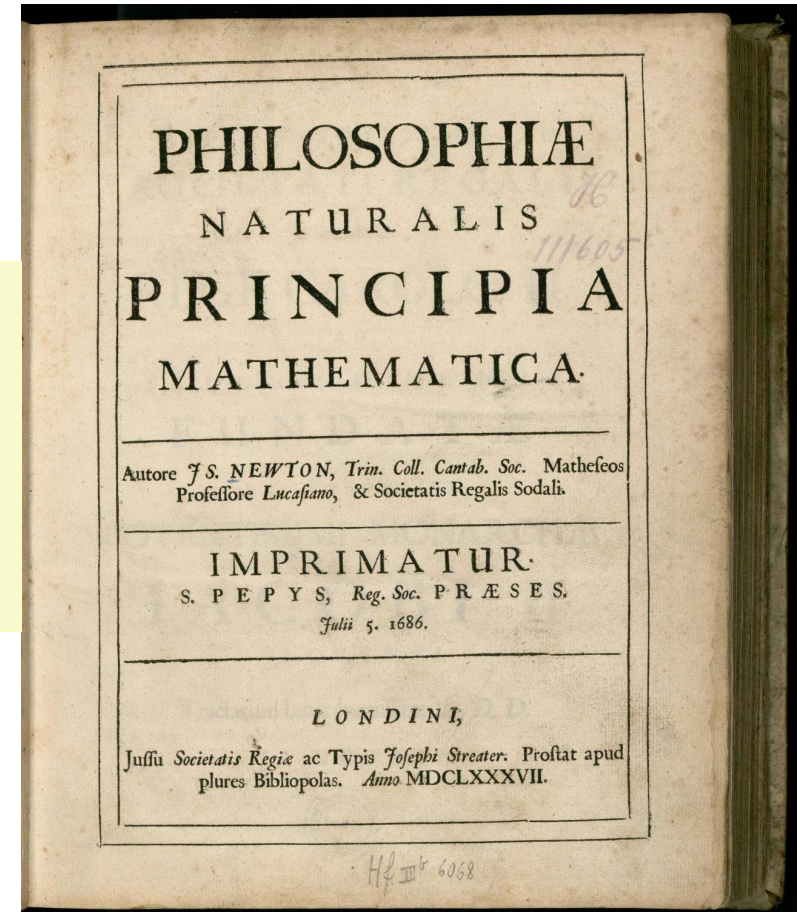


Laboratorio di fisica della gravitazione: misure di precisione a Napoli

Prof. Fabio Garufi

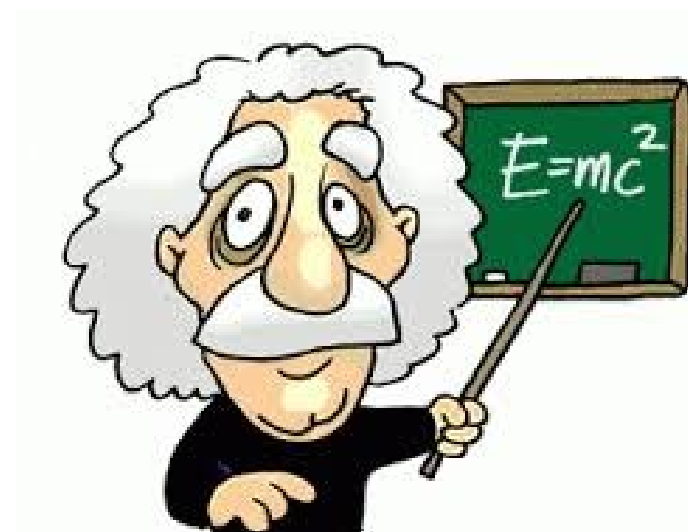
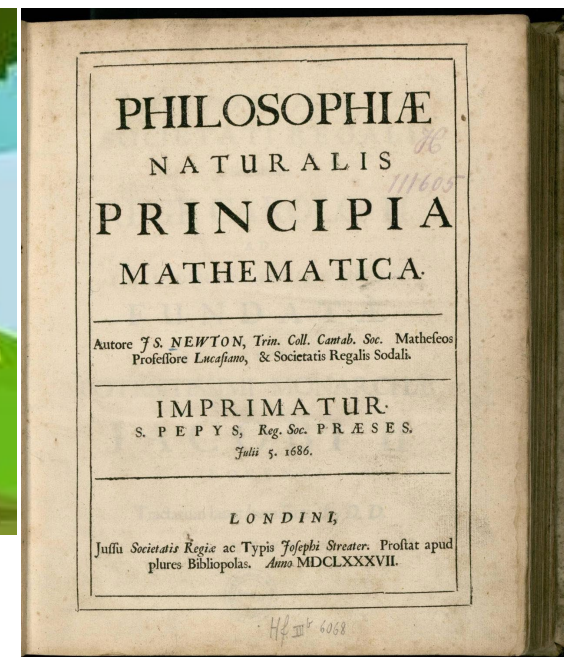
Università degli Studi di Napoli Federico II

In principio era Newton!



Cronologia

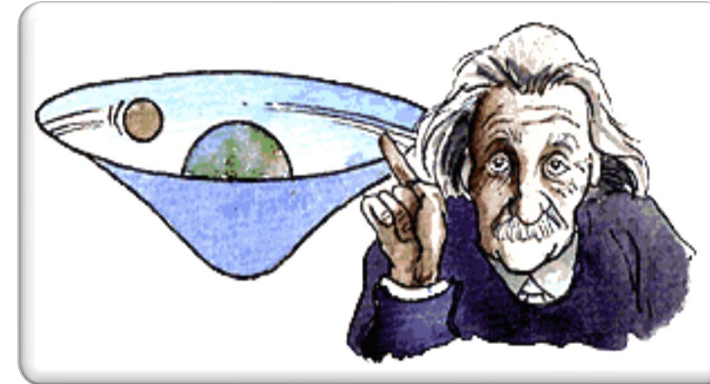
- 1685: Isaac Newton scrive i Principii matematici della filosofia naturale in cui dice che la forza che attira le cose verso terra è la stessa che muove i pianeti
- Novembre 1915: Einstein pubblica la Teoria della Relatività Generale che parla di spazio curvo
- 1916: Conseguenza della curvatura: **onde gravitazionali**



La rivoluzione della gravitazione

Newton

- Lo spazio è piatto, il tempo è assoluto
- La gravità è una forza fra due masse
- La forza di gravità agisce istantaneamente a qualunque distanza

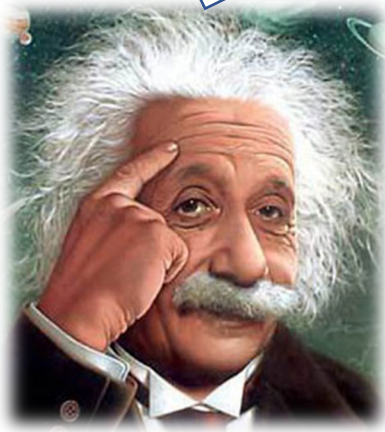


Einstein

- Lo spazio e il tempo sono connessi
- **Lo spazio-tempo quadridimensionale** è piegato dalle masse, e la gravità è l'effetto di questa curvatura.
- La gravità si propaga alla velocità della luce ($c=299792 \text{ km/h}$), quindi non è istantanea.

La rivoluzione della gravitazione

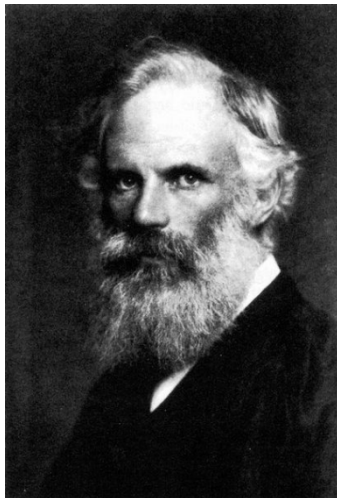
Immaginate lo spazio-tempo come un telo su cui appoggiamo masse sempre più pesanti. Il telo si deformerà sotto il peso della massa.



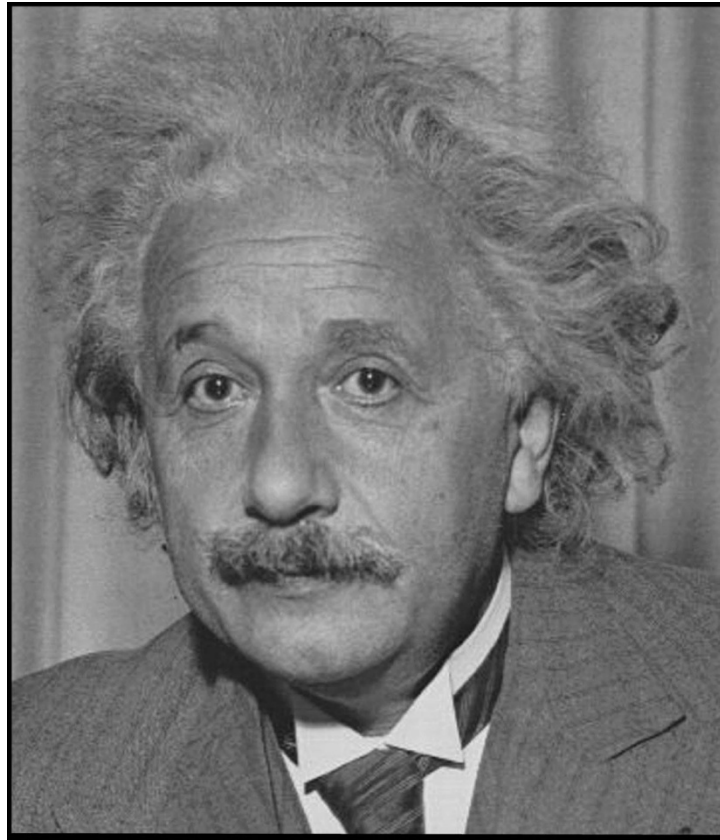
1905-1916 Relatività ristretta e generale



H. Poincaré



G. F. Fitzgerald

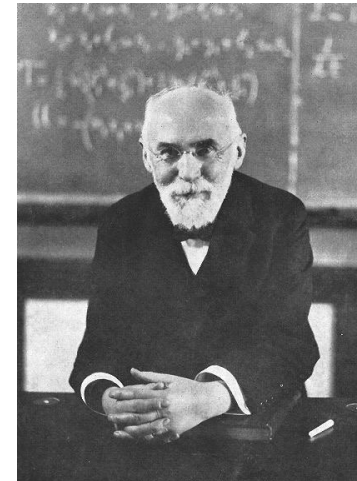


A. Einstein

2023 - Fabio Garufi

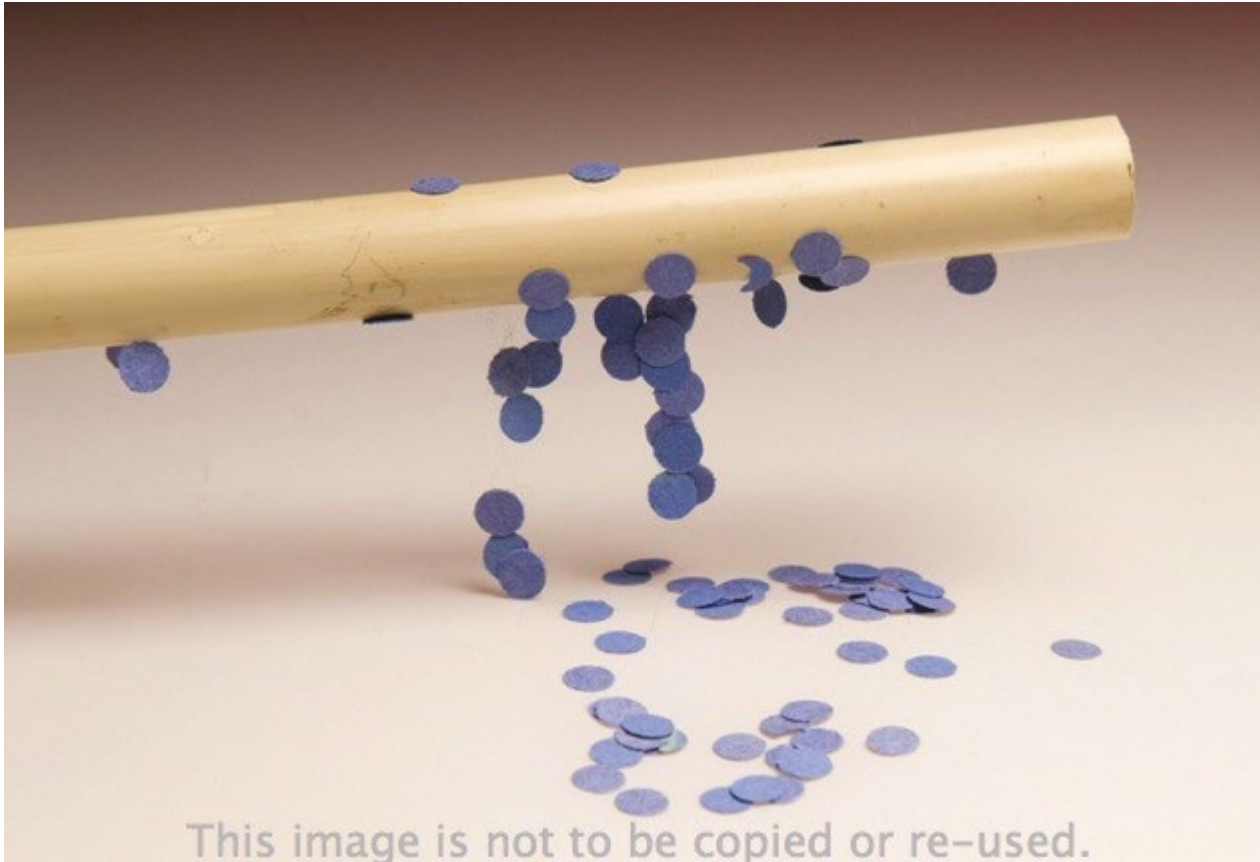


H. Minkowski



H. A. Lorentz

Quanto è piccola la forza Gravitazionale?



$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{d^2} = m_I a$$

$$F_G = G \frac{M m_G}{R^2} = m_I g$$

Dove d è la distanza fra le cariche (la bacchetta e i pezzetti di carta) e R il raggio della Terra; m è la massa dei pezzetti di carta e M quella della Terra.

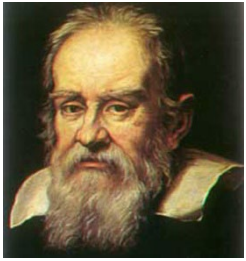
Quando $a=g$, allora la forza elettrostatica che agisce sui pezzetti di carta è uguale alla forza di gravità.

Niente dice a priori che $m_G = m_I$

Ci vuole tutta la massa della Terra per generare l'attrazione che viene vinta dai pochi elettroni strappati alla bacchetta di plastica!!!

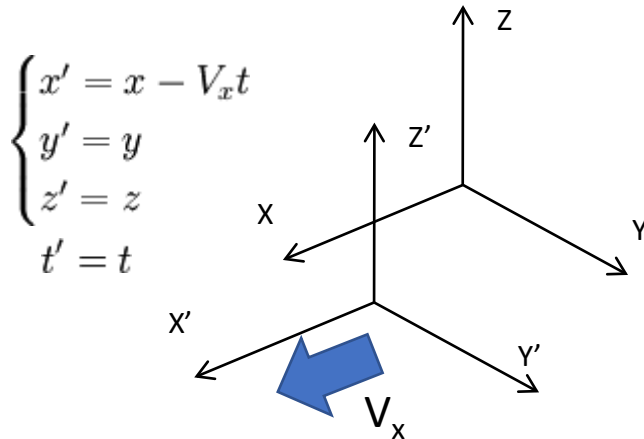
$$G = 6,67 \times 10^{-11}$$

Il cambiamento comincia con la Relatività ristretta

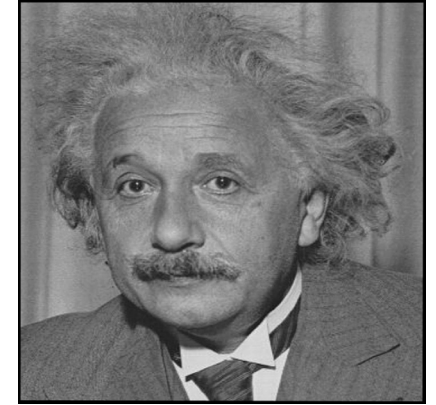


Galileo Galilei

«Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio[...] : fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; ch  (pur di moto uniforme e non fluttuante in qua e in l ) voi non riconoscerete una minima mutazione



- 1) Tutti i fenomeni fisici si presentano allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento **inerziali**
- 2) La velocit  della luce nel vuoto   la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali ed in qualunque direzione



A. Einstein

c=costante

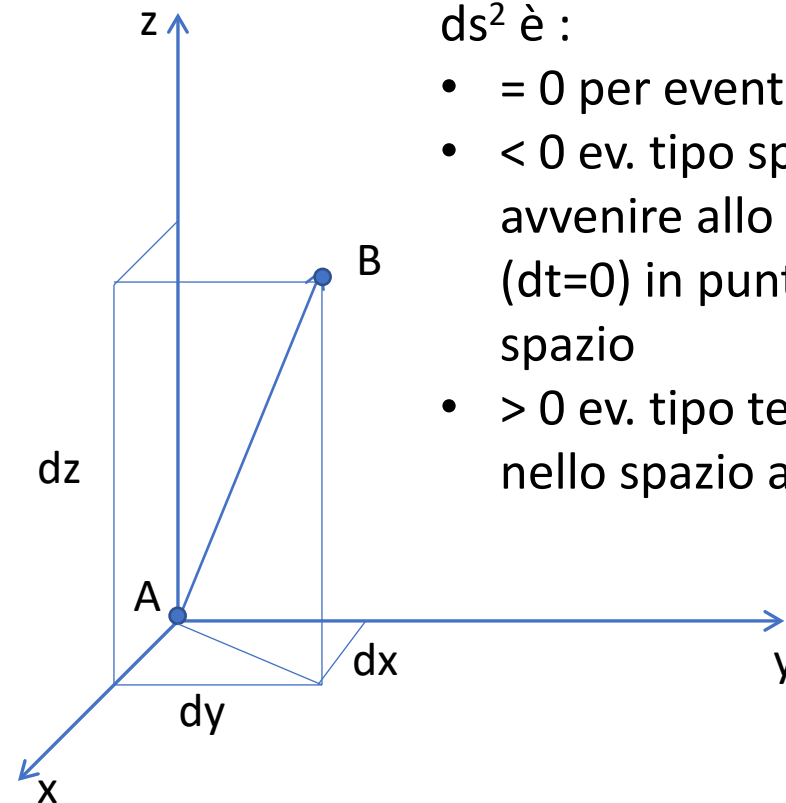


In un sistema **inerziale** due punti A e B, ciascuno con un osservatore dotato di orologio. L'orologio di B   sincrono con quello di A quando un segnale luminoso partito da A al tempo t_A arriva in B al tempo t_B , tale che $\frac{AB}{t_B - t_A} = c$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (x - V_x t) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \left(t - \frac{V_x}{c^2} x \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Relatività ristretta

- Il tempo, o meglio ct è una coordinata come le altre
- Lo spazio a 4 coordinate (ct, x, y, z) prende il nome di spazio-tempo (o cronotopo, dal greco)
- Nello spazio-tempo, possiamo calcolare la distanza fra due punti (eventi) con il teorema di pitagora.
- Per due eventi simultanei $\overline{AB}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$
- si definisce una distanza spazio-temporale generica
$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$



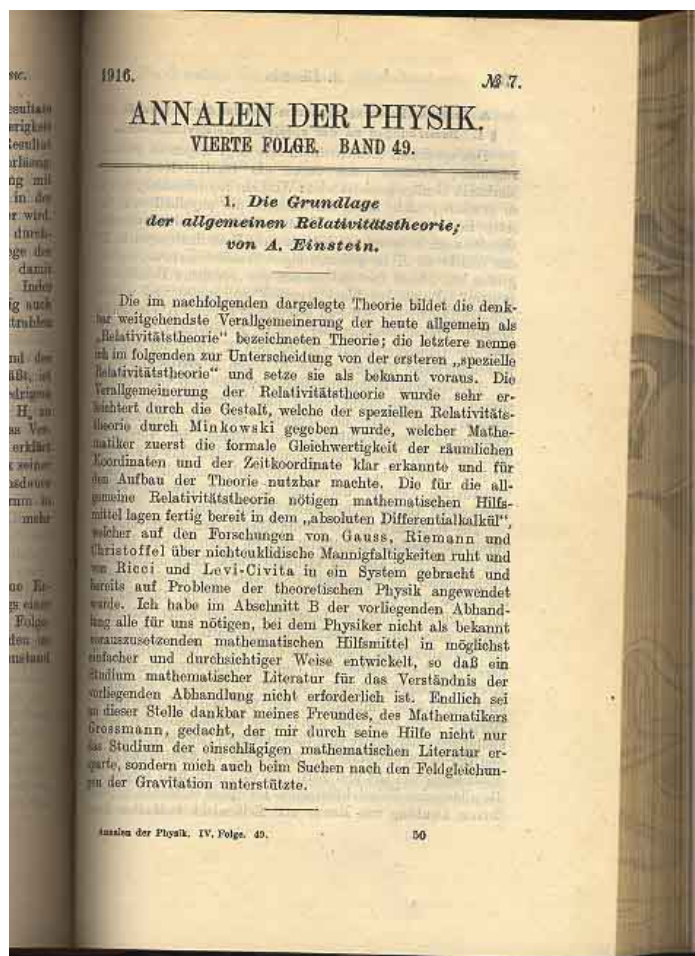
ds^2 è :

- $= 0$ per eventi simultanei
- < 0 ev. tipo spazio: possono avvenire allo stesso tempo ($dt=0$) in punti diversi dello spazio
- > 0 ev. tipo tempo: stesso luogo nello spazio a tempi differenti



$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

I fondamenti della relatività generale (1916)



In questo quadro di riferimento Einstein cominciò a ragionare, già dal 1912, sulle conseguenze dei postulati della relatività ristretta - in particolare la costanza di c sui sistemi non inerziali.

Nel 1916, la sua costruzione era già completa e fu pubblicata in uno storico numero degli Annalen der Physik.



Attenzione! La prossima slide contiene elevate dosi
di matematica e potrebbe urtare la vostra
sensibilità

Un po' di formalismo

$$d\mathbf{x}^\alpha \equiv \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x^0 = ct; \\ x^1 = x; \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases} \quad ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$ds^2 = (dx_0 \quad dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} =$$

$$= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = d\mathbf{x}_\alpha \eta^\alpha_\beta d\mathbf{x}^\beta$$

$\eta_{\alpha\beta}$ metrica piatta di Minkowskij

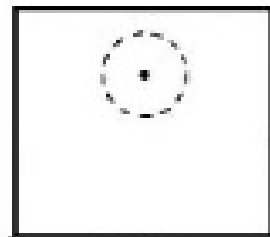
È *piatta*, perché ds^2 rappresenta la distanza calcolata su una superficie piana; se la superficie non è piana potrebbero esserci termini fuori dalla diagonale, che “mischiano” le coordinate

Gedankenexperiment (esperimento mentale)

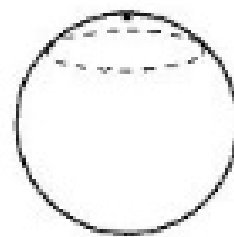
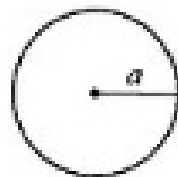
- Voglio misurare con un righello di lunghezza l_0 la circonferenza di una giostra in rotazione con velocità angolare ω . La giostra è un sistema NON inerziale (c'è l'accelerazione centripeta)
- Ad una distanza R dal centro della giostra, la velocità è $v = \omega R$, e il righello con cui misuro la circonferenza subisce la contrazione relativistica:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

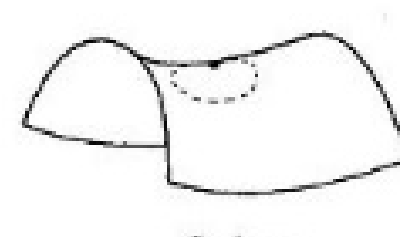
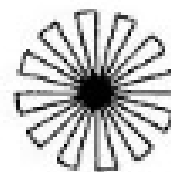
- Quindi ci vorrà al caso statico il rapporto tra quanto più mi



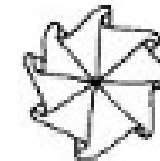
$$C = 2\pi a$$



$$C < 2\pi a$$

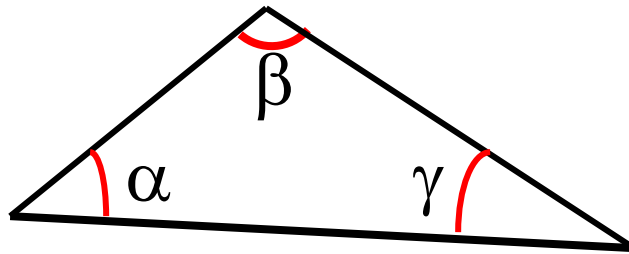


$$C > 2\pi a$$



tto
ue

Geometria piana di Euclide



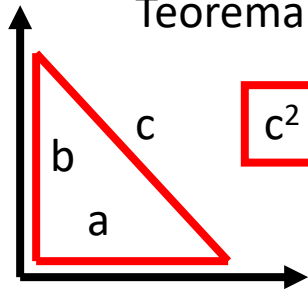
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Minima distanza fra due punti

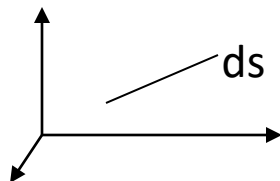


Linea retta

Teorema di Pitagora

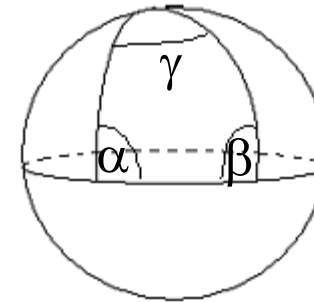


$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

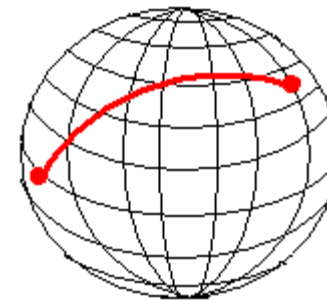
Geometria sferica



$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$$

Minima distanza fra due punti

Geodetica: non una retta



Caso sferico **Ortodromia**

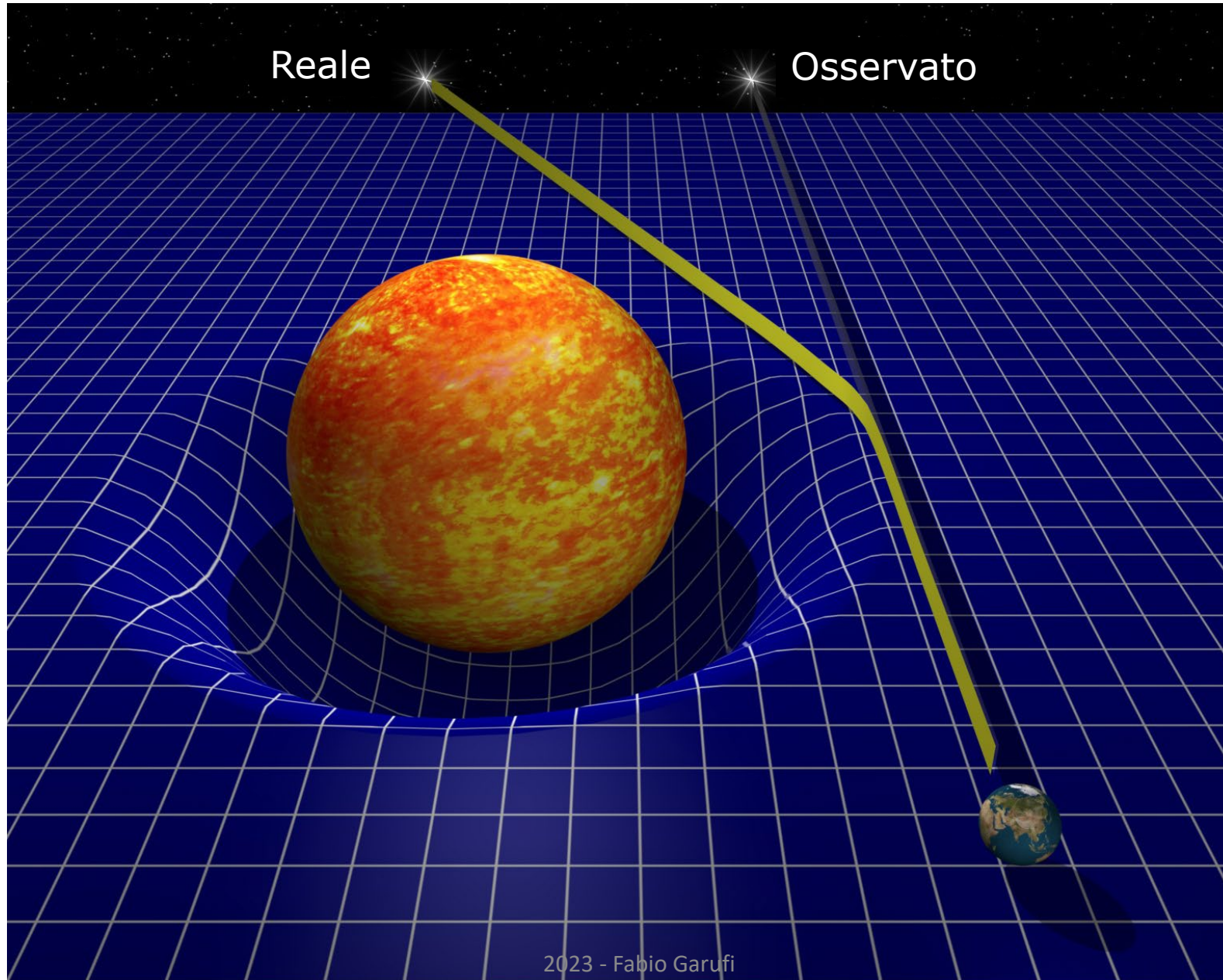


Oppure (meglio) lungo una circonferenza che ha per centro il centro della sfera e passa per i due punti

La distanza lungo il "cerchio massimo" sarà quella minima (geodetica)

Questo spiega anche perché, per andare da Napoli a New York, che sono circa alla stessa latitudine, si passa per la costa del Canada

Lente gravitazionale



L'anello di Einstein



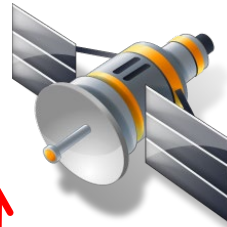
Lo spazio si curva...e il tempo?

GPS

- Eh, già...il tempo e lo spazio sono entrambi coordinate nel cronotopo, dunque anche il tempo «si piega» a seconda del campo gravitazionale presente!! In particolare, scorre più lentamente dove la gravità è più intensa



Orologio atomico su satellite



Sfasamento di 45×10^{-6} secondi al giorno!

20.000 km



Orologio atomico a terra

1 milionesimo di secondo di differenza tra i due orologi produrrebbe un errore nella posizione di 300 metri.

Onde nello spazio-tempo

- Variazioni di massa producono increspature nel cronotopo...esattamente come quando si lancia un sasso in acqua.
- Ma quanto e come devono variare, le masse per produrre un'onda visibile da terra e come si possono osservare queste onde?



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g_{ik} \approx \eta_{ik} + h_{ik} \quad |h_{ik}| \ll 1$$

Piccola perturbazione

$$h_{ik} = \frac{2}{r} \left(\frac{G}{c^4} \right) \langle \text{espressione complicata} \rangle$$

$8.27 \cdot 10^{-45}$

Rivelazione diretta delle GW

Due corpi inizialmente in quiete: uno nell'origine, l'altro a distanza L dal primo. L'effetto di un'onda gravitazionale di ampiezza h_{xx} sulla misura della distanza è di cambiare L in L' :

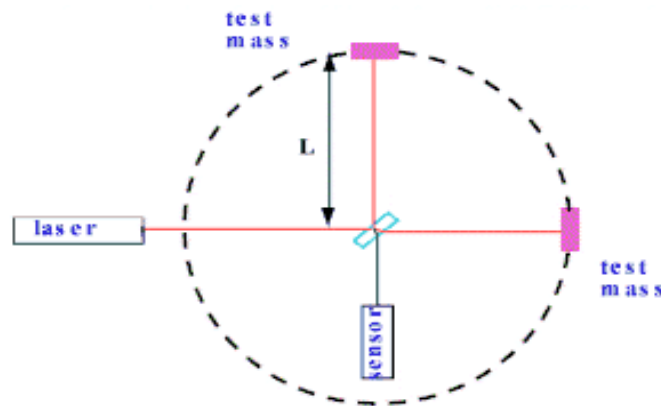
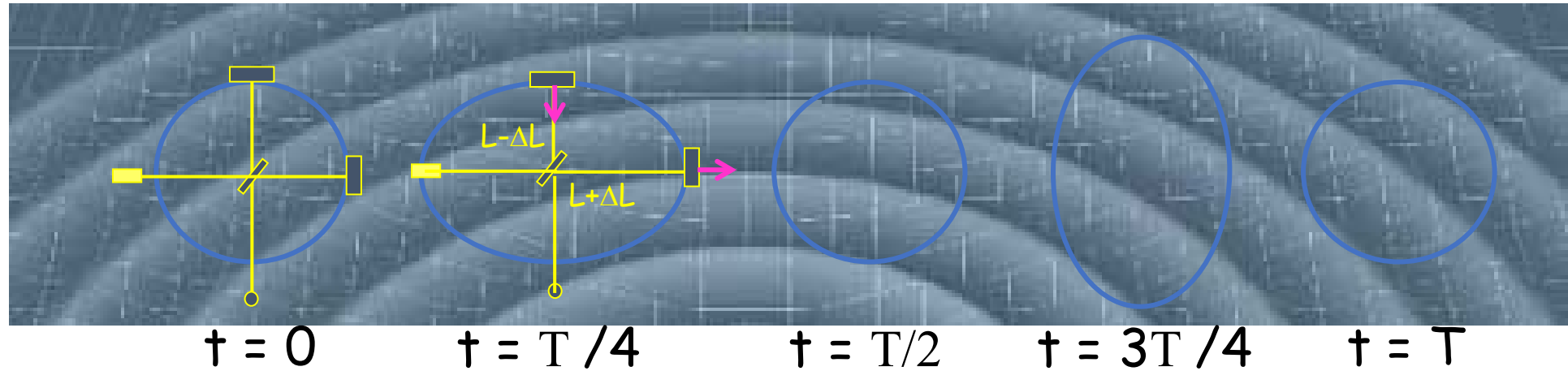
$$L' = \left(1 + \frac{1}{2} h_{xx} \right) L$$

Se L è la lunghezza iniziale di un rivelatore, un'onda lo allungherà di $\Delta L = \frac{h_{xx}}{2} L$, dunque, l'allungamento relativo sarà:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} h_{xx} \Rightarrow h_{xx} = 2 \frac{\Delta L}{L}$$

Quindi, per osservare piccole perturbazioni, la lunghezza L del rivelatore deve essere grande

Rivelazione interferometrica



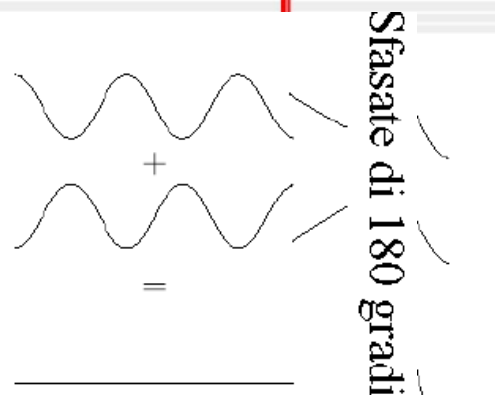
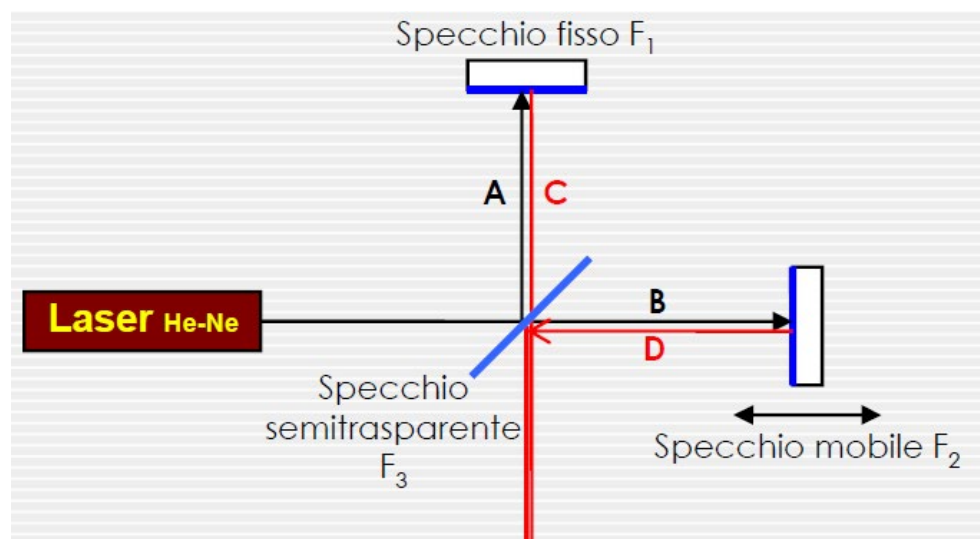
$$h_{xx} = 2 \frac{\Delta L}{L}$$

Target $h \sim 10^{-21}$, $L \sim 10^3 \text{ m}$
(NS/NS @Virgo Cluster)

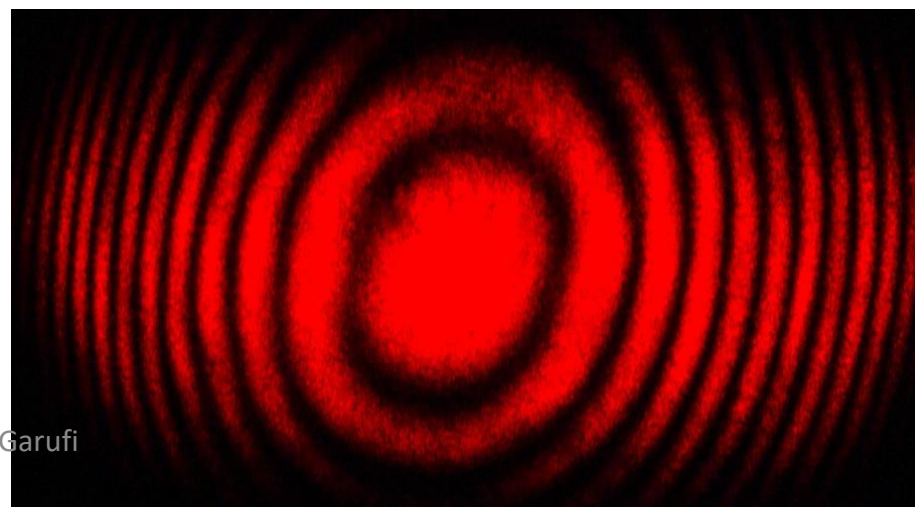
Grandi L per
piccole h

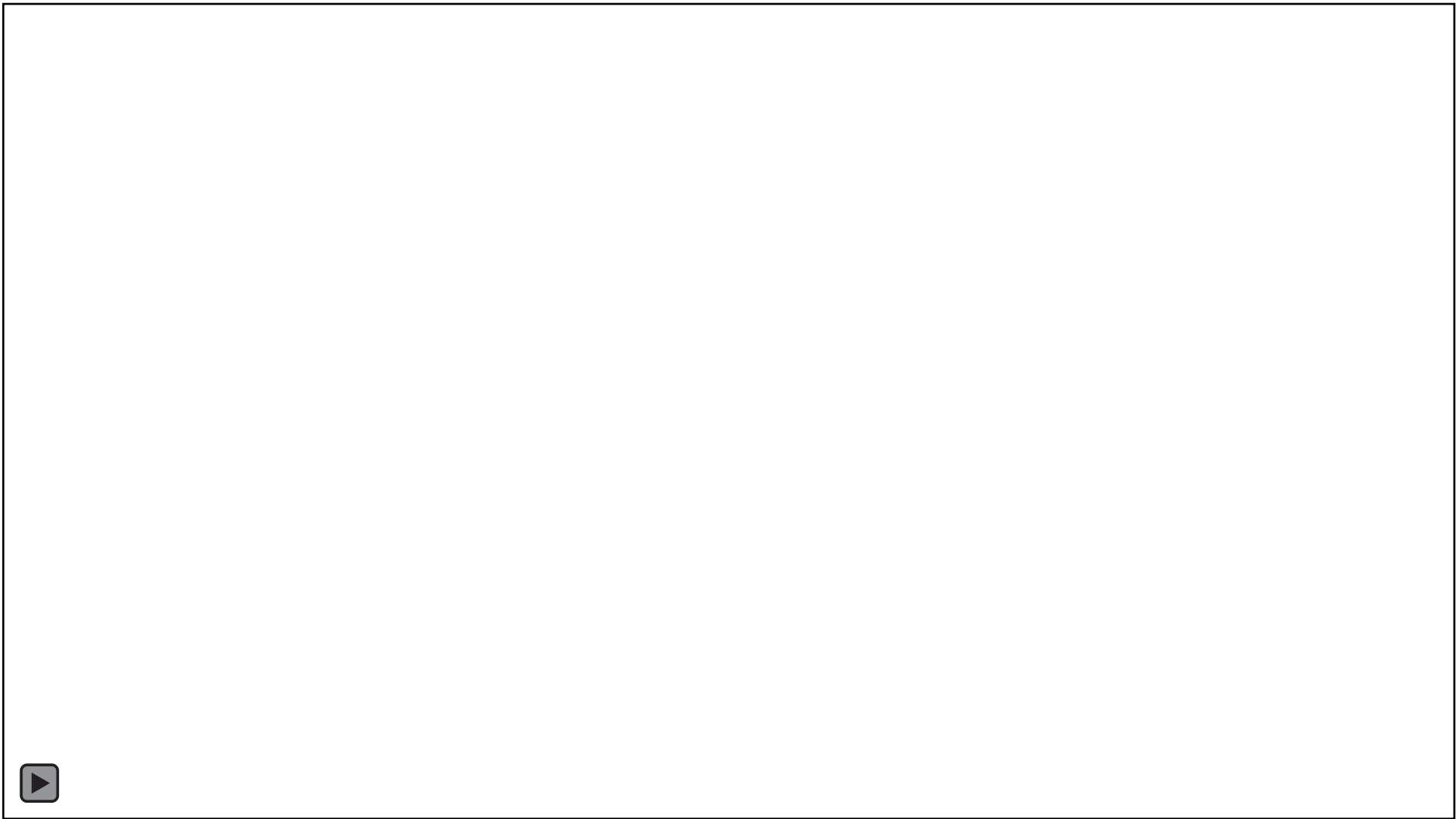
Bisogna misurare: $\Delta L \sim 10^{-18} \text{ m}$

Interferometro di Michelson



Se i bracci A e B sono uguali e si muove lo specchio F_2 di Δx , il raggio D ritarda di $\Delta t = \frac{2\Delta x}{c}$ rispetto al raggio C. Quando il ritardo è la metà di un periodo, i raggi C e D quando si riuniscono su F_3 si sommano in opposizione di fase. Siccome il periodo è $T = \frac{\lambda}{c}$ e l'interferenza è distruttiva quando il ritardo è mezzo periodo, lo sarà quando $\Delta x = \frac{\lambda}{4}$.







Ma Newton aveva ragione?

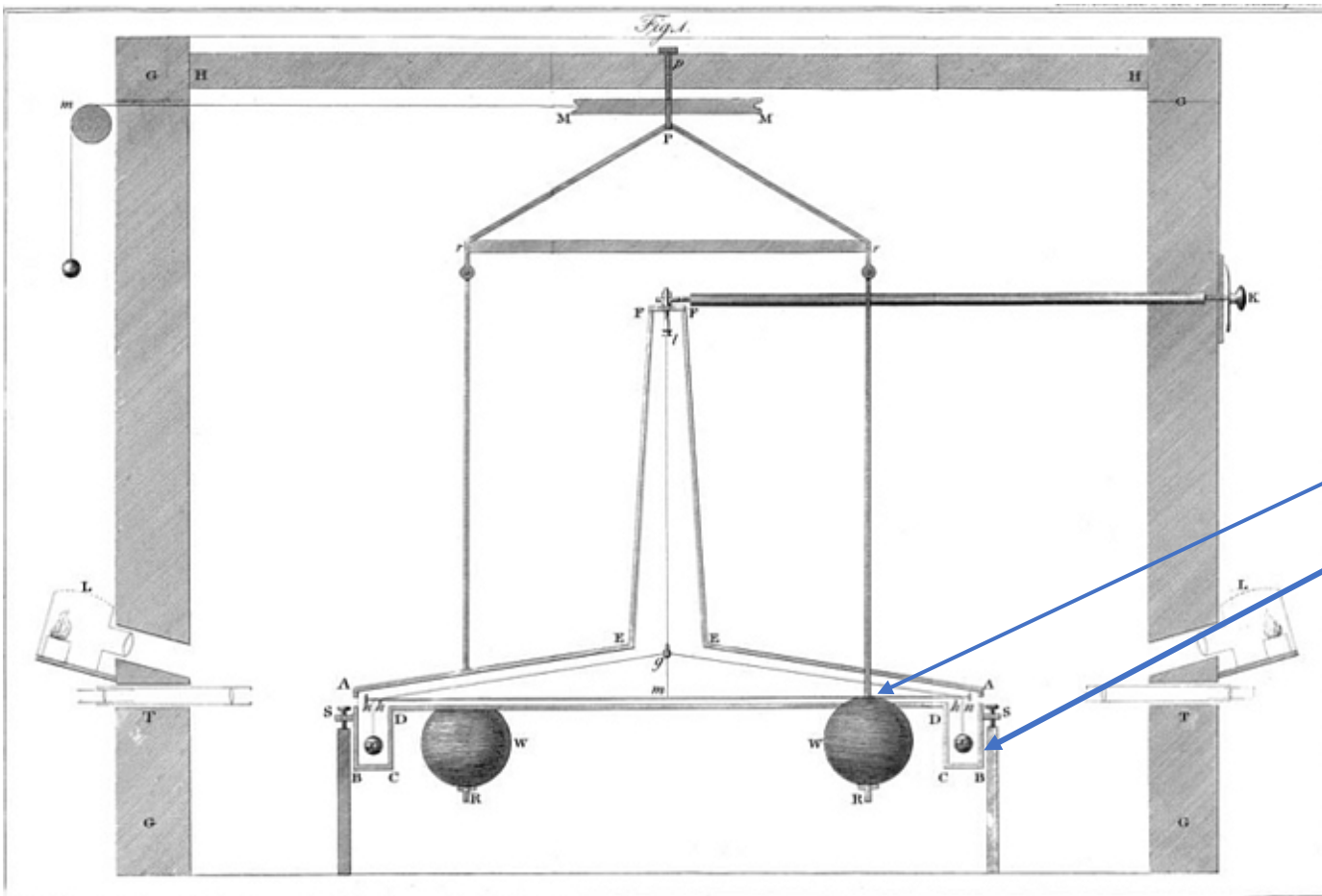
- In fondo sì, la teoria di Einstein, per piccole masse e piccole accelerazioni si «raccorda» con le espressioni di Newton
- La relatività generale di Einstein si fonda sulla legge $1/R^2$ introdotta da Newton, conservando la costante gravitazionale G .
- ...eppure, qualche dubbio rimane, perché certe osservazioni non si spiegano con nessuna delle due teorie. E poi, la gravitazione «non parla» con la meccanica quantistica!!!
- Siamo proprio sicuri, che F_G vada come $1/R^2$?
- Poi, visto che massa ed energia sono equivalenti ($E=mc^2$), «l'energia del vuoto» della meccanica quantistica, pesa?

Siamo proprio sicuri, che F_G vada come $1/R^2$? (ISL – Inverse Square Law)

- La domanda equivalente è: la costante G rimane costante a varie scale di distanza?
- A scala astronomica (10^6 - 10^7 km) è dimostrato dalle osservazioni
- Gli esperimenti effettuati su scale geologiche (raggio d'azione tra cm e km), eredi dell'esperimento di Cavendish, sono stati capaci di fornire un valore sperimentale della costante G della ISL, ma con un'incertezza dell'ordine di 10^{-4}
- Negli ultimi decenni sono state introdotte numerose teorie differenti dalla relatività generale che violano la ISL a varie scale
- Queste deviazioni, normalmente, si parametrizzano con una forma del potenziale «à la Yukawa»:

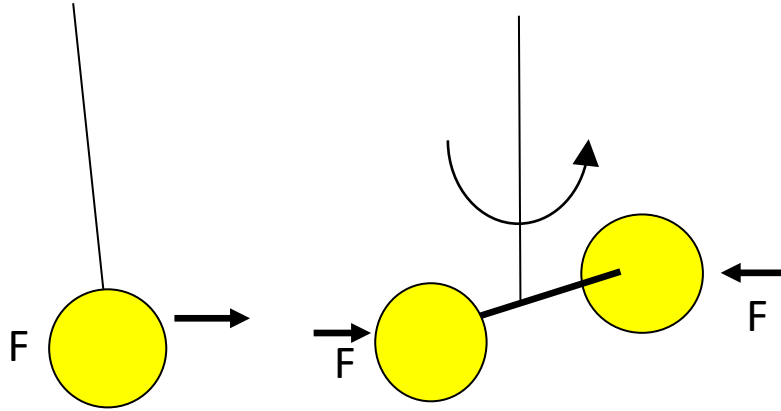
$$U_G(R) = -G(R) \frac{M m}{R} = -G_\infty \left(1 + \alpha e^{-R/\lambda}\right) \frac{M m}{R}$$

Esperimento di Cavendish (1798)



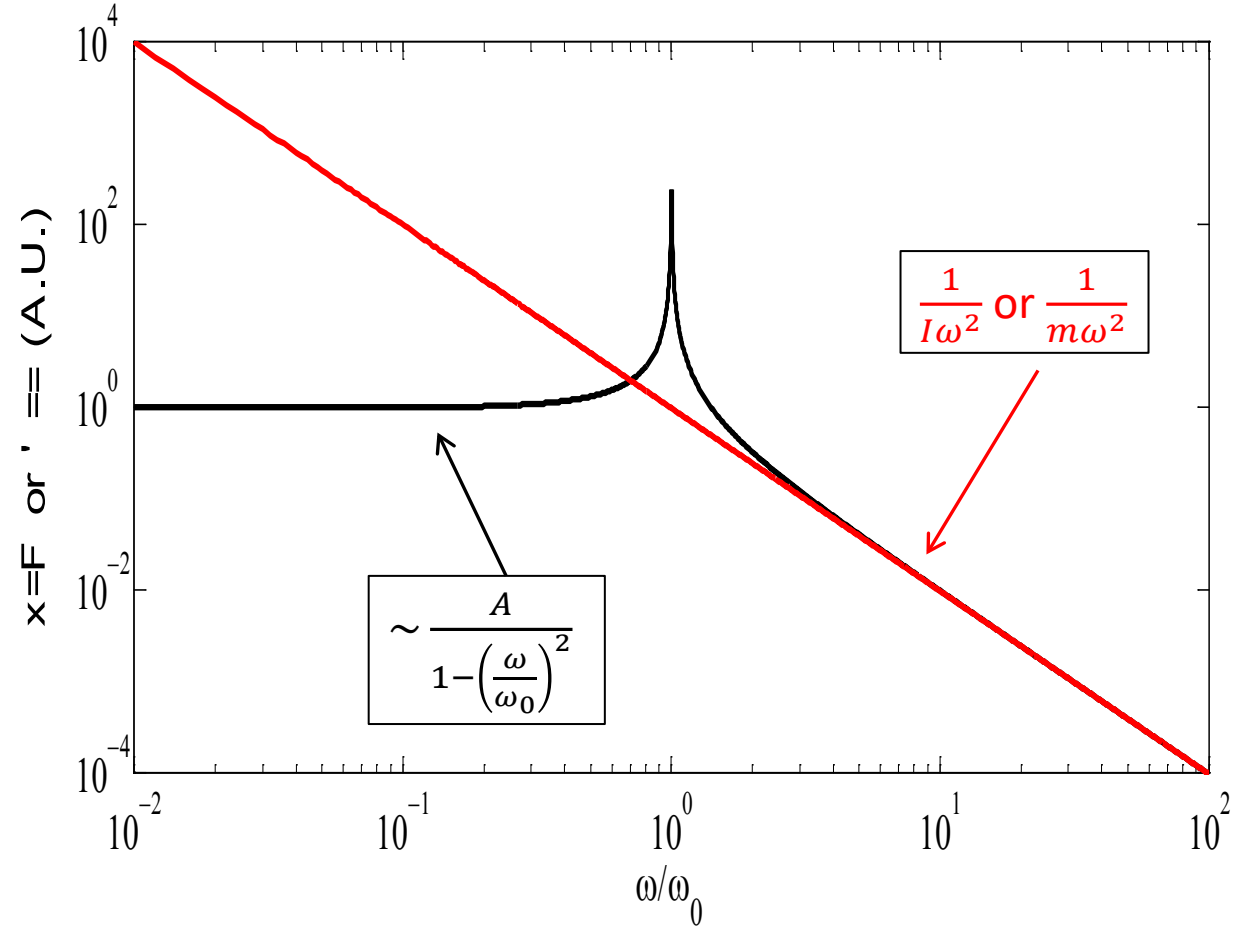
apparato sperimentale di Cavendish :due sferette h di diametro prossimo a 5 centimetri (tutte le misure originali erano indicate in pollici e piedi) erano unite da un braccio triangolare e sospese attraverso un filo lungo circa un metro. L'attrazione dovuta ai pesi W era sufficiente per torcere il filo di sospensione e mettere la coppia di sferette in oscillazione. I pesi W potevano essere disposti nelle vicinanze dell'apparato mobile in diverse posizioni. L'esperimento consisteva quindi nell'applicare una coppia di forze ed osservare le oscillazioni smorzate dell'apparato mobile.

Masse quasi libere con un pendolo



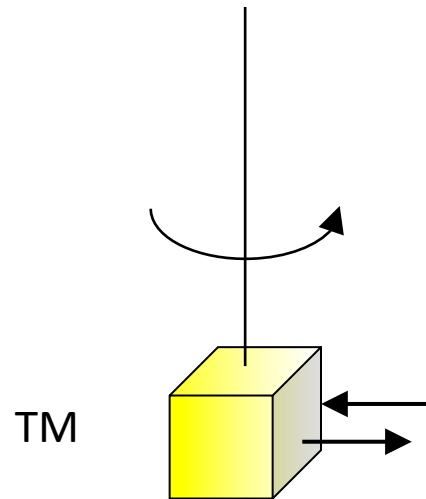
Per frequenze della forza al di sopra di quella di risonanza del pendolo, ω_0 , la massa si comporta come se fosse “in caduta libera” cioè non vincolata

$$\text{con } \omega_0^2 = \frac{k}{I} \text{ o } \frac{g}{l}$$



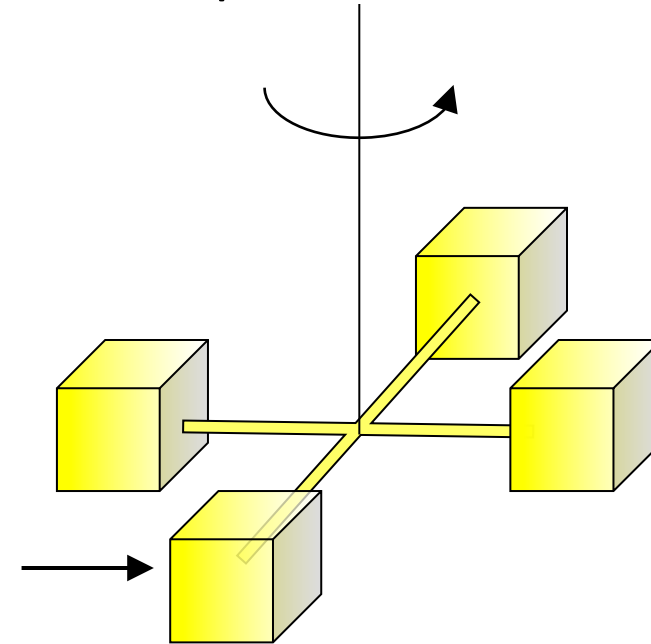
Pendoli di torsione ad uno stadio

A singola massa



In questa configurazione possiamo misurare solo una torsione indotta sulla massa da una coppia di forze (le oscillazioni del pendolo non sono prese in considerazione)

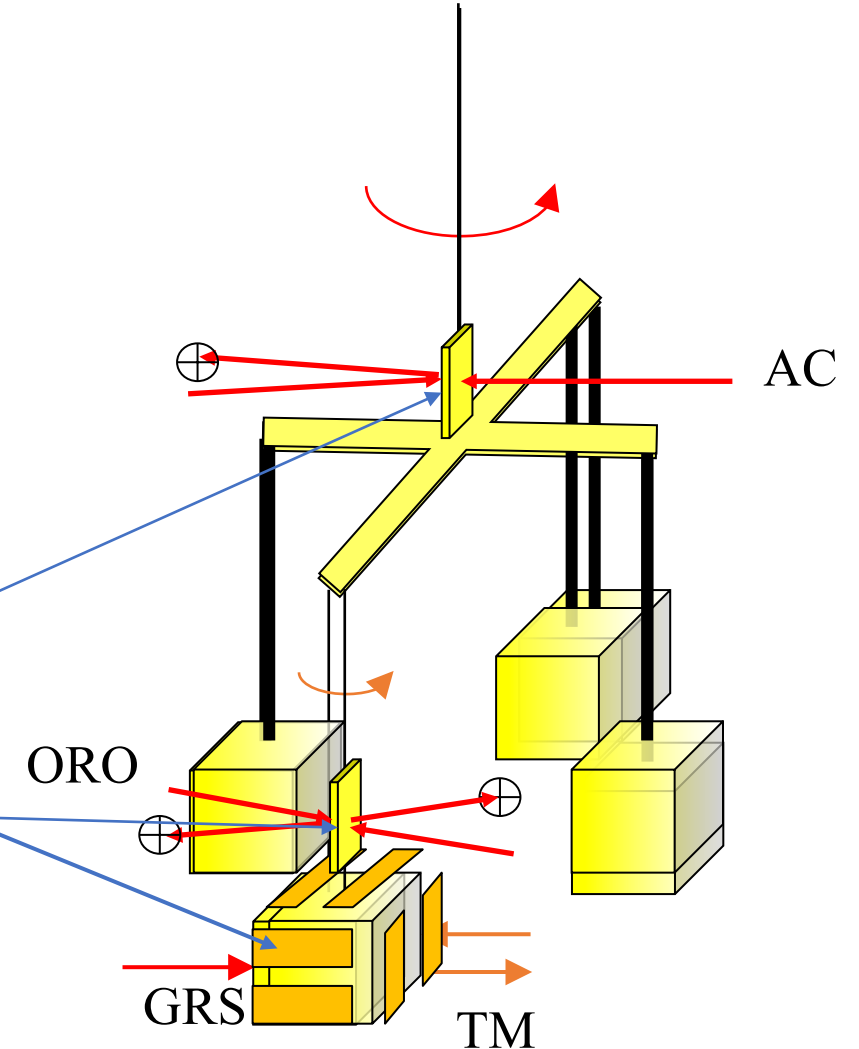
A quattro masse



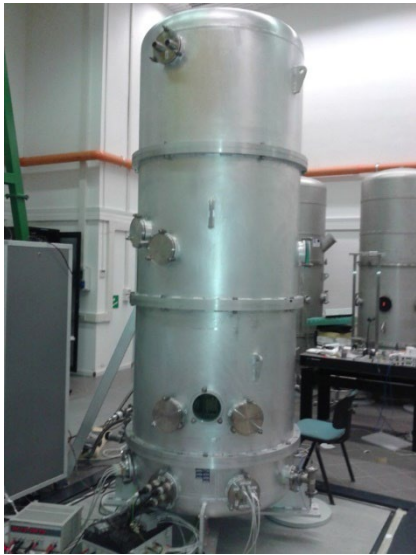
Così possiamo solo misurare una forza

PETER, il pendolo di torsione a due stadi

- Le masse sono in caduta libera sia rispetto alle traslazioni che alle rotazioni
- Possiamo misurare contemporaneamente forze e coppie
- Misura capacitiva (elettrica)
- Misura con leve ottiche



PETER nel laboratorio di Napoli



Tutto sotto vuoto



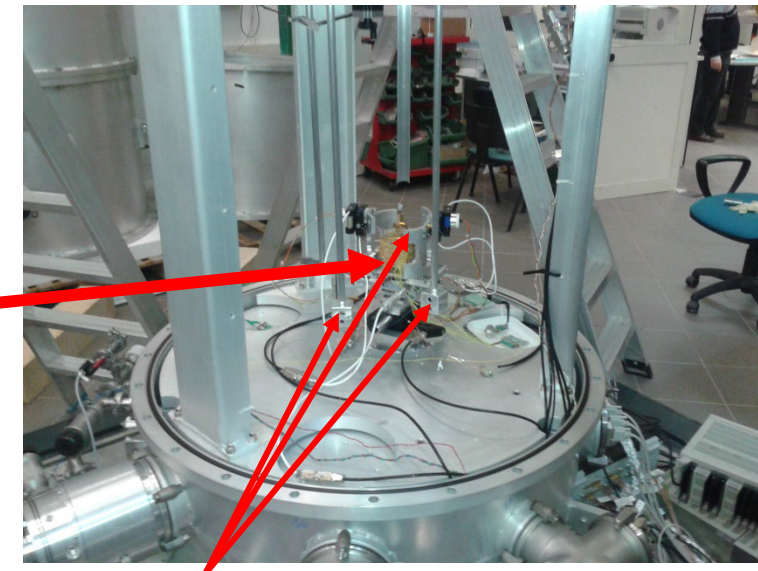
Basamento di
cemento
rinforzato da
pali

Fibra alta

crociera

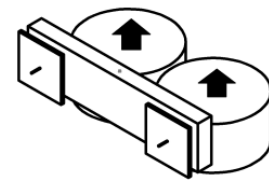
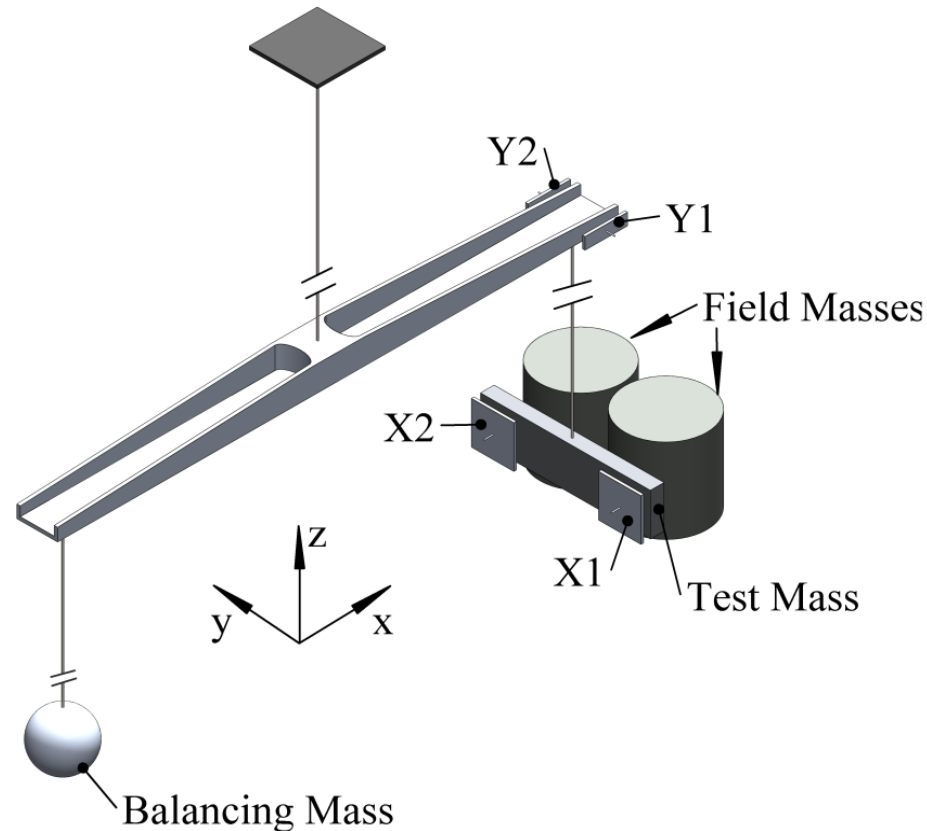
Fibra
bassa

Sensore

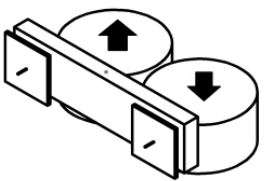


PETER diventa LAG (Liquid Actuated Gravity)

- Usiamo il pendolo PETER per misurare l'attrazione indotta da masse variabili sulla sua massa di test (però da 4 è diventato a 2 masse)
- Come massa variabile utilizziamo un contenitore in cui immettiamo e leviamo del liquido (acqua, poi sarà mercurio)
- Tutto l'apparato si può spostare rispetto ai contenitori in modo da variare le distanze.



+ / +



+ / -



Il vuoto pesa? Proviamo a pesarlo

- Mettiamo assieme due mondi; la relatività: $E=mc^2$ e la meccanica quantistica: principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \Delta p = \hbar/2$
- Se il vuoto fosse privo di energia allora potremmo annullare la velocità di una particella in un punto preciso ($\Delta x=0$), violando l'indeterminazione.
- Esiste un'**energia di punto zero** E_0 o, parlando di campi, un **valore di aspettazione del vuoto** (VEV) di un campo (per esempio quello EM) diverso da zero.
- $E_0 = mc^2$ ci dà la massa equivalente del vuoto...
- possiamo costruire una bilancia, ma come misurare $m_0 = E_0/c^2$?

Archimedes e il peso del vuoto

- Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto, pari al peso del volume di liquido spostato
- Il vuoto ha una densità (cioè un'energia=massa per unità di volume)
- Un corpo immerso ne vuoto riceve una spinta dal basso verso l'alto pari alla massa (equivalente) dell'energia che «sposta», cioè al suo volume per la differenza di densità di energia tra fuori e dentro il corpo.



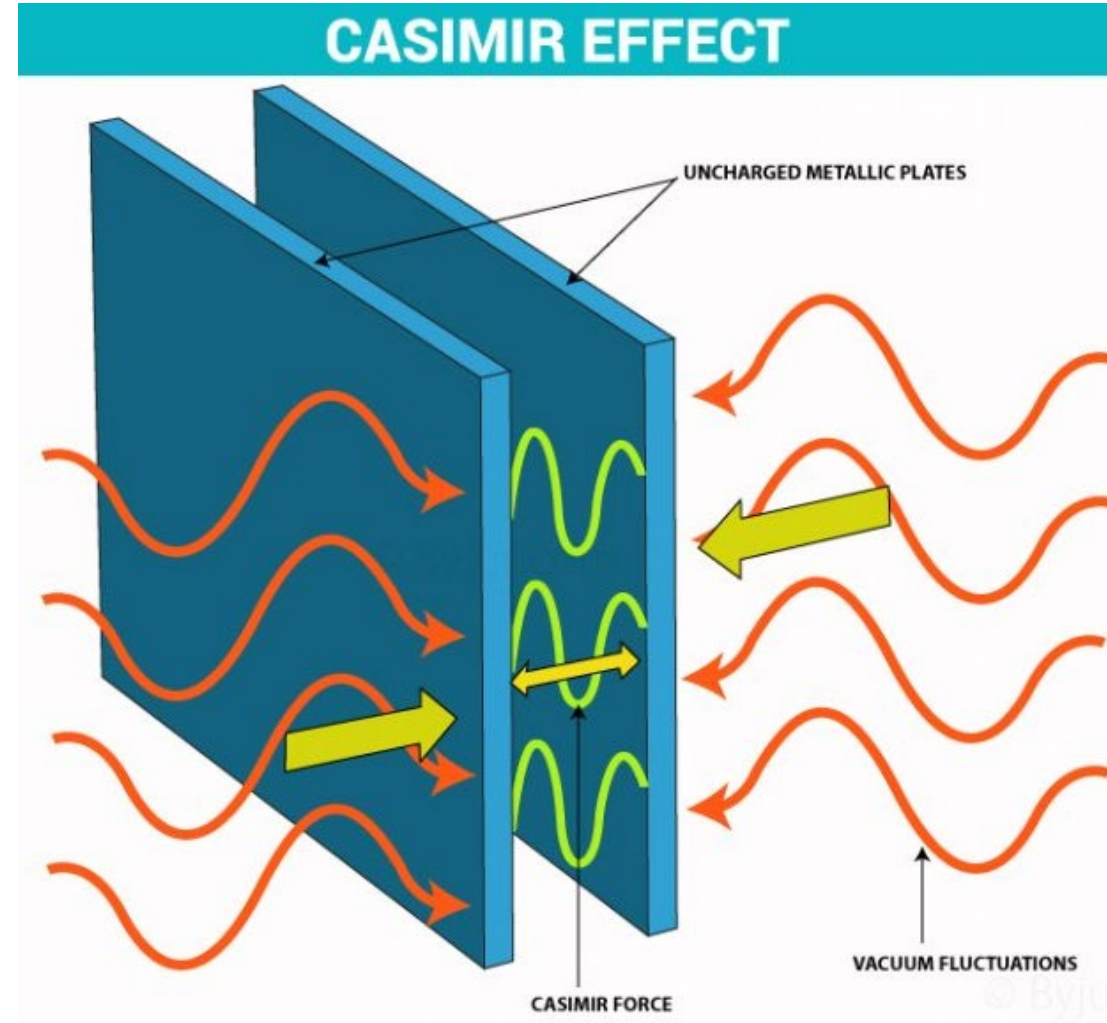
Perché può esserci differenza tra dentro e fuori

- Le fluttuazioni del campo EM nel vuoto sono a tutte le frequenze
- Tanti oscillatori armonici quantizzati. $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ (Shroedinger)
- Nello stato di vuoto $n=0 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \hbar \omega_i$ farebbe infinito, ma con qualche trucco – rinormalizzazione – almeno per il campo elettromagnetico, si risolve
- Quindi se ho un volume V di vuoto, la sua densità di massa sarà

$$\rho_0 = \frac{1}{2Vc^2} \sum_{i=1}^{\infty} \hbar \omega_i$$

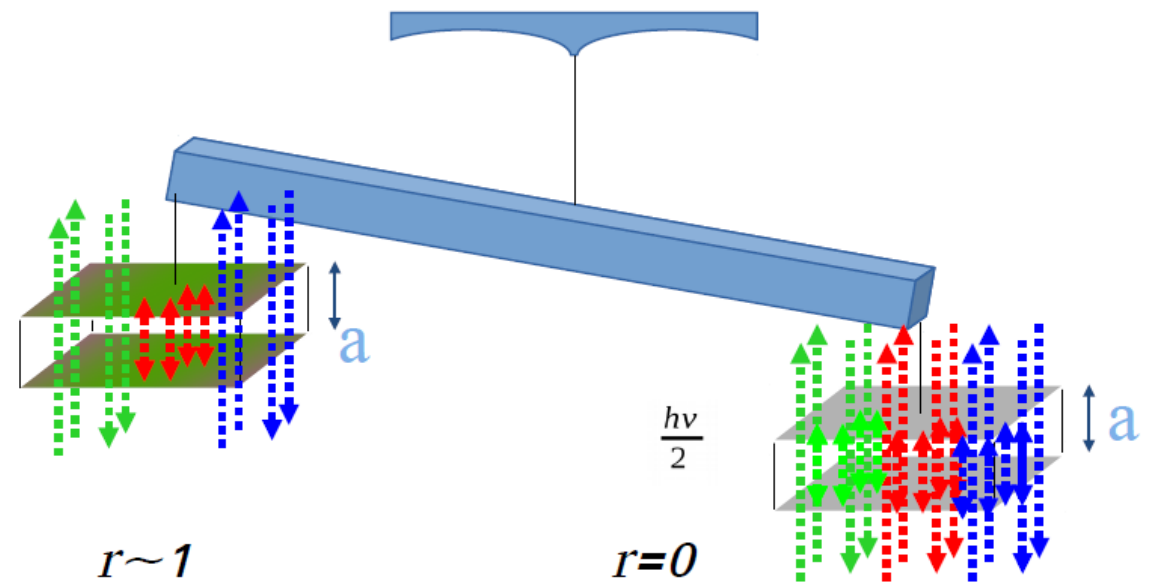
$$\omega_i = \frac{2\pi c}{\lambda_i}$$

- Fra due piatti di conduttore ideale, possono esistere solo le lunghezze d'onda pari ad un sottomultiplo della distanza fra i piatti, cioè, quelle che hanno un nodo nel conduttore. Quindi non tutte le lunghezze d'onda: la densità dentro è minore che fuori
- Se i piatti non sono conduttori tutto ciò non succede.



Una bilancia per il vuoto

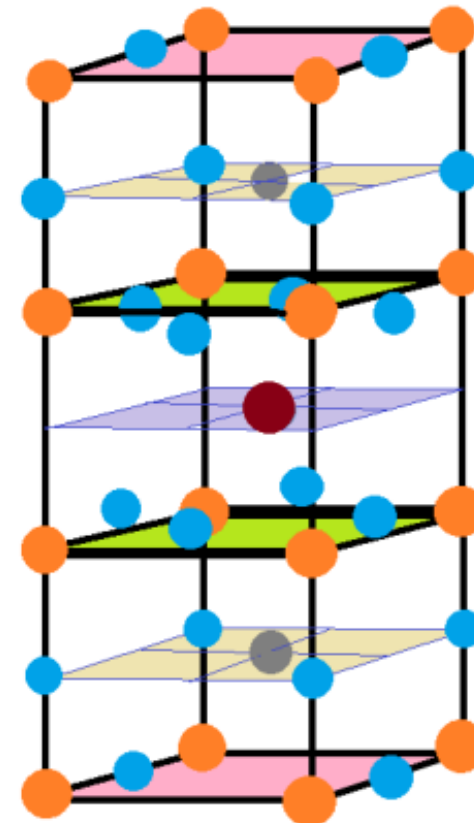
- I pesi della bilancia sono fatti come una serie di piatti alternati di un materiale speciale ed un isolante in realtà il materiale speciale è già a strati alternati...
- Il materiale speciale – YBCO – ha strati isolanti a temperatura ambiente che diventano superconduttori a bassa temperatura
- Quando diventa superconduttore, le frequenze che non «entrano» fra i piatti, vengono espulse
- Moduliamo la temperatura di un lato della bilancia attorno alla temperatura di transizione.
- Dobbiamo conoscere benissimo tutte le energie in gioco, perché ciascuna ha il suo «peso»
- Tolto ciò che conosciamo, quel che resta è il peso del vuoto...pare facile...



Cristallo di YBCO



Quantum Experience Ltd ©



YBCO

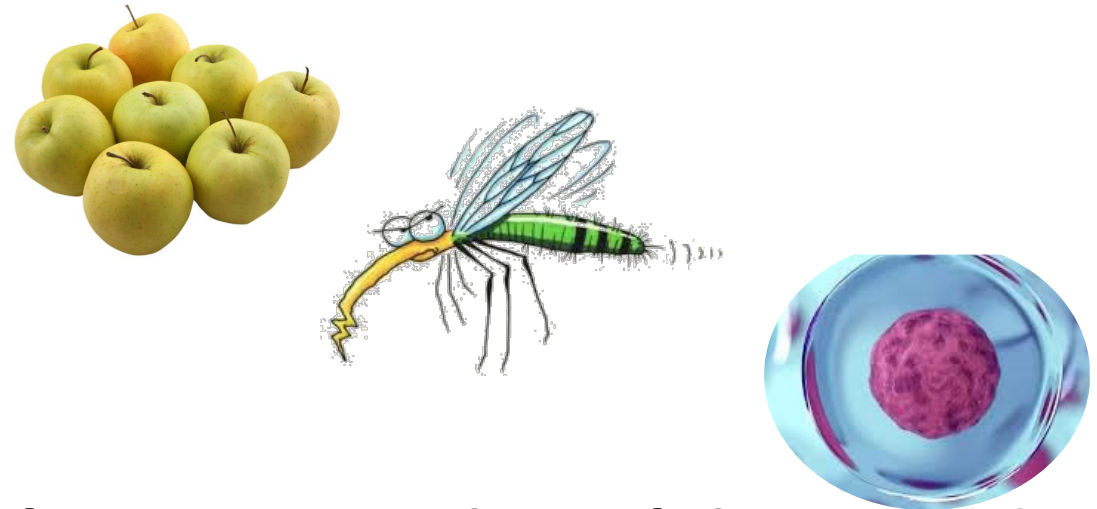
≈ 10 nm (1000 volte
più piccolo dello
spessore di un capello)



Che effetto ci aspettiamo di misurare?

La variazione di forza che ci aspettiamo di misurare è $F = 4 \cdot 10^{-16} \text{ N}$.
A quanto corrisponde?

- 1 kg di mele $\rightarrow F_{\text{peso}} \approx 10 \text{ N}$
- Una zanzara $\rightarrow F_{\text{peso}} \approx 10^{-5} \text{ N}$
- Una cellula $\rightarrow F_{\text{peso}} \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ N}$

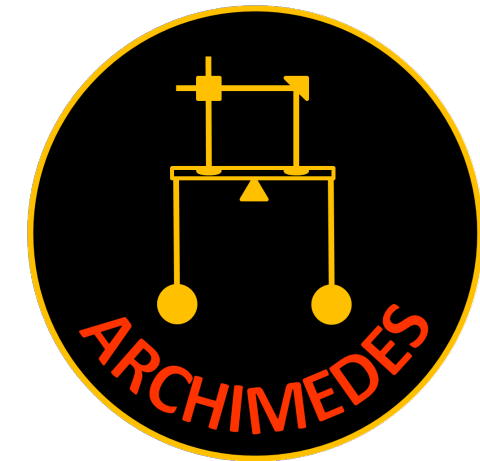
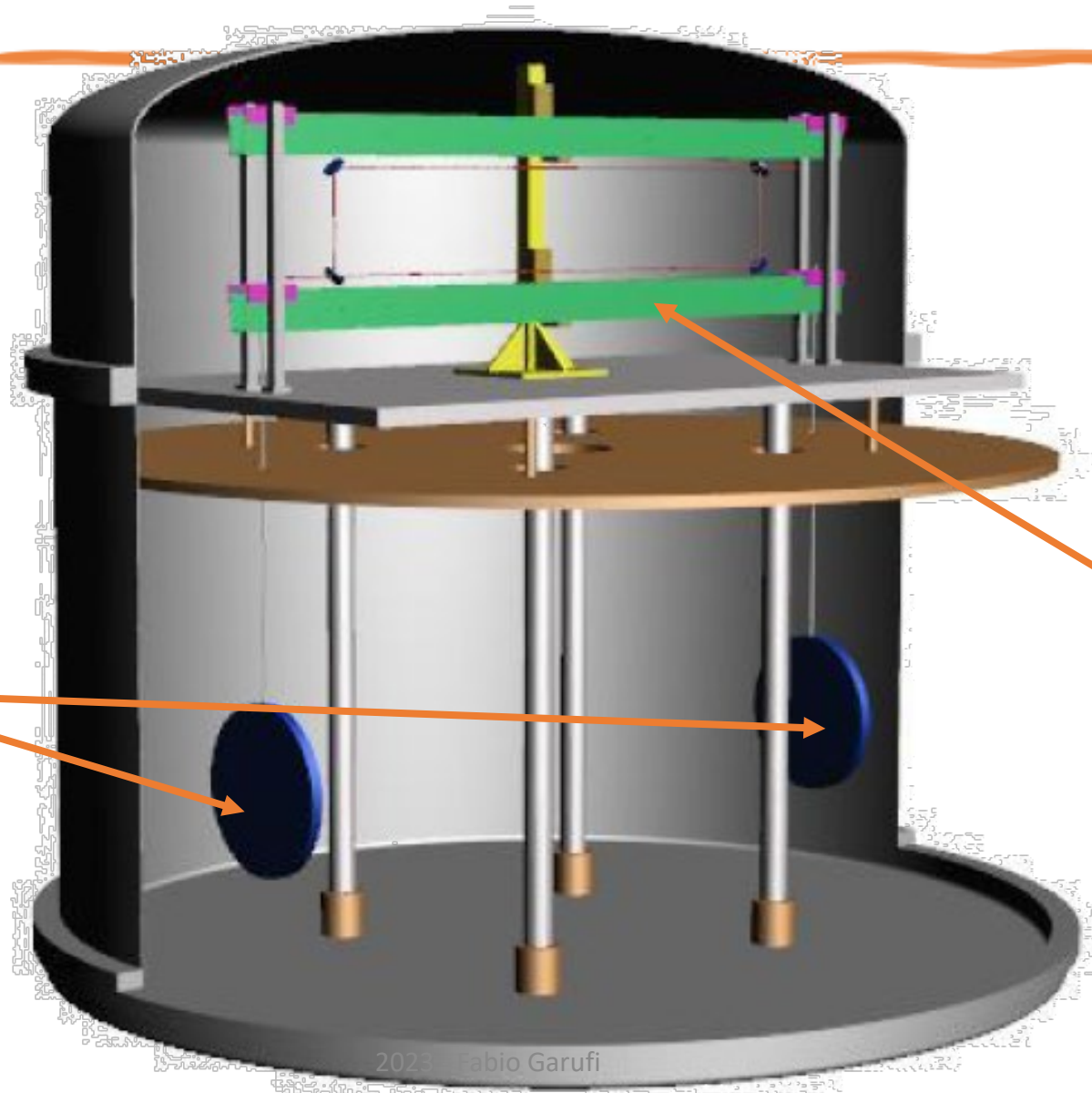


Vogliamo pesare una quantità 100.000 volte più leggera di una cellula

La bilancia

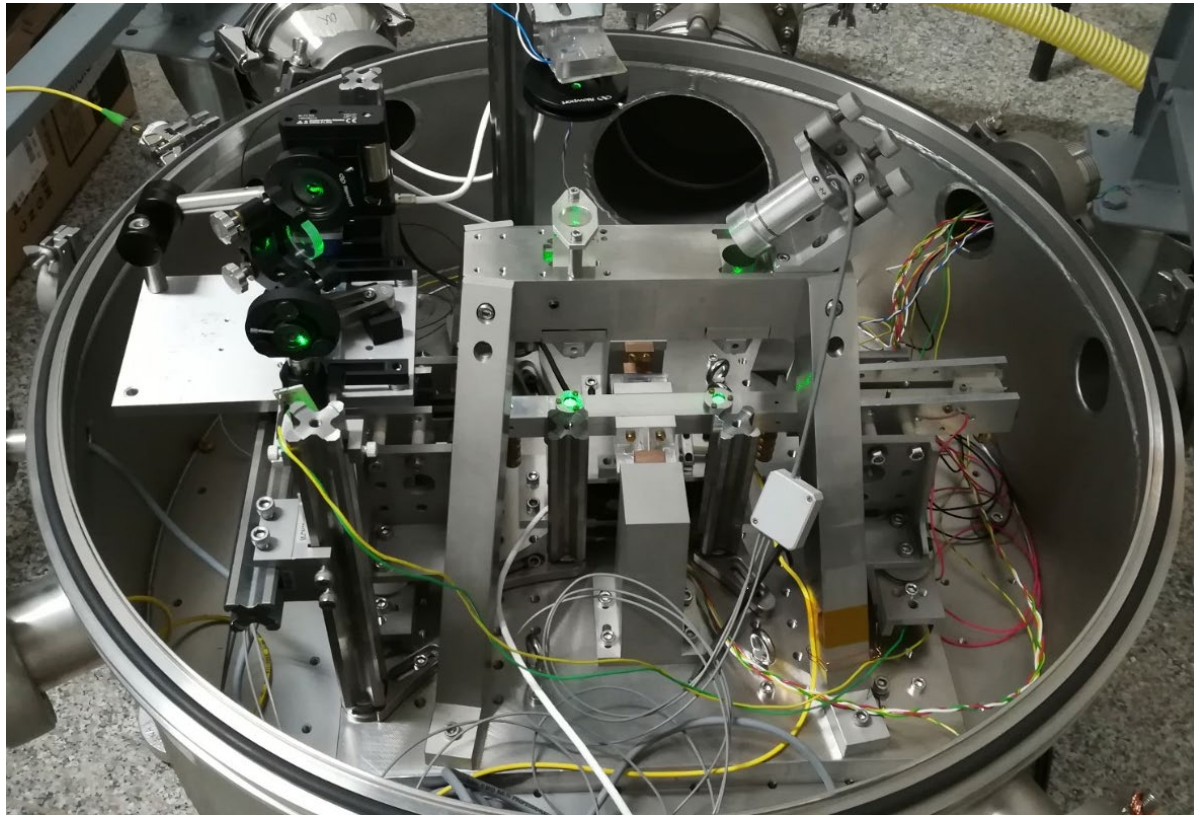


Dischi di YBCO da pesare



Braccio della bilancia
che sospende i dischi

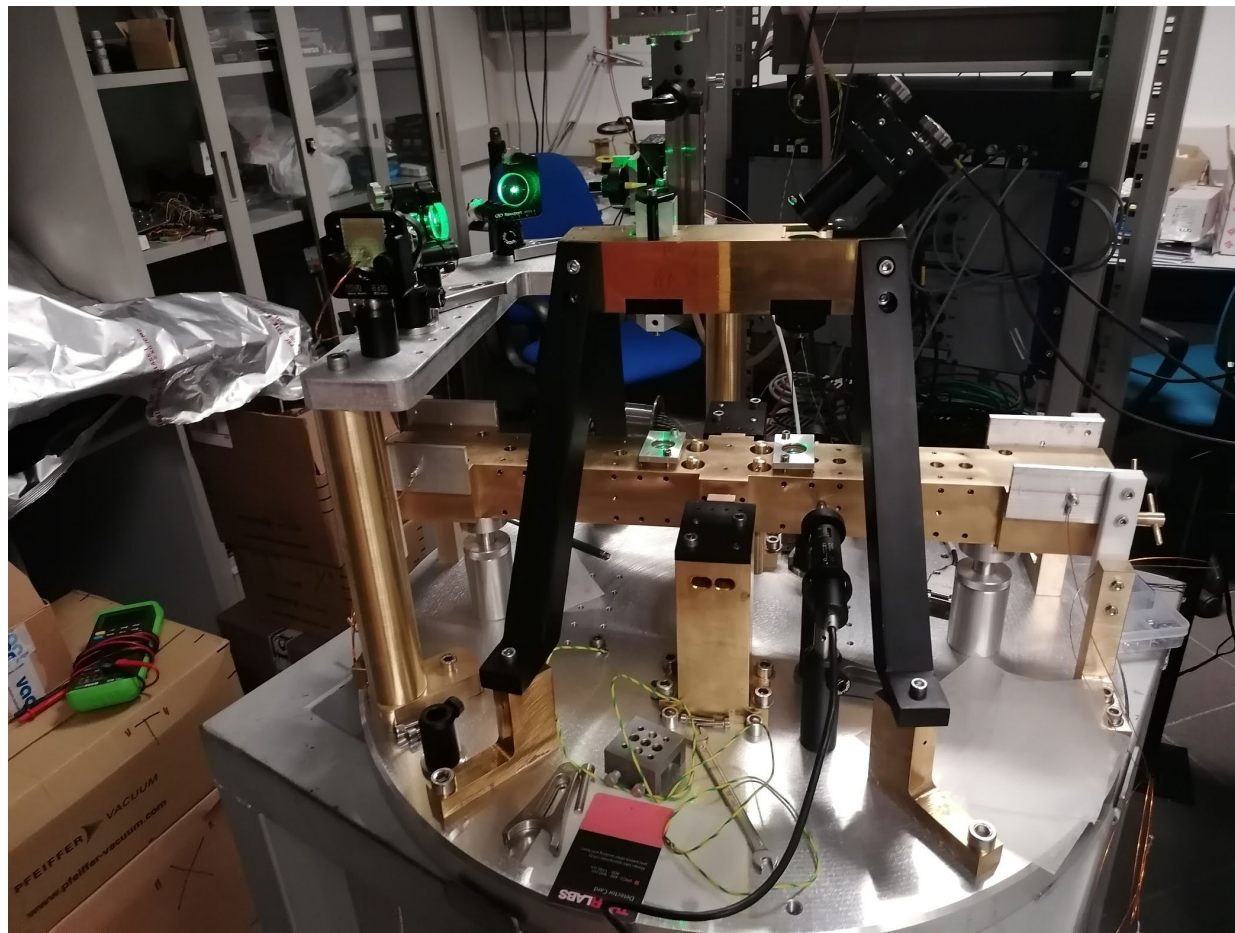
Ecco la nostra bilancia



Attualmente, è la bilancia con la migliore sensibilità al mondo, e stiamo lavorando per raggiungere la sensibilità sufficiente a misurare il peso del vuoto

2023 - Fabio Garufi





...e per leggere gli spostamenti – minimi – della bilancia? Un interferometro, ça va sens dire!!!

