

**ELETTRODINAMICA QUANTISTICA
PARTE II
Anno Accademico 2006-2007**

N. Cabibbo¹

L. Maiani²

O. Benhar³

¹e-mail: nicola.cabibbo@roma1.infn.it

²e-mail: luciano.maiani@roma1.infn.it

³e-mail: omar.benhar@roma1.infn.it

**AA 2006-2007, II Trimestre
WORK IN PROGRESS**

Commenti, correzioni e suggerimenti, in particolare da parte degli studenti del Corso, sono apprezzati.

Indice

1	Elettrodinamica quantistica	3
1.1	La formula di riduzione	5
1.2	Grafici di Feynman per il funzionale generatore	7
1.3	Funzioni a due punti	9
1.4	Grafici di Feynman per la matrice S	11
1.5	Combinatoria.	13
2	Effetto Compton	15
2.1	Calcolo del modulo quadrato dell'ampiezza	15
2.2	Sezione d'urto di Klein-Nishina	19
2.3	Diffusione Compton su elettroni relativistici	21
3	Simmetrie P, C, T	25
3.1	Parità	25
3.2	Coniugazione di carica	27
3.3	Inversione del tempo	29
3.4	Trasformazione degli stati	32
3.5	Alcune applicazioni	36
3.5.1	Il teorema di Furry	36
3.5.2	Simmetrie del positronio	36
3.6	Il teorema CPT	39
3.6.1	Eguaglianza delle masse di particella e antiparticella	43
4	Rinormalizzazione della QED	45
4.1	Il propagatore del fotone	48
4.2	La rinormalizzazione della carica	50
4.3	Il propagatore dell'elettrone	51
4.3.1	Il propagatore a tutti gli ordini	54
4.4	Il vertice	56
4.5	L'identità di Ward	58
5	Diffusione in un campo esterno	61

6	Il momento magnetico anomalo dell'elettrone	65
6.1	Preliminari	65
6.2	Il calcolo	67

Capitolo 1

Elettrodinamica quantistica

In questo capitolo applicheremo i metodi sviluppati nei capitoli precedenti alla costruzione della teoria delle perturbazioni applicata alla elettrodinamica quantistica, la teoria delle interazioni tra elettroni, descritti dal campo di Dirac, e il campo elettromagnetico. Questo sistema sarà descritto da un lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ie_0 A_\mu) - m_0] \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Una caratteristica saliente della (1) è la invarianza sotto trasformazioni di gauge, che sono trasformazioni simultanee del campo elettromagnetico e del campo dell'elettrone,

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (1.1)$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie_0 f(x)} \psi(x) \quad (1.2)$$

L'invarianza di gauge istituisce uno stretto legame tra il campo dell'elettrone e il campo del fotone. Una invarianza sotto trasformazioni del campo dell'elettrone per un fattore di fase che dipende arbitrariamente dal punto — eq. (1.2) — non sarebbe possibile senza il campo elettromagnetico. L'invarianza di gauge non è quindi una caratteristica secondaria del campo elettromagnetico, ma la sua ragione d'essere. Una conseguenza della invarianza di gauge è l'esistenza di una simmetria sotto una trasformazione del campo dell'elettrone con un fattore di fase costante,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x)$$

Questa è una simmetria “globale” (in contrasto alla simmetria “locale” — la simmetria di gauge completa) da cui, tramite il teorema di Noether, discende la conservazione della corrente,

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (1.3)$$

che è quindi una conseguenza della invarianza di gauge.

In questo capitolo adotteremo la gauge di Feynman, nella quale il lagrangiano si scrive

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ie_0 A_\mu) - m_0)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\nu \partial^\nu A^\mu \quad (1.4)$$

Per costruire una teoria delle perturbazioni possiamo dividere il lagrangiano in due parti:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \quad (1.5)$$

dove $\mathcal{L}_0$ descrive campi liberi, ed è quindi totalmente risolvibile, mentre $\mathcal{L}_1$ è un termine di interazione. Potremmo ad esempio porre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\nu \partial^\nu A^\mu \\ \mathcal{L}_1 &= e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)A_\mu \end{aligned}$$

Come vedremo nel seguito m_0 non è la massa fisica dell'elettrone, ma il valore che questa massa assumerebbe in assenza di interazioni, cioè per $e = 0$. La vera massa fisica, m , può essere scritta come

$$m = m_0 + \delta m \quad (1.6)$$

Il termine δm può essere visto come l'energia del campo elettrico (e magnetico) prodotto dalla carica (e momento magnetico) dell'elettrone. Dato che useremo la teoria delle perturbazioni per calcolare le ampiezze di transizione associate a processi d'urto, gli elementi della matrice S , conviene una separazione diversa tra $\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{L}_1$, tale che $\mathcal{L}_0$ descriva elettroni di massa m , cioè la stessa massa delle particelle descritte dal lagrangiano completo $\mathcal{L}$, e quindi

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\nu \partial^\nu A^\mu \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}_1 = e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)A_\mu + \delta m(\bar{\psi}\psi) \quad (1.8)$$

Il termine $\delta m(\bar{\psi}\psi)$ in $\mathcal{L}_1$ è detto un *controtermine*. Mentre la massa dell'elettrone viene modificata dalle interazioni, la massa del fotone, come vedremo nel seguito, è protetta dalla invarianza di gauge e resta eguale a zero. Analogamente il parametro e_0 non è, come vedremo, la carica elettrica dell'elettrone e , la quale si ottiene da e_0 applicando le correzioni che derivano dalla presenza di interazioni. Notiamo che né e_0 né m_0 sono quantità osservabili, ma parametri del lagrangiano. Il processo di rinormalizzazione consiste essenzialmente nell'esprimere tutti i risultati della teoria in termini delle grandezze misurabili e , m .

La costruzione della serie perturbativa per la matrice S segue i passi illustrati nel caso del campo scalare:

1. Stabilire le formule di riduzione che legano gli elementi di matrice S alle funzioni di Green.
2. Costruire la serie perturbativa per il funzionale generatore delle funzioni di Green in termini di diagrammi di Feynman.
3. Costruire la serie perturbativa per la matrice S .

1.1 La formula di riduzione

Gli argomenti che hanno portato alla formula di riduzione (??) si applicano direttamente all'elettrodinamica, con l'unica complicazione che proviene dallo spin dell'elettrone e del fotone.

Possiamo definire come prima gli stati in e out, che adesso sono stati con un numero specificato di elettroni, positroni e fotoni, con assegnati valori dei momenti, spin e polarizzazione. Questi stati sono creati o distrutti dal vuoto dai campi in o out che si ottengono nel limite per $t \rightarrow \pm\infty$ e coinvolgono le costanti di rinormalizzazione¹ dell'elettrone, Z_2 , e del fotone, Z_3 . Ad esempio:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(x) &= \sqrt{Z_2} \psi_{out}(x) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} A^\mu(x) &= \sqrt{Z_3} A_{out}^\mu(x)\end{aligned}\quad (1.9)$$

I campi in e out si sviluppano in onde piane, con coefficienti che sono gli operatori di annichilazione e distruzione, che a loro volta si possono ottenere proiettando i campi sul sistema di onde piane e di spinori o vettori di polarizzazione appropriata.

Ad esempio, per elettroni e positroni, scriviamo (omettendo i suffissi in o out per brevità):

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x) &= \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}} \left[a_r(\mathbf{p}) [u_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{-ipx} + [c_r(\mathbf{p})]^\dagger [\nu_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{+ipx} \right] \\ \bar{\psi}_\alpha(x) &= \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}} \left[b_r(\mathbf{p}) [\bar{\nu}_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{-ipx} + [a_r(\mathbf{p})]^\dagger [\bar{u}_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{+ipx} \right]\end{aligned}\quad (1.10)$$

e troviamo:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} a_r(\mathbf{p}) &= \int d^3x e^{+ipx} [\bar{u}_r(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \quad (\text{annich.elettrone}) \\ \sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} [b_r(\mathbf{p})]^\dagger &= \int d^3x e^{-ipx} [\bar{\nu}_r(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \quad (\text{creaz.positrone}) \\ \sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} [a_r(\mathbf{p})]^\dagger &= \int d^3x e^{-ipx} [\bar{\psi}(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} [u_r(\mathbf{p})]_\beta \quad (\text{creaz.elettrone}) \\ \sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} b_r(\mathbf{p}) &= \int d^3x e^{+ipx} [\bar{\psi}(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} [\nu_r(\mathbf{p})]_\beta \quad (\text{annich.positrone})\end{aligned}\quad (1.11)$$

Lasciamo al lettore di dimostrare, utilizzando le (1.11) e l'equazione di Dirac, la formula

¹Questi sono le notazioni standard; Z_1 è la costante di rinormalizzazione del vertice.

base di riduzione di un fermione uscente:

$$\begin{aligned} \lim_{p' \rightarrow m} \bar{u}_r(\mathbf{p})_\alpha \frac{(p' - m)_{\alpha\beta}}{i} \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T [\dots \psi_\beta(x) \dots] | 0 \rangle = \\ = \sqrt{\frac{Z_2 E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} \langle p_{out} | T(\dots) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

La (1.12) permette di ottenere gli elementi di matrice S con elettroni e/o positroni entranti e uscenti dalle corrispondenti funzioni di Green. Relazioni analoghe si ottengono per gli stati a un fotone, ad esempio:

$$\begin{aligned} \lim_{p^2 \rightarrow 0} \epsilon_\mu^{(r)}(\mathbf{p}) \frac{p^2}{i} \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T [\dots A^\mu(x) \dots] | 0 \rangle = \\ = \sqrt{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3} Z_3 \langle p_{out} | T(\dots) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.13)$$

Paragonando queste relazioni a quelle che valgono per un campo scalare vediamo che le differenze nel caso dell'elettrodinamica saranno minime, oltre quelle dovute alla presenza degli spinori o vettori di polarizzazione dobbiamo solo tener conto della differenza nei fattori moltiplicativi nel caso dei fermioni, (1.12), e in quello dei bosoni, (1.13).

In conclusione, possiamo scrivere la formula di riduzione in forma (molto) schematica come

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle = \prod_{\text{bos}} \lim_{q_i^2 \rightarrow 0} \prod_{\text{ferm}} \lim_{q_i \rightarrow m} \\ \left(\prod_{\text{bos}} \sqrt{\frac{1}{Z_3 2\omega_q (2\pi)^3}} \right) \left(\prod_{\text{ferm}} \sqrt{\frac{m}{Z_2 E_q (2\pi)^3}} \right) \\ \prod_{e^- \text{ out}, e^+ \text{ in}} [\bar{u}(q_k - m)]_\alpha \dots [\bar{v}(q_s + m)]_\delta \dots \prod_{\text{bos}} \dots \epsilon_\mu^{(s)}(q_l) \dots \\ \int \prod_{\text{Tutte}} [d^4x] \prod_{\text{Finali}} e^{iq_k x_k} \prod_{\text{Iniziali}} e^{-iq_k x_k} \langle 0 | T (\psi_\alpha \dots \bar{\psi}_\beta \dots \bar{\psi}_\gamma \dots \psi_\delta \dots A^\mu) | 0 \rangle \\ \prod_{e^- \text{ in}, e^+ \text{ out}} [(q_l - m)u]_\beta \dots [(q_t + m)v]_\gamma \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove per i vari fattori o manipolazioni è indicato la categoria di particelle cui si applicano. In corrispondenza di ogni particella iniziale o finale la funzione di Green dovrà contenere un campo proiettato sull'appropriato spinore o vettore di polarizzazione:

$u_r(\mathbf{q})$	fermione iniziale
$v_r(\mathbf{q})$	anti-fermione finale
$\bar{v}_r(\mathbf{q})$	anti-fermione iniziale
$\bar{u}_r(\mathbf{q})$	fermione finale
$\epsilon_r^\mu(\mathbf{q})$	fotone iniziale o finale

1.2 Grafici di Feynman per il funzionale generatore

Il funzionale generatore per l'elettrodinamica dipenderà da tre funzioni ausiliarie: $J(x)$ e $\bar{J}(x)$ per il campo dell'elettrone, $J_\mu(x)$ per il fotone. Nel limite $e \rightarrow 0$, e cioè in assenza di interazioni², il funzionale generatore Z è semplicemente il prodotto dei funzionali generatori per gli elettroni e i fotoni,

$$\begin{aligned} Z^0[J, \bar{J}, J_\mu] &= Z^0[J, \bar{J}] Z^0[J_\mu]; \\ Z^0[J, \bar{J}] &= \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{J}(x) S_F(x-y) J(y)\right) \\ Z^0[J_\mu] &= \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_F(x-y) J_\mu(y)\right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dove intendiamo che $\Delta_F(x-y)$ sia la funzione di Feynman per $m=0$, $\Delta_F(x-y;0)$. In presenza del lagrangiano di interazione (1.8) possiamo esprimere il funzionale generatore come (vedi la sezione ??),

$$Z[J, \bar{J}, J_\mu] = e^V Z^0[J, \bar{J}, J_\mu] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{n!} Z^0[J, \bar{J}, J_\mu] \quad (1.16)$$

dove l'operatore vertice, V , è semplicemente $i \int d^4x \mathcal{L}_1$, tradotto con le regole di corrispondenza (??), (??),

$$i\mathcal{L}_1(x) = ie \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \gamma^\mu \left(i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right) + i\delta m \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right) \quad (1.17)$$

Questo sembra più complicato del caso scalare, ma in realtà è più semplice, almeno per un aspetto, infatti ciascuno dei due termini in $\mathcal{L}_1$ ha una sola derivata di ciascun tipo, e questo semplifica drasticamente l'aspetto combinatorio.

Il termine V^n nello sviluppo di Z può essere calcolato direttamente, e risulta in una serie di termini che corrispondono a diagrammi di Feynman. Come nel caso scalare l'azione di ciascuna derivata può esercitarsi su Z^0 , e in questo caso viene calata una “linea con pallino”, cioè un termine $\Delta_F J_\mu$, o $S_F J$, o $\bar{J} S_F$, oppure si esercita su una “linea” prodotta da una derivata precedente, e in questo caso la “linea con pallino” diviene una linea interna. Se il pallino non viene catturato da una derivata successiva, quello che rimane è una linea esterna. Tutto questo si può esprimere in termini di diagrammi. Al primo ordine in V abbiamo i due diagrammi della figura 1.1. Notiamo alcune regole per interpretare questi grafici:

- I fotoni sono rappresentati da linee ondulate, e un pallino vuoto rappresenta un J_μ .
- Un pallino tratteggiato rappresenta una J e uno grigliato rappresenta una $\bar{J}$.

²In questo caso si ha anche $\delta m = 0$.

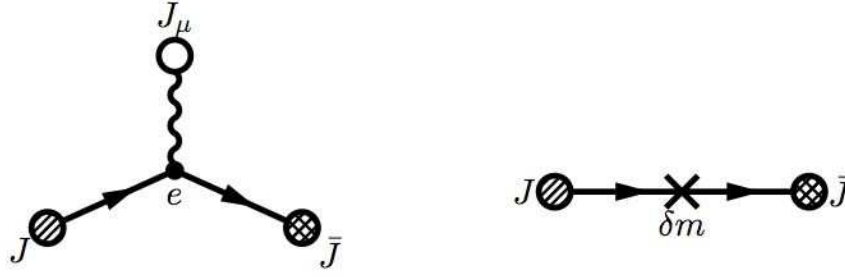


Figura 1.1: I due diagrammi con un singolo vertice

- Le linee fermioniche hanno un verso indicato sul diagramma, e si muovono³ da una J a una $\bar{J}$. Una linea esterna di tipo $\bar{J}$ è detta “uscente” dal diagramma, una di tipo J “entrante”.
- Ci sono due tipi di vertice, uno associato alla interazione elettrone-fotone, l'altro al controtermine di massa, rappresentato con una croce.

Osserviamo più in dettaglio la corrispondenza tra vari elementi del diagramma ed elementi del risultato:

Linee fermioniche esterne Una derivata produce una linea esterna,

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z^0 &= - \int d^4 y \bar{J}(y) S(y-x) Z^0 \\ \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) Z^0 &= - \int d^4 x S(y-x) J(x) Z^0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Linee fermioniche interne Applicando una seconda derivata il risultato dipende dall'ordine (come ci aspettiamo dato che le derivate anticommutano),

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z^0 &= i S(y-x) Z^0, \quad \text{ma, scambiando l'ordine,} \\ \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) Z^0 &= -i S(y-x) Z^0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Linee esterne fotoniche

$$\left(i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) Z^0 = - \int d^4 y \Delta_F(x-y) J_\mu(y) Z^0 \quad (1.20)$$

³Questa definizione del verso è arbitraria — avremmo potuto scegliere il verso da $\bar{J}$ a J — ma è quella standard.

Linee fotoniche interne Tenendo presente che $(\delta/\delta J^\nu(y))J_\mu(x) = g_{\mu\nu}\delta^4(x-y)$,

$$\left(i\frac{\delta}{\delta J^\nu}(x)\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J^\mu}(y)\right)Z^0 = -ig^{\mu\nu}\Delta_F(x-y)Z^0 \quad (1.21)$$

Possiamo direttamente formulare le regole per l'interpretazione dei diagrammi nello spazio degli impulsi. Ricordiamo l'espressione di Δ_F (??) e S_F (??), da cui per una linea interna fotonica e fermionica abbiamo rispettivamente

$$-ig_{\mu\nu}\Delta_F(x-y) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} e^{ipy}, \quad (1.22)$$

$$iS_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} e^{ipy} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.23)$$

Per una linea esterna che finisce in una J (vedi la seconda delle (1.18)) abbiamo:

$$-\int d^4x S(v-x)J(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipv} \frac{\not{p} + m}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \int d^4x e^{ipx} iJ(x) \quad (1.24)$$

dove v è la coordinata di uno dei vertici del grafico. Analogamente per una linea di tipo $\bar{J}$

$$-\int d^4x \bar{J}(x)S(x-v) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ipv} \int d^4x e^{-ipx} i\bar{J}(x) \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.25)$$

e infine per una linea esterna fotonica

$$\int d^4x \Delta_F(v-x)J_\mu(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipv} \int d^4x e^{ipx} iJ_\mu(x) \quad (1.26)$$

I vari fattori $e^{\pm ipv}$ confluiscono nei vertici in cui le linee terminano, e vanno integrati, producendo un fattore $(2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)$ che garantisce la conservazione dell'impulso in ogni singolo vertice.

1.3 Funzioni a due punti

Possiamo facilmente stabilire una rappresentazione spettrale per le funzioni a due punti dei campi fermionici e del potenziale vettore del tutto analoghe a quella trovata per il campo scalare.

Consideriamo esplicitamente il campo fermionico e la funzione a due punti:

$$i(G_F)_{\alpha\beta}(x) = \langle 0|T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)]|0\rangle \quad (1.27)$$

Consideriamo il caso $x^0 > 0$ e, come prima, inseriamo un sistema completo di stati nel prodotto dei campi, separandi il contributo dello stato ad una particella che, in questo caso, è un elettrone creato dal vuoto da $\bar{\psi}$:

$$i(G_F)_{\alpha\beta} = \sum_s \int d^3p e^{-ipx} \langle 0 | \psi_\alpha(0) | \mathbf{p}, s \rangle \langle \mathbf{p}, s | \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle_{(2+)} \quad (1.28)$$

Il contributo della singola particella si calcola facilmente (vedi Parte 1, Cap. 4 per il caso scalare):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle_1 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E(p)} e^{-ipx} Z_2 \sum_s (u_s(p))_\alpha (\bar{u}_s(p))_\beta = \\ &= \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(p)} e^{-ipx} (p\!\!\!/ + m)_{\alpha\beta} = \\ &= (i\partial + m)_{\alpha\beta} \left[\frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(p)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE(p)t} \right] \quad (\theta(x^0) > 0) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Calcolando in modo analogo il T prodotto ristretto alla singola particella per $x^0 < 0$, troviamo:

$$\begin{aligned} -\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle_1 &= \\ &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E(p)} e^{+ipx} \sqrt{Z_2(p^2)} \sum_s (v_s(p))_\alpha (\bar{v}_s(p))_\beta = \\ &= - \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(p)} e^{+ipx} (p\!\!\!/ - m)_{\alpha\beta} = \\ &= (i\partial + m)_{\alpha\beta} \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(p)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{+iE(p)t} \end{aligned} \quad (1.30)$$

mettendo tutto insieme, quindi:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0)] | 0 \rangle_1 &= \\ &= (i\partial + m)_{\alpha\beta} \left\{ \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(p)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[\theta(x^0) e^{-iE(p)t} + \theta(-x^0) e^{+iE(p)t} \right] \right\} = \\ &= Z_2 i S_F(x, m)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.31)$$

dove S_F è il propagatore del fermione libero con massa pari alla massa fisica dell' elettrone, m .

Per il termine con stati intermedi con due o più particelle, si procede come in Parte 1, Cap. 4 e si trova;

$$\langle 0|T[\psi(x)\bar{\psi}(0)]|0\rangle_{(2+)} = \int dM^2 [i\partial\rho_1(M^2) + M\rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} i[\Delta_F(x, M)] \quad (1.32)$$

In questo caso è necessario introdurre due funzioni spettrali, definite dalla relazione:

$$\sum_{n,2+} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - p) \langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle \langle n|\bar{\psi}_\beta(0)|0\rangle = (2\pi) [p\rho_1(M^2) + M\rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} \quad (1.33)$$

Le funzioni spettrali, dovendo essere invarianti di Lorentz, sono funzioni di p^2 , che è fissato ad essere $p^2 = M^2$.

Mettendo tutto insieme, troviamo la rappresentazione spettrale del propagatore dell' elettrone nella forma:

$$\begin{aligned} i(G_F)_{\alpha\beta}(x) &= \langle 0|T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)]|0\rangle = \\ &= Z_2 iS_F(x)_{\alpha\beta} + \int dM^2 [i\partial\rho_1(M^2) + M\rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} i[\Delta_F(x, M)] \end{aligned} \quad (1.34)$$

La trasformata di Fourier della funzione a due punti ha un polo per $p = m$ con residuo iZ_2 .

Lasciamo al lettore di costruire la rappresentazione spettrale del campo del fotone, della forma:

$$\begin{aligned} i(G_F)^{\mu\nu}(x) &= \langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(0)]|0\rangle = \\ &= -g^{\mu\nu} \left[Z_3 i\Delta_F(x, M=0) + \int dM^2 \sigma_3(M^2) i\Delta_F(x, M^2) \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.35)$$

dove i puntini indicano termini proporzionali alle derivate parziali, rispetto ad x^μ e/o ad x^ν di funzioni di x , che possiamo omettere dal propagatore in virtù della conservazione delle correnti per cui il propagatore stesso viene moltiplicato nelle ampiezze fisiche.

1.4 Grafici di Feynman per la matrice S

Come abbiamo fatto nel caso del campo scalare, possiamo direttamente passare dai diagrammi che descrivono il funzionale generatore a quelli che descrivono elementi di matrice S.

Dobbiamo restringerci alle funzioni di Green che corrispondono ai grafici *connessi*, con linee esterne che corrispondono alle particelle iniziali e finali.

Inserendo le funzioni di Green nelle formule di riduzione e prendendo i residui nei poli corrispondenti ai momenti esterni, eliminiamo completamente i propagatori delle linee esterne ed otteniamo un fattore $\sqrt{Z_2}$ per ogni elettrone o positrone ed un fattore $\sqrt{Z_3}$ per ogni fotone.

Arriviamo così alla espressione generale per l'elemento di matrice S ,

$$\langle f|S|i\rangle = \left(\prod_{\text{Ferm.}} \sqrt{2m} \right) \left(\prod_{\text{Tutte}} \sqrt{\frac{Z}{2\omega_q(2\pi)^3}} \right) (2\pi)^4 i \delta^4 \left(\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i \right) \mathcal{M}_{fi} \quad (1.36)$$

Come vedremo, i fattori $\sqrt{Z}$ associati alle linee esterne spariscono quando si esegue la ri-normalizzazione. Abbiamo messo in evidenza i fattori cinematici e messo in evidenza un fattore $(2\pi)^4 i \delta^4 (\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i)$ che garantisce la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Il fattore “ i ” segue la convenzione secondo cui la matrice S viene espressa come $1 + iT$, dove T è la matrice di transizione.

In termini di diagrammi dobbiamo limitarci a diagrammi connessi che siano, inoltre, *irriducibili ad una particella sulle linee esterne*. Avremo:

$$(2\pi)^4 i \delta^4 \left(\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i \right) \mathcal{M}_{fi} = \sum D_i \quad (1.37)$$

Regole di Feynman. Per definire meglio le regole per il calcolo dei diagrammi dobbiamo dire qualcosa di più sulla loro struttura. Per prima cosa osserviamo che (vedi eq. 1.17) ad ogni vertice afferiscono due linee fermioniche, una di tipo “ $\bar{j}$ ” prodotta dalla derivata $\delta/\delta J$, che possiamo considerare *uscente* dal vertice, l'altra di tipo “ J ”, prodotta da $\delta/\delta \bar{J}$, che possiamo considerare *entrante*. Come risulta dalla (1.19) una linea uscente da un primo vertice risulterà entrante in un secondo. Quindi se, partendo da un vertice, seguiamo di vertice in vertice una linea fermionica secondo il suo verso, si possono realizzare due situazioni: o arriviamo a una linea uscente dal diagramma (e seguendola all'indietro a una linea entrante nel diagramma), oppure torniamo al punto di partenza. Nel primo caso avremo una linea aperta, nel secondo una linea chiusa (in inglese *loop*). Dato che si tratta di fermioni, dobbiamo stare attenti ai segni. Nei due termini del vertice (1.17) la derivata $\delta/\delta \bar{J}$ (linea entrante) è a destra di $\delta/\delta J$ (linea uscente). Per una linea aperta possiamo ordinare gli operatori V che vi contribuiscono in modo che siano contigui e che le contrazioni avvengano sempre tra il fattore $\delta/\delta \bar{J}$ in uno dei vertici e il $\delta/\delta J$ in quello alla sua destra, una situazione che chiameremo *normale*. Ad esempio, per una linea aperta con tre vertici in x, y, z ,

$$\left[\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \gamma^\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right) \right] \left[\left(i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \gamma^\nu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \right] \left[\left(i \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \gamma^\sigma \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(z)} \right) \right]$$

di modo che siamo sempre nel caso della prima delle (1.19). Nel caso di una linea fermionica chiusa troviamo necessariamente un numero dispari di casi in cui vengono contratte due derivate nell'ordinamento inverso, $\delta/\delta \bar{J}$ alla destra di $\delta/\delta J$, e in questi casi si applica la seconda (1.19), che ha il segno opposto alla prima. Ad esempio per una linea chiusa con due vertici,

$$\left[\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \gamma^\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right) \right] \left[\left(i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \gamma^\nu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \right]$$

la contrazione interna è nell'ordine normale, quella esterna nell'ordine opposto. Possiamo quindi usare sempre la prima delle (1.19) aggiungendo un ulteriore fattore (-1) per ciascuna linea chiusa. Abbiamo ommesso l'indicazione degli indici spinoriali, dato che gli indici contigui sono sommati. Nelle linee chiuse abbiamo anche una somma tra il primo e l'ultimo indice, una traccia: l'esempio che abbiamo dato corrisponde, includendo il fattore (-1) , a

$$(-1) \text{Tr} [\gamma^\mu i S_F(x-y) \gamma^\nu i S_F(y-x)]$$

Per quanto riguarda le linee aperte, l'espressione corrispondente si scrive da sinistra a destra *cominciando con la linea uscente*, che può rappresentare un fermione nello stato finale, o un antifermione nello stato iniziale, e finisce con la linea entrante — un fermione iniziale o un antifermione nello stato finale. Quindi per una linea fermionica aperta la regola è RISALIRE LA LINEA FERMIONICA COMINCIANDO DALLA FINE. Per una linea chiusa si può partire da qualunque vertice, dato che la traccia è invariante rispetto a permutazioni circolari, RISALENDOLA LA LINEA. Detto questo, gli elementi di un diagramma sono:

Vertice elettrone-fotone	$i e (2\pi)^4 \delta^4(\sum q_i) \gamma^\mu$	
Vertice controtermine	$i \delta m (2\pi)^4 \delta^4(\sum q_i)$	
Linea interna fermionica	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	
Linea interna fotonica	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$	
Linea esterna fotonica	ϵ_μ	(1.38)
Linea Fermionica entrante	$\begin{cases} \text{Fermione iniziale} & u_r(\vec{q}) \\ \text{Antiferm. finale} & v_r(\vec{q}) \end{cases}$	
Linea Fermionica uscente	$\begin{cases} \text{Fermione finale} & \bar{u}_r(\vec{q}) \\ \text{Antiferm. iniziale} & \bar{v}_r(\vec{q}) \end{cases}$	
Linea Fermionica chiusa	Aggiungere un fattore (-1)	

È importante notare che il segno *relativo* tra diagrammi differenti che contribuiscono allo stesso processo sono fisicamente rilevanti. È questo il caso del fattore (-1) associato alle linee fermioniche chiuse, dato che diversi diagrammi per lo stesso processo possono avere un diverso numero di linee chiuse.

1.5 Combinatoria.

In poche parole: *non ci sono problemi di combinatoria*. Il fattore $1/n!$ che appare nello sviluppo di Z in potenze dell'operatore differenziale V (eq. 1.16) si compensa esattamente per i diagrammi connessi non di tipo vuoto-vuoto (i soli che ci interessano) dell'elettrodinamica quantistica. La ragione è che in un diagramma connesso ogni vertice ha un suo ruolo

unico rispetto a quelli degli altri vertici. Supponiamo di avere dimostrato questo fatto, e di avere assegnato agli n vertici dei “ruoli” $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Il diagramma con n vertici sarà prodotto dal termine $V^n/n!$, ed esistono $n!$ modi di assegnare gli n ruoli alle n copie di V . Questo cancella esattamente il fattore $1/n!$.

Resta da far vedere che in ogni diagramma i ruoli dei vertici sono tutti diversi. Per far questo basta far vedere che esiste un algoritmo per assegnare a ciascun vertice un numero d'ordine progressivo, ad esempio

Passo (1) Supponiamo che ci siano $a > 0$ linee fermioniche aperte ed $l \geq 0$ linee fermioniche chiuse. Prima di tutto diamo un ordine alle linee aperte, ciascuna delle quali ha una identità definita dagli impulsi entranti e uscenti. Se $A_1, A_2, \dots, A_a$ sono le linee aperte, possiamo aprire la lista dei vertici mettendo prima quelli di A_1 cominciando (per non perdere l'allenamento) dalla fine della linea, poi quelli di A_2 , e così via. Così abbiamo una lista che contiene tutti i vertici sulle linee aperte, ciascuno con il suo numero d'ordine.

Passo (2) Se $l > 0$ la lista deve ancora essere completata con i vertici di l linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

Se $l - 1 > 0$ la lista deve ancora essere completata con i vertici di $l - 1$ linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

... [Continuare fino a che restano vertici fuori dalla lista.]

Se non ci sono linee aperte (ad esempio $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$) diamo un ordine alle particelle entranti (necessariamente fotoni), e apriamo la lista con il vertice su cui arriva la prima di queste. Aggiungiamo i vertici che si trovano sulla stessa linea chiusa del primo (dobbiamo dire in che ordine?). Se rimangono $l > 0$ linee chiuse con vertici non catalogati, tornare al passo (2).

A questo punto ogni vertice ha il suo ruolo, ad esempio: “il vertice 7 è il terzo a partire dalla fine della seconda linea aperta” e la dimostrazione è completa.

Capitolo 2

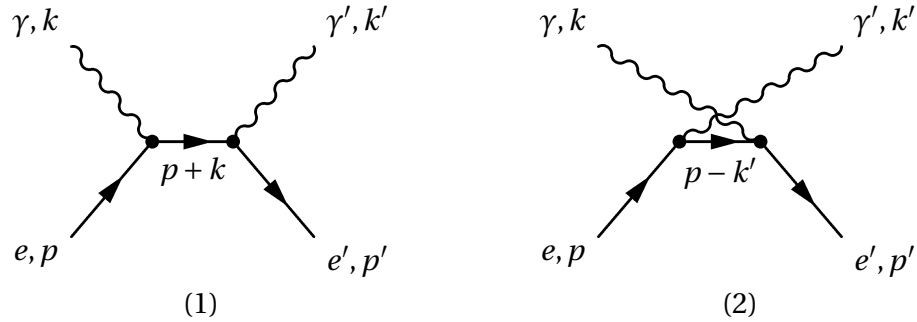
Effetto Compton

2.1 Calcolo del modulo quadrato dell'ampiezza

Consideriamo il processo

$$e + \gamma \rightarrow e' + \gamma', \quad (2.1)$$

che all'ordine più basso della teoria della perturbazioni è descritto dai diagrammi di Feynman (1) e (2) rappresentati nella figura.



Per scrivere le ampiezze corrispondenti è conveniente introdurre le variabili di Mandelstam¹

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2 = E_{cm}^2, \quad (2.2)$$

$$t = (p' - p)^2 = (k - k')^2, \quad (2.3)$$

$$u = (p - k')^2 = (k - p')^2, \quad (2.4)$$

dove E_{cm}^2 è l'energia totale nel sistema di riferimento del centro di massa, definito dalla relazione $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$, e $\mathbf{p}$ e $\mathbf{k}$ sono gli impulsi, rispettivamente, dell'elettrone e del fotone presenti nello stato iniziale.

¹Per completezza diamo anche la definizione della variabile t , che non verrà utilizzata nei calcoli discussi in questa Sezione

La sezione d'urto del processo è proporzionale al modulo quadrato della somma delle ampiezze associate ai diagrammi (1) e (2), mediato sugli stati di spin delle particelle nello stato iniziale e sommato sugli stati di spin delle particelle nello stato finale

$$\sigma \propto \overline{|M_1 + M_2|^2} = \overline{|M_1|^2} + \overline{|M_2|^2} + \overline{M_1 M_2^*} + \overline{M_1^* M_2} . \quad (2.5)$$

Il contributo del diagramma (1) vale

$$M_1 = \bar{u}' \epsilon'_\mu{}^* (ie\gamma^\mu) i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu u , \quad (2.6)$$

dove $u = u_s(\mathbf{p})$ e $u' = u_{s'}(\mathbf{p}')$ sono i quadrispinori associati agli elettroni e ed e' , e $\epsilon^\mu = \epsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ e $\epsilon' = \epsilon_{r'}^\mu(\mathbf{k}')$ i vettori di polarizzazione dei fotoni γ e γ' .

Dalla (2.6), usando la (2.2), si ottiene

$$\overline{|M_1|^2} = \frac{e^4}{(s-m^2)^2} \frac{1}{4} \sum_{r,r'} \sum_{s,s'} \bar{u}' \epsilon'_\mu{}^* \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu u \bar{u} \epsilon_\sigma{}^* \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\rho \epsilon'_\rho u' . \quad (2.7)$$

Le somme sugli stati di polarizzazione dei fotoni si effettuano facilmente ricordando che il risultato finale del nostro calcolo deve essere invariante per trasformazioni di gauge e notando che l'ampiezza di qualsiasi processo che coinvolge un fotone con polarizzazione r nello stato iniziale o finale si può mettere nella forma

$$M = \epsilon_{r,\mu} \mathcal{M}^\mu . \quad (2.8)$$

Il vettore di polarizzazione ϵ_r dipende dalla gauge, come si vede facilmente considerando la trasformazione

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu{}'(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (2.9)$$

dove

$$A_\mu(x) = \epsilon_{r,\mu} e^{ikx} . \quad (2.10)$$

Scegliendo $\Lambda(x) = C e^{ikx}$ troviamo quindi

$$A_\mu{}'(x) = (\epsilon_{r,\mu} + i C k_\mu) e^{ikx} = \epsilon_{r,\mu}' e^{ikx} , \quad (2.11)$$

cioè che la trasformazione di gauge cambia il vettore di polarizzazione ϵ_r in ϵ_r' .

La condizione che l'ampiezza (2.8) resti invariante sotto la trasformazione del vettore di polarizzazione implica che deve essere

$$\epsilon_{r,\mu} \mathcal{M}^\mu = \epsilon_{r,\mu}' \mathcal{M}^\mu = (\epsilon_{r,\mu} + i C k_\mu) \mathcal{M}^\mu , \quad (2.12)$$

cioè

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0 . \quad (2.13)$$

Questo risultato ci permette di effettuare la somma

$$\sum_r |M|^2 = (\mathcal{M}^\mu)^* \mathcal{M}^\nu \sum_{r=1}^2 \epsilon_{r,\mu}^* \epsilon_{r,\nu} . \quad (2.14)$$

dove (si vedano gli appunti del corso di Meccanica Quantistica Relativistica)

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_{r,\mu}^* \epsilon_{r,\nu} = -g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu - (kn)(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)}{(kn)^2} , \quad (2.15)$$

con $n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0)$. Dalla (2.13) segue infatti che

$$\sum_{r=1}^2 |M|^2 = (\mathcal{M}^\mu)^* \mathcal{M}^\nu \sum_{r=1}^2 \epsilon_{r,\mu}^* \epsilon_{r,\nu} = -(\mathcal{M}^\mu)^* \mathcal{M}^\nu g_{\mu\nu} = -|\mathcal{M}|^2 . \quad (2.16)$$

In conclusione, le somme sugli stati di polarizzazione dei fotoni nella (2.7) si effettuano facilmente con le sostituzioni

$$\sum_r \epsilon_r^{\sigma*} \epsilon_r^\nu = -g^{\sigma\nu} + \dots , \quad \sum_{r'} \epsilon_r^{\mu*} \epsilon_r^\rho = -g^{\mu\rho} + \dots , \quad (2.17)$$

dove i puntini di sospensione indicano la presenza di termini il cui contributo alle ampiezze si annulla, e può quindi essere omissso.

Per sommare sugli spin degli elettroni si utilizzano le relazioni

$$\sum_s u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} , \quad \sum_{s'} u_{s'}(\mathbf{p}') \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') = \frac{\not{p}' + m}{2m} . \quad (2.18)$$

Si ottiene così,

$$\begin{aligned} \overline{|M_1|^2} &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \bar{u}' \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu u \bar{u} \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu u' \\ &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2} \frac{1}{16m^2} \text{Tr} (\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dobbiamo ora calcolare la traccia a secondo membro della (2.19) applicando le regole riassunte negli appunti del corso di Meccanica Quantistica Relativistica. Per prima cosa, usando la proprietà di invarianza della traccia sotto permutazioni cicliche degli argomenti, possiamo spostare la matrice γ_μ a sinistra del fattore $(\not{p}' + m)$. Sfruttando poi la relazione, valida per ogni quadriettore a ,

$$\gamma_\mu a \gamma^\mu = a_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu = a_\rho \gamma_\mu (2g^{\rho\mu} - \gamma^\mu \gamma^\rho) = -2a \quad (2.20)$$

possiamo porre la traccia da calcolare nella forma

$$\text{Tr} (4m - 2\not{p}') (\not{p} + \not{k} + m) (4m - 2\not{p}) (\not{p} + \not{k} + m) = A + B + C + D , \quad (2.21)$$

con

$$A = 16m^2 \text{Tr} (\not{p} + \not{k} + m)(\not{p} + \not{k} + m) \quad (2.22)$$

$$B = 4 \text{Tr} \not{p}'(\not{p} + \not{k} + m)\not{p}(\not{p} + \not{k} + m) \quad (2.23)$$

$$C = -8m \text{Tr} \not{p}'(\not{p} + \not{k} + m)(\not{p} + \not{k} + m) \quad (2.24)$$

$$D = -8m \text{Tr} (\not{p} + \not{k} + m)\not{p}(\not{p} + \not{k} + m) \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

Definendo $\tilde{s} = p + k = p' + k'$, da cui segue che $\tilde{s}^2 = s$, e ricordando che la traccia del prodotto di un numero dispari di matrici γ si annulla, possiamo calcolare subito il termine A , col risultato

$$A = 16m^2 \text{Tr} (\not{\tilde{s}} + m^2) = 64m^2(s + m^2), \quad (2.27)$$

che si ottiene facilmente notando che, dati due quadri-vettori a e b

$$\text{Tr} \not{a} \not{b} = a_\rho b_\sigma \text{Tr} (\gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4a_\rho b_\sigma g^{\rho\sigma} = 4(ab). \quad (2.28)$$

Il contributo dei termini C e D si ottiene procedendo in modo analogo. Per esempio, troviamo per C l'espressione

$$C = -8m \text{Tr} \not{p}'(\not{\tilde{s}} + m)(\not{\tilde{s}} + m) = -16m^2 \text{Tr} \not{p}' \not{\tilde{s}} = -64m^2(p' \tilde{s}) \quad (2.29)$$

che, sostituendo

$$(p' \tilde{s}) = p'(p' + k') = m^2 + (p' k'), \quad (2.30)$$

con $(p' k') = (s - m^2)/2$ diventa

$$C = -32m^2(s + m^2). \quad (2.31)$$

Il calcolo del termine D è analogo, e il risultato che si ottiene è lo stesso

$$D = -64m^2(p \tilde{s}) = -32m^2(s + m^2). \quad (2.32)$$

Sommando insieme le (2.27), (2.31) e (2.32) troviamo

$$A + C + D = 0, \quad (2.33)$$

da cui segue che l'unico termine che contribuisce alla traccia (2.21) è B , che possiamo riscrivere

$$B = \text{Tr} (\not{p}' \not{\tilde{s}} \not{p} \not{\tilde{s}} + m^2 \not{p}' \not{p}). \quad (2.34)$$

Il calcolo si effettua utilizzando la relazione

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) &= a_\lambda b_\mu c_\nu d_\rho \text{Tr} (\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 4a_\lambda b_\mu c_\nu d_\rho (g^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} + g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} - g^{\lambda\nu} g^{\mu\rho}) \\ &= 4[(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Il risultato che si ottiene

$$B = 16[2(p'\tilde{s})(p\tilde{s}) - (pp')s + m^2(pp')] = 32\{(pk)(pk') + m^2[(pp') + (p'k)]\} , \quad (2.36)$$

si può scrivere in termini delle variabili s e u notando che

$$(pk') = \frac{m^2 - u}{2} , \quad [(pp') + (p'k)] = \frac{s - m^2}{2} . \quad (2.37)$$

In conclusione troviamo la

$$B = 8[4m^4 + (s - m^2)(m^2 - u) + 2m^2(s - m^2)] . \quad (2.38)$$

Dalle equazioni (2.19) e (2.21) segue quindi che

$$\overline{|M_1|^2} = \frac{1}{4m^2} \frac{2e^4}{(s - m^2)^2} [4m^4 - (s - m^2)(u - m^2) + 2m^2(s - m^2)] . \quad (2.39)$$

Il modulo quadrato dell'ampiezza associata al grafico (2) si ottiene facilmente da $\overline{|M_1|^2}$ con la sostituzione $s \Rightarrow u$, col risultato

$$\overline{|M_2|^2} = \frac{1}{4m^2} \frac{2e^4}{(u - m^2)^2} [4m^4 - (u - m^2)(s - m^2) + 2m^2(u - m^2)] . \quad (2.40)$$

Dal calcolo del termine di interferenza, che si effettua in modo analogo, si ottiene

$$\overline{M_1 M_2^*} + \overline{M_1^* M_2} = \frac{1}{4m^2} \frac{4e^4}{(s - m^2)(u - m^2)} [4m^4 - m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2)] . \quad (2.41)$$

Finalmente, mettendo insieme i risultati (2.39), (2.40) e (2.41) troviamo

$$\begin{aligned} \overline{|M_1 + M_2|^2} &= \frac{1}{4m^2} 8e^4 \left[\left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{u - m^2}{s - m^2} + \frac{s - m^2}{u - m^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.2 Sezione d'urto di Klein-Nishina

Vogliamo ora utilizzare il risultato (2.42) per ottenere la sezione d'urto nel sistema del laboratorio, definito dalle relazioni

$$p \equiv (m, \mathbf{0}) , \quad p' \equiv (E', \mathbf{p}') ,$$

$$k \equiv (\omega, \mathbf{k}) , \quad k' \equiv (\omega', \mathbf{k}') ,$$

con $|\mathbf{k}| = \omega$ e $|\mathbf{k}'| = \omega'$, dalle quali segue che

$$s = (p + k)^2 = m^2 + 2m\omega \quad , \quad u = (p - k')^2 = m^2 - 2m\omega' . \quad (2.43)$$

Inoltre, la $p - p' = k' - k$ implica

$$1 - \cos\theta = m \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) , \quad (2.44)$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$.

Sostituendo le (2.43) e (2.44) nella (2.42) otteniamo

$$\overline{|M_1 + M_2|^2} = \frac{1}{4m^2} 2e^4 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right) . \quad (2.45)$$

La sezione d'urto è definita come

$$d\sigma = \frac{1}{F} \frac{W}{T} \frac{V}{(2\pi^3)} d^3 p' \frac{V}{(2\pi^3)} d^3 k' , \quad (2.46)$$

dove il flusso dei fotoni incidenti, F , vale

$$F = \frac{1}{V} \frac{|\mathbf{k}|}{\omega} = \frac{1}{V} , \quad (2.47)$$

mentre la probabilità di transizione per unità di tempo è

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} &= \frac{1}{T} V T (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') \\ &\times \frac{1}{2V\omega} \frac{1}{2V\omega'} \frac{m}{Vm} \frac{m}{VE'} \overline{|M_1 + M_2|^2} . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sostituendo le (2.45) (2.47) e (2.48) nella (2.46) e effettuando l'integrazione su $\mathbf{p}'$ sfruttando la funzione δ associata alla conservazione dell'impulso otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{\omega\omega' m E'} 2e^4 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right) \delta(m + \omega - E' - \omega') d^3 k' , \quad (2.49)$$

ovvero, ricordando che $d^3 k' = d\Omega' \omega'^2 d\omega'$, dove Ω' è l'angolo solido che individua la direzione del vettore $\mathbf{k}'$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{32\pi^2} \frac{\omega'}{\omega} \frac{1}{m E'} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right) \delta(m + \omega - E' - \omega') d\omega' . \quad (2.50)$$

L'integrazione su ω' con la funzione δ si effettua usando la regola

$$\delta[F(\omega')] = \left| \frac{dF}{d\omega'} \right|^{-1} \delta(\omega' - \omega'_0) , \quad (2.51)$$

con $F(\omega'_0) = 0$. Ricordando che $E' = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}$ troviamo

$$\left| \frac{d}{d\omega'} (m + \omega - E' - \omega') \right| = \frac{1}{E'} (\omega' - \omega \cos \theta) + 1 = \frac{(p' k')}{E' \omega'} = \frac{(pk)}{E' \omega'} = \frac{m\omega}{E' \omega'} \quad (2.52)$$

e quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{32\pi^2} \frac{\omega'}{\omega} \frac{1}{mE'} \frac{E'\omega'}{m\omega} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right) \quad (2.53)$$

ovvero

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right). \quad (2.54)$$

La sezione d'urto (2.54), ottenuta nel Klein e Nishina nel 1929, fornisce una descrizione accurata dell'effetto Compton, osservato sperimentalmente per la prima volta nel 1923.

Consideriamo ora la (2.54) nel limite non relativistico, in cui $\omega/m \ll 1$. Risolvendo la (2.44) per ω' si ottiene la relazione

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}, \quad (2.55)$$

che mostra come, nel limite che ci interessa, $\omega/\omega' \rightarrow 1$ e la (2.54) diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha}{2m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (2.56)$$

Per ottenere la sezione d'urto totale effettuiamo l'integrale angolare

$$\sigma = 2\pi \frac{\alpha}{2m^2} \int d\cos \theta (1 + \cos^2 \theta) = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha}{m^2}. \quad (2.57)$$

La (2.57) è la sezione d'urto di Thomson, che descrive l'interazione del campo elettromagnetico classico con un elettrone.

2.3 Diffusione Compton su elettroni relativistici

Nelle Sezioni precedenti abbiamo considerato la sezione d'urto di diffusione fotone-elettrone nel sistema di riferimento del laboratorio, nel quale l'elettrone è in quiete. L'espressione che abbiamo ottenuto per il modulo quadrato dell'ampiezza di transizione non dipende però dalla scelta particolare del sistema di riferimento e può essere utilizzata anche nel caso in cui gli elettroni siano relativistici, cioè abbiano energia molto maggiore della massa a riposo. Come vedremo, in queste condizioni è possibile ottenere nello stato finale fotoni con energia $\omega' \gg \omega$.

Definendo le variabili cinematiche come

$$p \equiv (E, \mathbf{p}) \quad , \quad p' \equiv (E', \mathbf{p}'),$$

$$k \equiv (\omega, \mathbf{k}) \quad , \quad k' \equiv (\omega', \mathbf{k}') \quad ,$$

dalla conservazione del quadrimpulso totale, che implica

$$(pk) = (p'k') = (p + k - k')k' = (pk') + (kk') \quad , \quad (2.58)$$

otteniamo la relazione

$$E\omega - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = E\omega' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' \quad , \quad +\omega\omega'(1 - \cos\theta) \quad (2.59)$$

che e possiamo riscrivere

$$\omega(1 - \beta \cos\phi) = \omega'(1 - \beta \cos\phi') + \frac{\omega\omega'}{E}(1 - \cos\theta) \quad , \quad (2.60)$$

dove ϕ e ϕ' sono gli angoli compresi tra la direzione di $\mathbf{p}$ e quelle, rispettivamente, di $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$, e $\beta = |\mathbf{p}|/E$ è la velocità dell'elettrone (nel sistema di in unità di misura nel quale la velocità della luce è $c = 1$).

Risolvendo la (2.60) rispetto ad ω' otteniamo la

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos\phi}{1 - \beta \cos\phi' + \frac{\omega}{E}(1 - \cos\theta)} \quad , \quad (2.61)$$

che si riduce ovviamente alla (2.55) nel limite $\beta \rightarrow 0$. Per elettroni relativistici $\beta \approx 1$ e possiamo usare l'espansione, valida per $1/\gamma^2 \ll 1$,

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} = \sqrt{\frac{E^2 - m^2}{E^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad , \quad (2.62)$$

dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ è il fattore di Lorentz.

Consideriamo ora il caso in cui $\mathbf{p}$ e $\mathbf{k}$ hanno direzione circa uguale e verso opposto, cioè $\phi \approx \pi$, e gli impulsi delle particelle nello stato finale sono tali che $\theta \approx \pi$ e $\phi' \approx 0$. In queste condizioni la (2.61) si può riscrivere nella forma

$$\omega' \approx E \frac{z}{1 + x + z} \quad , \quad (2.63)$$

dove

$$z = \frac{4\gamma^2\omega}{E} \quad , \quad x = \gamma^2\phi'^2 \quad . \quad (2.64)$$

Per ω fissato, il valore massimo di ω' , ω'_{max} , corrisponde a $\phi' = 0$ e vale

$$\omega'_{max} = E^2 \frac{4}{m^2} \frac{\omega}{1 + z} \quad . \quad (2.65)$$

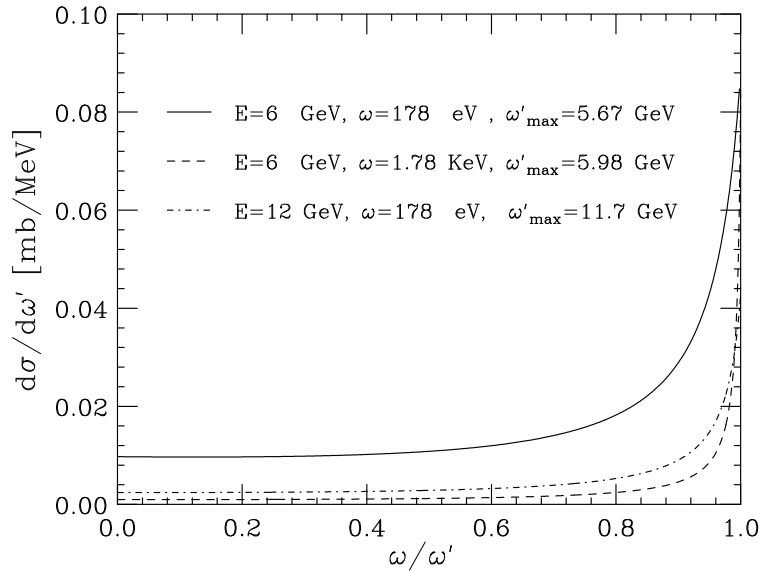


Figura 2.1: Distribuzione in energia di fotoni prodotti con diffusione Compton di elettroni relativistici.

Nella diffusione Compton di elettroni ottenuti da una macchina acceleratrice su fotoni con energie dell'ordine di un eV, ottenuti da un laser, si possono produrre fotoni di energia massima dell'ordine del GeV la cui distribuzione, illustrata dalla Figura 2.1, presenta un picco per $\omega \approx \omega'_{\max}$ la cui larghezza decresce all'aumentare di E e ω .

Questa tecnica viene utilizzata per la produzione di fasci di fotoni utilizzabili per esperimenti di fisica dei nuclei. Il primo fascio di questo tipo, di energia ~ 80 MeV, è stato ottenuto alla fine degli anni settanta ai Laboratori di Frascati, utilizzando gli elettroni dell'anello di accumulazione Adone, di energia $E = 1.5$ GeV e fotoni di energia $\omega = 2.45$ eV. Il fascio di fotoni che si ottiene possiede anche l'importante proprietà di avere la stessa polarizzazione dei fotoni prodotti dal laser, in quanto gli elettroni, essendo ultrarelativistici, conservano la loro elicità nel processo di diffusione.

Capitolo 3

Simmetrie P, C, T

Discutiamo in questo Capitolo le simmetrie discrete della QED, che riguardano le tre trasformazioni:

- inversione degli assi coordinati spaziali ad un dato tempo:

$$\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, t \rightarrow t \quad (3.1)$$

la *Parità*, che indicheremo con $\mathcal{P}$;

- sostituzione di ogni particella con la sua antiparticella e viceversa, la *Coniugazione di carica*, $\mathcal{C}$;
- inversione del tempo, *Time-reversal*

$$t \rightarrow -t, \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \quad (3.2)$$

che indicheremo con $\mathcal{T}$.

Le prime due trasformazioni sono rappresentate, nello spazio di Hilbert degli stati, da operatori unitari mentre l' inversione temporale deve agire come un operatore anti-unitario. Tutti questi operatori lasciano invariante la lagrangiana della QED e sono quindi delle *simmetrie esatte* di questa teoria.

3.1 Parità

L' azione della Parità sugli operatori di campo segue dalla (3.1): le componenti del campo in $\mathbf{x}$ trasformato devono essere una sovrapposizione delle componenti del campo in $-\mathbf{x}$. L' applicazione due volte dell' operazione di parità ci riporta al punto di partenza, quindi imponremo la condizione:

$$\mathcal{P}\mathcal{P} = 1 \quad (3.3)$$

Per il campo elettromagnetico, sappiamo dal limite classico che le componenti spaziali del potenziale vettore sono dei vettori polari, mentre il potenziale scalare è, appunto, uno scalare. Quindi:

$$\mathcal{P} A^\mu(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = g^{\mu\mu} A^\mu(-\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

(gli indici ripetuti tre volte *non* sono sommati). Di qui, troviamo:

$$\mathcal{P} \partial^\lambda A^\mu(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = g^{\mu\mu} g^{\lambda\lambda} \partial^\lambda A^\mu(-\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

da cui segue la legge di trasformazione del tensore di Maxwell

$$\mathcal{P} F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} F^{\mu\nu}(-\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

Nel caso dello spinore, la legge generale si scrive:

$$\mathcal{P} \psi(\mathbf{x}, t)_\alpha \mathcal{P} = [P \psi(-\mathbf{x}, t)]_\alpha = P_{\alpha\beta} \psi(-\mathbf{x}, t)_\beta \quad (3.7)$$

dove P è una matrice nello spazio degli spinori di Dirac da determinare in modo tale che le osservabili costruite con i campi si trasformino correttamente sotto la parità.

Per rispettare il limite classico, la corrente si deve trasformare come il potenziale vettore:

$$\mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = g^{\mu\mu} \bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(-\mathbf{x}, t) \quad (3.8)$$

Sostituendo la (3.7), troviamo:

$$\mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = g^{\mu\mu} \bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) P^\dagger \gamma^\mu P \psi(-\mathbf{x}, t) \quad (3.9)$$

- Per $\mu = 0$, troviamo:

$$P^\dagger P = 1 \quad (3.10)$$

- Per $\mu = i$ ($i=1, 2, 3$), troviamo:

$$P^\dagger \gamma^0 \gamma^i P = P^\dagger \alpha^i P = -\alpha^i \quad (3.11)$$

In conclusione, P deve anticommutare con tutte le α^i e questo implica:

$$P = c \gamma^0 \quad (3.12)$$

Se chiediamo che sia $P^2=1$, segue $|c|^2=1$. Senza perdere in generalità, possiamo fissare $c=1$, per cui:

$$P = \gamma^0; \quad P = P^\dagger = P^{-1} \quad (3.13)$$

Come abbiamo visto in [1], le osservabili si costruiscono dalle espressioni bilineari nei campi di Dirac, che a loro volta sono organizzati nei *bilineari covarianti* di Dirac. Le relazioni (3.7,3.13) determinano le proprietà di trasformazione sotto parità di ciascun bilineare.

Bilineari covarianti. Lasciamo al lettore il compito di generalizzare la (3.9), mostrando che i bilineari S, P, V, A, T trasformano sotto parità come scalare, pseudoscalare, vettore polare, vettore assiale, tensore.

$$\begin{aligned}
S: \mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} &= -\bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) \psi(-\mathbf{x}, t); \\
P: \mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) i\gamma_5 \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} &= -\bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) i\gamma_5 \psi(-\mathbf{x}, t); \\
V: \mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} &= g^{\mu\mu} \bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(-\mathbf{x}, t) \\
A: \mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} &= -g^{\mu\mu} \bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(-\mathbf{x}, t); \\
T: \mathcal{P} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \sigma^{\mu\nu} \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} &= g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \bar{\psi}(-\mathbf{x}, t) \sigma^{\mu\nu} \psi(-\mathbf{x}, t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Un corollario delle relazioni che abbiamo dimostrato è che l'azione della QCD è invariante per parità. Infatti, nella:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) + e A_\mu(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi(x) \tag{3.15}$$

compaiono solo grandezze scalari o comunque prodotti tra vettori polari. Quindi:

$$\mathcal{P} S \mathcal{P} = \mathcal{P} \int d^4x \mathcal{L}_{QED}(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = \int d^4x \mathcal{L}_{QED}(-\mathbf{x}, t) = \int d^4x \mathcal{L}_{QED}(\mathbf{x}, t) = S \tag{3.16}$$

L'invarianza resta valida se aggiungiamo all'azione i termini non minimali che descrivono un eventuale momento magnetico anomalo [1], della forma:

$$\mathcal{L}_{non\ min.} = \frac{\kappa}{2m} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu} \tag{3.17}$$

3.2 Coniugazione di carica

Il campo ψ distrugge un elettrone e crea un positrone, mentre $\psi^\dagger$ crea un elettrone e distrugge un positrone. Come abbiamo più volte osservato, l'affermazione che il positrone è l'antiparticella dell'elettrone è puramente convenzionale ed i ruoli di elettrone e positrone, in QED, sono perfettamente simmetrici. In altre parole, dovremmo poter formulare la QED in termini di un nuovo campo che distrugge il positrone e crea l'elettrone. Se chiamiamo ψ_c il nuovo campo, da quanto appena detto segue che: *le componenti di ψ_c devono essere combinazioni lineari delle componenti di $\psi^\dagger$.*

In formule (non indichiamo le coordinate, che sono le stesse nel primo e nel secondo membro della relazione):

$$[\psi_c]_\alpha = \mathcal{C} \psi_\alpha \mathcal{C} = [C \psi^\dagger]_\alpha = C_{\alpha\beta} \psi_\beta^\dagger \tag{3.18}$$

dove, come prima, C è una matrice da determinare in modo tale che la trasformazione $\mathcal{C}$ sugli osservabili corrisponda alla sostituzione di ciascun elettrone con un positrone e viceversa. Prendendo l'hermitiano coniugato della (3.18), troviamo anche:

$$[\psi_c]_\alpha^\dagger = \mathcal{C} \psi_\alpha^\dagger \mathcal{C} = [\psi C^\dagger]_\alpha \tag{3.19}$$

Come nel caso della parità, ripetendo $\mathcal{C}$ due volte si ottiene la trasformazione identica. Possiamo quindi richiedere che sia $C^2=1$, per cui:

$$\psi = (\psi_c)^\dagger C^\dagger; \quad \psi^\dagger = C\psi_c \quad (3.20)$$

Affinché la lagrangiana di Dirac libera sia invariante sotto $\mathcal{C}$, deve essere, in primo luogo:

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_c\psi_c \quad (3.21)$$

Ci mettiamo nella rappresentazione di Pauli delle matrici gamma, in cui γ^0 è reale e simmetrica. I prodotti dei campi in queste formule vanno tutti intesi come prodotti normali, all'interno dei quali i campi fermionici anticommutano. Abbiamo quindi:

$$\bar{\psi}\psi = -\psi(\gamma^0)^T\psi^\dagger = -(\psi_c)^\dagger C^\dagger\gamma^0 C\psi_c \quad (3.22)$$

da cui:

$$C^\dagger\gamma^0 C = -\gamma^0 \quad (3.23)$$

Imponiamo adesso che il termine con le derivate nell'azione di Dirac, S_{kin} , mantenga la stessa forma quando espresso nei campi coniugati:

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \int d^4x \, i\bar{\psi}\partial\psi = - \int d^4x \, i(\partial_\mu\psi^\dagger)\gamma^0\gamma^\mu\psi = \\ &= + \int d^4x \, i\psi(\gamma^0\gamma^\mu)^T(\partial_\mu\psi^\dagger) = + \int d^4x \, i\bar{\psi}_c\gamma^0 C^\dagger(\gamma^\mu)^T\gamma^0 C(\partial_\mu\psi_c) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dobbiamo avere quindi:

$$\gamma^0 C^\dagger(\gamma^\mu)^T\gamma^0 C = \gamma^\mu \quad (3.25)$$

Se poniamo $\mu=0$, la relazione precedente diventa:

$$C^\dagger C = 1 \rightarrow C^\dagger = C = C^{-1} \quad (3.26)$$

e dalla relazione (3.23) vediamo che C deve anticommutare con γ^0 . Se usiamo inoltre la relazione generale:

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu \quad (3.27)$$

la (3.25) diventa:

$$C\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^* \quad (3.28)$$

Nella rappresentazione di Pauli, $\gamma^{0,1,3}$ sono reali mentre γ^2 è immaginaria. La (3.28) ci dice che C anticommuta con $\gamma^{0,1,3}$ e commuta con γ^2 , quindi C deve essere proporzionale a γ^2 . Se imponiamo che abbia quadrato pari ad uno, troviamo, a meno di un segno inessenziale:

$$C = i\gamma^2 \quad (3.29)$$

C è quindi una matrice *reale, simmetrica*. Con questa determinazione di C, possiamo determinare il comportamento sotto $\mathcal{C}$ dei bilineari di Dirac. Scriviamo, genericamente:

$$\mathcal{O}(\Gamma) = \bar{\psi}\Gamma\psi = -\psi(\Gamma)^T \gamma^0 \psi^\dagger \quad (3.30)$$

Usando le (3.18,3.19), abbiamo:

$$\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C} = -\bar{\psi}_c \gamma^0 C(\Gamma)^T \gamma^0 C \psi_c = \bar{\psi}_c C \Gamma^* C \psi_c \quad (3.31)$$

dove abbiamo assunto che i bilineari siano definiti in modo da soddisfare le relazioni di hermiticità:

$$\gamma^0 \Gamma \gamma^0 = \Gamma^\dagger \quad (3.32)$$

(questo è il motivo del fattore i che compare nella densità pseudoscalare). In conclusione, troviamo che, sotto coniugazione di carica:

$$\mathcal{O}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{O}(C\Gamma^*C) \quad (3.33)$$

Dalla (3.33), si deriva facilmente che i bilineari di Dirac prendono ciascuno un segno caratteristico sotto $\mathcal{C}$, che indichiamo con η_C , dove

$$\begin{aligned} \eta_C &= +1, \quad \text{per } S, P, A \\ \eta_C &= -1, \quad \text{per } V, T \end{aligned} \quad (3.34)$$

La lagrangiana della QED, (3.15), incluse le sue estensioni non minimali, è invariante sotto C.

3.3 Inversione del tempo

In Meccanica classica, possiamo cambiare segno alla velocità di tutte le particelle del sistema al tempo $t = 0$. Nei tempi successivi, il nuovo sistema ripercorre all' indietro tutte le configurazioni da cui era passato il sistema originale. Indichiamo con $A=(q, p)$ il punto nello spazio delle fasi di un sistema Hamiltoniano classico e con

$$A = (q, p) \rightarrow A_T = (q, -p) \quad (3.35)$$

la trasformazione che chiamiamo *Inversione Temporale*. Se confrontiamo il comportamento del sistema che parte da A al tempo $t=0$ con quello che parte da A_T , possiamo esprimere in formule l' affermazione che abbiamo fatto all' inizio al modo seguente:

$$\begin{aligned} A(t) &\quad \text{(stato al tempo } t \text{ con } A(0) = A) \\ A_T(t) &\quad \text{(stato al tempo } t \text{ con } A_T(0) = A_T) \\ A_T(t) &= T[A(-t)] \quad \text{(Inversione del tempo in MeccanicaClassica)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

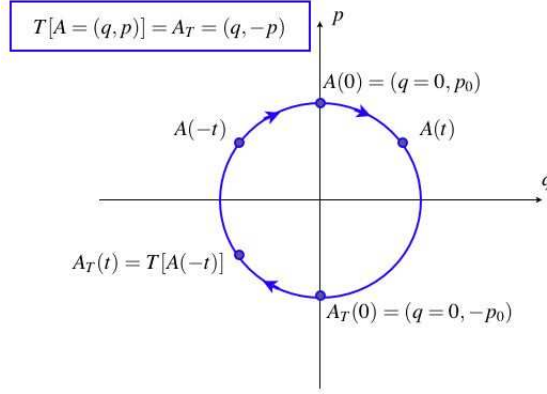


Figura 3.1: Inversione temporale nel moto di un oscillatore armonico classico

La relazione (3.36) è illustrata graficamente nella Fig. 3.1, nel caso del moto di un oscillatore armonico.

Cosa succede nella Meccanica Quantistica? La trasformazione di inversione temporale deve essere eseguita sugli stati quantistici da un operatore, che indichiamo con $\mathcal{T}$, tale che (ci mettiamo nella rappresentazione di Schroedinger):

$$\begin{aligned} |A; t=0\rangle &\rightarrow |A_T; t=0\rangle = \mathcal{T}|A; t=0\rangle \\ |A_T; t\rangle &= \mathcal{T}|A; -t\rangle \quad (\text{Inversione del tempo in Meccanica Quantistica}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tuttavia, l'operatore $\mathcal{T}$ deve avere proprietà del tutto speciali, come si vede dal seguente argomento. Supponiamo che lo stato A sia un autostato dell'energia con autovalore E . Ci aspettiamo che anche A_T abbia la stessa energia (come avviene in Meccanica Classica). In questo caso:

$$|E; t\rangle = e^{-iEt}|E; t=0\rangle; \quad |E_T; t\rangle = e^{-iEt}|E_T; t=0\rangle \quad (3.38)$$

Tuttavia dovrebbe essere

$$|E_T; t\rangle = e^{-iEt}|E_T; t=0\rangle = \mathcal{T}[e^{-i(-t)E}|E; t=0\rangle] = \mathcal{T}(e^{+itE}|E; t=0\rangle) \quad (3.39)$$

che è impossibile da realizzare se $\mathcal{T}$ è un operatore lineare, poiché in questo caso le fasi degli esponenziali nei due membri avrebbero segno opposto.

La soluzione proposta da Wigner è di usare un operatore che sia *antilineare*:

$$\mathcal{T}(\alpha|A\rangle + \beta|B\rangle) = \alpha^* \mathcal{T}|A\rangle + \beta^* \mathcal{T}|B\rangle \quad (3.40)$$

In questo caso abbiamo:

$$\mathcal{T}(e^{+iEt}|E; t=0\rangle) = e^{-itE} \mathcal{T}|E; t=0\rangle = e^{-itE}|E_T; t=0\rangle_T \quad (3.41)$$

come richiesto.

Simmetrie e operatori unitari o antiunitari La condizione posta da Wigner per avere una simmetria, è che l'operatore che la rappresenta lasci invariate le relazioni mutue tra stati quantistici. A loro volta, queste relazioni sono rappresentate dai *moduli quadri dei prodotti scalari*, che ci danno le probabilità delle misure quantistiche. Se:

$$|A_T\rangle = \mathcal{T}|A\rangle; |B_T\rangle = \mathcal{T}|B\rangle; \dots \quad (3.42)$$

deve essere:

$$|\langle A_T|B_T\rangle|^2 = |\langle A|B\rangle|^2 \quad (3.43)$$

che ci dà due possibilità per l'operatore che esegue la trasformazione $|A\rangle \rightarrow |A_T\rangle$:

$$\langle A_T|B_T\rangle = \langle A|B\rangle : \text{operatore unitario} \quad (3.44)$$

$$\langle A_T|B_T\rangle = \langle A|B\rangle^* : \text{operatore antiunitario} \quad (3.45)$$

Per trasformazioni dipendenti da uno o più parametri, che siano connesse alla trasformazione identica (Lorentz proprie, traslazioni) deve valere la prima condizione, per continuità. Per l'argomento che abbiamo dato prima, la seconda è quella che deve applicarsi a tutte le simmetrie che coinvolgono l'inversione temporale.

Azione di $\mathcal{T}$ sui campi Richiediamo che sia:

$$\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T} \quad (3.46)$$

L'azione dell'operatore $\mathcal{T}$ sul potenziale vettore è fissata dal limite classico. Se T lascia invariata la posizione delle cariche ed inverte la loro velocità, deve essere:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} A^0(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} &= +A^0(\mathbf{x}, -t); \quad \mathcal{T} A^i(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} = -A^i(\mathbf{x}, -t) \\ \text{ovvero} \\ \mathcal{T} A^\mu(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} &= A^\mu(\mathbf{x}, -t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

L'operatore $\mathcal{T}$ deve trasformare $\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)$ in una combinazione lineare dei campi $\psi_\beta(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathcal{T} \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} = T_{\alpha\beta} \psi_\beta(\mathbf{x}, -t) = [T\psi(\mathbf{x}, -t)]_\alpha \quad (3.48)$$

da cui, anche:

$$\mathcal{T} \psi(\mathbf{x}, t)^\dagger \mathcal{T} = [\psi(\mathbf{x}, -t) T]^\dagger \quad (3.49)$$

La forma della matrice T si determina richiedendo che la corrente si trasformi come A^μ nella (3.47). Tenendo conto dell'antilinearità di $\mathcal{T}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} &= \mathcal{T} \psi(\mathbf{x}, t)^\dagger \mathcal{T} \mathcal{T} [\gamma^0 \gamma^\mu] \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} = \\ &= \mathcal{T} \psi(\mathbf{x}, t)^\dagger \mathcal{T} [\gamma^0 \gamma^\mu]^* \mathcal{T} \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} = \psi(\mathbf{x}, -t)^\dagger T^\dagger [\gamma^0 \gamma^\mu]^* T \psi(\mathbf{x}, -t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

da cui troviamo:

$$\begin{aligned}\mu = 0: & T^\dagger T = 1 \\ \mu = i: & T^\dagger (\alpha^i)^* T = -\alpha^i\end{aligned}\quad (3.51)$$

dove abbiamo introdotto le matrici di Dirac, $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$. Se richiediamo, come al solito, $T^2 = 1$, le condizioni precedenti ci danno:

$$\begin{aligned}T^\dagger T &= T^{-1} = T \\ \mu = i: & T(\alpha^i)^* T = -\alpha^i\end{aligned}\quad (3.52)$$

Nella rappresentazione di Pauli, $\alpha^{1,3}$ sono reali e α^2 immaginario, quindi T deve anti-commutare con $\alpha^{1,3}$ e commutare con α^2 . Dalle (3.52) otteniamo quindi:

$$T = i\gamma^1 \gamma^3 = \sigma_2 \quad (3.53)$$

La trasformazione con la matrice σ_2 lascia γ^0 , che è reale, e cambia segno alle γ^i , quindi:

$$T(\gamma^\mu)^* T = g^{\mu\mu} \gamma^\mu \quad (3.54)$$

Di qui si trovano immediatamente le leggi di trasformazione dei bilineari di Dirac, che sono formati con i prodotti delle matrici gamma. Si trova:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\Gamma)((\mathbf{x}, t) &= \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \Gamma \psi(\mathbf{x}, t) \\ \mathcal{T} \mathcal{O}(\Gamma)(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} &= \mathcal{O}(T \Gamma^* T)(\mathbf{x}, -t) = \eta_T \mathcal{O}(\Gamma)(\mathbf{x}, -t)\end{aligned}\quad (3.55)$$

dove:

$$\begin{aligned}\eta_T &= +1 \quad (\text{S, P}) \\ \eta_T &= g^{\mu\mu} \quad (\text{V, A}) \\ \eta_T &= -g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \quad (\text{T})\end{aligned}\quad (3.56)$$

3.4 Trasformazione degli stati

Consideriamo le proprietà di trasformazione degli stati dell'elettrone e del positrone. Ci restringiamo al caso dei campi liberi che descrivono gli stati asintotici in e out. Per comodità del lettore, riportiamo la forma delle soluzioni ad energia positiva e negativa dell'equazione di Dirac, vedi [1]. Lo spin è quantizzato in una direzione fissa che scegliamo lungo l'asse z.

$$\begin{aligned}u_s(p) &= \sqrt{\frac{E(p) + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E(p) + m} \chi_s \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 \chi_s = s \chi_s \quad (s = \pm 1) \\ v_s(p) &= \sqrt{\frac{E(p) + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E(p) + m} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 \xi_s = s \xi_s \quad (s = \mp 1)\end{aligned}\quad (3.57)$$

Dalle proprietà delle matrici di Pauli troviamo:

$$\begin{aligned}
 \sigma_2(\sigma^i)^* \sigma_2 &= -\sigma^i \quad (i = 1, 2, 3) \\
 \sigma_3(\sigma_2 \xi_s^*) &= -\sigma_2(\sigma_3 \xi_s)^* = \mp(\sigma_2 \xi_s^*) \\
 \text{ovvero :} \\
 (\sigma_2 \xi_s^*) &= \xi_{-s} = \chi_s \\
 \text{ed anche} \\
 (\sigma_2 \chi_s^*) &= \chi_{-s} = \xi_s
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Parità. Dalle (3.7,3.13) troviamo:

$$\mathcal{P}\psi(\mathbf{x}, t)\mathcal{P} = \gamma^0\psi(-\mathbf{x}, t) \tag{3.59}$$

- Primo membro, sviluppato sulle soluzioni dell'equazione di Dirac:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left[\mathcal{P}a_s(p)\mathcal{P}e^{-ipx}u_s(p) + \mathcal{P}b_s(p)^\dagger\mathcal{P}e^{+ipx}v_s(p) \right] \tag{3.60}$$

- Secondo membro:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left[a_s(p)e^{-ipx_P}(\gamma^0 u_s)(p) + b_s(p)^\dagger e^{+ipx_P}(\gamma^0 v_s)(p) \right] \tag{3.61}$$

dove

$$x_P = (-\mathbf{x}, t) \quad px_P = Et + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = p_P x \tag{3.62}$$

cambiando variabile di integrazione, $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, il secondo membro diventa:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left[a_s(p_P)e^{-ipx}(\gamma^0 u_s)(p_P) + b_s(p_P)^\dagger e^{+ipx}(\gamma^0 v_s)(p_P) \right] \tag{3.63}$$

Dalle (3.57) otteniamo:

$$\gamma^0 u_s(p_P) = +u_s(p); \quad \gamma^0 v_s(p_P) = -v_s(p) \tag{3.64}$$

In conclusione, confrontando i due membri della (3.59) ed eguagliando i termini dello sviluppo, troviamo:

$$\mathcal{P}a_s(p)\mathcal{P} = +a_s(p_P); \quad \mathcal{P}b_s(p)\mathcal{P} = -b_s(p_P) \tag{3.65}$$

Il segno assoluto in queste relazioni potrebbe essere cambiato con una diversa definizione del segno di P. Il fatto importante è il segno relativo tra elettrone e antielettrone:

Elettrone e positrone hanno parità opposta.

Coniugazione di carica. Dalla (3.18) troviamo:

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C} = i\gamma^2[\psi(x)^\dagger] \quad (3.66)$$

Procediamo come prima.

- Secondo membro:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left[b_s(p) e^{-ipx} (i\gamma^2)_{\alpha\beta} [(v_s)_\beta(p)]^* + a_s(p)^\dagger e^{+ipx} (i\gamma^2)_{\alpha\beta} [(u_s)_\beta(p)]^* \right]$$

- Usando le (3.57,3.58) si trova:

$$\begin{aligned} i\gamma_2 v_s(p)^* &= \\ &= \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E(p)+m} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}^* = \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \xi_s^* \\ -i\sigma_2 \frac{(\sigma \cdot \mathbf{p})^*}{E(p)+m} \xi_s^* \end{pmatrix} = \\ &= i \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E(p)+m} \chi_s \end{pmatrix} = i u_s(p) \end{aligned} \quad (3.67)$$

e, similmente:

$$i\gamma_2 u_s(p)^* = -i v_s(p) \quad (3.68)$$

Confrontando i due membri, si ottiene:

$$\mathcal{C} a_s(p) \mathcal{C} = i b_s(p); \quad \mathcal{C} b_s(p) \mathcal{C} = -i a_s(p) \quad (3.69)$$

Inversione del tempo. Partiamo dalla (3.48):

$$\mathcal{T} \psi(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} = [\sigma_2 \psi(\mathbf{x}, -t)] \quad (3.70)$$

- Primo membro, ricordando l' antilinearità di $\mathcal{T}$:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left[\mathcal{T} a_s(p) \mathcal{T} e^{+ipx} u_s(p)^* + \mathcal{T} b_s(p)^\dagger \mathcal{T} e^{-ipx} v_s(p)^* \right] \quad (3.71)$$

- Secondo membro:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left[a_s(p) e^{-ipx_T} [\sigma_2 u_s(p)]^\dagger + b_s(p)^\dagger e^{+ipx_T} [\sigma_2 v_s(p)]^\dagger \right] \quad (3.72)$$

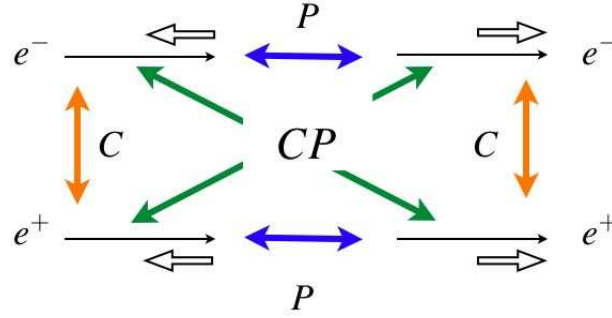


Figura 3.2: Azione della parità, $\mathcal{P}$, e della coniugazione di carica $\mathcal{C}$ sugli stati di elettrone e positrone con diverse elicità. La trasformazione $\mathcal{T}$ non cambia l'elicità in quanto ribalta sia il momento che lo spin.

dove

$$x_T = (\mathbf{x}, -t); \quad p x_T = -Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_T x \quad (3.73)$$

Se cambiamo variabile di integrazione, la (3.72) diventa:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \left[a_s(p_T) e^{+ipx} [\sigma_2 u_s(p_T)]^\dagger + b_s(p_T)^\dagger e^{-ipx} [\sigma_2 v_s(p_T)]^\dagger \right] \quad (3.74)$$

- Usiamo ancora la (3.57), da cui:

$$\begin{aligned} \{[\sigma_2 u_s(p_T)]^\dagger\} &= \{u_s(p_T)^\dagger \sigma_2\} = \sqrt{\frac{E(p) + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & \chi_s^\dagger \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p}}{E(p) + m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{E(p) + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger \sigma^2 & \chi_s^\dagger \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p}}{E(p) + m} \sigma^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.75)$$

- Usando le (3.58) troviamo:

$$\begin{aligned} (\chi_s^\dagger \sigma^2)_\alpha &= (\sigma^2 \chi_s^*)_\alpha = (\chi_{-s})_\alpha; \\ (\chi_s^\dagger \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p}}{E(p) + m} \sigma^2)_\alpha &= (\sigma^2 \frac{-\sigma \cdot \mathbf{p}}{E(p) + m} \chi_s^*)_\alpha = (\frac{+\sigma \cdot \mathbf{p}}{E(p) + m} \chi_{-s})_\alpha \end{aligned} \quad (3.76)$$

ovvero:

$$\{[\sigma_2 u_s(p_T)]^\dagger\}_\alpha = [u_{-s}(p)]_\alpha^*; \quad (3.77)$$

e analogamente:

$$\{[\sigma_2 v_s(p_T)]^\dagger\}_\alpha = [v_{-s}(p)]_\alpha^*; \quad (3.78)$$

Possiamo adesso confrontare i due membri e troviamo:

$$\mathcal{T} a_s(\mathbf{p}) \mathcal{T} = a_{-s}(-\mathbf{p}); \quad \mathcal{T} b_s(\mathbf{p}) \mathcal{T} = b_{-s}(-\mathbf{p}) \quad (3.79)$$

La Fig. 3.2 mostra l'azione delle tre simmetrie sugli stati di elettrone e positrone.

3.5 Alcune applicazioni

3.5.1 Il teorema di Furry

Il teorema, una conseguenza dell' invarianza della QED sotto $\mathcal{C}$, riguarda le funzioni di Green che *coinvolgono solo* A^μ ed afferma che:

le funzioni con un numero dispari di linee fotoniche esterne sono identicamente nulle.

Il teorema si può enunciare anche in termini di elementi di matrice S:

le reazioni $n\gamma \rightarrow n'\gamma$ sono nulle se $n + n' = \text{dispari}$.

Dim. Usiamo l' invarianza del vuoto sotto $\mathcal{C}$ per ottenere:

$$\begin{aligned} G^{\mu_1 \dots \mu_N}(x_1, \dots x_N) &= \\ &= \langle 0 | T [A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_N}(x_N)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{C} T [\mathcal{C} A^{\mu_1}(x_1) \mathcal{C} \mathcal{C} \dots \mathcal{C} A^{\mu_N}(x_N) \mathcal{C}] \mathcal{C} | 0 \rangle = \\ &= (-1)^N \langle 0 | T [A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_N}(x_N)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.80)$$

evidentemente, se N è dispari l'ampiezza deve essere uguale alla sua opposta e quindi nulla.

3.5.2 Simmetrie del positronio

Il *positronio* è un sistema formato da un elettrone ed un positrone legati tra loro dalla forza Coulombiana. I livelli del positronio sono ben descritti, nell' approssimazione non-relativistica, con quattro numeri quantici:

- il numero quantico radiale, $n=0, 1, 2, \dots$;
- il momento angolare orbitale, $L=0, 1, 2, \dots$;
- il momento totale di spin, $S=0, 1$;
- il momento angolare totale, J , che prende anch' esso valori interi.

Il positronio è in tutto simile all' atomo di idrogeno, tranne per il fatto che la *massa ridotta* del sistema, μ , è circa metà della massa ridotta nell' idrogeno:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \\ \mu_{e^+ e^-} &\simeq 1/2 m_e \simeq 1/2 \mu_H \end{aligned} \quad (3.81)$$

Poiché la massa ridotta determina la scala delle energie di legame, lo spettro del positronio è scalato in energia di un fattore circa due rispetto a quello dell' idrogeno.

Il positronio si forma tutte le volte che un positrone si arresta nella materia. A fine corsa, il positronio cattura un elettrone dagli atomi circostanti e forma un positronio in uno stato

eccitato. A differenza dell' idrogeno, il positronio non è stabile. Una volta che elettrone e positrone sono finiti nel livello fondamentale con $L=0$, la probabilità di annichilazione mutua è apprezzabile ed il positronio decade in due o più fotoni (cfr. Landau e Lifshitz [12] per il calcolo della sezione d' urto).

Alla scala inferiore di energia ci sono due livelli con $n=1$, $L=0$ ed $S=0, 1$, indicati col nome di *parapositronio* ed *ortopositronio*, rispettivamente. La differenza di energia dei due livelli è molto piccola, perché dovuta all' interazione magnetica tra gli spin.

Sulla base dei risultati della Sezione precedente, possiamo determinare le proprietà dei livelli del positronio per quanto riguarda parità e coniugazione. Poiché queste operazioni commutano con l' Hamiltoniana, esse forniscono dei buoni numeri quantici e determinano le regole di selezione dei decadimenti.

Stati del positronio. Gli stati del positronio sono sovrapposizioni lineari degli stati ottenuti applicando al vuoto un operatore di creazione dell' elettrone ed uno del positrone. I coefficienti della sovrapposizione sono le funzioni che proiettano sugli stati con dato L , le armoniche sferiche, con dato S , i coefficienti di Clebsh-Gordon, e sullo stato con numero quantico radiale n :

$$|n, L, S, J\rangle = \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y_m^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} C(S, s_3 | 1/2s; 1/2s') a_s(\mathbf{p})^\dagger b_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger |0\rangle \quad (3.82)$$

dove $p = |\mathbf{p}|$ e $\hat{\mathbf{p}}$ è il versore di $\mathbf{p}$.

Parità dei livelli. Applichiamo l' operatore $\mathcal{P}$ allo stato (3.82) e usiamo la (3.65) e l' invarianza del vuoto:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|n, L, S, J\rangle &= \\ &= \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y_m^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} C(S, s_3 | 1/2s; 1/2s') \mathcal{P} a_s(\mathbf{p})^\dagger \mathcal{P} b_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger \mathcal{P} |0\rangle = \\ &= \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y_m^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} C(S, s_3 | 1/2s; 1/2s') (-1) a_s(-\mathbf{p})^\dagger b_{s'}(+\mathbf{p})^\dagger |0\rangle \quad (3.83) \end{aligned}$$

dove il segno meno nasce dalla parità opposta di elettrone e positrone. Adesso possiamo mandare $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ nell' integrale ed usare la parità delle armoniche sferiche per ottenere:

$$\mathcal{P}|n, L, S, J\rangle = (-1)^{L+1} |n, L, S, J\rangle \quad (3.84)$$

Coniugazione di carica dei livelli. Applichiamo l' operatore $\mathcal{C}$ e usiamo la (3.69) e l' invarianza del vuoto:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}|n, L, S, J\rangle &= \\ &= \int dp R^{(n, L, S, J)}(p) \int d\Omega_p Y_m^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s, s'} \mathcal{C} C(S, s_3 | 1/2 s; 1/2 s') a_s(\mathbf{p})^\dagger \mathcal{C} b_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger \mathcal{C}|0\rangle = \\ &= \int dp R^{(n, L, S, J)}(p) \int d\Omega_p Y_m^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s, s'} C(S, s_3 | 1/2 s; 1/2 s') b_s(\mathbf{p})^\dagger a_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (3.85)$$

Per riportarci all' espressione di partenza dobbiamo: (i) scambiare a con b , (ii) mandare $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, (iii) scambiare s con s'.

Nell' ultima operazione ricordiamo che i coefficienti di Clebsch-Gordon relativi alla composizione di due spin 1/2 sono *simmetrici* per lo scambio di s ed s' nel caso S=1, mentre sono *antisimmetrici* per S=0.

Le tre operazioni introducono un fattore (i) -1; (ii) $(-1)^L$; (iii) $(-1)^{S+1}$ rispettivamente e quindi un fattore complessivo η_C :

$$\mathcal{C}|n, L, S, J\rangle = \eta_C |n, L, S, J\rangle; \quad \eta_C = (-1)(-1)^L(-1)^{S+1} = (-1)^{L+S} \quad (3.86)$$

Regole di selezione Per i livelli fondamentali del positronio otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{parapositronio: } J^{PC} &= 0^{-+} \\ \text{ortopositronio: } J^{PC} &= 1^{--} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Come abbiamo visto a proposito del teorema di Furry, uno stato con N fotoni ha $C=\pm 1$ a seconda che N sia pari o dispari. Seguono quindi le regole di selezione:

$$\begin{aligned} \text{parapositronio} &\rightarrow 2\gamma; \not\rightarrow 3\gamma \\ \text{ortopositronio} &\not\rightarrow 2\gamma; \rightarrow 3\gamma \end{aligned} \quad (3.88)$$

L' ampiezza per l' annichilazione in due fotoni è di ordine e^2 , quella per tre di ordine e^3 e le corrispondenti probabilità di ordine α^2 e α^3 , rispettivamente, con $\alpha \simeq 1/137$. Ci aspettiamo quindi due componenti nel positronio che si forma nella materia, una a vita media breve, il parapositronio, ed una a vita media considerevolmente più lunga, l' ortopositronio.

I valori osservati soddisfano bene questa regola. Si trova:

$$\Gamma(para \rightarrow 2\gamma)_{\text{expt}} = 7990.9(1.7)\mu s^{-1} \quad (3.89)$$

$$\Gamma(orto \rightarrow 3\gamma)_{\text{expt}} = 7.0404(10)(8)\mu s^{-1} \quad (3.90)$$

un fattore circa mille tra le due probabilità di decadimento, in accordo con la regola di selezione (3.87) e con le previsioni della QED.

Il test di Yang

3.6 Il teorema CPT

Riassumiamo le trasformazioni dei covarianti di Dirac sotto $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{T}$, generalizzando le considerazioni delle Sezz. 3.1, 3.2, 3.3 al caso di bilineari costruiti con due campi fermionici diversi, ψ_a e ψ_b . Nel caso della densità scalare troviamo, ad esempio:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} S_{ab}(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} &= \mathcal{P} \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, t) \psi_b(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = \eta_P(S) S_{ab}(-\mathbf{x}, t); \\ \mathcal{C} S_{ab}(\mathbf{x}, t) \mathcal{C} &= \eta_C(S) S_{ba}(\mathbf{x}, t); \\ \mathcal{T} S_{ab}(\mathbf{x}, t) \mathcal{T} &= \eta_T(S) S_{ab}(\mathbf{x}, -t)\end{aligned}\quad (3.91)$$

dove le η sono dei segni $\pm$ caratteristici della trasformazione e del particolare covariante. Riportiamo nella Tab. 3.1 i valori di η per le tre trasformazioni e per l'operazione combinata $\theta = \text{CPT}$.

L'operazione CPT è evidentemente rappresentata da un operatore antilineare e agisce secondo la semplice regola:

$$\theta [g_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{ab}(x)] \theta^\dagger = (-1)^N (g_{\mathcal{O}})^* (S_{ab}(-x))^\dagger \quad (3.92)$$

se $g_{\mathcal{O}}$ è un coefficiente complesso. N è il numero di indici di Lorentz del covariante.

La stessa regola si applica al potenziale vettore, $N=1$, ed al tensore di Maxwell, $N=2$ e si estende immutata ad operatori di campo scalari o vettoriali. Nel caso di campi complessi, la natura antilineare di θ implica che, ad esempio,

$$\theta (\phi_1 + i\phi_2)(x) \theta^\dagger = (\phi_1 - i\phi_2)(-x) \quad (3.93)$$

Quindi, anche per questi operatori, θ implica la coniugazione hermitiana.

Tabella 3.1: Tabella riassuntiva delle proprietà dei covarianti di Dirac e del campo elettromagnetico sotto trasformazioni di $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}$ e $\theta = \text{CPT}$.

	S	P	V	A	T	A^μ	$F^{\mu\nu}$
η_P	+1	-1	$g^{\mu\mu}$	$-g^{\mu\mu}$	$g^{\mu\mu} g^{\nu\nu}$	$g^{\mu\mu}$	$g^{\mu\mu} g^{\nu\nu}$
η_C	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
η_T	+1	-1	$g^{\mu\mu}$	$+g^{\mu\mu}$	$-g^{\mu\mu} g^{\nu\nu}$	$g^{\mu\mu}$	$+g^{\mu\mu} g^{\nu\nu}$
η_{CPT}	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1

Per non scordare più... È utile derivare i risultati della Tab. 3.1 direttamente dalle trasformazioni dei campi sotto CPT. Raccogliendo le formule (3.59, 3.66, 3.70) e le corrispondenti per gli hermitiani coniugati, troviamo:

$$(\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}) \psi(x) (\mathcal{T} \mathcal{P} \mathcal{C}) = \theta \psi(x) \theta^\dagger = \sigma_2 \gamma^0 (i\gamma^2) \psi^\dagger(-x) = i\gamma_5 \psi^\dagger(-x) \quad (3.94)$$

e, per il campo hermitiano coniugato:

$$\theta\psi^\dagger(x)\theta^\dagger = -i\gamma_5\psi(-x) \quad (3.95)$$

Per il generico bilineare, troviamo quindi:

$$\begin{aligned} \theta\bar{\psi}_a\Gamma\psi_b\theta^\dagger &= \theta\psi_a^\dagger(x)\theta^\dagger(\gamma^0\Gamma)^*\theta\psi_b(x)\theta^\dagger = [\gamma_5\psi_a(-x)](\gamma^0\Gamma)^*\gamma_5\psi_b^\dagger(-x) = \\ &= -\psi_b^\dagger(-x)\gamma_5(\gamma^0\Gamma)^\dagger\gamma_5\psi_a(-x) = + \left[\bar{\psi}_b\gamma^0\gamma_5\Gamma^\dagger\gamma_5\gamma^0\psi_a \right](-x) \end{aligned} \quad (3.96)$$

dove abbiamo ripetutamente usato il fatto che γ_5 è hermitiano e anticommuta con γ^0 .

La coniugazione con γ_5 produce un segno meno per ogni fattore γ^μ presente in Γ , quindi troviamo:

$$\begin{aligned} \gamma^0(\gamma_5\Gamma^\dagger\gamma_5)\gamma^0 &= \gamma^0(\gamma_5\Gamma\gamma_5)^\dagger\gamma^0 = \\ &= (-1)^N\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 = (-1)^N\Gamma \end{aligned} \quad (3.97)$$

dove N è il numero di indici vettoriali di Γ . In conclusione:

$$\theta[\bar{\psi}_a\Gamma\psi_b(x)]\theta^\dagger = (-1)^N[\bar{\psi}_b\Gamma\psi_a(-x)] = (-1)^N[\bar{\psi}_a\Gamma\psi_b(-x)]^\dagger \quad (3.98)$$

come riportato nella Tab. 3.1.

Il Teorema CPT Il segno $(-1)^N$ è quello che compete all'operazione di *Inversione Totale* delle coordinate:

$$IT: x^\mu \rightarrow -x^\mu \quad (3.99)$$

In uno spazio 4-dimensionale euclideo, l'inversione degli assi ha determinante uguale ad uno ed è raggiungibile con continuità dalla trasformazione identica. Nello spazio euclideo, l'Inversione è una trasformazione *propria* quindi una simmetria necessaria. Questo non è vero nello spazio di Minkowski, in cui le trasformazioni proprie devono anche avere $\Lambda^{00} > 0$, condizione che non è soddisfatta da IT.

Tuttavia, come abbiamo visto a proposito della definizione degli integrali di Feynman, la teoria quantistica nello spazio di Minkowski è il prolungamento analitico della teoria definita con un tempo complesso, e non c'è alcun ostacolo a partire da un tempo puramente immaginario, cioè dalla teoria nello spazio 4-dimensionale euclideo. Questa è l'origine del *Teorema CPT* che, sotto condizioni molto generali, afferma che l'operazione θ , l'inversione totale degli assi supplementata dalla operazione di coniugazione hermitiana, è una simmetria esatta di qualsiasi teoria di campo quantistica e relativistica.

Il Teorema CPT è dovuto a W. Pauli e a G. Luders [?]. Noi daremo una dimostrazione molto prossima a quella del Bjorken-Drell. Successivamente illustreremo le conseguenze più immediate del Teorema CPT.

Consideriamo una teoria descritta da una densità di Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$. Le condizioni caratterizzanti una teoria quantistica relativistica, sotto le quali costruire la lagrangiana sono le seguenti. La Lagrangiana deve essere:

- hermitiana;
- funzione locale dei campi e delle loro derivate, fino ad un ordine finito, calcolati nello stesso punto;
- un operatore bosonico: campi fermionici possono apparire in numero pari e si possono quindi organizzare in bilineari di Dirac, $\bar{\psi}_a \Gamma \psi_b$ dove ψ_a, ψ_b sono i campi associati a fermioni di tipo diverso (ad es. elettrone e neutrino)¹;
- invariante sotto trasformazioni di Lorentz proprie;
- un prodotto normale di campi.

Sotto queste condizioni, dimostriamo che deve essere necessariamente:

$$\theta \mathcal{L}(x) \theta^\dagger = \mathcal{L}(-x) \quad (3.100)$$

Di qui segue che l'azione è invariante sotto CPT:

$$\theta S \theta^\dagger = \int d^4x \theta \mathcal{L}(x) \theta^\dagger = \int d^4x \mathcal{L}(-x) = \int d^4(-x) \mathcal{L}(-x) = S \quad (3.101)$$

e quindi che CPT è una simmetria esatta.

Dim. La forma generale di una densità di Lagrangiana che soddisfi le condizioni di cui sopra può essere scritta al modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \sum_i c_i \mathcal{O}_i(x); \\ \mathcal{O}_i(x) &=: \dots A^\mu(x) \dots (\bar{\psi}_a \Gamma \psi_b)(x) \dots \partial^\nu \dots : \end{aligned} \quad (3.102)$$

dove c_i sono coefficienti complessi. Appliciamo adesso l'operazione CPT. Sulla base della Tab. 3.1 e dell'antilinearità di θ otteniamo:

$$\theta \mathcal{L}(x) \theta^\dagger = \sum_i (c_i)^* (-1)^{N_{tot}} : \dots A^\mu(-x) \dots [(\bar{\psi}_a \Gamma \psi_b)(-x)]^\dagger \dots \partial^\nu \dots : \quad (3.103)$$

dove N_{tot} è il numero totale di indici di Lorentz che compaiono nell'espressione (3.102).

All'interno del prodotto normale, possiamo commutare gli operatori bosonici e porli in ordine opposto a quello in cui compaiono nella (3.102), per cui possiamo riscrivere la (3.103) come:

$$\theta \mathcal{L}(x) \theta^\dagger = \sum_i (-1)^{N_{tot}} [c_i \mathcal{O}_i(-x)]^\dagger \quad (3.104)$$

¹le Γ sono un sistema completo di matrici nello spazio di Dirac, vedi [1].

Se la lagrangiana deve essere Lorentz-invariante, gli indici di Lorentz devono essere sommati sui tensori invarianti. In uno spazio-tempo 4-dimensionale, ci sono solo due operazioni invarianti: la saturazione con $g_{\mu\nu}$ e la saturazione con $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, vedi [1]. Entrambe queste operazioni riducono gli indici liberi di un numero pari. Quindi, affinché la (3.102) sia invariante (non contenga cioè indici liberi) il numero di indici vettoriali che vi appaiono deve essere pari, ovvero $(-1)^{N_{tot}} = +1$. Concludiamo dunque che:

$$\theta \mathcal{L}(x) \theta^\dagger = \sum_i [c_i \mathcal{O}_i(-x)]^\dagger = [\mathcal{L}(-x)]^\dagger = \mathcal{L}(-x) \quad (3.105)$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $\mathcal{L}$ è hermitiana.

Interazione di Fermi È interessante applicare le considerazioni ora fatte all'interazione di Fermi per il decadimento beta del neutrone, che abbiamo scritto come, cfr. [1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_P \left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \psi_N \bar{\psi}_e (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi_{\nu_e} \right] + \\ & + \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_N \left(\gamma^\mu + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^* \gamma^\mu \gamma_5 \right) \psi_P \bar{\psi}_{\nu_e} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi_e \right] \end{aligned} \quad (3.106)$$

Abbiamo riportato esplicitamente l'hermitiano coniugato del primo termine, necessario per rendere la Lagrangiana reale.

L'interazione (3.106) evidentemente NON è invariante sotto parità, in quanto prodotto di sovrapposizioni di vettori polari e assiali, che cambiano il segno relativo sotto parità. Ad esempio:

$$\mathcal{P} \bar{\psi}_P \left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \psi_N(\mathbf{x}, t) \mathcal{P} = g^{\mu\mu} \bar{\psi}_P \left(\gamma^\mu - \frac{g_A}{g_V} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \psi_N(-\mathbf{x}, t) \quad (3.107)$$

La trasformazione CP, invece, agisce allo stesso modo sulle correnti vettoriali e assiali:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \bar{\psi}_P \left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \psi_N \mathcal{C} &= (-g^{\mu\mu}) \bar{\psi}_N \left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \psi_P \\ \mathcal{C} \bar{\psi}_e (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi_{\nu_e} \mathcal{C} &= (-g^{\mu\mu}) \bar{\psi}_{\nu_e} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi_e \end{aligned} \quad (3.108)$$

L'invarianza sotto CP si può avere se il primo termine della (3.106) va nel secondo, che è il suo hermitiano coniugato. Questo, a sua volta, richiede

$$g_A/g_V = \text{reale} \quad (\text{invarianza per CP}) \quad (3.109)$$

Tuttavia, se applichiamo θ al primo termine della (3.106), anche g_A/g_V va nel suo complesso coniugato e si ha l'invarianza per qualsiasi valore, reale o complesso, della costante che appare nella (3.106).

3.6.1 Eguaglianza delle masse di particella e antiparticella

È la conseguenza più diretta del Teorema CPT. Dall' invarianza della Lagrangiana, eq. (3.100), segue facilmente quella dell' Hamiltoniana:

$$\theta H \theta^\dagger = H \quad (3.110)$$

Inoltre, dalla Tab. 3.1 segue che θ cambia segno ai 3-vettori, come il momento, e cambia il segno di ciascuna carica conservata che sia presente nella nostra teoria (ad es. la carica elettrica):

$$\theta \mathbf{P} \theta^\dagger = -\mathbf{P}; \quad \theta Q \theta^\dagger = -Q \quad (3.111)$$

al contrario, il momento angolare resta invariato²:

$$\theta \mathbf{J} \theta^\dagger = \mathbf{J} \quad (3.112)$$

dove $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$, Q sono gli operatori del momento, momento angolare e carica.

Caso $M \neq 0$. Consideriamo il caso di una particella con massa diversa da zero. Possiamo metterci nel sistema di quiete della particella, in cui $\mathbf{P} = 0$ e il momento angolare coincide con lo spin. In genere, oltre che dalla massa e dallo spin, lo stato è caratterizzato dal valore della carica conservata, che indichiamo con q . Scriviamo quindi il ket che rappresenta lo stato come:

$$|A\rangle = |M, \mathbf{P} = 0, s_z; q\rangle \quad (3.113)$$

Tenendo conto delle (3.111), lo stato $\theta|A\rangle$ deve avere stessa massa, stesso valore di $\mathbf{s}^2 = s(s+1)$ e della componente dello spin ma carica elettrica opposta:

$$\theta|A\rangle = |M, \mathbf{P} = 0, s_z; -q\rangle \quad (3.114)$$

Dobbiamo distinguere due casi, a seconda che sia $q \neq 0$ ovvero $q = 0$.

Se $q \neq 0$, come ad es. per l' elettrone, lo stato CPT-coniugato, (3.114), evidentemente non può coincidere con lo stato di partenza. Deve esistere un' altra particella di uguale massa e spin ma con carica opposta: il positrone. Visto che $\theta^2 = 1$, la relazione tra particella e antiparticella è perfettamente simmetrica, l' elettrone è l' antiparticella del positrone.

Se invece $q = 0$, lo stato coniugato (3.114) è identico a quello di partenza. Naturalmente, l' invarianza sotto rotazioni dell' hamiltoniana nel sistema di quiete richiede la presenza di tutti i $2s+1$ stati associati allo spin s . In questo caso abbiamo una particella di spin s , assolutamente neutra nel senso che essa coincide con la sua particella. Questo, ad esempio, è il caso del mesone π^0 (spin zero) o dei mesoni ρ^0 e ω^0 (spin uno).

²classicamente, $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ non cambia segno sotto inversione totale in quanto $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$ cambiano entrambi di segno.

Caso $M = 0$. In questo caso, ci poniamo nel sistema in cui la particella ha il momento lungo l'asse z ed elicità λ . Scriviamo lo stato come:

$$|A\rangle = |P_3, \lambda; q\rangle \quad (3.115)$$

Come osservato in [1], l'invarianza di Lorentz, che si riduce all'invarianza sotto rotazioni intorno all'asse z , non richiede che ci siano altri stati oltre a quello in (3.115).

Lo stato CPT coniugato deve avere momento opposto e stessa componente dello spin, ovvero elicità opposta:

$$\theta|A\rangle = |-P_3, -\lambda; -q\rangle \quad (3.116)$$

Anche qui distinguiamo due casi.

Se $q \neq 0$, lo stato coniugato rappresenta una particella con carica opposta, antiparticella di quella di partenza, ed elicità opposta. Questo è il caso delle particelle della teoria a due componenti (il neutrino di Weyl [1]). Abbiamo uno stato di neutrino con elicità negativa ed uno di antineutrino con elicità positiva, distinti dal valore di una carica conservata: il numero leptonico. Non sono necessari altri stati per avere una teoria relativisticamente e CPT invariante.

Se $q = 0$, abbiamo una particella assolutamente neutra che, sulla base della (3.116), si deve presentare con *due stati elicità* pari a $\pm\lambda$. È il caso del fotone. Sulla base della pura invarianza relativistica, esso potrebbe avere un solo stato, ad esempio quello con elicità pari ad uno. L'invarianza CPT richiede tutti e due gli stati osservati del fotone, con elicità ± 1 .

Verifiche sperimentali. Oltre all'eguaglianza delle masse, si può facilmente vedere che particella e antiparticella devono avere momento magnetico opposto e eguale vita media, se instabili. Queste relazioni sono verificate sperimentalmente con estrema precisione in alcuni casi fortunati. Ricordiamo i più importanti, vedi [?].

- La massa dell'antiprotone coincide con quella del protone entro una precisione relativa di 10^{-8} ;
- massa e le vita media dei mesoni K^0 e anti- K^0 coincidono entro qualche parte in 10^{-18} ;
- elettrone e positrone hanno massa uguale entro una parte in 10^{-8} , i loro momenti magnetici, a parte il segno che è opposto, coincidono entro una parte in 10^{-12} ;
- i momenti magnetici di muone e antimuone coincidono entro due parti in 10^{-8} .

La rivelazione di una violazione del teorema CPT indicherebbe la necessità di superare il paradigma della teoria di campo relativistica e quantistica ed avrebbe un valore concettuale grandissimo.

Capitolo 4

Rinormalizzazione della QED

Questo capitolo tratta della rinormalizzazione della elettrodinamica quantistica (QED). La rinormalizzazione permette di risolvere il problema delle divergenze che si incontrano nel calcolo di diagrammi di Feynman che contengono circuiti chiusi (in inglese, *loop*), ma è un concetto più generale che si incontrerebbe anche in assenza di divergenze. La necessità di rinormalizzare discende infatti dalla esistenza di interazioni, che fa sì che le masse che compaiono nel lagrangiano non siano quelle delle particelle che i vari campi descrivono, e che i campi stessi non siano “ben normalizzati”, come messo in evidenza dalla presenza di fattori Z nel contributo degli stati a singola particella ai rispettivi propagatori.

Nelle teorie di campo la presenza di divergenze rappresenta la norma, ma si possono verificare due situazioni radicalmente differenti. La più interessante è quella delle teorie rinormalizzabili, tra cui la elettrodinamica quantistica e più in generale il Modello Standard delle interazioni fondamentali. Alla seconda categoria appartengono teorie non rinormalizzabili.

In una teoria rinormalizzabile si incontrano divergenze solo quando si cerca di stabilire la relazione tra grandezze che appaiono nel lagrangiano, nel caso della QED la massa m_0 o la carica e_0 , e le corrispondenti grandezze fisiche m ed e . In teorie di questo tipo le divergenze possono essere nascoste “sotto il tappeto”, esprimendo i risultati in termini di grandezze fisicamente osservabili. Se consideriamo ad esempio il caso della massa dell’elettrone, lo spostamento di massa δm , introdotto nel precedente capitolo, risulta divergente in teoria delle perturbazioni. Come abbiamo visto, però, è possibile riorganizzare la teoria delle perturbazioni in modo che il termine δm sia esattamente cancellato da un apposito controtermine, di modo che esso non appaia, ad esempio, nel calcolo degli elementi di matrice S .

Un esempio di teoria non rinormalizzabile è la teoria di Fermi delle interazioni deboli. In una teoria non rinormalizzabile le divergenze sono presenti nel calcolo di qualsiasi grandezza fisica, ad esempio nel calcolo di qualsiasi elemento della matrice S .

In ogni caso le divergenze appaiono in integrali su impulsi di particelle virtuali estesi sino ad infinito. Per quanto riguarda il significato delle divergenze si possono fare due ipotesi: la prima è che queste divergenze siano una caratteristica del metodo perturbativo, che non si presenterebbero in ipotetici metodi non perturbativi. La seconda è che la teoria sia solo

una prima approssimazione della realtà fisica, non valida per impulsi estremamente alti, il ché per il principio di indeterminazione corrisponde a distanze estremamente piccole. Per integrali convergenti, al contrario, il risultato dipende dal comportamento degli integrandi (e quindi dal comportamento della teoria cui gli integrali si riferiscono) per valori finiti degli impulsi. In una teoria rinormalizzabile, quindi, una volta eliminate le divergenze con una ridefinizione dei parametri della teoria, i risultati del calcolo perturbativo dipenderanno dal comportamento della teoria per impulsi finiti (distanze non infinitesimamente piccole), e possono dare una buona approssimazione anche se la teoria perdesse la sua validità nel limite di impulsi infiniti.

Questi ragionamenti, necessariamente qualitativi a questo stadio, possono essere resi quantitativi una volta che si sia approfondita la conoscenza della teoria. Per fare un esempio tratto da ricerche in corso, esiste attualmente una lieve discrepanza tra il valore della anomalia magnetica¹ del muone misurato sperimentalmente e la previsione teorica ottenuta sulla base del Modello Standard. L'entità della deviazione potrebbe essere un indizio della esistenza di nuovi fenomeni fisici ad una scala di energia di circa un TeV, esplorabile con gli esperimenti di LHC.

Nascondere le divergenze nella ridefinizione di alcuni parametri della teoria (masse, carica elettrica, etc.) costituisce la cosiddetta *rinormalizzazione* ed è un procedimento che richiede una qualche cura. La manipolazione di grandezze divergenti è matematicamente sospetta e va chiaramente evitata. Il metodo per evitare manipolazioni sospette consiste nella cosiddetta *regolarizzazione* della teoria. L'idea è molto semplice: Se T è la teoria cui siamo interessati (nel nostro caso la QED), costruire una famiglia di teorie $T(\eta)$ che dipendono da un parametro η , e tali che:

1. Nel limite $\eta \rightarrow 0$, $T(\eta) \rightarrow T$.
2. $T(\eta)$ gode di tutte le proprietà “importanti” di T . Nel caso della QED (o del Modello Standard) la preoccupazione principale è il mantenimento della invarianza di gauge.
3. Per $\eta \neq 0$, $T(\eta)$ non ha divergenze.

In questo caso $T(\eta)$ viene detta una versione *regolarizzata* di T . In $T(\eta)$ le manipolazioni necessarie per la rinormalizzazione riguardano grandezze finite, e sono legittime. Solo dopo aver eseguito la rinormalizzazione si prende il limite $\eta \rightarrow 0$. Dato che la rinormalizzazione ha nascosto tutte le potenziali divergenze, il limite è finito.

Il metodo di regolarizzazione attualmente usato è quello della “regolarizzazione dimensionale”. In termini semplici si tratta di questo: possiamo considerare la QED come definita dall'insieme di diagrammi di Feynman che descrivono a ciascun ordine in α i vari processi, e dalle regole che permettono di calcolare ciascun diagramma. Nel calcolo dei diagrammi

¹L'anomalia magnetica di una particella di spin 1/2 rappresenta la deviazione del momento magnetico dal valore (eguale ad un magnetone di Bohr) previsto dalla equazione di Dirac. Nel seguito daremo una definizione più esatta di questa grandezza e la calcoleremo in primo ordine nella teoria delle perturbazioni.

con circuiti chiusi appaiono integrali logaritmicamente divergenti, cioè integrali del tipo

$$\int d^4k I(k); \quad I(k) \sim \frac{1}{k^4} \quad \text{per } |k| \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

Questi integrali *non* sarebbero divergenti in uno spazio con meno di quattro dimensioni, ad esempio in tre dimensioni dove avremmo d^3k invece di d^4k . La regolarizzazione dimensionale consiste nel considerare una teoria descritta dagli stessi diagrammi della QED, con l'unica differenza che tutti gli integrali del tipo (4.1) vanno eseguiti non in 4 dimensioni ma in $4 - \eta$ dimensioni. Si tratta in un certo senso di una continuazione analitica nel numero di dimensioni dello spazio. Per $\eta > 0$ la teoria è priva di divergenze. Dopo avere eseguito la rinormalizzazione si può prendere il limite $\eta \rightarrow 0$. Per una illustrazione di questo metodo, ancora elementare ma più dettagliata, rimandiamo al testo di Mandl e Shaw [2].

L'interesse della regolarizzazione dimensionale è che essa non disturba la validità di alcune relazioni fondamentali quali la identità di Ward. Anche se nel caso della QED esistono metodi alternativi di regolarizzazione, la regolarizzazione dimensionale è l'unico metodo che ha permesso il trattamento perturbativo di teorie basate su invarianze di gauge non abeliane, come ad esempio nella descrizione unificata delle interazioni elettromagnetiche e deboli del Modello Standard.

Le divergenze che appaiono negli integrali per impulsi $p \rightarrow \infty$ prendono il nome di divergenze *ultraviolette*. Esiste nella QED un secondo tipo di divergenza, detta divergenza *infrarossa*, che si manifesta quando l'impulso di un fotone, sia reale (fotone emesso) che virtuale (propagatore) tende a zero. Le divergenze infrarosse hanno un significato fisico ben preciso: ad ogni processo, ad esempio di scattering, in cui una particella carica cambia direzione in maniera impulsiva, è associata, già a livello classico, l'emissione di onde elettromagnetiche con uno spettro di energia $dW/d\nu$ che tende ad una costante per $\nu \rightarrow 0$. Ma dato che questa radiazione è composta da fotoni di energia $h\nu$, la densità spettrale nel numero di fotoni si comporta come $dN/d\nu = (1/h\nu)dW/d\nu$, e tende ad infinito per $\nu \rightarrow 0$. La divergenza infrarossa non è presente nelle grandezze effettivamente misurate, dato che qualsiasi apparato sperimentale ha una risoluzione energetica finita: una misura, ad esempio, di un processo di scattering non è in grado di distinguere il processo di scattering vero e proprio da quello in cui esso è accompagnato dalla (inevitabile) emissione di uno o più fotoni di bassa energia. La probabilità (o sezione d'urto) del processo di scattering, sommata a quelle per lo stesso processo accompagnato da uno o più fotoni di bassa energia, risulta finita. La presenza delle divergenze infrarosse introduce notevoli complicazioni tecniche nel paragone tra teoria ed esperimento, ma nessun problema a livello concettuale.

In questo capitolo discutiamo brevemente delle tre divergenze ultraviolette presenti nella QED. Esse appaiono nel calcolo dei propagatori per il fotone e l'elettrone, e nel vertice elettrone-elettrone-fotone. Discuteremo anche della identità di Ward che lega le correzioni al propagatore dell'elettrone e al vertice. Il trattamento di questo capitolo riguarda in ciascun caso le correzioni di ordine α . Esistono dimostrazioni valide a tutti gli ordini perturbativi — rinormalizzabilità della teoria, identità di Ward — ma questi argomenti vanno oltre il livel-

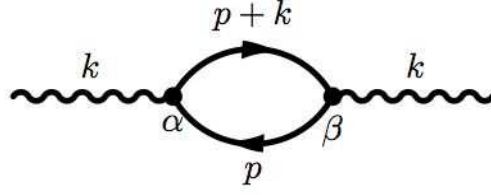


Figura 4.1: Il propagatore del fotone all'ordine α .

lo introduttivo di questo corso. Conchiuderemo con un calcolo esplicito della correzione di ordine α al momento magnetico dell'elettrone.

4.1 Il propagatore del fotone

Le correzioni all'ordine α al propagatore del fotone sono descritte dalla figura 4.1. Questa correzione va aggiunta al propagatore di ordine zero, quindi il propagatore corretto all'ordine α può essere scritto come:

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{k^2 + i\epsilon} ie_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \frac{-ig_{\beta\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.2)$$

dove $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ rappresenta il circuito chiuso dell'elettrone, ed è definito da

$$ie_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{(-1)(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \operatorname{Tr} \left[\gamma^\alpha \frac{i(\not{p} + m)}{(p)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\beta \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]$$

Notiamo il fattore (-1) e la traccia, tipici dei circuiti fermionici chiusi, e che abbiamo risalito la linea fermionica. Semplificando l'espressione (fattori i , -1 , e_0^2) otteniamo

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\operatorname{Tr} [\gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma^\beta (\not{p} + \not{k} + m)]}{((p)^2 - m^2 + i\epsilon) ((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (4.3)$$

Questa espressione è divergente, e dovremo ricorrere alla regolarizzazione. Appliciamo quindi una regolarizzazione dimensionale, che consiste nel passare dallo spazio 4-dimensionale ad uno a D dimensioni,

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^Dp \frac{\operatorname{Tr} [\gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma^\beta (\not{p} + \not{k} + m)]}{((p)^2 - m^2 + i\epsilon) ((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

dove è sottintesa una continuazione analitica a valori non interi di D , eseguita ad esempio con i metodi delineati nella Appendice D. L'integrale risulterà allora finito, tranne per valori

interi di D , in particolare per $D = 4$, dove l'integrale diverge come $1/(D - 4)$. Per qualsiasi valore non intero di D divengono legittime le usuali manipolazioni, come ad esempio il cambiamento di variabili che useremo per dimostrare una importante proprietà di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$,

$$k_\beta \Pi^{\alpha\beta}(k) = 0 \quad (4.4)$$

Questa identità è in effetti un'altra conseguenza della invarianza di gauge, o più semplicemente della conservazione della corrente $j^\beta = \bar{\psi}\gamma^\beta\psi$. Infatti il vertice γ^β nella (4.3), o nel diagramma 4.1, rappresenta l'azione di una corrente j^β , e moltiplicare per k_β equivale a prenderne la divergenza. La dimostrazione della (4.4) nasce dalla identità

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\alpha (\not{p} + m) \not{k} (\not{p} + \not{k} + m)] &= \text{Tr} [\gamma^\alpha (\not{p} + m) ((\not{p} + \not{k} - m) - (\not{p} - m)) (\not{p} + \not{k} + m)] \\ &= \text{Tr} [\gamma^\alpha (\not{p} + m) ((p + k)^2 - m^2)] - \text{Tr} [\gamma^\alpha (\not{p} + \not{k} + m) ((p)^2 - m^2)] \\ &= 4p^\alpha ((p + k)^2 - m^2) - 4(p + k)^\alpha ((p)^2 - m^2) \end{aligned}$$

da cui

$$k_\beta \Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{4i}{(2\pi)^4} \left[\int d^D p \frac{p^\alpha}{((p)^2 - m^2 + i\epsilon)} - \int d^D p \frac{(p + k)^\alpha}{((p + k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \right] = 0$$

come si dimostra con un cambiamento di variabili, $(p + k) \rightarrow p$, nel secondo integrale². Questo risultato è confermato da un calcolo esplicito di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$, per il quale rimandiamo gli interessati al cap. 10 del Mandl e Shaw [2].

$\Pi^{\alpha\beta}(k)$ è un tensore simmetrico a due indici, funzione del vettore k , quindi la sua forma più generale è necessariamente

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2) \quad (4.5)$$

dove $A(k^2)$, $B(k^2)$ sono funzioni dello scalare k^2 , ma la condizione (4.4) stabilisce una relazione tra le due funzioni,

$$A(k^2) = k^2 B(k^2)$$

Quindi³ $A(0) = 0$, e sviluppando in potenze di k^2 ,

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) \quad (4.6)$$

dove $\Pi_c(k^2)$ contiene gli ordini superiori nello sviluppo in potenze di k^2 , e quindi

$$\Pi_c(0) = 0 \quad (4.7)$$

La divergenza di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ è quadratica: per alti valori di p l'integrale (4.3) si comporta come $\int d^4 p / p^2$. Nello sviluppo in potenze di k , tuttavia, il grado di divergenza decresce di una unità per ogni potenza di k , ovvero di due unità per ogni potenza di k^2 . Per ottenere ad esempio

²Notiamo che questa manipolazione è legittima nella teoria regolarizzata, in cui l'integrale è divergente.

³Come mostrato nel Mandl e Shaw, da $A(0) = 0$ segue che la massa del fotone rimane nulla anche in seguito alle correzioni radiative, un'altra conseguenza della invarianza di gauge.

il valore di A' dobbiamo eseguire la derivata seconda di Π rispetto a k , e si ottiene di conseguenza un integrando che si comporta come p^{-4} , il ch  comporta una divergenza logaritmica. I termini successivi dello sviluppo raccolti in $\Pi_c(k^2)$ sono convergenti. Questa considerazione si applica a qualunque diagramma di Feynman: anche se un diagramma diverge, in uno sviluppo in potenze degli impulsi esterni le divergenze si riscontrano solamente nei coefficienti dei primi termini dello sviluppo.

Una ulteriore semplificazione dell'espressione di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ si ottiene dalla considerazione che, dato che in qualsiasi diagramma il propagatore (4.2) si connette alle correnti che scorrono lungo le linee fermioniche,

$$j^\mu D_{\mu\nu}(k) j^\nu$$

e che queste correnti sono conservate, il termine di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ proporzionale a $k^\alpha k^\beta$ d  contributo nullo e pu  essere omissso. In conclusione possiamo scrivere

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = -g^{\alpha\beta} (k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2)) \quad (4.8)$$

e quindi il propagatore del fotone, corretto all'ordine α risulta

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} (1 - e_0^2 A'(0)) - \frac{-ig_{\mu\nu} e_0^2 \Pi_c(k^2)}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.9)$$

In questa espressione il primo termine corrisponde al propagatore del fotone, ma moltiplicato per un fattore $(1 - e_0^2 A'(0))$, mentre il secondo, grazie alla (4.7) non ha una singolarit  per $k^2 = 0$. Se paragoniamo questa situazione con la rappresentazione spettrale discussa nella sezione ?? vediamo che il primo termine corrisponde alla propagazione del fotone libero, mentre il secondo corrisponde a stati intermedi con pi  particelle, in questo caso una coppia elettrone-positrone. Il fattore $(1 - e_0^2 A'(0))$ va quindi interpretato come una costante di rinormalizzazione,

$$Z_3 = 1 - e_0^2 A'(0) \quad (4.10)$$

4.2 La rinormalizzazione della carica

Trascurando per un momento l'effetto delle rinormalizzazioni dovute alle correzioni al vertice o al propagatore dell'elettrone, che come vedremo si compensano grazie alla identit  di Ward, discutiamo brevemente della rinormalizzazione della carica dovuta alle correzioni al propagatore del fotone.

Il significato fisico della costante di rinormalizzazione si ottiene ricordando che il propagatore del fotone, con la sua singolarit  in $k^2 = 0$ descrive non solamente lo scambio di fotoni tra due elettroni, ma anche la loro interazione coulombiana. La correzione al propagatore che abbiamo trovato   equivalente a modificare la interazione coulombiana,

$$\frac{e_0^2}{r} \rightarrow \frac{e_0^2 Z_3}{r}$$

La carica elettrica dell'elettrone è operativamente definita tramite l'intensità della interazione coulombiana, quindi la carica effettiva dell'elettrone non è e_0 , ma $e = e_0\sqrt{Z_3}$.

Conviene riesprimere la serie perturbativa in potenze della carica fisica e , e per far questo notiamo che il propagatore del fotone appare sempre nella combinazione $e_0^2 D_{\mu\nu}(k)$ che possiamo riscrivere come

$$e_0^2 D_{\mu\nu}(k) = e^2 D_{R\mu\nu}(k) \quad (4.11)$$

dove $D_{R\mu\nu}(k)$ è il propagatore “rinormalizzato”,

$$D_{R\mu\nu}(k) = \frac{1}{Z_3} D_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - \frac{-ig_{\mu\nu}e^2\Pi_c(k^2)}{k^2 + i\epsilon} + \mathcal{O}(e^4) \quad (4.12)$$

Resta da verificare che questa regola si applica anche a linee fotoniche esterne, corrispondenti a fotoni presenti nello stato iniziale o finale del processo.

Ricordiamo che nella espressione della matrice S in termini di diagrammi, (1.36), dobbiamo considerare solo grafici irriducibili ad una particella sulle linee esterne ed associare ad ogni linea fotonica esterna un fattore $\sqrt{Z_3}$. Questo fattore origina dalla parziale semplificazione del fattore $1/\sqrt{Z_3}$ nella formula di riduzione, con il numeratore della funzione a due punti del fotone, termine di polo, che, come abbiamo appena visto, è pari a Z_3 , eqq. (4.9) e (4.10). Naturalmente, la linea corrispondente al fotone esterno finisce su un vertice del diagramma da cui partono due linee fermioniche (di cui almeno una interna). L'ampiezza: linea fotonica esterna-vertice si può scrivere come:

$$(\cdots e_0 \gamma^\mu \cdots) \epsilon_\mu \sqrt{Z_3} = (\cdots e \gamma^\mu \cdots) \epsilon_\mu \quad (4.13)$$

anche in questo caso il fattore $\sqrt{Z_3}$ trasforma il parametro e_0 nella carica fisica e .

Notiamo che quanto abbiamo fatto equivale ad aggiungere le seguenti regole per il calcolo dei diagrammi:

- Nel calcolo dei diagrammi usare la carica fisica e invece del parametro e_0 che appare nel lagrangiano.
- Dopo aver calcolato (in una teoria regolarizzata) il valore di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$, sottrarre il contributo di $A'(0)$, o in altre parole porre a zero il valore di $A'(0)$.
- Eliminare i fattori $\sqrt{Z_3}$ dalla (1.36)

4.3 Il propagatore dell'elettrone

In questa sezione studiamo le correzioni di ordine α al propagatore dell'elettrone, descritte dai due diagrammi della figura 4.2. Notiamo che δm rappresenta lo spostamento di

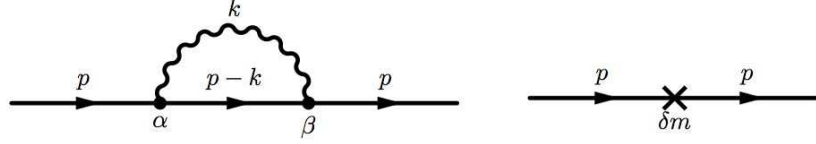


Figura 4.2: Correzioni di ordine α al propagatore di un elettrone.

massa dovuto alle interazioni, che in teorie perturbativa può essere espresso come serie di potenze in $\alpha = e^2/4\pi$,

$$\delta m = \delta_2 e_0^2 + \delta_4 e_0^4 + \dots \quad (4.14)$$

Per calcolare le correzioni di ordine α al propagatore dovremo includere il termine $\mathcal{O}(e^2)$ di δm , trascurando i termini di ordine superiore. Per effetto di questa correzione il propagatore dell'elettrone risulterà modificato,

$$iS_F(p) \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m] \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (4.15)$$

dove $\Sigma(p)$ è dato dalla seguente espressione,

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \left[\gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\beta \right]$$

che con alcune semplificazioni diviene

$$\Sigma(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\epsilon} \left[\gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \right] \quad (4.16)$$

Abbiamo usato una notazione compatta per il propagatore dell'elettrone; in forma un poco più esplicita il fattore in parentesi quadre nell'integrando può essere riscritto, usando note proprietà delle matrici γ , come

$$[\dots] = \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{-2(\not{p} - \not{k}) + 4m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Quindi possiamo scrivere $\Sigma(p) = s(p) + v_\mu(p) \gamma^\mu$ dove $s(p)$ è uno scalare, quindi necessariamente una funzione di p^2 , e $v_\mu(p)$ un vettore, necessariamente della forma $v_\mu(p) = p_\mu s'(p)$, dove $s'(p)$ è anch'esso uno scalare, funzione di p^2 . Dato però che $p^2 = \not{p}^2$ possiamo combinare i due termini in una singola funzione di $\not{p}$, che conviene sviluppare in potenze di $\not{p} - m$,

$$\Sigma(p) = A + B(\not{p} - m) + \Sigma_c(p)(\not{p} - m), \quad (4.17)$$

e dato che l'espressione di $\Sigma(p)$ è linearmente divergente, i primi due coefficienti A, B di questo sviluppo sono divergenti, mentre i termini successivi, raccolti in $\Sigma_c(p)$, risulteranno convergenti. Dato che $\Sigma_c(p)(p' - m)$ raccoglie le potenze ≥ 2 di $(p' - m)$, deve essere

$$\Sigma_c(p) \Big|_{p'=m} = 0 \quad (4.18)$$

Sostituendo nella (4.15), e conservando solo il termine di ordine e_0^2 in δm (eq. 4.14),

$$S_F(p) \rightarrow \frac{1}{p' - m + i\epsilon} - \left(\frac{1}{p' - m + i\epsilon} \right)^2 e_0^2 (A + \delta_2) - \frac{e_0^2 B}{p' - m + i\epsilon} - \frac{e_0^2 \Sigma_c(p)}{p' - m + i\epsilon}$$

La correzione $\propto (A + \delta_2)$ rappresenta un cambiamento di massa, come si vede ad esempio considerandola come il primo termine di uno sviluppo⁴

$$\frac{1}{p' - m + e_0^2 (A + \delta_2) + i\epsilon} = \frac{1}{p' - m + i\epsilon} - \left(\frac{1}{p' - m + i\epsilon} \right)^2 e_0^2 (A + \delta_2) + \dots \quad (4.19)$$

ma dato che m è la massa “vera” dell'elettrone, dobbiamo scegliere δ_2 in modo che cancelli esattamente il termine A ,

$$A + \delta_2 = 0 \quad (4.20)$$

In conclusione il propagatore all'ordine e^2 diventa

$$S_F(p) \rightarrow \frac{1 - e_0^2 B}{p' - m + i\epsilon} - \frac{e_0^2 \Sigma_c(p)}{p' - m + i\epsilon} \quad (4.21)$$

Notiamo che il primo termine è singolare per $p' = m$, e quindi corrisponde alla propagazione di una singola particella di massa m , mentre grazie alla (4.18) il secondo termine è regolare in $p' = m$, e deve corrispondere alla propagazione di stati con più di una particella — nel nostro caso un elettrone più un fotone, come si vede dal diagramma nella figura 4.2. Se paragoniamo questa espressione con la formula generale per le funzioni di Green a due punti, (1.34), vediamo che il fattore $(1 - e_0^2 B)$ va interpretato come costante di rinormalizzazione dell'elettrone, Z_2 , o meglio come la sua approssimazione di ordine α ,

$$Z_2 = 1 - e_0^2 B + \mathcal{O}(e_0^4) \quad (4.22)$$

Le correzioni della figura 4.2 si applicano anche al caso di una linea esterna. La discussione delle correzioni segue le linee della analoga discussione delle correzioni ad una linea esterna fotonica nella sezione precedente:

1. Nella espressione della matrice S in termini di diagrammi, (1.36), dobbiamo considerare solo grafici irriducibili ad una particella sulle linee esterne

⁴Sulla giustificazione di questo passaggio torneremo nella sezione seguente.

2. ad ogni linea elettronica esterna è associato un fattore $\sqrt{Z_2}$, che origina dalla parziale semplificazione del fattore $1/\sqrt{Z_2}$ nella formula di riduzione, con il numeratore della funzione a due punti dell' elettrone, termine di polo, che è pari a Z_2 , eq. (1.34)
3. La linea corrispondente all' elettrone esterno finisce su un vertice del diagramma da cui partono una linea fermionica ed una fotonica (di cui almeno una interna).

Possiamo interpretare le correzioni alle linee fermioniche, sia interne che esterne, come una ulteriore rinormalizzazione della carica. Per una linea esterna che confluisce in un vertice la correzione è di un fattore $\sqrt{Z_2}$. Per una linea interna il fattore Z_2 va suddiviso tra i due vertici cui la linea si appoggia, quindi un fattore $\sqrt{Z_2}$ (trascurando termini $\propto e^4$) per ciascun vertice. In conclusione, dato che su ogni vertice insistono due linee fermioniche, esterne o interne, per effetto delle correzioni alle linee fermioniche il vertice $e_0\gamma^\mu$ risulterà moltiplicato per $1 - e_0^2 B = Z_2$. Questo equivale ad una ulteriore rinormalizzazione della carica elettrica

$$e_0 \rightarrow e_0 Z_2 = e_0(1 - e_0^2 B) \quad (4.23)$$

Grazie alla identità di Ward, come vedremo, questa correzione sarà esattamente compensata dalla analoga correzione alla funzione vertice, per cui la carica elettrica viene solamente rinormalizzata dalla correzione al propagatore del fotone studiata nella sezione precedente.

4.3.1 Il propagatore a tutti gli ordini

In questa sezione discutiamo brevemente della struttura generale del propagatore dell'elettrone come si ottiene dalla teoria delle perturbazioni. Questi risultati sono importanti per una discussione della rinormalizzazione a tutti gli ordini, ma nel contesto di queste lezioni li useremo solamente per giustificare la identificazione del termine A nello sviluppo della Σ (eq. 4.17) come spostamento di massa.

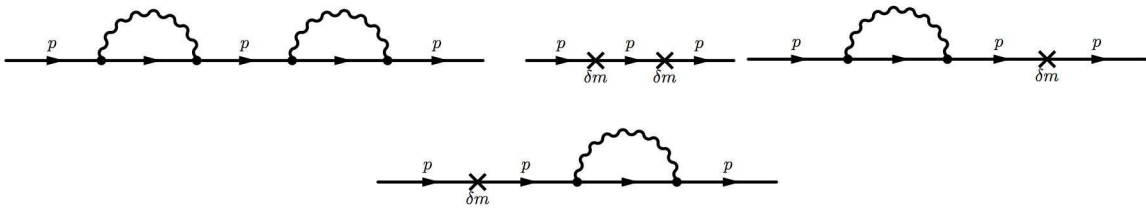
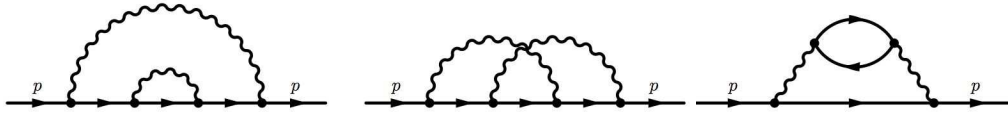


Figura 4.3: Correzioni con due inserzioni al propagatore di un elettrone.

È possibile riordinare la serie perturbativa per il propagatore sommando i contributi dei diagrammi che, come quelli della figura 4.3, rappresentano una iterazione di correzioni già

Figura 4.4: Inserzioni di ordine e_0^4 .

incontrate ad ordini inferiori. Diremo che i diagrammi della figura 4.3 hanno due *inserzioni*, mentre quelli della figura 4.2 hanno una singola inserzione, ed è chiaro che ad ordini superiori troveremo diagrammi con tre o più inserzioni.

Sempre al quarto ordine troviamo tre diagrammi con una singola inserzione, mostrati nella figura 4.4, e in analogia con quanto fatto per l'inserzione del secondo ordine nella (4.15) indicheremo il loro contributo con $e_0^4 \Sigma_4(p)$. È possibile sommare i contributi dei diagrammi con inserzioni multiple: se definiamo $\Delta(p)$ come la somma di tutte le inserzioni singole,

$$\Delta(p) = e_0^4 \Sigma(p) + e_0^4 \Sigma_4(p) + \dots + \delta m, \quad (4.24)$$

per effetto dei diagrammi con inserzioni singole o multiple il propagatore diverrà⁵:

$$\begin{aligned} iS_F(p) &\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \\ &+ \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m + \Delta(p) + i\epsilon} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Se in analogia con la (4.17) sviluppiamo $\Delta(p)$ in potenze⁶ di $\not{p} - m$,

$$\Delta(p) = \tilde{A} + \tilde{B}(\not{p} - m) + \Delta_c(p)(\not{p} - m), \quad (4.26)$$

dalla (4.25) si ottiene

$$S_F(p) = \frac{i}{(\not{p} - m)(1 + \tilde{B} + \Delta_c(p)) + \tilde{A} + i\epsilon}, \quad (4.27)$$

⁵Questo risultato deriva dalla seguente identità, una generalizzazione della serie geometrica, valida per due operatori X, Y ,

$$S = \frac{1}{X} + \frac{1}{X} Y \frac{1}{X} + \frac{1}{X} Y \frac{1}{X} Y \frac{1}{X} + \dots = \frac{1}{X} + \frac{1}{X} Y S$$

da cui, moltiplicando da sinistra per X ,

$$XS = 1 + YS; \quad \text{e quindi,} \quad S = \frac{1}{X - Y}.$$

⁶Si può dimostrare che i termini raccolti in $\Delta_c(p)$ sono privi di divergenze. Questo si verifica facilmente all'ordine e_0^2 .

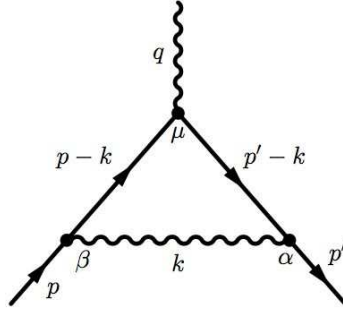


Figura 4.5: Correzione al vertice di ordine e_0^2 .

che è singolare in $p' = m$ solo se $\tilde{A} = 0$. La condizione che m sia la massa dell'elettrone si traduce quindi nella condizione $\tilde{A} = 0$, che all'ordine e_0^2 si riduce alla (4.20).

4.4 Il vertice

La correzione al vertice di ordine e_0^2 è data dal diagramma della figura 4.5. Con questa correzione il vertice è

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow ie_0(\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)) \quad (4.28)$$

dove

$$ie_0^3\Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie_0)^3}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{i}{p' - k - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{p - k - m + i\epsilon} \gamma^\beta$$

e con qualche semplificazione,

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{p' - k - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \gamma_\alpha$$

Per grandi valori di k l'integrale si comporta come $\int d^4k/k^4$, ed è quindi logicamente divergente. Sorge qui una ulteriore complicazione perché l'integrale non è solamente divergente per $k \rightarrow \infty$, ma anche per $k \rightarrow 0$, e presenta quindi una divergenza infrarossa.

La divergenza infrarossa verrà discussa separatamente. Sin d'ora diciamo che essa richiede un processo di regolarizzazione che consiste nell'attribuire al fotone una piccola massa λ che viene posta a zero solamente alla conclusione dei calcoli relativi a grandezze fisiche. Scriveremo quindi

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{p' - k - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \quad (4.29)$$

Si dimostra facilmente che il termine divergente è proporzionale a γ^μ . Se infatti scriviamo

$$\Lambda^\mu = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{p' - k + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{p - k + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\alpha$$

il termine divergente è quello che contiene $k \dots k$ al numeratore, quindi esplicitando $k = k_\delta \gamma^\delta = k_\theta \gamma^\theta$ e omettendo p, p', m al denominatore, trascurabili nel limite $k \rightarrow \infty$,

$$\Lambda^\mu \Big|_{\text{divergente}} = \gamma^\alpha \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma^\theta \gamma_\alpha \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \frac{k_\delta k_\theta}{(k^2 + i\epsilon)^2}$$

La parte divergente di questo ultimo integrale è un tensore costante (nell'integrale non appare nessun vettore); esso deve quindi avere la forma $K g_{\delta\theta}$, dove K è una costante (divergente, ma come al solito dobbiamo immaginare di eseguire il calcolo in modo *regolarizzato*). Quindi

$$\Lambda^\mu \Big|_{\text{divergente}} = K g_{\delta\theta} \gamma^\alpha \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma^\theta \gamma_\alpha = K \gamma^\alpha \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma_\delta \gamma_\alpha = 4K \gamma^\mu$$

dove abbiamo usato due volte la nota identità $\gamma^\delta \gamma^\mu \gamma_\delta = -2\gamma^\mu$. Dato che la parte divergente di Λ^μ è proporzionale a γ^μ possiamo scrivere

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad (4.30)$$

dove $\Lambda_c^\mu(p', p)$ è privo di divergenze. Dato che $\Lambda_c^\mu(p', p)$ può esso stesso contenere termini $\propto \gamma^\mu$ occorre una seconda condizione che fissi la separazione tra parte divergente e parte non divergente. Una possibile scelta di questa condizione parte dalla considerazione che $e_0 \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p})$ rappresenta la corrente elettrica di un elettrone di impulso $\vec{p}$. Per effetto delle correzioni al vertice questa diviene⁷

$$e_0 \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p}) \rightarrow e_0 \bar{u}(\vec{p}) (\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu(p, p)) u(\vec{p}) \quad (4.31)$$

Si dimostra facilmente⁸ che $\bar{u}(\vec{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\vec{p})$ è proporzionale a $\bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p})$. Possiamo quindi definire la separazione tra parte divergente e parte non divergente di $\Lambda^\mu(p', p)$, eq. (4.30),

⁷Trascuriamo per un momento le correzioni alle linee esterne, e la correzione al propagatore del fotone, ciascuna delle quali produce una rinormalizzazione della carica elettrica.

⁸Assumiamo $\vec{p} = 0$, da cui il caso generale segue con una trasformazione di Lorentz. Se poniamo

$$u(0) = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'unica grandezza scalare, candidata al ruolo di $\bar{u}(0) \Lambda^0 u(0)$, è $\phi^* \phi = u^* u = \bar{u} \gamma^0 u$, e quindi $\bar{u}(0) \Lambda^0(p, p) \Big|_{\vec{p}=0} u(0) \propto \bar{u}(0) \gamma^0 u(0)$. L'unica grandezza vettoriale è $\phi^* \vec{\sigma} \phi$, ma si tratta di un vettore assiale mentre $\vec{\Lambda}$ dovrebbe essere un vettore polare. Quindi $\bar{u}(0) \vec{\Lambda}(p, p) \Big|_{\vec{p}=0} u(0) = 0$. Infine, da

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{segue che} \quad \bar{u}(0) \vec{\gamma} u(0) = 0.$$

In conclusione $\bar{u}(0) \Lambda^\mu(p, p) \Big|_{\vec{p}=0} u(0) \propto \bar{u}(0) \gamma^\mu u(0)$, come dovevamo dimostrare.

tramite la condizione

$$\bar{u}(\vec{p})\Lambda^\mu(p, p)u(\vec{p}) = L\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p}), \quad \text{ovvero:} \quad \bar{u}(\vec{p})\Lambda_c^\mu(p, p)u(\vec{p}) = 0 \quad (4.32)$$

Dato che la (4.31) rappresenta la corrente di un elettrone come modificata dalla correzione al vertice, ne segue che questa correzione implica una ulteriore rinormalizzazione della carica

$$e_0 \rightarrow \frac{1}{Z_1}e_0 = (1 + e_0^2 L)e_0 \quad (4.33)$$

Come vedremo nella prossima sezione l'identità di Ward stabilisce una relazione tra la correzione al propagatore dell'elettrone e la correzione al vertice, di modo che le due rinormalizzazioni della carica, (4.23) e (4.33), si cancellano esattamente.

4.5 L'identità di Ward

L'identità di Ward afferma che

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = \Lambda(p, p) \quad (4.34)$$

Ne daremo una dimostrazione all'ordine α . Una dimostrazione valida in generale può essere ottenuta a partire dalla formulazione della QCD in termini della somma sui cammini. Usando la (4.17) otteniamo

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = B\gamma^\mu + \frac{d\Sigma_c(p)}{dp_\mu}(p\!\!\!/ - m) + \Sigma_c(p)\gamma^\mu$$

Se prendiamo l'elemento di matrice di questa tra spinori $u(p)$ tenendo presente che $\Sigma_c(p)$ è esso stesso proporzionale a $p\!\!\!/ - m$ e che $(p\!\!\!/ - m)u(p) = \bar{u}(p)(p\!\!\!/ - m) = 0$ otteniamo che

$$\bar{u}(p)\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu}u(p) = B\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p)$$

mentre dalla (4.32) otteniamo

$$\bar{u}(\vec{p})\Lambda^\mu(p, p)u(\vec{p}) = L\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p})$$

Paragonando le ultime due equazioni con l'identità (4.34) otteniamo

$$B = L \quad \text{cioé} \quad Z_1 = Z_2 \quad (4.35)$$

quindi la cancellazione delle rinormalizzazioni della carica dovute alle correzioni alla parte vertice — eq. (4.33) — e al propagatore dell'elettrone — eq. (4.23).

Questo è un risultato di estrema importanza, perchè le correzioni al propagatore o al vertice dipendono evidentemente dalla massa della particella, e ancora più dalle interazioni cui la particella è sottoposta. Sarebbe infatti ragionevole attendersi che le correzioni al propagatore dell'elettrone, del μ , del τ , per non parlare delle correzioni ai propagatori dei quark o dei mesoni W , siano tutte diverse tra loro. In questa situazione, senza l'identità di Ward, sarebbe estremamente difficile capire l'universalità della costante e che descrive la carica sia dell'elettrone che del protone, che sono sperimentalmente eguali con precisione estrema. Notiamo viceversa che la rinormalizzazione della carica dovuta alle correzioni del propagatore del fotone sono le stesse per tutte le particelle cariche cui il fotone si accoppia.

All'ordine e_0^2 si può dimostrare l'identità di Ward calcolando direttamente la derivata di $\Sigma(p)$ come risulta dalla eq. (4.16). Naturalmente questa operazione è priva di senso dato che l'integrale nella è eq. (4.16) divergente, come del resto quello nella (4.29) con cui ci dobbiamo confrontare. Dobbiamo quindi immaginare di aver regolarizzato la teoria, ad esempio con una regolarizzazione dimensionale, scrivendo

$$\Sigma(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{4-\eta}k}{k^2 + i\epsilon} \left[\gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \right]$$

Dato che questo integrale è ora regolare, possiamo applicare la derivata all'integrando. Possiamo allora utilizzare l'identità⁹

$$\frac{d}{dp_\mu} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} = - \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon}$$

da cui

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{4-\eta}k}{k^2 + i\epsilon} \left[\gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \right]$$

che coincide con l'espressione regolarizzata di $\Lambda(p, p)$ (eq. 4.29), completando la dimostrazione.

⁹Questa si deriva moltiplicando per $1/(\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon)$ da sinistra la seguente identità:

$$0 = \frac{d}{dp_\mu} \left[(\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon) \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \right] = \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} + (\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon) \frac{d}{dp_\mu} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon}$$

Capitolo 5

Diffusione in un campo esterno

In questo capitolo discutiamo della diffusione di un elettrone in un campo esterno. Prendiamo questo processo come occasione per rivedere in pratica il processo di rinormalizzazione e per discutere su un esempio concreto il problema delle divergenze infrarosse cui abbiamo solo accennato nel capitolo precedente.

La “diffusione da campo esterno” è in realtà solo una idealizzazione della diffusione di un elettrone nell’urto con un bersaglio di grande massa, tipicamente un nucleo pesante, che possiamo con buona approssimazione considerare come una carica elettrica localizzata in una precisa zona dello spazio. Un nucleo di carica Ze immobile in $\vec{x} = 0$ può ad esempio essere descritto da una corrente “classica” $j^\mu(x)$ indipendente dal tempo tale che

$$j^\mu(x) = \{\rho(\vec{x}), \vec{j} = 0\}; \quad \int d^3x \rho(x) = Ze \quad (5.1)$$

Con questa idealizzazione evitiamo di fornire una descrizione quantistica di questa corrente, ma naturalmente perdiamo anche la possibilità di descrivere fenomeni legati alla sua struttura, come ad esempio l’esistenza di stati eccitati del nucleo. In questo capitolo useremo questo metodo per descrivere una carica elettrica, ma lo potremmo anche usare per descrivere l’emissione di onde elettromagnetiche da un’antenna radio, o la radiazione di sincrotrone emessa da elettroni circolanti in un anello di accumulazione.

L’effetto di una tale corrente “classica” può essere descritto introducendo nel lagrangiano di interazione (1.8) un nuovo termine, che descrive l’interazione del campo elettromagnetico A^μ con la corrente classica j_μ ,

$$\mathcal{L}_1 = e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - j^\mu A_\mu + \delta m(\bar{\psi}\psi) \quad (5.2)$$

Con questa aggiunta il lagrangiano del fotone viene modificato,

$$\frac{-1}{2}(\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \rightarrow \frac{-1}{2}(\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) - j^\mu A_\mu \quad (5.3)$$

Per descrivere l’effetto della corrente j^μ in termini di diagrammi è sufficiente una semplice modifica del procedimento che porta dal funzionale generatore ai diagrammi di Feynman

per la matrice S . Infatti paragonando la (5.3) con la (??) vediamo che il cambiamento dell'azione prodotto dalla corrente esterna j^μ è identico a quello prodotto dalla funzione ausiliaria J^μ se $J^\mu = j^\mu$. Supponiamo che l'elemento di matrice S che ci interessa sia connesso dalla formula di riduzione ad una funzione di Green $\langle 0|T(\cdots \psi \cdots \bar{\psi} \cdots A^\mu \cdots)|0\rangle$; il calcolo richiede allora quattro passi:

- (1) Calcolare $Z[J, \bar{J}, j_\mu]$ come somma di diagrammi.
- (2) Calcolarne la derivata parziale che corrisponde alla funzione di Green

$$\left(\cdots \frac{i\delta}{\delta \bar{J}}, \cdots \frac{-i\delta}{\delta J} \cdots \frac{i\delta}{\delta J_\mu} \cdots\right) Z[J, \bar{J}, j_\mu].$$

dopo il passo (2) sopravvivono solamente i diagrammi che avevano un numero di “pallini”, cioè fattori $J, \bar{J}, J_\mu$ eguale o superiore al numero delle derivate di ciascuna specie.

- (3) Porre $J = \bar{J} = J_\mu = 0$

Per calcolare la stessa funzione di Green in presenza della corrente classica j_μ basta modificare il terzo passo:

- (3') Porre $J = \bar{J} = 0$ e porre $J_\mu = j_\mu$.
- (4) Applicare la formula di riduzione per passare dalla funzione di Green all'elemento di matrice S .

Guardiamo alla differenza tra (3) e (3'): il passo (3) mette a zero tutti i diagrammi in cui alcuni “pallini” (fattori $J, \bar{J}, J_\mu$) sopravvivono dopo l'applicazione delle derivate parziali. Nel caso (3'), in presenza di una corrente classica j_μ , i diagrammi in cui esistono (dopo le derivate) fattori di tipo J , o $\bar{J}$ vengono messi a zero, mentre rimangono in vita tutti i diagrammi provvisti di linee esterne che terminano in un pallino di tipo J_μ , ma con J_μ sostituita dalla corrente classica j_μ . La figura 5.1 rappresenta il diagramma di ordine più basso per la diffusione di

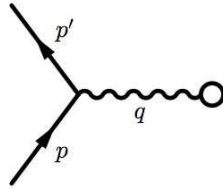


Figura 5.1: Diagramma per la diffusione di un elettrone in un campo esterno.

un elettrone in un campo esterno generato dalla corrente j_μ , e in questo caso p, p' sono gli

impulsi dell'elettrone entrante e di quello uscente. La stessa figura può anche essere considerata come una porzione di un diagramma più complesso, in cui p , o p' (o ambedue) sono impulsi di linee interne al diagramma. Alla linea con pallino in questa figura corrisponde un fattore

$$\begin{aligned} \int d^4 y \Delta_F(x-y) j_\mu(y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q \frac{1}{q^2 + i\epsilon} e^{-iqx} j_\mu(q) \\ j_\mu(q) &= \int d^4 y e^{iqy} j_\mu(y), \end{aligned} \quad (5.4)$$

lo stesso dell'eq. (1.26), ma con la corrente classica j_μ al posto della funzione ausiliaria J_μ . Il fattore e^{-iqx} si combina con gli analoghi fattori delle due linee fermioniche a produrre il fattore $(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q)$ associato al vertice. In conclusione alle regole di Feynman (1.38) dobbiamo aggiungere

$$\text{Linea di campo esterno} \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q \frac{j_\mu(q)}{q^2 + i\epsilon} \quad (5.5)$$

notando però che il fattore $(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q)$ associato al vertice elimina l'integrazione in q fissando il valore di $q = p' - p$, e che anche i fattori $(2\pi)^4$ si semplificano.

Consideriamo l'esempio della quadricorrente associata ad una sferetta carica con il centro in $\vec{x} = 0$,

$$j_0 = \rho(|\vec{x}|); \quad \int d^3 x \rho(|\vec{x}|) = Ze_0; \quad \vec{j} = 0 \quad (5.6)$$

Avremo allora

$$j_0(q) = \int d^4 y e^{iqy} j_0(y) = 2\pi \delta(q_0) Ze_0 F(\vec{q}^2) \quad (5.7)$$

dove il fattore di forma $F(\vec{q}^2)$, definito dalla trasformata di Fourier sulle coordinate spaziali della distribuzione di carica,

$$Ze F(\vec{q}^2) = \int d^3 y e^{-i\vec{q}\vec{y}} \rho(|\vec{x}|) \quad (5.8)$$

è normalizzato in modo che $F(0) = 1$. L'ampiezza di scattering per la diffusione di un elettrone su un campo esterno risulta quindi, all'ordine più basso, con $q = p' - p$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}', s | S | \vec{p}, r \rangle &= \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E E'}} \frac{i e_0}{q^2} j_\mu(q) (\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)) \\ &= \frac{m}{(2\pi)^3 E} 2\pi \delta(E' - E) \frac{i Ze_0^2 F(\vec{q}^2)}{q^2} (\bar{u}(p') \gamma^0 u(p)) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Notiamo che dato che il valore di $q^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2$ è fissato, possiamo omettere il termine $i\epsilon$ nel denominatore. Il fattore $\delta(E' - E)$ garantisce la conservazione dell'energia degli elettroni,

mentre la quantità di modo non è conservata, dato che la presenza di un campo esterno causa una violazione dell'invarianza per traslazioni¹.

Può anche essere interessante esprimere il risultato ottenuto in termini del campo classico $\tilde{A}_\mu$ prodotto dalla corrente j_μ . L'equazione $\square \tilde{A}_\mu = j_\mu$ porta a

$$\tilde{A}_\mu(q) = \frac{-1}{q^2} j_\mu(q)$$

e possiamo quindi riscrivere l'elemento di matrice S come

$$\langle \vec{p}', s | S | \vec{p}, r \rangle = \frac{-ie_0 m}{(2\pi)^3 \sqrt{E E'}} \tilde{A}_\mu(q) (\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)) \quad (5.10)$$

Utilizzeremo questa forma per discutere delle correzioni radiative al momento magnetico dell'elettrone.

¹In una trattazione realistica dell'urto tra elettroni e un nucleo di massa M , se nello stato iniziale il nucleo è in quiete, dopo l'urto esso avrà assorbito dall'elettrone un impulso $\vec{p}' - \vec{p}$, e quindi una energia di rinculo $(\vec{p}' - \vec{p})^2/2M$. Chiaramente la schematizzazione del nucleo come carica fissa è solamente valida se l'energia dell'elettrone, e quindi il momento trasferito, è molto minore dell'energia di riposo del nucleo bersaglio.

Capitolo 6

Il momento magnetico anomalo dell'elettrone

In questo capitolo calcoliamo il momento magnetico anomalo dell'elettrone (o di qualsiasi leptone) all'ordine α . Il calcolo è delineato nel Mandl e Shaw, ma vogliamo qui eseguirlo interamente, introducendo qualche semplificazione che rende il calcolo particolarmente compatto. Si assume che il lettore abbia presente la discussione del Cap. 9.1 delle dispense di Meccanica Quantistica Relativistica [1] e del capitolo 9 del Mandl e Shaw¹ [2].

6.1 Preliminari

Cominciamo con una premessa: tenendo presente la identità di Gordon ([1], Cap. 9.1, MS-A.80),

$$2m \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') ((p + p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} q_\nu) u(p) \quad (6.1)$$

dove $q = p' - p$, possiamo scrivere l'elemento di matrice $\bar{u}(p') \Lambda^\mu(p', p) u(p)$ come (vedi ad esempio (MS-10.66, 10.67))

$$\bar{u}(p') \Lambda^\mu(p', p) u(p) = \bar{u}(p') (F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{1}{2m} i \sigma^{\mu\nu} q_\nu) u(p) \quad (6.2)$$

D'altra parte (cfr. l'eq. (4.30)):

$$\Lambda^\mu(p', p) = L \gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad (6.3)$$

e, se p', p corrispondono a momenti fisici ($p^2 = p'^2 = m^2$), si ha, nel limite di $q = 0$, $p = p'$, vedi la (4.32) e (MS-9.54):

$$\bar{u}(p) \Lambda_c^\mu(p, p) u(p) = 0 \quad (6.4)$$

¹indicheremo con (MS-...) le equazioni tratte dal Mandl e Shaw.

Paragonando con la (6.2), dato che il termine in F_2 è esplicitamente proporzionale a q si vede che $F_1(0) = L$. Se quindi calcoliamo l'espressione in (6.2) omettendo termini di ordine $O(q^2)$ abbiamo

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \bar{u}(p')(L\gamma^\mu + F_2(0)\frac{1}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p) + O(q^2) \quad (6.5)$$

Data l'identità di Ward, il termine L sarà esattamente cancellato dalla correzione alle linee esterne, per cui, (vedi par. 9.5 del Mandl e Shaw) la funzione vertice incluse *tutte* le correzioni del secondo ordine diviene:

$$ie_0\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \rightarrow i[e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + \frac{e}{2m}\bar{u}(p')e^2F_2(0)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p)] + O(q^2)$$

e, usando la identità di Gordon (6.1),

$$= ie\bar{u}(p')\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m}u(p) + \frac{e}{2m}\bar{u}(p')(1 + e^2F_2(0))(i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p) + O(q^2) \quad (6.6)$$

In questa espressione abbiamo incluso l'effetto delle correzioni del secondo ordine alla linea fotonica che rinormalizzano la carica, $e_0 \rightarrow e$. Il primo termine $\propto (p + p')^\mu$ rappresenta l'interazione della carica elettrica (è lo stesso che avremmo per una particella di spin 0), il secondo descrive l'interazione del momento magnetico. Questo risultato mostra quindi che il momento magnetico del leptone è pari a $(1 + e^2F_2(0))$ magnetoni di Bohr. Per ottenere il valore di $F_2(0)$ dobbiamo calcolare i termini lineari in q nella eq. (6.2). Il calcolo si semplifica notevolmente se seguiamo le seguenti regole:

1. Omettere i termini che sono esplicitamente di ordine q^2 .
2. Omettere i termini che sono $\propto \gamma^\mu$. Questi termini confluiscono nel parametro (divergente) L e sono eliminati dalla rinormalizzazione.

Notiamo che questa procedura ha due importanti vantaggi:

- Con la seconda regola abbiamo omissso i termini divergenti ultravioletti.
- Abbiamo anche eliminato la divergenza infrarossa, che è anche (MS-9.96a) $\propto \gamma^\mu$.
- Con la prima regola l'integrale si semplifica notevolmente.

Possiamo quindi eseguire il calcolo senza ricorrere a regolarizzazioni ultraviolette o infrarosse. Ovvero più correttamente, ma in maniera del tutto equivalente, immaginare che si esegua la regolarizzazione, e che si omettano i termini $\propto \gamma^\mu$ (che nella teoria regolarizzata sono finiti). I termini che restano (cioè $F_2(0)$) sono finiti nel limite in cui si elimina la regolarizzazione. Questa via leggermente più complessa è seguita nel Mandl e Shaw.

6.2 Il calcolo

La grandezza da calcolare (vedi ad esempio (MS-9.48)) può essere scritta come

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \bar{u}\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{N^\mu(k, p, p')}{(k^2 + i\epsilon)((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)}\right)u \quad (6.7)$$

Dove il numeratore è dato da

$$N^\mu(k, p, p') = \gamma^\alpha(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\alpha \quad (6.8)$$

Cominciamo con lo stabilire alcune relazioni tra le variabili:

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2m^2 - 2(pp'); \quad (p' + p)^2 = 2m^2 + 2(pp') = 4m^2 - q^2 \quad (6.9)$$

Possiamo combinare i due ultimi fattori del denominatore scrivendo:

$$p' = Q + \frac{q}{2}; \quad p = Q - \frac{q}{2}; \quad \text{dove: } Q = \frac{p + p'}{2} \quad (6.10)$$

Notiamo anche che $Q^2 = m^2 + q^2/4$ che, dato che vogliamo omettere termini $O(q^2)$, possiamo riscrivere come $Q^2 = m^2 + O(q^2)$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} ((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon) &= (k^2 - 2(p'k) + i\epsilon)(k^2 - 2(pk) + i\epsilon) \\ &= ((k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 - (kq)^2) = (k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 + O(q^2) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Quindi, trascurando termini $O(q^2)$, possiamo riscrivere la (6.7) come

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\bar{u}N^\mu(k, p, p')u}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2} + O(q^2) \quad (6.12)$$

Il prossimo passo consiste nel combinare i denominatori in uno singolo, usando il trucco di Feynman (MS-10.13):

$$\begin{aligned} \bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z dz \int d^4k \frac{\bar{u}N^\mu(k, p, p')u}{(k^2 - 2z(Qk) + i\epsilon)^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z dz \int d^4k \frac{\bar{u}N^\mu(k, p, p')u}{((k - zQ)^2 - z^2Q^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z dz \int d^4k \frac{\bar{u}N^\mu(k, p, p')u}{((k - zQ)^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dove nell'ultimo passo abbiamo utilizzato il fatto che $Q^2 = m^2 + O(q^2)$. Possiamo ora eseguire un cambiamento di variabili²: $t = k - zQ$; $k = t + z(p + p')/2$, di modo che

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z dz \int d^4t \frac{\bar{u}N^\mu(t + zQ, p, p')u}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \quad (6.14)$$

²Questo passo è legittimo solo se l'integrale è convergente; per questo immaginiamo di aver fatto una regolarizzazione e di passare al limite alla fine del calcolo.

A questo punto notiamo che in $N^\mu(t + zQ, p, p')$, eq. (6.8) compariranno termini di ordine zero in t , oltre a termini lineari e quadratici in t . I termini lineari si annullano (MS-10.2). I termini quadratici in t danno un contributo proporzionale a γ^μ e possono essere omessi. A questo proposito vedere la discussione delle eq. (MS-10.62 ÷ 10.65). Possiamo allora scrivere, indicando esplicitamente i termini omessi con $(\propto \gamma^\mu)$:

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2z dz \int d^4t \frac{\bar{u}N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \quad (6.15)$$

Dato che il numeratore non dipende da t possiamo ora eseguire l'integrale in t che risulta (MS-10.1)

$$\int \frac{d^4t}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} = -i \frac{\pi^2}{2z^2m^2} \quad (6.16)$$

di modo che

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{-1}{16\pi^2m^2} \int_0^1 \frac{dz}{z} \bar{u}N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \quad (6.17)$$

Calcoliamo ora il fattore (vedi eq. 6.8)

$$X = \bar{u}N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u = \bar{u}\gamma^\alpha(p' - \frac{z(p'+p')}{2} + m)\gamma^\mu(p - \frac{z(p'+p')}{2} + m)\gamma_\alpha u$$

che con le identità (MS-A14a,b) riscriviamo

$$X = \bar{u}(p') \left(-2(p - \frac{z(p'+p')}{2})\gamma^\mu(p' - \frac{z(p'+p')}{2}) + 4m(1-z)(p+p')^\mu - 2m^2\gamma^\mu \right) u(p)$$

L'ultimo termine è $(\propto \gamma^\mu)$ e può essere omesso. Nel primo termine utilizziamo l'equazione di Dirac usando a sinistra $p' = p' - q = m - q$ ed a destra $p' = p + q = m + q$:

$$\begin{aligned} X &= \bar{u}(p') \left[-2 \left(m(1-z) - q(1 - \frac{z}{2}) \right) \gamma^\mu \left(m(1-z) + q(1 - \frac{z}{2}) \right) + 4m(1-z)(p+p')^\mu \right] u(p) + (\propto \gamma^\mu) \\ &= \bar{u}(p') \left[4m(1-z)(1 - \frac{z}{2}) \frac{1}{2} [q, \gamma^\mu] + 4m(1-z)(p+p')^\mu \right] u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \end{aligned}$$

e usando la relazione $[q, \gamma^\mu] = 2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, e l'identità di Gordon, otteniamo

$$\bar{u}N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u = -2mz(1-z)\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \quad (6.18)$$

Infine, sostituendo nella (6.17), ed eseguendo l'integrale su z ,

$$\bar{u}e^2\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{e^2}{8\pi^2} \bar{u} \frac{1}{2m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu u + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \quad (6.19)$$

Paragonando con la eq. (6.5) otteniamo che

$$e^2F_2(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (6.20)$$

Quindi all'ordine α il momento magnetico di un leptone è $1 + \frac{\alpha}{2\pi}$ magnetoni di Bohr.

Bibliografia

- [1] Meccanica Quantistica Relativistica, Appunti AA 2006-2007.
- [2] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.
- [3] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.
- [4] P. A. M. Dirac, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Band 3, Heft 1 (1933), Ristampato in *Quantum Electrodynamics*, a cura di J. Schwinger, Dover, 1958.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1994.
- [6] J.D.Bjorken, S.Drell, op. cit. I Cap. 2
- [7] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.
- [8] L.Landau, E.Lifchitz, Mecanique Quantique, Theorie Non Relativiste, ed. Mir, 1967, Cap.1.
- [9] H. Lehman, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).
- [10] Michael E. Peskin e Daniel V Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.
- [11] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Cap. VI, Oxford University Press.
- [12] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.
- [13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.II, Cambridge University Press, 1995.
- [14] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B 139** (1978) 1.
- [15] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.I, Cambridge University Press, 1995.
- [16] H. Jeffreys e M. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1972
- [17] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1972.