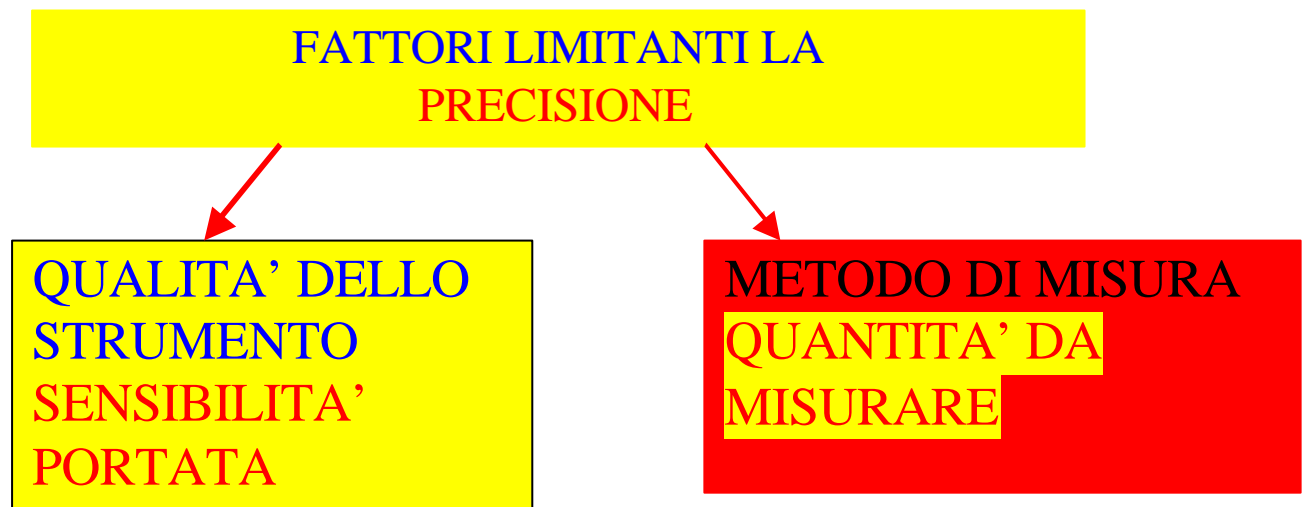




INCERTEZZA NELLE MISURE ED ERRORI SPERIMENTALI

1. NON E' POSSIBILE FARE MISURE
INFINITAMENTE PRECISE :

PRECISIONE \neq \rightarrow ERRORE $\neq 0$!





**PRECISIONE E SENSIBILITA' SONO
CARATTERISTICHE DIVERSE DI UNO
STESSO STRUMENTO.**

**ESEMPIO: MISURA DI UNA LUNGHEZZA
CON DUE RIGHELLI DI
UGUALE PRECISIONE**

HANNO LA STESSA SENSIBILITA'?

NO

**INFATTI UN RIGHELLO PUO' AVERE LE
SOLE DIVISIONI DEI CM E L' ALTRO
ANCHE QUELLE DEI MILLIMETRI.
TUTTAVIA CONFRONTANDO I DUE
RIGHELLI POSSIAMO VERIFICARE CHE
LA DISTANZA TRA LE DIVISIONI DEI
CENTIMETRI DEL PRIMO E' UGUALE A 10
DIVISIONI DEL SECONDO RIGHELLO.**

CONCLUSIONE

**I DUE STRUMENTI SONO UGUALMENTE
PRECISI MA HANNO DIFFERENTI
SENSIBILITA'**

**CERCHIAMO ORA DI CAPIRE BENE IL
SIGNIFICATO DI SENSIBILITA' DI UNO
STRUMENTO CON UN ALTRO ESEMPIO.**



CONSIDERIAMO UNA MISURA DI MASSA

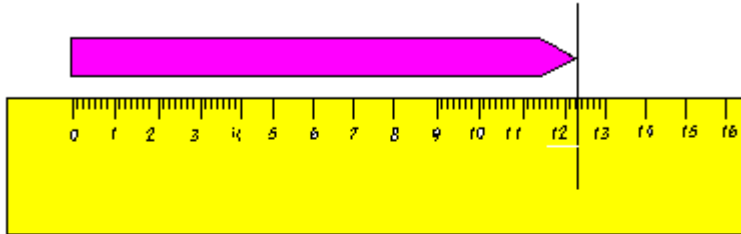
SE PESIAMO UN FINOCCHIO CON UNA BILANCIA DA CUCINA O CON QUELLA DI UN NEGOZIO TROVEREMMO CHE LA SUA MASSA E' DI CIRCA 150 g. SE PROViamo AD ESEGUIRE LA MISURA SU UNA BILANCIA PESA-PERSONE VERIFICHIAMO CHE L'INDICE DELLA BILANCIA NEPPURE SI SPOSTA: **LA BILANCIA PESA-PERSONE NON E' DUNQUE SUFFICIENTEMENTE SENSIBILE PER MISURARE UNA MASSA DI 150 g.**

OSSERVIAMO PERO' CHE TALE BILANCIA PUO' MISURARE MASSE DI DECINE DI CHILOGRAMMI MENTRE LA BILANCIA DA CUCINA NON E' IN GRADO DI FARLO.

CONCLUSIONE

LA BILANCIA PESA-PERSONE E' MENO SENSIBILE E PRECISA DI QUELLA DA CUCINA MA HA UNA PORTATA MAGGIORE

STRUMENTI BEN COSTRUITI HANNO PRECISIONE E SENSIBILITA' SIMILI



**ESEGUIAMO UNA MISURA DI LUNGHEZZA
CON UN RIGHELLO CHE HA LA
PRECISIONE AL mm. SUPPONIAMO DI
AVER TROVATO CHE $L=12.5\text{ cm} \circ 125\text{ mm}$.
L'OGGETTO IN QUESTIONE E'
ESATTAMENTE LUNGO 125 mm?**

NO

**PERCHE' SE RIPETIAMO LA MISURA UN
CERTO NUMERO n DI VOLTE
TROVEREMMO CHE LA LUNGHEZZA L
MISURATA NON SARA' SEMPRE UGUALE
A 125 mm MA FLUTTUERA' AD ESEMPIO
COME E' MOSTRATO NELLA TABELLA**



**PER $n=8$ MISURAZIONI DI LUNGHEZZA
DELLO **STESSO OGGETTO****

n	L(mm)
1	125.0
2	125.3
3	125.7
4	124.6
5	124.8
6	126.0
7	125.9
8	124.3

**SI POTRA' DIRE CHE LA LUNGHEZZA L HA
UN' INCERTEZZA DI 1 mm O AL MEGLIO DI
 $\pm 0.5\text{mm}$.**

MA QUAL E' IL VERO VALORE DI L?

**DOBBIAMO STABILIRE DELLE REGOLE
CHE CI PERMETTONO DI ESEGUIRE **STIME**
DEL VERO VALORE DELLE MISURE CHE
EFFETTUIAMO: ALTRIMENTI DETTO PER
OGNI SERIE DI MISURAZIONI ESEGUITE SI
EFFETTUA LA ESTRAZIONE DI UN
CAMPIONE DALLA POPOLAZIONE DI
INFINITE MISURE POSSIBILI DELLA
STESSA GRANDEZZA E DOBBIAMO
TROVARE I CRITERI PER STIMARE IL**



PARAMETRO DELLA POPOLAZIONE A PARTIRE DAL CAMPIONE.

QUINDI SE EFFETTUIAMO UNA SOLA MISURAZIONE DI LUNGHEZZA, NEL NOSTRO ESEMPIO $L=125$ mm IN BASE A QUANTO SI E' DETTO NON POSSIAMO AFFERMARE CHE L E' "ESATTAMENTE LUNGA 125mm" E QUESTO PERCHE' LA AFFERMAZIONE SIGNIFICHEREBBE CHE L NON E' PIU' LUNGA NE' PIU' CORTA DEL VALORE MISURATO ad esempio NEMMENO DI UN MILIARDESIMO DI mm!

QUESTA AFFERMAZIONE SAREBBE ASSURDA PERCHE' LA SENSIBILITA' DELLO STRUMENTO ADOPERATO PERMETTE DI "STIMARE" LA LUNGHEZZA ENTRO ± 0.5 mm : L'INTERVALLO ENTRO CUI **PUO' STARE LA "**VERA LUNGHEZZA**" E' LA **INCERTEZZA DELLA MISURA** O**

ERRORE SPERIMENTALE DELLA MISURA

ATTENZIONE: ERRORE E "SBAGLIO" NON SONO LA STESSA COSA!

ERRORE SPERIMENTALE ED INCERTEZZA SPERIMENTALE SONO SINONIMI.

CONSIDERAZIONE GENERALE SU **ERRORI MASSIMI E** **SEMIDISPERSIONE MASSIMA**

SI POSSONO PRESENTARE DUE CASI:

- a) ESEGUENDO UNA MISURA PIU' VOLTE CON UNO STRUMENTO DI ASSEGNATA SENSIBILITA' SI OTTIENE SEMPRE LA STESSA MISURA .**

AD ESEMPIO RIPETENDO PIU' VOLTE CON UN DOPPIO DECIMETRO LA MISURA DI UNA LUNGHEZZA SI OTTIENE SEMPRE $L=13.4$ cm

ESSENDO LA SENSIBILITA' DEL REGOLO PARI AD 1mm L'INCERTEZZA SULLA MISURA SARA' PROPRIO DI 1 mm.

QUESTA INCERTEZZA PUO' ESSERE CONSIDERATA COME

L'ERRORE MASSIMO DA ATTRIBUIRE ALLA NOSTRA MISURA. IN ALTRE PAROLE 1 mm RAPPRESENTA L'INTERVALLO DI INCERTEZZA DELLA NOSTRA MISURA : IL VALORE CHE OTTENIAMO LO POSSIAMO ESPRIMERE COME: (13.40 ± 0.05) cm E



SIGNIFICA CHE LA NOSTRA MISURA PUO' ESSERE COMPRESA TRA 13.4_5 E 13.3_5 cm IN QUESTO MODO INDICHIAMO COME INTERVALLO DI INCERTEZZA 1 mm E L'ERRORE MASSIMO E' LA META' DI QUESTO INTERVALLO CIOE' 0.5 mm

REGOLA

INCERTEZZA°SENSIBILITA'

ERRORE MASSIMO°SENSIBILITA'/2

- b) ESEGUENDO PIU' VOLTE UNA MISURA CON UNO STRUMENTO DI ASSEGNATA SENSIBILITA' SI OTTIENE UNA SERIE DI MISURE TRA LORO PIU' O MENO DIFFERENTI.**

ESEMPIO: MISURA CON UN DOPPIO DECIMETRO DEL DIAMETRO DI UN CILINDRO.

DATA LA TIPOLOGIA DELLA MISURA E DEL MODO IN CUI PUO' EFFETTUARSI SI POTREBBERO OTTENERE I SEGUENTI RISULTATI ESPRESSI IN cm:

13.1;13.4;13.5;13.1;13.0;13.6;13.2;13.2;13.4;13.5; 13.3 ETC.

SI PUO' VEDERE CHE I RISULTATI SI DISCOSTANO QUESTA VOLTA L'UNO



DALL'ALTRO PIU' DI QUANTO SIA LA SENSIBILITA' DELLO STRUMENTO E CIOE' $0.1\text{cm}^\circ 1\text{mm}$. C'E' QUINDI IL PROBLEMA DI COME ESPRIMERE LA MISURA CON UN UNICO VALORE E CON LA INCERTEZZA CHE IN QUESTO CASO RISULTA MAGGIORE DELLA SENSIBILITA' DELLO STRUMENTO USATO.

**IL PROBLEMA SI RISOLVE COSI':
INDICHIAMO CON D_{max} E D_{min} I VALORI MASSIMO E MINIMO TROVATI PER LE MISURE. IL VALORE INTERMEDIO SARA' DATO DA :**

$$\mathbf{D_{int}=(D_{\text{max}}+D_{\text{min}})/2}$$

E LA INCERTEZZA SARA' DATA DA :

$$\mathbf{dD=(D_{\text{max}}-D_{\text{min}})/2}$$

CHE SI DEFINISCE ANCHE COME

SEMIDISPERSIONE MASSIMA

IN QUESTO CASO LA SEMIDISPERSIONE MASSIMA RAPPRESENTA L'ERRORE MASSIMO DELLA MISURA. NEL CASO ANALIZZATO SI HA DUNQUE CHE :



$$D = D_{int} \pm dD$$

E CIOE' $D_{int} = (13.6 - 13.0) / 2 = 13.3 \text{ cm}$

E $dD = (13.6 - 13.0) / 2 = 0.3 \text{ cm}$

$D = D_{int} \pm dD = (13.3 \pm 0.3) \text{ cm}$

→ $E_{max} = 0.3 \text{ cm} > 0.01 \text{ cm}$ (SENSIBILITA' DEL DOPPIO DECIMETRO USATO)

N.B. QUESTO METODO SI APPLICA SE $dD >$ SENSIBILITA' DELLO STRUMENTO USATO.

IL PROBLEMA DELLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI DI MISURA

SUPPONIAMO DI VOLER MISURARE UN'AREA.

CONSIDERIAMO UN RETTANGOLO DI LATI a E b E NE VOGLIAMO MISURARE L'AREA. POSSIAMO PROCEDERE IN DUE MODI:

- a) MISURA INDIRETTA DEL'AREA
OTTENUTA VALUTANDO LE LUNGHEZZE DEI LATI a E b E POI CALCOLARE L'AREA

$$A = a \cdot b$$



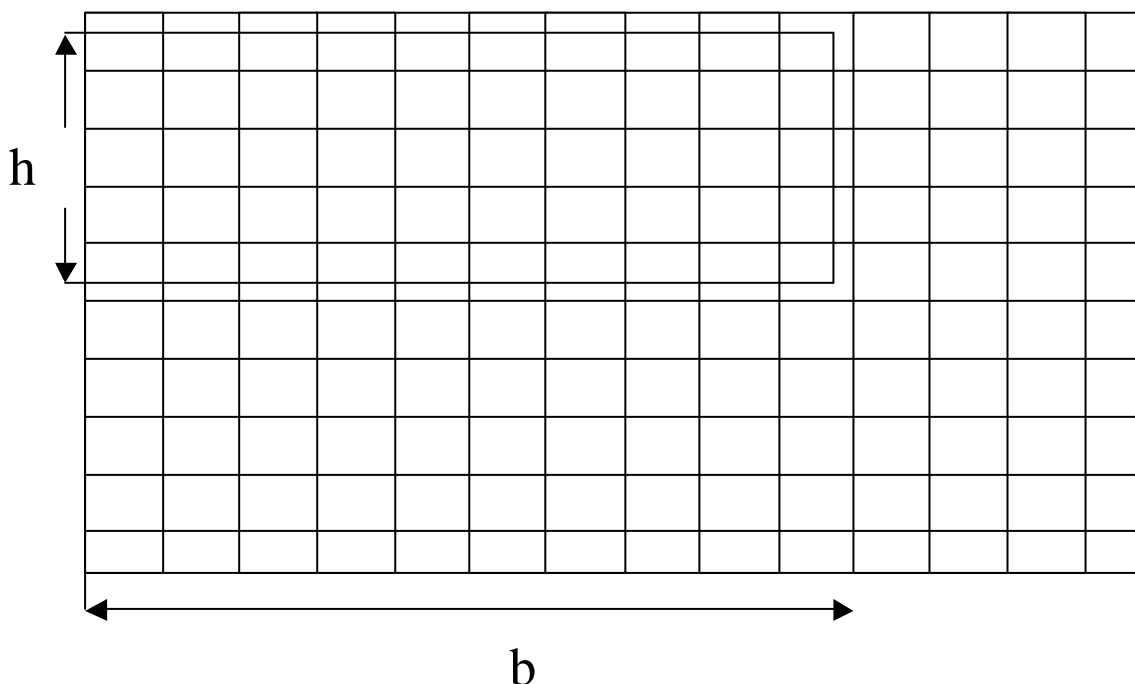
**b) MISURA DIRETTA DELL'AREA
MEDIANTE UN CAMPIONE DI AREA
USATO COME UNITA' DI MISURA E CHE
COME STRUMENTO AVRA' UNA
ASSEGNATA PRECISIONE E
SENSIBILITA'.**

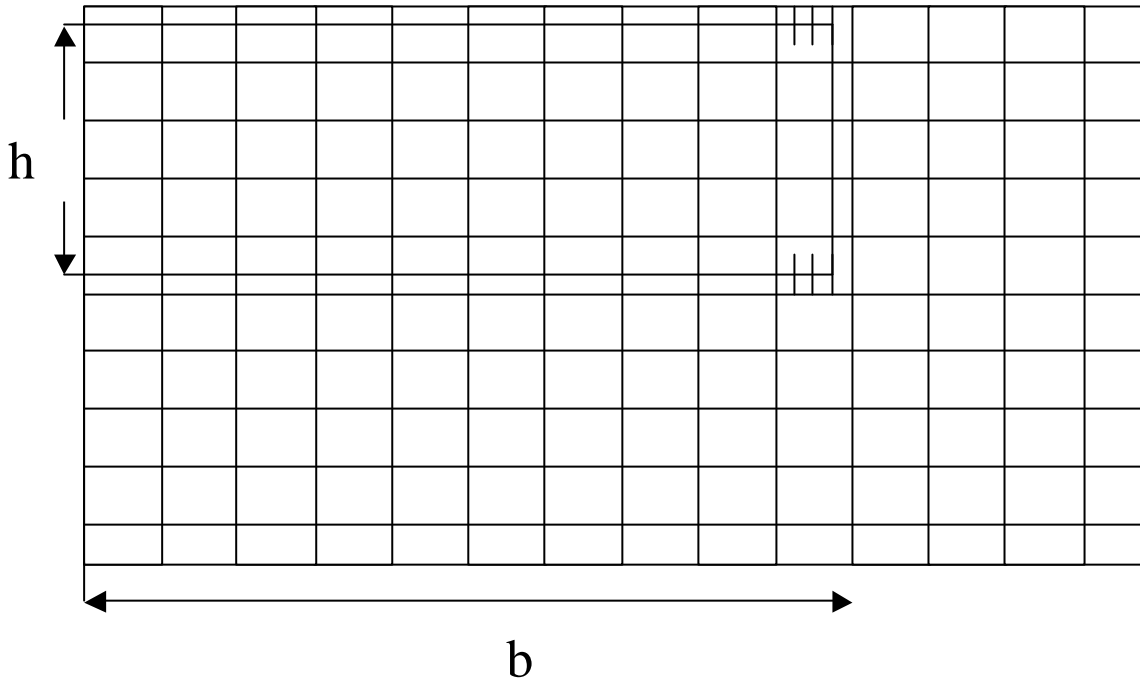
a) MISURA DIRETTA

STRUMENTI ADOPERATI:

- 1) CARTA QUADRETTATA CON
QUADRETTI DI 1 cm DI LATO**
- 2) CARTA QUADRETTATA CON
QUADRETTI DI 1 mm DI LATO**

**IL SECONDO STRUMENTO HA
EVIDENTEMENTE UNA SENSIBILITA' CHE
E' 10 VOLTE MAGGIORE DI QUELLA DEL
PRIMO.**





CASO A: $b \rightarrow 9\text{cm} < b < 10\text{ cm}$

$$b = (9.5 \pm 0.5)\text{cm}$$

$h \rightarrow 4\text{cm} < h < 5\text{ cm}$

$$h = (4.5 \pm 0.5)\text{cm}$$

CASO B: $b = (98.0 \pm 0.5)\text{mm}$

$$h = (45.5 \pm 0.5)\text{mm}$$

CASO A: $\rightarrow \text{AREA} = b \times h = (9.5 \times 4.5)\text{ cm}^2$

$$\text{AREA} = 42.75\text{ cm}^2 \rightarrow 4275\text{ mm}^2$$



**CASO B: → AREA = $b \times h = (98 \times 45.5) \text{ mm}^2$
AREA = 4459 mm^2**

LE DUE MISURE DELLA STESSA AREA SONO DIFFERENTI GIA' DALLA SECONDA CIFRA DECIMALE!

**NEL CASO A → $(9 \text{ } \& \text{ } b \text{ } \& \text{ } 10) \text{ cm}$;
 $(4 \text{ } \& \text{ } h \text{ } \& \text{ } 5) \text{ cm}$;**

QUINDI $(36 \text{ } \& \text{ } A \text{ } \& \text{ } 50) \text{ cm}^2$

**DA CUI SI HA : $A_{\text{int}} = (36 + 50) / 2 = 43 \text{ cm}^2$
 $dA = (50 - 36) / 2 = 7 \text{ cm}^2$**

$A = A_{\text{int}} \pm dA = (43 \pm 7) \text{ cm}^2$

CONTROLLANDO SI VEDE CHE

$A + dA = 50 \text{ cm}^2$; $A - dA = 36 \text{ cm}^2$

7 cm^2 RAPPRESENTA SIA

L'INCERTEZZA CHE L'ERRORE MASSIMO DELLA MISURA PER LA MISURA A MAGGIORE SENSIBILITA' FACENDO I CONTI ALLO STESSO MODO TROVIAMO:

$A = (4459.25 \pm 71.75) \text{ mm}^2$ DA QUI LA REGOLA:

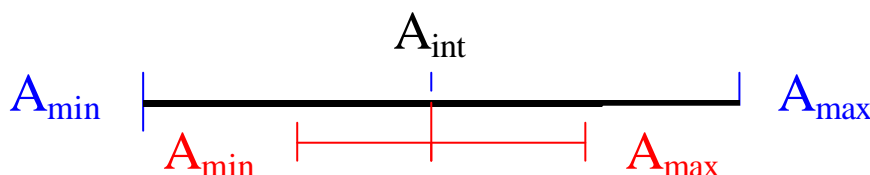
**MISURANDO UNA STESSA GRANDEZZA PIU' VOLTE, SIA CON LO STESSO STRUMENTO CHE CON STRUMENTI DI DIVERSA PRECISIONE E SENSIBILITA' I RISULTATI DELLE MISURE DEVONO ESSERE UGUALI
ENTRO LE INCERTEZZE SPERIMENTALI
DATE DAGLI ERRORI MASSIMI**

VEDIAMO ORA CHE ANCHE NEL CASO DI MISURA DIRETTA DI A VERRA' RISPETTATA QUESTA REGOLA. NEL PRIMO CASO A PIU' BASSA SENSIBILITA' SI OTTERRA' $(36 < A < 50) \text{cm}^2$

$$A = (43 \pm 7) \text{cm}^2$$

OVVIAMENTE E' SOLO UN CASO CHE IL VALORE DI A OTTENUTO DIRETTAMENTE RISULTA COINCIDENTE CON QUELLO OTTENUTO PER VIA INDIRETTA

IN GENERALE CI DOBBIAMO ASPETTARE CHE LE MISURE FATTE CON METODI DIVERSI CADANO NELL'INTERVALLO DI INCERTEZZA DETERMINATO DAL METODO A SENSIBILITA' PEGGIORE



FORMALIZZEREMO ORA IL DISCORSO SULLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI DI MISURA APPLICANDOLO AGLI ERRORI MASSIMI NELLE MISURE INDIRETTE. PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE L'ESEMPIO DELL'AREA MISURATA TRAMITE LE LUNGHEZZE DELLA BASE b E DELL'ALTEZZA h

$$\text{Hp. } \delta h \ll h ; \delta b \ll b$$

$$h = h_{\text{int}} \pm \delta h \rightarrow h_{\text{int}} = (h_{\text{max}} + h_{\text{min}})/2$$

$$\rightarrow \delta h = (h_{\text{max}} - h_{\text{min}})/2$$

$$b = b_{\text{int}} \pm \delta b \rightarrow b_{\text{int}} = (b_{\text{max}} + b_{\text{min}})/2$$

$$\rightarrow \delta b = (b_{\text{max}} - b_{\text{min}})/2$$

$A_{\text{int}} = (A_{\text{max}} + A_{\text{min}})/2$	$\delta A = (A_{\text{max}} - A_{\text{min}})/2$
--	--

$$A_{\text{max}} = h_{\text{max}} \cdot b_{\text{max}} = (h_{\text{max}} + \delta h)(b_{\text{max}} + \delta b)$$

$$A_{\text{min}} = h_{\text{min}} \cdot b_{\text{min}} = (h_{\text{min}} - \delta h)(b_{\text{min}} - \delta b)$$

AVVALENDOCI DELL'IPOTESI FATTA
QUANDO ESEGUIAMO I PRODOTTI
TRASCUREREMO TUTTI I PRODOTTI DEL
TIPO $\delta h \cdot \delta b$ PERCHE' $\delta h \cdot \delta b \ll \delta h$ O δb
(SONO INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE
AL 1°) QUINDI

$$A_{\text{max}} \approx h_{\text{max}} \cdot b_{\text{max}} + b_{\text{max}} \cdot \delta h + h_{\text{max}} \cdot \delta b \quad \text{E}$$

$$A_{\text{min}} \approx h_{\text{min}} \cdot b_{\text{min}} - b_{\text{min}} \cdot \delta h - h_{\text{min}} \cdot \delta b$$

$$A_{\text{int}} = (A_{\text{max}} + A_{\text{min}})/2 = h_{\text{int}} \cdot b_{\text{int}}$$

$$\delta A = (A_{\text{max}} - A_{\text{min}})/2 = b_{\text{int}} \cdot \delta h + h_{\text{int}} \cdot \delta b$$



$$A = f(h, b) = b \cdot h \rightarrow dA = (\partial A / \partial h) \cdot dh + (\partial A / \partial b) \cdot db$$

$$dA = b \, dh + h \, db$$

$$(\partial A / \partial h) = b ; (\partial A / \partial b) = h$$

DA QUI SI DEDUCE LA REGOLA CHE SE $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$ E' UNA GRANDEZZA MISURATA INDIRETTAMENTE ATTRAVERSO LA MISURA DIRETTA DELLE x_i L'ERRORE MASSIMO SU y SI DETERMINA DA:

$$\delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \delta x_2 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \right| \delta x_3 + \dots \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| \delta x_n$$

**APPLICHIAMO LA REGOLA AD UN ALTRO ESEMPIO CHE CI TORNERA' UTILE:
SUPPONIAMO DI VOLER DETERMINARE LA DENSITA' ρ DI UN SOLIDO DA MISURE DI MASSA M E DI VOLUME V**

$$\rho = M/V \rightarrow \rho = f(M, V) = M/V$$

$$\delta \rho = \left| \frac{\partial \rho}{\partial M} \right| \delta M + \left| \frac{\partial \rho}{\partial V} \right| \delta V$$

$$\delta p = \frac{\delta M}{V} - \frac{M}{V^2} \delta V$$

**PRENDIAMO I VALORI ASSOLUTI PER
CONSIDERARE GLI ERRORI MASSIMI E SI
HA:**

$$\delta p = \frac{\delta M}{V} + \frac{M}{V^2} \delta V$$

DA CUI LA REGOLA:

**L'ERRORE MASSIMO DELLA GRANDEZZA
OTTENUTA PER VIA INDIRETTA SI
OTTIENE FACENDO IL DIFFERENZIALE
TOTALE DELLA GRANDEZZA STESSA E
CONSIDERANDO PER IL CALCOLO I
VALORI ASSOLUTI DELLA DERIVATE
PARZIALI**

ERRORI RELATIVI

**GLI ERRORI RELATIVI SI OTTENGONO
DAL RAPPORTO TRA L'ERRORE O
INCERTEZZA DI UNA GRANDEZZA E IL**



**VALORE MEDIO DELLA GRANDEZZA
STESSA:**

$$\mathbf{x \pm d}$$

GRANDEZZA X DI ERRORE ASSOLUTO $\pm d$

ERRORE RELATIVO $\rightarrow e_r = \pm d/x$

ERRORE RELATIVO PERCENTUALE \rightarrow

$$\mathbf{e_{rp} = \pm (d/x) \times 100}$$

ESEMPIO

$$\mathbf{L = (4.87 \pm 0.05) \text{ m}}$$

**$d = \pm 0.05 \text{ m}$ ERRORE ASSOLUTO
(MASSIMO)**

$$\mathbf{e_r = \pm d/L = \pm (0.05/4.87) = \pm 0.010}$$

$$\mathbf{e_{rp} = \pm (d/L) \times 100 = \pm 1\%}$$

**L'INFORMAZIONE DESUMIBILE E'
ABBASTANZA EVIDENTE E CI PERMETTE DI**



**CONFRONTARE SERIE DI MISURE DIFFERENTI
IN QUANTO ABBIAMO EFFETTUATO UNA
PROCEDURA DI ‘NORMALIZZAZIONE’ DELLE
MISURE STESSE
DI PARTICOLARE UTILITA’ E’ L’USO DEGLI
ERRORI RELATIVI NEL CASO DELLA
PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI.
ESEMPI:**

$$A = b \cdot h$$

$$\delta A = h \cdot \delta b + b \cdot \delta h$$

ERRORE RELATIVO

–

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{h \cdot \delta b}{h \cdot b} + \frac{b \cdot \delta h}{b \cdot h}$$

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta h}{h}$$

QUINDI SI PUO' CONCLUDERE CHE:

$$e_{rA} = e_{rb} + e_{rh}$$

**L'ERRORE RELATIVO MASSIMO SU
 A
SI OTTIENE DALLA SOMMA DEGLI**

ERRORI RELATIVI SU **h E b**

FACCIAMO ORE UN ESEMPIO UTILE PER
LE ESPERIENZE DI LABORATORIO:
CALCOLO DELL'ERRORE PER UNA

$$\rho = \frac{m}{V}$$

MISURA INDIRETTA DI DENSITA'

$$\delta \rho = \frac{m \cdot \delta V}{V \cdot V} + \frac{\delta m}{V} =$$

$$= \frac{\delta V}{V} \cdot \rho + \frac{\delta m}{m} \cdot \rho$$



RICORDIAMO CHE

$$\frac{1}{V} = \frac{\rho}{m}$$

QUINDI SI HA :

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta m}{m}$$

$$e_{\rho} = e_V + e_m$$

**SUPPONIAMO CHE L'OGGETTO
CONSIDERATO SIA UN CILINDRO DI CUI SI
E' MISURATO IL DIAMETRO d , L'ALTEZZA
 h E LA MASSA m CON I RISPETTIVI
ERRORI . VOGLIAMO DETERMINARE
L'ERRORE RELATIVO E L'ERRORE
ASSOLUTO SULLA DENSITA'
DETERMINATA INDIRETTAMENTE DAL
RAPPORTO TRA MASSA E VOLUME DEL
CILINDRO.**

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$$

$$\delta V = \frac{\pi \cdot d \cdot \delta d}{2} \cdot h + \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \delta h$$

**DIVIDENDO ENTRAMBI I MEMBRI PER V
SI HA:**

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{2 \cdot \delta d}{d} + \frac{\delta h}{h}$$

E IN DEFINITIVA

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho}{\rho} &= \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta m}{m} = \\ &= \frac{2 \cdot \delta d}{d} + \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta m}{m} \end{aligned}$$

PER UN CILINDRO CAVO DI DIAMETRO ESTERNO d_E E DIAMETRO INTERNO d_I ED ALTEZZA h LA PROCEDURA E' ANALOGA: OCCORRE TROVARE IL DIFFERENZIALE TOTALE DEL VOLUME V CHE QUESTA VOLTA E':

$$V = \frac{\pi \cdot (d_E - d_I)^2}{4} \cdot h$$

$$\delta V = \frac{\pi \cdot d_E \cdot \delta d_E}{2} \cdot h + \frac{\pi \cdot d_I \cdot \delta d_I}{2} \cdot h +$$

$$\frac{\pi \cdot (d_E - d_I)^2}{4} \cdot \delta h$$

QUINDI SI HA:

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{2 \cdot \delta d_E}{d_E} + \frac{2 \cdot \delta d_I}{d_I} + \frac{\delta h}{h}$$

**CON PASSAGGI ANALOGHI AL CASO
PRECEDENTE SI AVRA':**

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho}{\rho} &= \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta m}{m} = \\ &= \frac{2 \cdot \delta d_E}{d_E} + \frac{2 \cdot \delta d_I}{d_I} + \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta m}{m} \end{aligned}$$