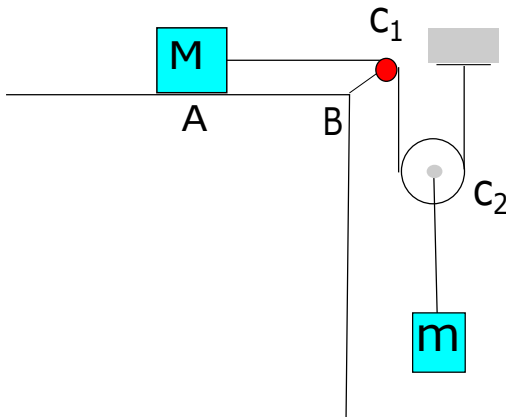


ESERCIZIO 1. Un blocco di massa $M = 46\text{g}$ è posto su un piano orizzontale e fissato ad un sostegno attraverso una fune inestensibile e di massa trascurabile. La fune passa prima su una carrucola fissa C_1 e poi su una seconda carrucola mobile C_2 , entrambe senza attrito e massa trascurabile. A C_2 è appeso un corpo di massa m . Il piano AB è lungo $l = 37\text{cm}$ ed ha un coefficiente d'attrito $\mu = 0.6$. Determinare il valore di m perché il blocco, inizialmente fermo in A, arrivi in B con velocità $v = 1\text{ms}^{-1}$.

10 punti



Soluzione: L'equazione fondamentale della dinamica per la massa m , con l'asse verticale rivolto verso l'alto, e la massa M con l'asse orizzontale orientato verso ds si scrive (considerato che lo spostamento della massa in caduta è la metà di quello in orizzontale):

$$\begin{aligned} 2T - mg &= -m\frac{a}{2} \\ T - F_A &= Ma \\ F_A &= \mu g M \end{aligned}$$

Dalla prima: $T = \frac{m(2g-a)}{4}$ e, sostituendo nella seconda, $4(Ma + F_A) = m(2g - a)$ da cui:

$$a = g \frac{2(m - 2\mu M)}{(4M + m)}$$

Il blocco si muove con accelerazione costante partendo da fermo, dunque:

$$v^2 = 2al = 4gl \frac{m - 2\mu M}{4M + m}$$

Invertendo, possiamo trovare m in funzione di v^2 e successivamente porre $v^2 = 1\text{ m}^2\text{s}^{-2} = 10^4\text{ cm}^2\text{s}^{-2}$:

$$m = 4M \frac{v^2 + 2\mu gl}{4gl - v^2} = 72,89\text{ g}$$

ESERCIZIO 2. Un'automobile del peso di $P_a = 11084$ N, che viaggia alla velocità di $v_a = 96$ km/h, urta frontalmente contro un autocarro del peso di $P_c = 90.0$ kN che viaggia verso l'automobile alla velocità di $v_c = 54$ km/h. L'automobile e l'autocarro rimangono uniti dopo l'urto. Quanto vale la velocità finale dell'automobile e dell'autocarro uniti?

7 punti

Soluzione: Nel sistema di riferimento in cui l'asse x è positivo nella direzione del moto dell'auto, le velocità dell'auto e dell'autocarro hanno segno opposto; le quantità di moto sono:

$$p_a = m_a v_a$$

$$p_c = m_c v_c$$

Dopo l'urto, la somma delle quantità di moto si conserva:

$$p_a + p_c = (m_a + m_c) v_{fin}$$

da cui

$$v_{fin} = \frac{p_a + p_c}{m_a + m_c} = \frac{P_a v_a + P_c v_c}{P_a + P_c} = -37,55$$

ESERCIZIO 3. Un blocco di 283 N deve essere fatto muovere su un pavimento scabro a velocità costante. Il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.5$. Il trasportatore è più alto del blocco e può spingere da dietro o tirare da davanti e applica una forza lungo una direzione che forma un angolo di $\vartheta = 30^\circ$ con l'orizzontale. a) Quanto vale la forza se si spinge verso il blocco?

b) Quanto vale invece se si tira?

Soluzione: Se la velocità è costante, a regime la componente orizzontale della forza traente deve eguagliare la forza d'attito:

$$F \cos \vartheta = \mu(mg \pm F \sin \vartheta)$$

valendo il segno + quando si spinge e - quando si tira. Dunque:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \vartheta \pm \mu \sin \vartheta}$$

$$\begin{cases} F_+ = 126,79 \text{ Tiro} \\ F_- = 229,7 \text{ Spingo} \end{cases}$$

7 punti

ESERCIZIO 4. Un disco ruota in un piano verticale attorno al suo asse, con velocità angolare $\omega = 2.8 \text{ rad/s}$ e reca sull'orlo un forellino. A distanza $d = 45 \text{ m}$ dal disco, un tiratore deve colpire il forellino sparando orizzontalmente con una pistola (si trascuri l'effetto della gravità). Sapendo che quando parte il proiettile, il forellino è nella posizione A, dire quale è la decelerazione costante imposta dall'aria al proiettile, che parte con velocità iniziale $v_0 = 100 \text{ m/s}$, affinché il tiratore colpisca il forellino nella posizione B a 90° da A. Dire inoltre con quale velocità e a che tempo il proiettile arriva in B.

10 punti

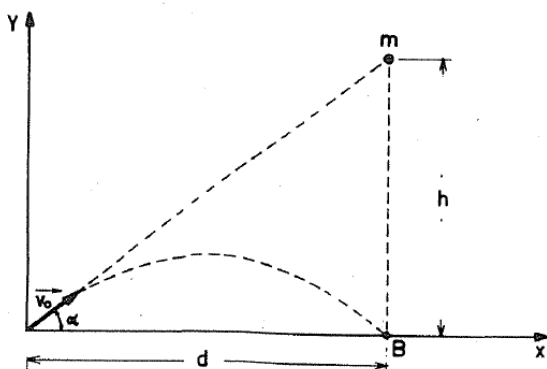
Soluzione: $d = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$. Siccome $\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$, allora $t = \frac{\pi}{2\omega} = 0.56 \text{ s}$. Dunque:

$$a = 2 \frac{(v_0 t - d)}{t^2} = \frac{8\omega^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi v_0}{2\omega} - d \right) = 70.15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v = v_0 - at = 60,72$$

ESERCIZIO 5. Un cannone C è puntato sulla sfera di massa m posta all'altezza $h = 3$ m dal livello del suolo e ad una distanza orizzontale $d = 1.5$ m, inizialmente in quiete. All'istante $t = 0$ il cannone spara e la sfera m viene lasciata cadere. Determinare la velocità iniziale v_0 del proiettile affinché esso colpisca m al livello del suolo.

6 punti



Soluzione: Indichiamo con il pedice "p" le grandezze relative al proiettile e "s" le grandezze relative alla sfera. Scelti i due assi di riferimento xy come in figura, la legge oraria proiettata sugli assi, per il proiettile si scrive (con le condizioni iniziali dette):

$$x_p = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y_p = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$$

Analogamente, per il moto della sfera:

$$x_s = d$$

$$y_s = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

Perché la sfera ed il proiettile si urtino al suolo, dovrà essere: $x_s = x_p = d$ e $y_s = y_p = 0$. Sostituendo nelle precedenti:

$$t_1 = \frac{d}{v_0 \cos \alpha}$$

e sostituirlo a t nelle equazioni per $y=0$:

$$0 = h - \frac{1}{2}g \left(\frac{d}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

Dunque

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2h \cos^2 \alpha}}$$

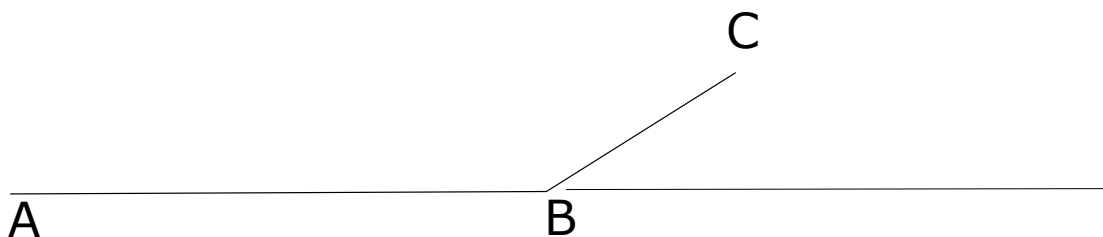
Rimane da calcolare l'angolo $\alpha = \arctan h/d$ o $\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}$, dunque:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g(d^2+h^2)}{2h}} = 4,29 \text{ m.s}^{-1}$$

ESERCIZIO 6. Un motociclista acrobatico esegue un salto dalla piattaforma, come in figura. Parte dal punto A con velocità zero ed accelerazione costante $a_1 = 4 \text{ m/s}^2$ fino al punto B, distante 50 m. Quindi sale la piattaforma BC, di lunghezza $BC = 10 \text{ m}$, con accelerazione costante $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$ fino al punto C, dove stacca. L'angolo che la piattaforma forma con l'asse orizzontale è $\vartheta = 30^\circ$.

10 punti

1. Calcolare il modulo della velocità in B e della velocità di stacco in C
2. Calcolare la altezza della quota massima.
3. Calcolare la velocità del centro di massa immediatamente prima di toccare terra
4. Supponendo che quando tocca terra conservi la velocità del centro di massa e che quindi freni con accelerazione dipendente dal tempo $a_3 = -0.5t$, calcolare lo spazio di frenata.



Soluzione:

$$1. v_B = \sqrt{2a_1 AB} = 20 \text{ ms}^{-1};$$

$$\begin{cases} v_C = v_B + a_2 t \\ BC = v_B t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \end{cases}$$

dalla prima: $t = (v_C - v_B)/a_2$ e sostituendo nella seconda: $2a_2 BC = v_B^2 - v_C^2$ e dunque: $v_C = \sqrt{v_B^2 + 2a_2 BC} = 20.98 \text{ ms}^{-1}$

2. la quota massima è data dalla quota di stacco sommata alla quota relativa che si può calcolare con la conservazione dell'energia: $h = BC \sin \vartheta + (v_C \sin \vartheta)^2 / 2g = 10.61$
3. la velocità subito prima di toccare terra è un vettore nel piano xy che ha per componenti:

$$\begin{cases} v_x = v_C \cos \vartheta = 18.17 \\ v_y = \sqrt{2gh} = 14.43 \end{cases}$$

il modulo è $v_D = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 23.2$.

Dopo aver toccato il suolo, la velocità avrà un andamento nel tempo data dalla relazione:

$$v - v_D = \int a(t) dt = -0.5 \int t dt = -\frac{1}{4} t^2$$

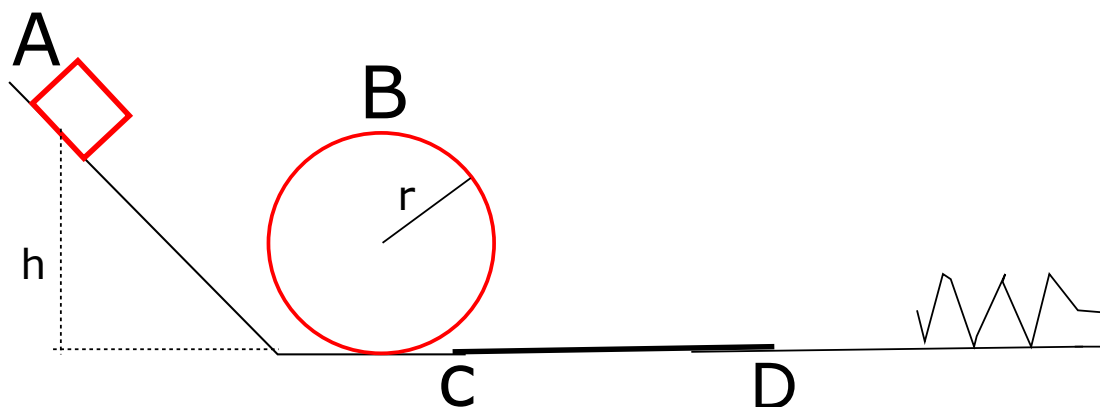
Il tempo della frenata sarà quello $\bar{t}$ per cui si annulla la velocità a partire da v_D : $v_D = 1/4 \bar{t}^2$ e dunque $\bar{t} = 2\sqrt{v_D}$. Per calcolare lo spazio di frenata dobbiamo integrare ulteriormente:

$$x = \int_0^{\bar{t}} \left(v_D - \frac{1}{4} t^2 \right) dt = v_D \bar{t} - \frac{1}{12} \bar{t}^3 = \frac{4}{3} v_D^{3/2}$$

ESERCIZIO 7. Un corpo di massa $m = 4 \text{ kg}$ viene posto su una guida liscia inclinata con un angolo $\alpha = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il corpo, inizialmente a velocità nulla, viene lasciato libero ad un'altezza $h = 6 \text{ m}$ dal suolo. La guida, raggiunto il piano orizzontale, si raccorda con una guida circolare di raggio $r = 1.5 \text{ m}$ e poi con un piano orizzontale scabro lungo $d = 5 \text{ m}$ e con attrito dinamico $\mu_d = 0.2$, che prosegue liscio per altri 15 m . Alla fine del tratto liscio c'è una molla, di lunghezza a riposo $\ell_0 = 0.8 \text{ m}$ e costante elastica $K = 1366 \text{ N/m}$.

10 punti

1. Calcolare la velocità con cui il corpo raggiunge la quota massima B nella guida circolare;
2. calcolare la reazione della guida nel punto B;
3. calcolare la compressione massima della molla;
4. determinare se, dopo essere stato respinto dalla molla, il corpo raggiunge nuovamente il piano inclinato.



Soluzione: $v_0 = \sqrt{2gh} = 10.85$ è la velocità iniziale prima della guida circolare. La velocità lineare nel punto B, la calcoliamo con la conservazione dell'energia: $1/2(mv_0^2 - v_B^2) = mg \cdot 2r$; dunque: $v_B = \sqrt{v_0^2 - 4gr} = 7.67$ e dunque l'accelerazione centripeta $a = v_B^2/r = v_0^2/r - 4g = 39.24$. Detta F_v la reazione vincolare, sarà $ma = mg + F_v$ e dunque $F_v = m(a - g) = 117.72 \text{ N}$.

La velocità con cui il corpo raggiunge il tratto scabro è la stessa che ha alla base del piano inclinato: $v_C^2 = 2gh$ e quella che avrà nel punto D si ricava dal teorema dell'energia: $1/2mv_C^2 = 1/2mv_D^2 + \mu_dgd$ dunque: $1/2v_D^2 = 1/2v_C^2 - \mu_dgd = g(h - \mu_d d)$; $v_D = 9.9$ Questa sarà anche la velocità con cui raggiunge la molla. Dunque dalla conservazione dell'energia: $1/2mv_D^2 = 1/2K\Delta x^2$ ci dà: $\Delta x = \sqrt{mv_D^2/K} = 0.54$

Siccome la molla esercita una forza conservativa, la velocità con cui il corpo torna al punto D è la stessa con cui ci era arrivato. Affinché il corpo ritorni alla base del piano inclinato, questi deve raggiungere la guida circolare con una velocità tale che l'accelerazione centripeta in B sia maggiore di g , quindi $v_B'^2 = v_C'^2 - 4gr > gr$ $v_C' = v_f > \sqrt{5gr}$. Dunque $v_f = \sqrt{v_D^2 - 2\mu_dgd} > \sqrt{5gr}$, quindi: $v_D^2 > g(5r + 2\mu_d d) = 93.2$ e $v_D^2 = 98.01$

ESERCIZIO 8. Un blocco di massa $m = 1$ kg è inizialmente fermo alla base A di un piano scabro inclinato di un angolo $\vartheta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Al blocco viene data una spinta, in conseguenza della quale parte con un'energia cinetica $K_0 = 34$ J, salendo lungo il piano inclinato. Giunto nel punto B, distante $s = 3$ m da A, il blocco si ferma e inverte il moto, ritornando in A con un'energia cinetica $k < k_0$. Calcolare:

7 punti

1. Il coefficiente d'attrito μ_d fra il blocco e il piano inclinato;
2. l'energia cinetica K del blocco quando ripassa per il punto A

Soluzione: Perché si fermi tutta la sua energia cinetica deve essere dissipata in energia potenziale e lavoro della forza d'attrito: $K_0 = mgs \sin \vartheta + \mu_d mgs \cos \vartheta$; dunque:

$$\mu_d = \frac{K_0 - mgs \sin \vartheta}{mgs \cos \vartheta} = 0.76$$

L'energia cinetica alla fine del percorso è data, di nuovo, dall'energia potenziale meno il lavoro delle forze d'attrito:

$$K = mgs \sin \vartheta - \mu_d mg \cos \vartheta \cdot s = mgs(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) = -4,66 \text{ J}$$

ESERCIZIO 9. Un blocco di massa $M=1\text{kg}$ si muove di moto rettilineo sopra un piano orizzontale scabro di coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.5$. Nell'istante in cui blocco ha una velocità $V_0 = 3 \text{ m/s}$, esso viene colpito da un proiettile, di massa $m = 10 \text{ g}$, che viaggia orizzontalmente nella stessa direzione e verso del blocco con una velocità $v = 117 \text{ m/s}$. Il proiettile, dopo l'impatto supposto istantaneo, rimane conficcato nel blocco, Determinare:

7 punti

1. la velocità del sistema blocco-proiettile subito dopo l'urto;
2. il tempo trascorso fra l'istante dell'urto e quello in cui il sistema si ferma;
3. la distanza percorsa dal sistema blocco-proiettile prima di fermarsi.

Soluzione: Applichiamo la conservazione della quantità di moto: $MV_0 + mv = (M + m)v_f$ da cui

$$v_f = \frac{MV_0 + mv}{M + m} = 4.13 \text{ m/s}^{-1}$$

La forza d'attrito è $F_a = \mu(m + M)g$ ed è l'unica ad agire nella direzione opposta al moto. Dunque: $(m + M)a = \mu(m + M)g$, sicché $a = \mu g$ e visto che il corpo si ferma al tempo t , sarà: $0 = v_f - at$ e dunque:

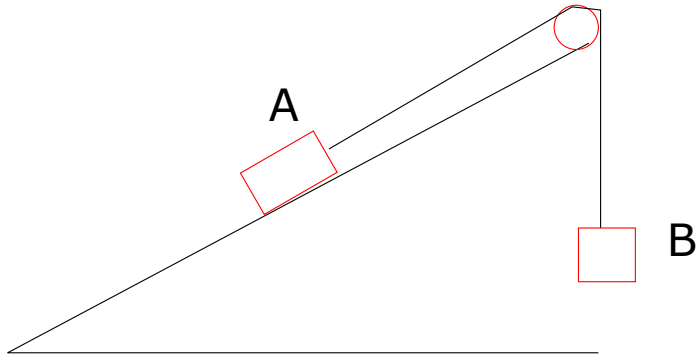
$$t = \frac{v_f}{a} = \frac{v_f}{\mu g} = 0.84 \text{ s}$$

Per l'ultima risposta possiamo usare l'equazione del moto uniformemente accelerato o il teorema dell'energia: $\frac{1}{2}(m + M)v_f^2 = \mu(m + M)gL$, dunque

$$L = \frac{v_f^2}{2\mu g} = 1.74 \text{ m}$$

ESERCIZIO 10. Due blocchi sono collegati attraverso una puleggia come in figura. La massa di A vale $m_a = 11 \text{ kg}$ ed il coefficiente di attrito dinamico fra piano e corpo $\mu_d = 0.1$ e l'angolo di inclinazione $\vartheta = 30^\circ$. Il corpo A scivola giù a velocità costante. Determinare la massa di B.

10 punti



Soluzione:

$$\begin{cases} -m_B g + T = 0 \\ m_a g \sin \vartheta - m_a \mu_d g \cos \vartheta - T = 0 \end{cases}$$

$$m_B = m_A (\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) = 4,55$$

ESERCIZIO 11. Su un piano inclinato avente angolo di inclinazione $\alpha = 45^\circ$, un corpo di massa $m = 10 \text{ kg}$ è trattenuto in quiete mediante una fune disposta parallelamente al piano nella direzione di massima pendenza. Determinare:

1. la forza che la fune esercita sul corpo se il piano è liscio ;
2. se invece il piano è scabro con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.6$, il corpo rimarrebbe in quiete se la fune fosse tagliata? In caso negativo quanto vale la minima tensione necessaria per tenere in equilibrio il corpo?

10 punti

Soluzione:

$$\begin{cases} -T + mg \sin \alpha = 0 \\ N + mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

da cui: $T = mg \sin \alpha$

Se c'è l'attrito, affinché il corpo resti fermo la forza d'attrito statico deve essere uguale alla forza lungo il piano inclinato: $mg\mu_s \cos \alpha = mg \sin \alpha$ dunque $\mu_s = \tan \alpha = 1 > 0.5$, dunque si muove.

$$\begin{cases} -T + mg \sin \alpha - N\mu_s = 0 \\ N + mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Quindi la minima tensione da applicare è $T = mg(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) = 27,74$

ESERCIZIO 12. Una pistola giocattolo a molla lancia per aria, con un angolo α incognito, una biglia di massa $m = 10$ g. La costante elastica vale $k = 6 \text{ N/cm}$, e prima dello sparo la molla è compressa di $\Delta\ell = 4 \text{ cm}$ rispetto alla sua lunghezza a riposo:

10 punti

1. determinare la velocità con cui viene lanciata la biglia;
2. se la biglia ricade ad una distanza di $D = 0,7 \text{ m}$ sul piano orizzontale determinare l'angolo rispetto all'orizzontale con cui è stata lanciata.

Soluzione: Applicando la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

dunque:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta\ell} = 979.8 \text{ cm/s}$$

La gittata di un proiettile è data da:

$$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$$

da cui:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{gD}{v^2} \right) = 0.036 \text{ rad}$$

ESERCIZIO 13. Una pallina da $m = 1.3 \text{ kg}$ è collegata da due fili ideali, di uguale lunghezza $\ell = 2 \text{ m}$, ad un'asta verticale rotante. Durante la rotazione uniforme i fili si tendono e formano insieme all'asta un triangolo equilatero. Se il modulo della tensione del filo superiore vale $T_s = 36 \text{ N}$, determinare:

<i>10 punti</i>

1. Il modulo della tensione del filo inferiore;
2. la velocità con cui ruota la palla.

Soluzione: Siccome il triangolo è equilatero $\vartheta = 30^\circ$.

$$\begin{cases} T_s \cos \vartheta + T_i \cos \vartheta = ma = m \frac{v^2}{r} \\ T_s \sin \vartheta - T_i \sin \vartheta - mg = 0 \end{cases}$$

ove $r = \ell \cos \vartheta$ Da cui possiamo ricavare:

$$T_i = T_s - \frac{mg}{\sin \vartheta} = 10.51 \text{ N}$$

e

$$v = \sqrt{\frac{(T_s + T_i)\ell \cos^2(\vartheta)}{m}} = 7.32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ESERCIZIO 14. Un blocco di massa $m_1 = 4 \text{ kg}$, fermo su una superficie orizzontale priva di attrito, è attaccato ad una molla, di costante elastica $K = 242 \text{ N/m}$, nel suo stato di riposo. Un secondo blocchetto di massa $m_2 = 5 \text{ kg}$ si muove sul piano con velocità v_2 e colpisce il primo nella direzione dell'asse della molla. Se l'urto è elastico:

10 punti

1. determinare l'espressione letterale della velocità del blocco attaccato alla molla subito dopo l'urto;
2. nel moto dopo l'urto il blocco, attaccato alla molla, la comprime di una lunghezza massima $\delta = 39 \text{ cm}$. Determinare la velocità iniziale del secondo blocco v_2

Soluzione: Siccome l'urto è elastico, possiamo conservare l'energia e la quantità di moto:

$$\begin{cases} m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} m_2 (v_2^2 - v_{2f}^2) = m_1 v_{1f}^2 \\ m_2 (v_2 - v_{2f}) = m_1 v_{1f} \end{cases}$$

e, sviluppando la differenza dei quadrati e sostituendo:

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_{2f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

Dopo l'urto si deve conservare l'energia totale:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = \frac{1}{2} K * \delta^2$$

dunque

$$v_{1f} = \delta \sqrt{\frac{K}{m_1}}$$

Sostituendo nell'espressione per v_{1f}

$$v_2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_2} \delta \sqrt{\frac{K}{m_1}} = 2,73 \text{ ms}^{-1}$$

ESERCIZIO 15. Un atleta del peso di $m = 81 \text{ kg}$ dondola appeso ad una corda lunga $\ell = 10 \text{ m}$. Sapendo che la massima altezza raggiunta è $h = 3 \text{ m}$, determinare la tensione della corda nel punto in cui la corda passa per la verticale.

Soluzione: Siccome la lunghezza della corda non cambia, il moto è lungo una circonferenza. Dunque sarà presente un'accelerazione centripeta diretta verso il punto di sospensione di modulo $a_c = v^2/\ell$. La velocità nel punto in cui la corda passa per la verticale, si può ricavare dal teorema della conservazione dell'energia meccanica: $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ dunque, $v^2 = 2gh$.

Quando la corda passa per la verticale, l'atleta è fermo nella direzione di ℓ , dunque:

$$T - mg = m \frac{v^2}{\ell} = \frac{2mgh}{\ell}$$

dunque

$$T = mg \left(1 + 2 \frac{h}{\ell} \right) = 1271,38 \text{ N}$$

10 punti

ESERCIZIO 16. Una sciovvia è installata su un pendio inclinato di un angolo $\vartheta = 38^\circ$ rispetto all'orizzontale e, a pieno carico, può trasportare in salita $N = 85$ sciatori ognuno di massa $m = 70\text{kg}$. Considerando un coefficiente di attrito dinamico fra neve e sci $\mu = 0.05$ determinare:

<i>punti</i>

1. la forza F esercitata dal cavo della sciovvia sul singolo sciatore per farlo salire a velocità costante;
2. la potenza totale fornita dal motore per risalire con velocità $v = 2\text{ m/s}$

Soluzione: Visto che la velocità è costante, la forza di trazione deve uguagliare la forza peso più quella d'attrito:

$$F = mg(\sin \vartheta + \mu \cos \vartheta) = 449.83\text{ N}$$

La potenza è pari al lavoro compiuto per spostare tutti gli sciatori di una distanza dx nell'unità di tempo dt ; dunque:

$$W = NFv = 76\,471.1\text{ W}$$

ESERCIZIO 17. Un trampolino per il salto con gli sci è schematizzabile con una discesa lungo uno scivolo da una quota di $h_1 = 54\text{m}$ a quella di $h_2 = 17\text{m}$ e tale che al momento del distacco la velocità dello sciatore sia orizzontale. Supponendo di potere trascurare ogni forma di attrito, determinare:

<i>punti</i>

1. la velocità al momento del salto;
2. la durata del salto;
3. la lunghezza del salto

Soluzione: La velocità di stacco, ricavabile dalla conservazione dell'energia meccanica è: $v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 26.94 \text{ ms}^{-1}$.

La durata del salto è data dal tempo in cui lo sciatore passa dall'altezza h_2 al suolo: $t = \sqrt{2h_2/g} = 1.86\text{s}$.

In questo tempo, alla velocità v_0 lo sciatore avrà percorso una lunghezza $x = v_0 t_0 = 50,11$

ESERCIZIO 18. Un corpo di massa m è lanciato con velocità $v_0 = 7 \text{ m/s}$ lungo un tratto orizzontale di un piano scabro. Dopo avere percorso una distanza $d_1 = 6 \text{ m}$ il corpo “rimbalza” elasticamente contro una parete (inverte la sua velocità in un tempo trascurabile) e riparte in direzione opposta sul medesimo piano, sul quale percorre una ulteriore distanza $d_2 = 1 \text{ m}$ prima di fermarsi. Determinare:

<i>punti</i>

1. il coefficiente di attrito dinamico μ_d del piano scabro;
2. il tempo intercorso fra la partenza e l'arresto del corpo.

Soluzione: Scriviamo le equazioni dell'energia prima e dopo il rimbalzo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(v_r^2 - v_0^2) = \mu_d mgd_1 \\ 0 - \frac{1}{2}mv_r^2 = \mu_d mgd_2 \end{cases}$$

essendo v_r la velocità con cui arriva sulla parete. Sommando membro a membro e ricavando μ_d :

$$\mu_d = \frac{v_0^2}{2g(d_1 + d_2)} = 0.36$$

Il moto è uniformemente decelerato lungo una distanza $d_1 + d_2$ con accelerazione $a = -\mu_d g$, dunque:

$$0 - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v_0}{\mu_d g} = \frac{2(d_1 + d_2)}{v_0} = 2 \text{ s}$$

ESERCIZIO 19. Una palla viene lanciata orizzontalmente dal tetto di un edificio con velocità iniziale $v_0 = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e raggiunge il suolo ad una distanza di $x_f = 38 \text{ m}$ dalla base dell'edificio. Quanto è alto l'edificio?

Soluzione: Il tempo che la palla impiega a raggiungere il suolo partendo con velocità verticale nulla è: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. In questo tempo la palla percorre una distanza x_f in orizzontale a velocità v_0 , dunque: $v_0 t = x_f \Rightarrow x_f^2 = v_0^2 \frac{2h}{g}$, da cui:

$$h = \frac{gx_f^2}{2v_0^2} = 10,48 \text{ m}$$

7 punti

ESERCIZIO 20. Uno sciatore, inizialmente in quiete, scende strisciando lungo la pista percorrendo $d = 44$ m. La pista forma un angolo di $\vartheta = 30^\circ$ con l'orizzontale.

1. Se il coefficiente di attrito tra gli sci e la pista è $\mu_d = 0.100$, si trovi la velocità dello sciatore al fondo della pista.
2. Giunto al fondo della pista, lo sciatore continua a muoversi su una distesa di neve orizzontale. Si trovi quanto spazio percorre ancora prima di arrestarsi

7 punti

Soluzione: Si applica la conservazione dell'energia meccanica: l'energia cinetica finale più il lavoro delle forze d'attrito deve uguagliare la variazione di energia potenziale

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \mu_d mg \cos \vartheta d = mgd \sin \vartheta$$

da cui:

$$v_f = \sqrt{2gd(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta)} = 18.82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Analogamente, quando lo sciatore si muove orizzontalmente, il lavoro delle forze d'attrito sullo spazio percorso s dovrà eguagliare l'energia cinetica iniziale:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \mu_d mgs$$

quindi:

$$s = \frac{v_f^2}{2\mu_d g} = 180,53 \text{ m}$$

ESERCIZIO 21. Un elicottero, che vola ad un'altezza $h = 29$ m velocità orizzontale $v_x = 37$ m/s, deve lanciare un pacco di aiuti su un carrello che viaggia con velocità $v_{0x} = 20$ m/s. Il carrello ha massa $m_c = 102$ Kg e il pacco ha massa $m_p = 32$ Kg. Trascurando la resistenza dell'aria, supponendo che il carrello proceda senza attrito e che il pacco atterri sul carrello e quindi viaggi insieme al carrello calcolare:

10 punti

1. L'angolo sotto cui il pilota dell'elicottero deve vedere il carrello affinché il pacco cada sul carrello
2. La velocità del carrello dopo che il pacco è atterrato
3. La differenza di energia cinetica tra (immediatamente) prima e dopo l'atterraggio

Soluzione: Nel sistema di riferimento del carrello, la velocità dell'elicottero è $v_{rx} = 17$. Il tempo che il pacco impiega per raggiungere il suolo è $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ in questo tempo, il pacco percorre una distanza orizzontale: $\ell = v_{rx}t = v_{rx}\sqrt{\frac{2h}{g}}$, dunque l'angolo di vista sarà: $\vartheta = \arctan \frac{\ell}{h} = 0.96$ rad.

La velocità del carrello si ricava dalla conservazione della quantità di moto nella direzione orizzontale: $m_c v_{0x} + m_p v_x = (m_c + m_p)v$, dunque:

$$v = \frac{m_c v_{0x} + m_p v_x}{m_c + m_p} = 24.06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'energia cinetica del pacco subito prima di atterrare è $K_p = \frac{1}{2}m_p(v_x^2 + 2gh) = 31007.68$ J e quella del carrello è $K_c = \frac{1}{2}m_c v_{0x}^2 = 20400$ J. L'energia cinetica finale è $K_f = \frac{1}{2}(m_c + m_p)v^2 = \frac{(m_c v_{0x} + m_p v_x)^2}{m_c + m_p} = 38785.2$ J quindi la differenza tra prima e dopo l'atterraggio è $K_p + K_c - K_f = 12622.48$ J.

ESERCIZIO 22.

Due barche partecipano ad una regata partendo al tempo t_0 dallo stesso porto. La prima si dirige a Nord percorrendo $N = 35$ miglia marine alla velocità di $v_N = 11$ nodi e quindi $E = 27$ miglia verso Est alla velocità di $v_E = 18$ nodi, finché giunge alla prima boa. La seconda punta direttamente alla boa con una velocità di $v_{Bt} = 12$ nodi. Sapendo che un miglio marino è pari a 1852 m e che un nodo è pari ad un miglio all'ora, calcolare:

<i>punti</i>

1. La distanza (in km) fra la boa ed il punto di partenza;
2. Il tempo (in h) impiegato dalla prima barca a raggiungere la boa;
3. Il tempo (in h) impiegato dalla seconda barca a raggiungere la boa;
4. l'angolo ϑ , espresso in gradi, tra la velocità della seconda barca v_B e la direzione che indica il Nord.

Soluzione: Prendendo un sistema di riferimento in con x che punta ad est e y che punta a nord, la distanza percorsa è il modulo del vettore spostamento $d = \sqrt{N^2 + E^2} = 81,86$ km
 Il tempo impiegato per ciascuna tratta è: $t_N = N/v_N$ e $t_E = E/v_E$, il tempo totale della prima barca è dato dalla somma $t_N + t_E = 4,68$ h. Il tempo che la seconda barca impiega è $d/v_{Bt} = 3,68$ h. L'angolo tra la velocità della seconda barca rispetto al nord è $\vartheta = \arctan\left(\frac{E}{N}\right) = 37,65^\circ$

ESERCIZIO 23. Un corpo si muove di moto circolare uniforme lungo una traiettoria circolare con energia cinetica $E_c = 200$ J. Il corpo è tenuto in orbita tramite una fune tesa inestensibile di massa trascurabile. Se il modulo della tensione della fune è $\tau = 12$ N e il periodo di rotazione è $T = 33$ s, calcolare (esprimendo le unità di misura nel Sistema Internazionale):

<i>punti</i>

1. il raggio R della traiettoria;
2. il modulo della velocità v del corpo;
3. la massa m del corpo;
4. il modulo del momento angolare L .

Soluzione:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}mv^2 \\ \tau = m\frac{v^2}{R} \\ \omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

Dividendo la prima per la seconda: $E_c/\tau = R/2$ Dunque: $R = 2E_c/\tau = 33.33$ m.

Dalla terza: $v/R \equiv v\tau/2E_c = 2\pi/T$, quindi: $v = 4\pi E_c/T\tau = 6.35 \text{ ms}^{-1}$. Sostituendo nella prima, troviamo: $m = 2E_c/v^2 = 9.92$ kg. Infine, il momento angolare è $L = R \times mv = 2099,52 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$.

ESERCIZIO 24. Un ascensore di massa $m = 113 \text{ Kg}$ è tirato verso l'alto da una fune, che può sopportare una tensione massima di $T = 2240 \text{ N}$. Quale è il tempo minimo necessario per portare, in totale assenza di attriti, l'ascensore dal primo al quinto piano, tra cui c'è un dislivello di $h = 12 \text{ m}$? Quale è invece il tempo se si aggiunge un attrito dinamico di $F_a = 359 \text{ N}$?

<i>punti</i>

Soluzione: Le forze agenti sull'ascensore sono la tensione, la forza peso e, nel secondo caso, l'attrito. Dunque: $T - mg = ma$ e quindi: $a = T/m - g = 10.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. L'ascensore percorrerà un dislivello $h = 1/2at^2$, nel tempo:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1,55 \text{ s}$$

In presenza di attrito, il bilancio delle forze sarà: $T - mg - F_a = ma$, e dunque:

$$a = \frac{T - F}{m} - g = 6.84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

e dunque $t = 1,87 \text{ s}$

ESERCIZIO 25. Una pallottola di massa $m = 12 \text{ g}$ viene sparata contro un blocco di massa $M = 3 \text{ kg}$ inizialmente in quiete sul bordo di un tavolo alto $h = 1 \text{ m}$. Il proiettile si conficca nel blocco e, dopo l'urto, il blocco cade al suolo ad una distanza $L = 1 \text{ m}$ dallo spigolo del tavolo.

<i>punti</i>

1. Determinare la velocità iniziale v_0 del proiettile.
2. Determinare l'energia trasformata in calore dopo l'urto,
3. l'energia cinetica iniziale con cui il blocco cade dal punto al bordo del tavolo,
4. l'energia cinetica con cui arriva al suolo.

Soluzione: Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto, quindi: $mv_0 = (m + M)v_b$ dove v_b è la velocità del blocco con il proiettile incastrato dopo l'urto. Con questa velocità, il sistema percorre una distanza orizzontale $L = v_b \cdot t^*$ dove t^* è il tempo che ci vuole per raggiungere il suolo: $t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; dunque $v_b = L \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}} = 2.21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e quindi:

$$v_0 = \frac{m + M}{m} L \sqrt{\frac{g}{2h}} = 554.71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

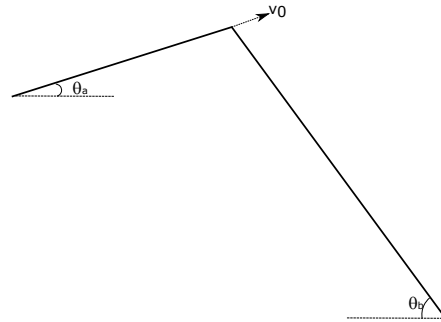
L'energia trasformata in calore sarà la differenza tra le energie cinetiche prima e dopo l'urto $E = E_p - E_d = 1/2mv_0^2 - 1/2(m + M)v_b^2 = 1846.22 - 7.36 = 1838.86 \text{ J}$

L'energia cinetica con cui il sistema comincia a muoversi dopo l'urto è $E_d = 7.36 \text{ J}$

L'energia cinetica con cui raggiunge il suolo è $E_f = 1/2(m + M)(v_b^2 + 2gh) = 36.91 \text{ J}$

ESERCIZIO 26. Uno sciatore compie un salto da una rampa inclinata di $\vartheta_a = 15^\circ$ rispetto all'orizzontale per poi ricadere su un piano inclinato di $\vartheta = 45^\circ$. Sapendo che lo sciatore lascia la rampa con una velocità in modulo pari a $v_0 = 9 \text{ m/s}$ e trascurando la resistenza dell'aria, calcolare a che distanza dal punto di lancio lo sciatore atterra sul piano inclinato e le componenti della velocità nel punto di atterraggio.

punti



Soluzione: Fissando l'origine nel punto di stacco:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \vartheta_a t \\ y = v_0 \sin \vartheta_a t - 1/2 g t^2 \end{cases}$$

da cui, ricavando t dalla prima e sostituendo nella seconda

$$y = x \tan \vartheta_a - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \vartheta_a v_0^2}$$

che, messa a sistema con l'equazione del piano inclinato $y = -x$, permette di ricavare l'ascissa del punto di contatto:

$$x_c = \frac{2 \cos^2 \vartheta_a (\tan \vartheta_a + 1) v_0^2}{g} = 19.54 \text{ m}$$

che equivale ad una distanza sul piano inclinato $d = x_c / \cos \vartheta_b = 27.63 \text{ m}$.

Le componenti della velocità, saranno:

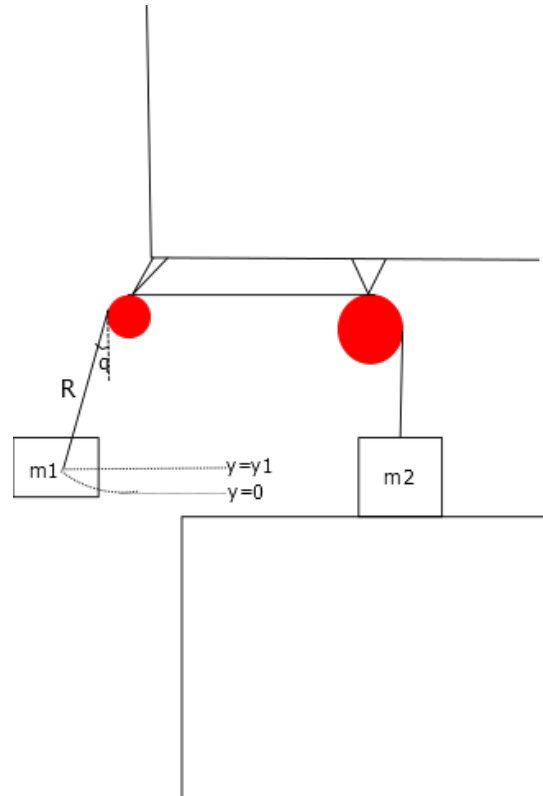
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \vartheta_a \\ v_y = v_0 \sin \vartheta_a - g t_c \end{cases}$$

dove t_c è il tempo a cui lo sciatore tocca il piano: dunque quando $x(t_c) = x_c$

$$v_0 \cos \vartheta_a t_c = x_c \Rightarrow t_c = \frac{x_c}{v_0 \cos \vartheta_a} = 2.25 \text{ s}$$

ESERCIZIO 27. Due blocchi di massa $m_1 = 3$ e $m_2 = 7$ sono collegati attraverso una fune inestensibile e di massa trascurabile che passa attraverso due carrucole ideali. La massa m_1 pende dalla carrucola per una distanza $R = 1.42$ m mentre la massa m_2 è appoggiata ad un piano. Se si sposta la massa m_1 dalla posizione verticale di un angolo ϑ e la si rilascia, quale deve essere il minimo angolo ϑ affinché la massa m_2 si stacchi dal tavolo?

<i>punti</i>



Soluzione: La massa m_2 si solleverà quando la tensione del filo sarà maggiore del suo peso. La tensione del filo sarà massima quando la massa m_1 passa per la verticale e sarà pari a $T = m_1g + m_1v^2/R$. Bisogna quindi trovare la velocità nel punto in cui passa per la verticale. Possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica:

$$m_1gR(1 - \cos \vartheta) = 1/2m_1v^2$$

da cui $v^2 = 2gR(1 - \cos \vartheta)$ e quindi, la tensione è $T = m_1g(1 + 2(1 - \cos \vartheta)) = m_1g(3 - 2 \cos \vartheta)$. Dalla condizione $m_2g \leq T$, ricaviamo $m_2g = m_1g(3 - 2 \cos \vartheta_{min})$ e quindi:

$$\cos \vartheta_{min} = \frac{3m_1 - m_2}{2m_1}$$

e dunque $\vartheta_{min} = 1.43 \text{ rad}$

ESERCIZIO 28. Un dischetto è posto alla distanza $r = 16 \text{ cm}$ dall'asse di una piattaforma ruotante con velocità angolare $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$, restando fermo rispetto ad essa. Imprimendo alla piattaforma una accelerazione angolare $\dot{\omega} = 3 \text{ rad/s}^2$ osserva che dopo un intervallo di tempo $t = 1.5 \text{ s}$ il dischetto inizia a muoversi. Determinare il coefficiente di attrito statico.

<i>punti</i>

Soluzione: Il dischetto comincia a muoversi quando la forza che agisce sul corpo supera l'attrito statico: $\mu_s mg \leq ma$ dove $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ e $a_t = \dot{\omega}r$; $a_n = r\omega^2$ e $\omega = \omega_0 + \dot{\omega}t = 7.5 \text{ rad/s}$. Dunque: $\mu_s = \frac{r}{g} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = 0,92$

ESERCIZIO 29. Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 21 \text{ cm}$ con velocità angolare costante $\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$. A partire dall'istante $t = 0$ il punto materiale inizia a decelerare fino ad arrestarsi. Dall'istante $t_0 = 0$ all'istante $t_1 = 10 \text{ s}$ la sua accelerazione angolare vale $\alpha = kt \text{ rad/s}^2$ con $k = 0.4$ mentre per $t \geq t_1$ resta costante al valore $\alpha_1 = 4 \text{ rad/s}^2$. Calcolare il modulo dell'accelerazione lineare del punto nell'istante t_1 e il tempo che questo impiega ad arrestarsi.

<i>punti</i>

Soluzione: All'istante t_1 il punto che parte da una velocità angolare ω_0 avrà una velocità angolare:

$$\omega(t_1) = \omega_0 - \int_{t_0}^{t_1} -kt \, dt = \omega_0 - \frac{k}{2}t_1^2 = 10 \text{ rad/s}$$

Il modulo dell'accelerazione a quest'istante di tempo è $a(t_1) = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ dove $a_n = \omega(t_1)^2 R = 21 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione normale (centripeta) e $a_t = \alpha(t_1)R = -0.08 \text{ m/s}^2$. Dunque $a = 21 \text{ m/s}^2$.

Da quest'istante in poi il moto è uniformemente decelerato dalla velocità $\omega(t_1)$ a zero, dunque: $\omega(t_1) - \alpha_1 t = 0$ quindi: $t = \omega(t_1)/\alpha_1 = 2,5 \text{ s}$

ESERCIZIO 30. Due imbarcazioni A e B procedono in direzioni opposte avvicinandosi con velocità costanti $v_A = 24 \text{ km/h}$ e $v_B = 38 \text{ km/h}$. Nell'istante in cui la distanza tra le imbarcazioni è d , da A viene sparato un proiettile con velocità, relativa all'imbarcazione, di modulo $v_P = 150 \text{ m/s}$ ed angolo $\vartheta = 30^\circ$. Determinare la distanza d perché il proiettile colpisca B. Trascurare le dimensioni delle imbarcazioni e la resistenza dell'aria.

<i>punti</i>

Soluzione: Nel sistema di riferimento della barca A, $v'_A = 0$ e $v'_B = v_A + v_B$. Possiamo scrivere le equazioni del moto del proiettile:

$$\begin{cases} x'_p = v_p \cos \vartheta t \\ y'_p = v_p \sin \vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Il tempo in cui il proiettile raggiunge il suolo si ottiene per $y'_p = 0$: $t_G = 2v_p \sin \vartheta / g$. In questo tempo l'imbarcazione B ha percorso una distanza $v'_B t_G$, dunque dovrà essere $d - v'_B t_G = v_P \cos \vartheta t_G$ da cui $d = (v'_B + v_P \cos \vartheta) t_G = 2056.82 \text{ m}$