J}) = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) D \psi(x) - \bar{J}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) J(x)) \right] \quad (7.50)$$

dove D è l'operatore di Dirac

$$D = i\gamma^\mu \partial_\mu - m$$

e considereremo ψ , $\bar{\psi}$, J , $\bar{J}$ come grandezze *anticommutanti*. Per eseguire l'integrale seguiamo i passi della sezione precedente. Introduciamo quindi una funzione $S_F(x)$, il propagatore, tale che

$$D S_F(x) = \delta^4(x) \quad (7.51)$$

di modo che possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} Z(J, \bar{J}) = & \exp \left[-i \int d^4x' d^4x \bar{J}(x') S_F(x' - x) J(x) \right] \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \\ & \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) - \int d^4x' \bar{J}(x') S_F(x' - x) \right) D \left(\psi(x) - \int d^4x' S_F(x - x') J(x') \right) \right] \end{aligned}$$

Per dimostrare questa trasformazione cominciamo con

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) J(x) = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m) \int d^4x' S_F(x - x') J(x')$$

che si verifica direttamente dalla (7.51). Inoltre

$$\begin{aligned} & \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') S_F(x' - x) (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m) \psi(x) \\ &= \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') S_F(x' - x) (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} - m) \psi(x) \\ &= \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') \delta^4(x' - x) \psi(x) = \int d^4 x \bar{J}(x) \psi(x) \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo eseguito una integrazione per parti, e nel secondo abbiamo utilizzato la (7.55) che dimostreremo fra poco. La freccia indica che la derivata va eseguita sulla funzione alla sinistra. $\overleftarrow{\partial}$ L'integrale funzionale si calcola con un cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) - \int d^4 x' S_F(x - x') J(x') \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \int d^4 x' \bar{J}(x') S_F(x' - x) \end{aligned}$$

e risulta in una costante moltiplicativa (il valore di $Z[0]$) che può essere omessa, e si ottiene semplicemente

$$Z(J, \bar{J}) = \exp \left[-i \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') S_F(x' - x) J(x) \right] \quad (7.52)$$

Come visto in precedenza, questa procedura è legittima solo se

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} S_F((t(1 - i\chi), \vec{x}) = 0 \quad (7.53)$$

Una soluzione della (7.51) con le qualità desiderate si ottiene ponendo

$$S_F(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.54)$$

Infatti, sostituendo nella (7.51) si ottiene⁴

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x) = -(\square + m^2) \Delta_F(x) = \delta^4(x)$$

Dalla espressione (7.54) segue una relazione che abbiamo usato in precedenza,

$$S_F(y - x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} + m) = -\delta^4(x - y) \quad (7.55)$$

⁴Vedi la sezione 3.3. Ricordiamo che $(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \square$. Si verifica facilmente che questa è l'unica soluzione accettabile, dato che l'equazione omogenea che corrisponde alla (7.51) non è altro che l'equazione di Dirac, le cui soluzioni sono sovrapposizioni di onde piane che falliscono la condizione (7.53), per $t \rightarrow -\infty$ se del tipo a frequenza positiva $e^{-i\omega t}$, e per $t \rightarrow \infty$ per le frequenze negative, $e^{i\omega t}$.

sostituendo infatti nel primo membro la (7.54) otteniamo $(\partial/\partial x = -\partial/\partial y)$

$$\begin{aligned} S_F(y-x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m) &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m)\Delta_F(y-x) \\ &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)\Delta_F(y-x) = -\delta^4(x-y) \end{aligned}$$

Le regole di corrispondenza per passare dal funzionale generatore alle funzioni di Green sono dedotte dalla (7.50),

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta \bar{J}_\alpha(x)}; \quad \bar{\psi}_\beta(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta J_\beta(x)} \quad (7.56)$$

e la funzione di Green a due punti diviene

$$\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle = i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) \quad (7.57)$$

Come abbiamo visto nel caso dell'oscillatore, il segno “-” nella seconda delle regole di corrispondenza si compensa con un secondo segno “-” che proviene dal carattere anticommutante delle derivate funzionali. Avremmo quindi ottenuto esattamente lo stesso risultato se avessimo trattato il campo di Dirac come grandezza commutante.

Notiamo anche che le funzioni di Green con due ψ o due $\bar{\psi}$ sono eguali a zero

$$\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y))\rangle = \langle 0|T(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle = 0 \quad (7.58)$$

7.2.1 Propagatore del fermione

Per le applicazioni successive, registriamo le formule relative al propagatore del fermione.

$$\begin{aligned} i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} (i\tilde{S}_F)_{\alpha\beta}(p) = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (7.59)$$

Possiamo semplificare l'espressione della trasformata di Fourier di S_F usando la relazione:

$$(\not{p} + m)(\not{p} + m) = p^2 + m^2 \quad (7.60)$$

per scrivere:

$$i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta} \quad (7.61)$$

7.2.2 Il teorema di spin e statistica

Il teorema di spin e statistica, secondo cui particelle di spin intero sono descritte da campi commutanti, mentre particelle di spin semintero da campi anticommutanti, è uno dei pochi risultati esatti della teoria dei campi. In questa sezione verifichiamo che la teoria quantistica di un campo di Dirac libero necessariamente richiede che $\psi, \bar{\psi}$ siano grandezze anticommutanti, e che al contrario nella teoria del campo scalare libero la ϕ è necessariamente una grandezza commutante. Chiaramente questa verifica non è una dimostrazione generale del teorema, che si applica anche al caso di campi in interazione con spin arbitrario.

Nel caso della teoria di Dirac scriviamo in forma più esplicita il secondo membro della (7.57) utilizzando la (3.66).

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle &= \frac{(i\partial + m)_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(t) + e^{i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(-t) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{-ip(x-y)} (p+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x > t_y) \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{ip(x-y)} (-p+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x < t_y) \end{cases} \end{aligned}$$

Nel termine con frequenze negative $e^{i\omega_p(t_x-t_y)}$ abbiamo cambiato segno alla variabile di integrazione $\vec{p}$.

Nei passi che seguono useremo le proprietà degli operatori di proiezione (vedi [2], app. A),

$$\frac{(p+m)_{\alpha\beta}}{2m} = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}); \quad \frac{(-p+m)_{\alpha\beta}}{2m} = - \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}) \quad (7.62)$$

e le proprietà di ortogonalità

$$\left(u_r^\dagger(\vec{q}) u_s(\vec{q}) \right) = \left(v_r^\dagger(\vec{q}) v_s(\vec{q}) \right) = \frac{\omega_q}{m} \delta_{rs}; \quad \left(u_r^\dagger(\vec{q}) v_s(-\vec{q}) \right) = 0 \quad (7.63)$$

quindi, per $t_x > t_y$ otteniamo

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}), \quad (7.64)$$

e, per $t_x < t_y$,

$$-\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}) \quad (7.65)$$

dove il segno “-” a secondo membro deriva dall’operatore di proiezione per energie negative, mentre quello a primo membro deriva dalla anticommutatività dei campi.

Moltiplicando primo e secondo membro per γ^0 , trasformiamo $\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger$, $\bar{u} \rightarrow u^\dagger$ e $\bar{v} \rightarrow v^\dagger$, e le due equazioni divengono

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) u_{r\beta}^\dagger(\vec{p}) \quad (7.66)$$

$$\langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ip(y-x)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) v_{r\beta}^\dagger(\vec{p}) \quad (7.67)$$

è facile vedere che la anticommutatività è indispensabile. Consideriamo infatti la equazione (7.67), passando al limite $y \rightarrow x$, e con $\alpha = \beta$. Riesprimiamo anche il primo membro introducendo un sistema completo di stati $|X\rangle\langle X|$,

$$\langle 0 | \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \sum_X |\langle X | \psi_\alpha(x) | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 |v_{r\alpha}(\vec{p})|^2$$

Sia il primo membro che il secondo membro sono grandezze definite positive. Se avessimo considerato $\psi, \bar{\psi}$ come grandezze *commutanti* il secondo membro di questa equazione avrebbe un segno negativo (verrebbe a mancare il segno “-” a primo membro della eq. 7.65) e avremmo ottenuto un risultato assurdo. I campi di Dirac devono essere *anticommutanti*.

Alla conclusione opposta si arriva nel caso di un campo scalare. Consideriamo il caso di un campo scalare complesso (vedi sez. 3.4). E' facile verificare che sia nel caso commutante che nel caso anticommutante la funzione a due punti sarebbe data dalla equazione (3.66); nelle manipolazioni che hanno portato a quel risultato partendo dalla (3.23) abbiamo infatti sempre rispettato l'ordinamento delle varie grandezze. Se nella (3.66) consideriamo il caso $t_x < t_y$, otteniamo, nel caso di grandezze commutanti,

$$\langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{-ip(x-y)}}{2\omega_p}$$

e nel limite $y \rightarrow x$,

$$\langle 0 | \phi^\dagger(x) \phi(x) | 0 \rangle = \sum_X |\langle X | \psi(x) | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{1}{2\omega_p},$$

una eguaglianza tra grandezze definite positive. Nel caso *anticommutante* il cambiamento di segno a primo membro avrebbe portato a un risultato assurdo.

7.2.3 Stati ad una particella del campo di Dirac

Vogliamo adesso dimostrare che il campo di Dirac descrive due tipi di particelle — particella e antiparticella — ciascuna con due stati di polarizzazione. Per fare questo definiamo i seguenti operatori ottenuti dalle $\psi, \bar{\psi}$ con trasformate di Fourier spaziali proiettate sugli spinori u, v :

$$c_r(\vec{q}; t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_\alpha \int d^3 x e^{-i\vec{q}\vec{x}} u_{r\alpha}^\dagger(\vec{q}) \psi_\alpha(\vec{x}, t); \quad (7.68)$$

$$c_r^\dagger(\vec{q}; t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_\alpha \int d^3 y e^{i\vec{q}\vec{y}} \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t) u_{r\beta}(\vec{q}); \quad (7.69)$$

$$d_r(\vec{q}; t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_\alpha \int d^3 y e^{-i\vec{q}\vec{y}} \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t) v_{r\beta}(\vec{q}) \quad (7.70)$$

$$d_r^\dagger(\vec{q}; t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_\alpha \int d^3 x e^{i\vec{q}\vec{x}} v_{r\alpha}^\dagger(\vec{q}) \psi_\alpha(\vec{x}, t) \quad (7.71)$$

Naturalmente, come adesso dimostreremo, questi sono gli usuali operatori di creazione e distruzione per le particelle e le antiparticelle.

Dalle (7.66), (7.67), e le proprietà di ortogonalità (7.63), otteniamo

$$\langle 0 | c_r(\vec{q}; t_x) \psi_\beta^\dagger(y) | 0 \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{-i\omega_q t} e^{iqy} u_{r\beta}^\dagger(\vec{q}); \quad (7.72)$$

$$\langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) d_r^\dagger(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{i\omega_q t} e^{-iqy} v_{r\beta}^\dagger(\vec{q}); \quad (7.73)$$

come si verifica facilmente sostituendo a c , $d^\dagger$ le espressioni (7.68), (7.71), mentre

$$\langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) c_r(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle 0 | d_r^\dagger(\vec{q}; t_x) \psi_\beta^\dagger(y) | 0 \rangle = 0; \quad (7.74)$$

Con passaggi analoghi, dalle (7.72), (7.73) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | c_r(\vec{q}; t_x) c_s^\dagger(\vec{p}; t_y) | 0 \rangle &= \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} e^{-i\omega_q(t_x - t_y)} \\ \langle 0 | d_s(\vec{p}; t_y) d_r^\dagger(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle &= \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} e^{-i\omega_q(t_y - t_x)} \end{aligned} \quad (7.75)$$

inoltre dalla (7.74),

$$\langle 0 | c_s^\dagger(\vec{p}; t_y) c_r(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle 0 | d_r^\dagger(\vec{q}; t_x) d_s(\vec{p}; t_y) | 0 \rangle = 0,$$

da cui, con $s = r$, $\vec{p} = \vec{q}$, $t_y = t_x = 0$, e introducendo un insieme completo di stati,

$$\sum_X |\langle X | c_r(\vec{q}) | 0 \rangle|^2 = \sum_X |\langle X | d_r(\vec{q}) | 0 \rangle|^2 = 0$$

dove $c_r(\vec{q}) = c_r(\vec{q}; t = 0)$, $d_r(\vec{q}) = d_r(\vec{q}; t = 0)$. Quindi

$$c_r(\vec{q}) | 0 \rangle = d_r(\vec{q}) | 0 \rangle = 0 \quad (7.76)$$

Se adesso definiamo

$$|P; \vec{p}, r\rangle = c_r^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle; \quad |A; \vec{p}, r\rangle = d_r^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle \quad (7.77)$$

sostituendo nella (7.72) (di cui prendiamo il complesso coniugato) e nella (7.73), in ambedue i casi con $t_x = 0$, otteniamo

$$\langle 0 | \psi_\beta(y) | P; \vec{p}, r \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{-ipy} u_{r\beta}(\vec{p}); \quad (7.78)$$

$$\langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) | A; \vec{p}, r \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{-ipy} v_{r\beta}^\dagger(\vec{p}); \quad (7.79)$$

Queste ci dicono che $|P; \vec{p}, r\rangle$, $|A; \vec{p}, r\rangle$ sono stati di impulso $\vec{p}$ e di energia $\omega_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$, quindi stati a una particella. I due stati di polarizzazione associati alla variabile $r = 1, 2$ possono essere scelti come stati di elicità definita. La equazione (7.75), con $t_x = t_y = 0$ fissa la normalizzazione degli stati:

$$\langle P; \vec{p}, r | P; \vec{q}, s \rangle = \langle A; \vec{p}, r | A; \vec{q}, s \rangle = \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (7.80)$$

Gli stati $|P\rangle$ e $|A\rangle$ sono necessariamente differenti: infatti la funzione a due punti $\langle 0 | T(\psi \psi) | 0 \rangle$ si annulla (eq 7.58), e da questo possiamo ottenere, con un lavoro analogo a quello svolto sinora, che

$$\langle 0 | c_s(\vec{p}; t_y) d_r^\dagger(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle P; \vec{p}, s | A; \vec{q}, r \rangle = 0 \quad (7.81)$$

Gli stati di particella $|P\rangle$ e di antiparticella $|A\rangle$ sono quindi ortogonali e necessariamente differenti.

In conclusione abbiamo visto che il formalismo funzionale permette di ricostruire lo spettro degli stati a una particella della teoria e il ruolo, già ben noto, degli operatori di creazione e distruzione.

Bibliografia

- [1] Meccanica Quantistica Relativistica, Appunti AA 2006-2007.
- [2] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.
- [3] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.
- [4] P. A. M. Dirac, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Band 3, Heft 1 (1933), Ristampato in *Quantum Electrodynamics*, a cura di J. Schwinger, Dover, 1958.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1994.
- [6] J.D.Bjorken, S.Drell, op. cit. I Cap. 2
- [7] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.
- [8] L.Landau, E.Lifchitz, *Mecanique Quantique, Theorie Non Relativiste*, ed. Mir, 1967, Cap,1.
- [9] H. Lehman, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).
- [10] Michael E. Peskin e Daniel V Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.
- [11] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Cap. VI, Oxford University Press.
- [12] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.
- [13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.II, Cambridge University Press, 1995.
- [14] V. N. Gribov, *Nucl. Phys.* **B 139** (1978) 1.
- [15] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.I, Cambridge University Press, 1995.
- [16] H. Jeffreys e M. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1972
- [17] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1972.

Appendice A

Ampiezza di Transizione in assenza di Potenziale

Calcoliamo l'elemento di matrice $\langle q_2 | e^{-i \frac{T p^2}{2m}} | q_1 \rangle$. Assumiamo che gli autostati di q e di p siano normalizzati in modo che

$$\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q), \quad \int dq |q\rangle \langle q| = \mathbf{1}$$

Se normalizziamo gli stati $|p\rangle$ in modo che

$$\begin{aligned} \langle q | p \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} && \text{troviamo che} \\ \langle p' | p \rangle &= \delta(p' - p), && \int dp |p\rangle \langle p| = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-i \frac{T p^2}{2m}} | q_1 \rangle &= \int dk \langle q_2 | e^{-i \frac{T p^2}{2m}} | k \rangle \langle k | q_1 \rangle \\ &= \int dk e^{-i \frac{T k^2}{2m}} \langle q_2 | k \rangle \langle k | q_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-i \frac{T k^2}{2m}} e^{i(q_2 - q_1)k} \end{aligned}$$

l'integrale si semplifica costruendo un quadrato perfetto all'esponente,

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i \frac{m(q_2 - q_1)^2}{2T}} \int dk e^{-i \frac{T(k - k_{cl})^2}{2m}}; \quad k_{cl} = \frac{m(q_2 - q_1)}{T}$$

e converge nel semipiano complesso inferiore di T , $\text{Im } T < 0$. Per valori reali di T possiamo definirlo, con un cambiamento di variabili, $k' = k - k_{cl}$, come

$$\int dk' e^{-i \frac{T(k')^2}{2m}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int dk' e^{-i \frac{(T - i\eta)(k')^2}{2m}} = \sqrt{\frac{2\pi m}{iT}}$$

dove la notazione $\eta \rightarrow 0^+$ indica che il limite va preso partendo da valori positivi di η . La necessità di passare al limite verso valori reali del tempo partendo da valori complessi nel semipiano inferiore, si riflette come vedremo nella famosa “regola dell’ $i\epsilon$ ” nel calcolo dei propagatori e dei diagrammi di Feynman. Sostituendo nella espressione precedente si ottiene il risultato della eq. (2.3).

Appendice B

Grafici connessi

Vogliamo dimostrare che il funzionale generatore $Z[J]$ può essere scritto come

$$Z[J] = \exp(W[J]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} W[J]^k \quad (\text{B.1})$$

dove $W[J]$ è la somma di tutti i diagrammi connessi. La dimostrazione si applica egualmente allo sviluppo perturbativo di qualsiasi teoria di campo.

Possiamo scrivere la $Z[J]$ in termini dell'operatore "vertice" V ,

$$Z[J] = e^V Z^0[J] = \sum \frac{V^k}{k!} Z^0[J] \quad (\text{B.2})$$

dove l'operatore V si ottiene direttamente dal lagrangiano di interazione,

$$V = i \int d^4x \mathcal{L}^1 \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \quad (\text{B.3})$$

e dipende dalla teoria. Nella $\lambda\phi^4$ (vedi eq. (4.5)) questo operatore è

$$V = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4$$

e in teorie diverse può prendere una forma più complessa, eventualmente con più funzioni J in corrispondenza dei diversi campi. $Z^0[J]$, il funzionale generatore della teoria libera, può essere scritto come

$$Z^0[J] = \exp W^0[J] \quad (\text{B.4})$$

dove $W^0[J]$ è la somma dei diagrammi connessi privi di vertici. Nella teoria $\lambda\phi^4$ l'unico diagramma di questo tipo è il diagramma (d) della figura 4.2, e troviamo (vedi eq. 4.4)

$$W_0[J] = \frac{-i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \quad (\text{B.5})$$

Ciascuna derivata funzionale della Z (vedi ad esempio le eq. (4.6), (4.7)) contiene un fattore $Z^0[J]$, quindi possiamo scrivere

$$Z[J] = \tilde{Z}[J] Z^0[J] = \tilde{Z}[J] \exp(W^0[J]) \quad (\text{B.6})$$

e notare che la $\tilde{Z}[J]$ si può esprimere mediante la somma di tutti quei diagrammi G , connessi e non connessi, *in cui ciascuna componente connessa ha almeno un vertice*

$$\tilde{Z} = 1 + \sum G \quad (\text{B.7})$$

Per dimostrare la (B.1) occorre quindi dimostrare che

$$\tilde{Z} = \exp(\tilde{W}[J]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{W}[J]^n \quad (\text{B.8})$$

dove $\tilde{W}[J]$ è la somma di tutti i diagrammi *connessi, con uno o più vertici*, che immaginiamo ordinati in una lista $\{D_1, D_2, \dots\}$:

$$\tilde{W}[J] = \sum_{i=1}^{\infty} D_i[J] \quad (\text{B.9})$$

La lista potrebbe cominciare con i diagrammi con un $v_i = 1$, poi quelli con $v_i = 2$ e via di seguito. Possiamo quindi scrivere

$$\exp(\tilde{W}[J]) = e^{D_1} e^{D_2} \dots e^{D_k} \dots = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \frac{D_1^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{D_k^{n_k}}{n_k!} \dots \quad (\text{B.10})$$

Per ciascun diagramma D_i indicheremo con v_i il numero dei vertici in esso contenuti. Il termine $V^k/k!$ nella (B.2) produrrà i diagrammi connessi con k vertici (un sottoinsieme della lista $\{D_1, D_2, \dots\}$) oltre a diagrammi non connessi che indicheremo con G

$$\frac{V^k}{k!} Z^0[J] = \left[\sum_i D_i \delta_{k v_i} + (\text{diagrammi } G \text{ non connessi}) \right] Z^0[J] \quad (\text{B.11})$$

Consideriamo ora un diagramma G non connesso che contiene n_1 copie del diagramma connesso D_1 , n_2 copie di D_2 , e così via, quindi

$$G = K_G (D_1)^{n_1} (D_2)^{n_2} \dots \quad (\text{B.12})$$

dove K_G è un coefficiente combinatorio. Per dimostrare la (B.8) dobbiamo dimostrare che K_G è lo stesso coefficiente con cui questo termine compare nella (B.10), cioè

$$K_G = \frac{1}{n_1!} \dots \frac{1}{n_k!} \dots \quad (\text{B.13})$$

Per calcolare K_G dobbiamo partire dalla (B.2). Se $v_i \geq 1$ è il numero dei vertici nel grafico D_i , il numero totale delle componenti e dei vertici in G , n e v , saranno rispettivamente¹

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i$$

¹Notiamo che anche se le somme sono estese sino ad infinito, stiamo considerando diagrammi con un numero finito di componenti, per cui solo alcune n_k saranno differenti da zero.

quindi G sarà prodotto dal termine $V^\nu / \nu!$ nella (B.2). In questo termine dovremo scegliere i ν_1 fattori V che producono ciascuna delle n_1 copie di D_1 , i ν_2 fattori che producono le copie di D_2 e così via (vedi la B.11). Questa scelta si può fare in

$$\frac{1}{\prod (n_i!)} \frac{\nu!}{\prod (\nu_i!)^{n_i}}$$

modi diversi. Infatti ci sono $\nu!$ permutazioni dei fattori V , ma questo numero va diviso per il numero di permutazioni delle V che contribuiscono a ciascuna componente connessa di G , e quindi dividiamo per $\prod (\nu_i!)^{n_i}$, e per il numero di permutazioni tra gli n_1 gruppi che danno le n_1 copie di D_1 e così via, e quindi dividiamo per $\prod (n_i!)$. Il fattore $\nu!$ si semplifica con il fattore $1/\nu!$ che accompagna il termine V^ν nello sviluppo della $Z[J]$, eq. (B.2). Analogamente ciascuno dei fattori $\nu_i!$ a denominatore si combinano (vedi la eq. B.11) con un V^{ν_i} a generare le componenti D_i .

In conclusione il valore del diagramma G , composto da n_1 copie di D_1 , n_2 copie di D_2 , e così via, è dato da

$$G[J] = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(D_i[J])^{n_i}}{n_i!}. \quad (\text{B.14})$$

Il coefficiente K_G è dunque quello della (B.13), e questo conchiude la dimostrazione.

Appendice C

Invarianza di Lorentz e stati a una particella.

Nella sezione 3.4 abbiamo visto che gli elementi di matrice di un campo scalare tra vuoto e stati ad una particella sono dati, nella teoria senza interazioni, da espressioni del tipo della eq. (3.72) in cui appare un caratteristico fattore $1/\sqrt{2\omega}$. In questa appendice vogliamo dimostrare che questo fattore è determinato dalla invarianza del campo ϕ sotto trasformazioni di Lorentz, e dal fatto che abbiamo scelto per gli stati a una particella la normalizzazione

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (\text{C.1})$$

Anche in presenza di interazioni la forma dell'elemento di matrice tra vuoto e stati a una particella è interamente determinato a meno di una costante moltiplicativa, detta *costante di rinormalizzazione*. Nel caso di un campo scalare reale, deve essere

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \omega_p t_x)} \quad (\text{C.2})$$

Questo risultato è utilizzato nella sezione 4.4 per ottenere la forma generale della funzione di Green a due punti e nella sezione ?? per stabilire la relazione tra funzioni di Green e elementi di matrice S . Notiamo che la dipendenza da $\vec{x}, t$ è fissata dal valore dell'impulso e dell'energia della particella, quindi basterà verificare la (C.3) per $\vec{x} = t = 0$,

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} \quad (\text{C.3})$$

Per $\vec{p} = 0$ la (C.3) può essere considerata una definizione della *costante di rinormalizzazione* Z ,

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} = 0 \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2m}} \quad (\text{C.4})$$

e resta solo da dimostrare che una trasformazione di Lorentz porta dalla (C.4) alla (C.3). Consideriamo una trasformazione di Lorentz di velocità v lungo l'asse x (un *boost*) applicata al quadrivettore $q \equiv \{E, \vec{q}\}$,

$$q'_x = (Ev + q_x)/\sqrt{1-v^2}; \quad q'_y = q_y; \quad q'_z = q_z; \quad E' = (E + q_x v)/\sqrt{1-v^2} \quad (\text{C.5})$$

che sarà rappresentata da una trasformazione unitaria $\mathbf{B}_v$ sullo spazio di Hilbert. L'azione di $\mathbf{B}_v$ sugli stati a una particella deve essere data da

$$\mathbf{B}_v|\vec{q}\rangle = h(\vec{q}, \vec{q}')|\vec{q}'\rangle \quad (\text{C.6})$$

mentre lo stato vuoto $|0\rangle$ deve essere invariante,

$$\mathbf{B}_v|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{C.7})$$

Partendo da un impulso nullo si otterrà un impulso $p = \{\omega_p = m/\sqrt{1-v^2}, \vec{p}\}$, e possiamo scrivere

$$\mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = k(p)|\vec{p}\rangle; \quad (k(p) \equiv h(0, \vec{p})) \quad (\text{C.8})$$

l'invarianza per rotazioni garantisce che $k(p)$ dipenda solo dal modulo di $\vec{p}$, e possiamo scegliere la fase dello stato $|\vec{p}\rangle$ in modo che $k(p)$ sia reale e positiva.

Il valore di $k(p)$ si determina nel modo seguente (vedi eq. C.1)

$$\delta^3(\vec{q}) = \langle \vec{q}|\vec{p}=0\rangle = \langle \vec{q}|\mathbf{B}_v^\dagger \mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = h^*(\vec{q}, \vec{q}')k(p)\langle \vec{q}'|\vec{p}\rangle = k^2(p)\delta^3(\vec{q}' - \vec{p})$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la prima $\delta^3(\vec{q})$, che garantisce che $\vec{q}=0$, e quindi abbiamo sostituito $h(\vec{q}, \vec{q}')$ con $h(0, \vec{p}) = k(p)$ che è reale. Il $\vec{q}'$ che appare come argomento dell'ultima δ è funzione di $\vec{q}$ tramite la trasformazione di Lorentz, quindi

$$\delta^3(\vec{q}) = k^2(p)\delta^3(\vec{q}'(\vec{q}) - \vec{p}) = k^2(p) \left| \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \right|_{\vec{q}=0}^{-1} \delta^3(\vec{q})$$

e con un semplice calcolo dello jacobiano della trasformazione di Lorentz,

$$k^2(p) = \left| \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \right|_{\vec{q}=0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega_p}{m}$$

e la (C.8) si può riscrivere

$$\mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}}|\vec{p}\rangle \quad (\text{C.9})$$

Dato che $\phi(x)$ è un campo scalare deve essere

$$\mathbf{B}_v^\dagger \phi(0) \mathbf{B}_v = \phi(0) \quad (\text{C.10})$$

da cui

$$\langle 0|\phi(0)|\vec{p}=0\rangle = \langle 0|\mathbf{B}_v^\dagger \phi(0) \mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}}\langle 0|\phi(0)|\vec{p}\rangle$$

e quindi dalla (C.4) si ottiene la (C.3) e, per valori arbitrari di $\vec{x}, t$, la (C.2).

Appendice D

Integrali

Vogliamo derivare il seguente risultato per integrali che compaiono in teoria delle perturbazioni, citato senza dimostrazione nel Mandl e Shaw, [2], eq. (MS-10.23):

$$I(t, D, n) = \int \frac{d^D k}{[k^2 - s + i\epsilon]^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}} \quad (D.1)$$

Gli integrali si estendono su uno spazio con D dimensioni, $k = \{k_0, k_1, \dots, k_{D-1}\}$, con metrica di Minkowski: $k^2 = k_0^2 - k_1^2 - \dots - k_{D-1}^2$. Assumeremo che s sia reale¹ e positivo.

La funzione Γ è definita da

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy y^{x-1} e^{-y}; \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1); \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (D.2)$$

Nella realtà siamo interessati al caso $D = 4$, ma vogliamo anche considerare una continuazione analitica a valori arbitrari di D definita dal risultato nella (D.1) che è una funzione analitica di D , a parte poli in $D/2 = n, n+1, \dots$

Infatti $\Gamma(x)$ è analitica per $\Re(x) > 0$, e può essere continuata a valori $\Re(x) \leq 0$ usando la relazione $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/(x)$, con la quale si dimostra facilmente che $\Gamma(x)$ è analitica in tutto il piano complesso con l'eccezione di poli per $x = 0, x = -1, \dots$. Ad esempio, partendo dallo sviluppo in serie di Taylor nei dintorni di $x = 1$, dove $\Gamma(x)$ è analitica (vedi ad esempio il manuale di Abramowitz e Stegun [17]),

$$\Gamma(1 + \eta) = 1 + \gamma\eta + \mathcal{O}(\eta^2)$$

dove γ è la costante di Eulero, $\gamma = 0.5772\dots$, otteniamo, nei dintorni di $x = 0$

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{\eta} + \gamma + \mathcal{O}(\eta)$$

Per ottenere il risultato in (D.1) conviene prima di tutto ruotare il cammino di integrazione nella variabile k_0 , dalla posizione orizzontale a quella verticale. Se si ruota in senso antiorario non si incontrano singolarità, come mostrato dalla figura D.1. Questa operazione è detta rotazione di Wick. Dopo la rotazione possiamo passare al limite $\epsilon \rightarrow 0$ dato che le due singolarità in $k_0 = \pm\omega = \pm\sqrt{s + k_1^2 + \dots + k_{D-1}^2}$

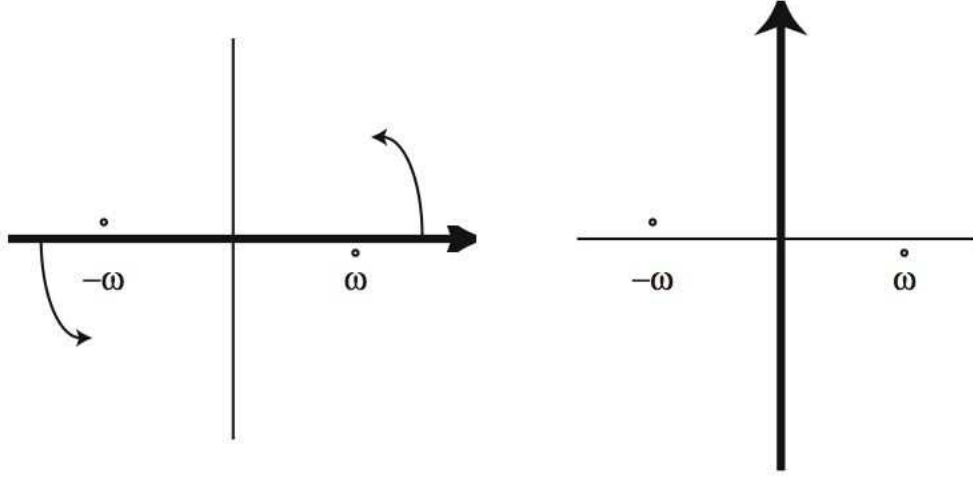


Figura D.1: La rotazione di Wick

sono distanti dal nuovo cammino di integrazione. Possiamo quindi porre: $k_0 = i k_D$ e $dk_0 = i dk_D$, e possiamo riscrivere l'integrale come

$$I(t, D, n) = i(-1)^n \int \frac{d^D p}{[p^2 + s]^n} \quad (D.3)$$

dove $p = \{k_1, \dots, k_{D-1}, k_D\}$ è un vettore a D dimensioni con metrica euclidea, $p^2 = k_1^2 + k_2^2 \dots + k_D^2$. Per calcolare l'integrale passiamo a coordinate polari nello spazio a D dimensioni. Dato che l'integrando non dipende dalle variabili angolari, queste possono essere integrate direttamente, e con il cambiamento di variabili $x = p^2/s$, $p dp = s dx/2$ otteniamo:

$$I(t, D, n) = i(-1)^n \int \frac{p^{D-1} dp d\Omega_D}{[p^2 + s]^n} = i(-1)^n \frac{\Omega_D}{2s^{n-D/2}} \int_0^\infty \frac{x^{(D-2)/2} dx}{(1+x)^n} \quad (D.4)$$

L'integrale è convergente in $x \rightarrow \infty$ se $n > D/2$. L'angolo solido in D dimensioni è dato² da

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \quad (D.5)$$

Che riproduce i noti risultati: $\Omega_2 = 2\pi$ e, dato che $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}/2$, $\Omega_3 = 4\pi$. In quattro dimensioni si ottiene $\Omega_4 = 2\pi^2$. L'integrale residuo si esprime mediante la funzione Beta (Vedi [16], cap. 15 per una dimostrazione, ma usiamo la notazione di [17]),

$$B(z, w) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)^{z+w}} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (D.6)$$

¹Il valore di $I(t, D, n)$ per valori complessi di s , qualora interessi, può essere ottenuto per continuazione analitica del risultato ottenuto.

²Come si dimostra facilmente considerando un integrale gaussiano.

e ritroviamo infine il risultato della (D.1).