

ESERCIZIO 1. Un'asta sottile omogenea, avente massa $m = 5$ g e lunghezza $d = 26$ m ruota nel piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro O con velocità angolare $\omega_0 = 27$ rad/s. Si vuole fermarla in un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ s applicando un momento frenante costante. Determinare:

10 punti

1. il momento frenante;
2. il numero di giri compiuto prima di fermarsi

Soluzione: Utilizziamo l'equazione cardinale della dinamica rotazionale: $M = I\dot{\omega}$, in cui l'accelerazione angolare la possiamo ricavare dal fatto che la decelerazione è costante e termina con $\omega = 0$. Dunque: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{\Delta t}$., Visto che $I = \frac{md^2}{12}$:

$$M = \frac{md^2\omega_0}{12\Delta t} = 0,76 \text{ Nm}$$

Il numero di giri lo ricaviamo integrando l'equazione della dinamica rotazionale:

$$2\pi N = \omega_0\Delta t - \frac{1}{2}\dot{\omega}(\Delta t)^2 = \omega_0\Delta t \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

dunque: $N = \frac{\omega_0\Delta t}{4\pi} = 21$

ESERCIZIO 2. Una gru è costituita da un'asta verticale AC (albero) di lunghezza $L = 3$ m, rigidamente fissata al terreno e da un'asta (braccio) AB di lunghezza $H = 9$ m, incernierata alla base A dell'albero. Il braccio è tenuto inclinato di un angolo $\alpha = 45^\circ$ rispetto all'albero da una fune CB inestensibile e di massa trascurabile ed alla sua estremità è appeso un carico di peso $p = 335$ kg. Calcolare:

10 punti

1. la tensione della fune
2. la lunghezza ℓ della fune
3. la forza di compressione S esercitata lungo il braccio AB supposto di peso trascurabile

Soluzione: Siccome il sistema è fermo, la somma delle forze applicate al punto B deve essere nulla. Le forze in B sono: la forza peso p , la compressione S e la tensione T del tirante. Il triangolo formato da queste tre forze è simile al triangolo ABC, perché ha tutti i lati paralleli a questo, dunque valgono le proporzioni:

$$\frac{T}{BC} = \frac{p}{AC} \rightarrow T = p \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{S}{AB} = \frac{p}{AC} \rightarrow S = p \frac{AB}{AC} = 1005 \text{ N}$$

Per trovare BC, sfruttiamo la proprietà che $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, dunque elevando al quadrato entrambi i membri:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \overline{AC} \cos \alpha$$

quindi:

$$\ell^2 = L^2 + H^2 - 2LH \cos \alpha = 51.82$$

e dunque

$$\ell = 7.2 \text{ m}$$

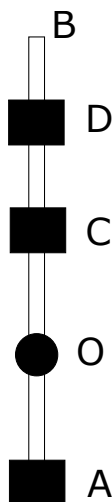
e, infine:

$$T = 804 \text{ N}$$

ESERCIZIO 3. Un metronomo è costituito da un'asta rigida verticale AB impernata in un suo punto O che può oscillare in un piano verticale, e tre masse puntiformi $m_A = 31$ g all'estremo A dell'asta, $m_C = 9$ g nel punto C simmetrico di rispetto ad O e $m_D = 10$ g nel punto D che può scorrere lungo l'asta. Considerando $OA = OC = 3$ cm e $OD = 7$ cm e trascurando il peso dell'asta, determinare:

10 punti

- la posizione del centro di massa del sistema ed il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse orizzontale passante per O;
- la posizione di equilibrio stabile del sistema ed il periodo delle piccole oscillazioni intorno a questa posizione



Soluzione: Prendendo il sistema di riferimento centrato in O, sarà $x_A = -OA = -3$ cm, $x_C = +3$ cm, $x_D = 7$ cm. Il baricentro sarà in:

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_C x_C + m_D x_D}{m_A + m_C + m_D} = 0.08 \text{ cm}$$

La posizione di equilibrio stabile è quella con in cui il centro di massa è al di sotto del punto O e il periodo delle piccole oscillazioni, detta $M = m_A + m_C + m_D = 50$ e

$$I_0 = m_A x_A^2 + m_C x_C^2 + m_D x_D^2 = 850 \text{ g cm}^2$$

sarà:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mg|x_G|}} = 2.92 \text{ s}$$

ESERCIZIO 4. Un cilindro omogeneo di massa $m = 6$ kg e raggio $r = 10$ cm, ruota con velocità angolare ω_0 attorno ad un asse parallelo all'asse del cilindro e posto ad una distanza $d = r/2$ da questo. Applicando un momento costante $M = 9$ N m, il cilindro si ferma in un tempo $t_0 = 3$ s. Calcolare:

10 punti

1. la velocità angolare ω_0 del cilindro;
2. dopo quanto tempo acquista una velocità angolare uguale ed opposta a quella iniziale;
3. dopo quanti giri a partire dall'inizio ciò avverrà.

Soluzione:

$$M = I\dot{\omega} = I\frac{\omega_0}{t_0}$$

essendo $I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2 = \frac{3}{4}mr^2$ dunque:

$$\omega_0 = \frac{Mt_0}{I} = \frac{4Mt_0}{3mr^2} = 600 \text{ rad s}^{-1}$$

Il momento applicato è costante, quindi per raggiungere la velocità uguale ed opposta all'iniziale ci vogliono t_0 secondi da quando si ferma. Per trovare il numero di giri bisogna risolvere l'equazione del moto:

$$\omega_0 t + \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = \alpha = 2N\pi$$

essendo N il numero di giri e $t = 2t_0$. Dunque

$$N = \frac{2\omega_0 t_0(1 + 1/(2t_0) \cdot 2t_0)}{2\pi} = \frac{4\omega_0 t_0}{2\pi} = 1146$$

ESERCIZIO 5. Un corpo di massa $m_1 = 2$ kg è inizialmente posto su un piano inclinato liscio di angolo $\alpha = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il corpo viene lanciato con velocità $v_0 = 5$ m/s e, percorsa la distanza $d = 5$ m lungo il piano inclinato, raggiunge un piano orizzontale che nella parte iniziale è liscio e quindi scabro con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.2$, per una distanza $L = 5$ m, e quindi di nuovo liscio. Alla fine del piano orizzontale, si trova un'asta di lunghezza $L_a = 5$ m e massa $m_a = 3$ kg, incernierata nel punto O, che si trova ad un'altezza $h = 2.5$ m, attorno al quale può ruotare senza attrito. All'estremo inferiore dell'asta è fissata una massa $m_2 = 1$ kg ed a metà tra il punto O e l'estremo superiore dell'asta, un'altra massa $m_3 = 3$ kg. Il corpo m_1 compie un urto completamente anelastico e rimane attaccato al corpo m_2 .

10 punti

1. Calcolare la velocità del corpo m_1 alla base del piano inclinato
2. Calcolare la velocità del corpo m_1 all'istante dell'urto
3. Calcolare la velocità angolare del sistema composto dall'asta con le masse attaccate, immediatamente dopo l'urto
4. Determinare se l'asta si ribalta

Soluzione: Col teorema dell'energia: $\frac{1}{2}m_1v_0^2 + m_1gd\sin\alpha = \frac{1}{2}m_1v_1^2$. Dunque:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gd\sin\alpha} = 10.49 \text{ m/s}$$

La velocità alla fine del piano scabro è data sempre dal teorema dell'energia considerando il lavoro delle forze d'attrito: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 - m_1g\mu_dL = \frac{1}{2}m_1v_2^2$, dunque:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2g\mu_dL} = 9.51$$

Prendendo il sistema di riferimento centrato nell'asse di rotazione e rivolto verso l'alto, il centro di massa si troverà ad una coordinata

$$y_g = \frac{m_3L_a/4 - (m_1 + m_2)L_a/2}{m_1 + m_2 + m_3} = -0.63$$

essendo il centro di massa dell'asta nell'origine. Appliciamo il teorema della conservazione del momento della quantità di moto prima e dopo l'urto:

$$m_1v_2h = I\omega$$

dove $I = m_aL_a^2/12 + (m_1 + m_2)h^2 + m_3(\frac{L_a-h}{2})^2 = 43.75$ è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione. Per trovare $\omega = m_1v_2h/I = 1.09$

Perché l'asta si ribalti, dovrà essere:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \geq (m_a + m_1 + m_2 + m_3)g \cdot 2y_g$$

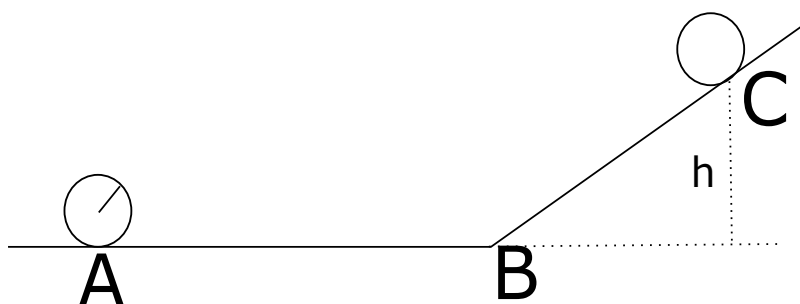
perché la differenza di quota è $2y_g$. Dunque: $\omega^2 \geq 4(m_a + m_1 + m_2 + m_3)gy_g/I$ ovvero $\omega \geq 2.26$

ESERCIZIO 6.

Un cilindro omogeneo di massa $M = 6$ kg. si trova fermo nel punto A sul piano orizzontale AB (vedi fig.). Ad un certo istante viene applicata al centro di massa del cilindro una forza F di modulo costante, parallela al piano AB e diretta da A verso B. La distanza è $AB = 1$ m; Tale forza viene bruscamente rimossa quando il cilindro transita per il punto B e, di qui, esso poi prosegue per inerzia fino al punto C. Supponendo che durante il suo moto il cilindro rotoli sempre senza strisciare, valutare:

10 punti

1. il valore della forza F affinché il baricentro del cilindro raggiunga la quota $h = 2$ m.
2. la velocità; di traslazione del cilindro quando passa per B



Soluzione: Il lavoro eseguito dalla forza nel tratto AB si traduce in energia cinetica traslazionale e rotazionale:

$$L_{AB} = F \cdot AB = \frac{1}{2} (Mv_{CM}^2 + I\omega^2)$$

ma siccome il moto è di puro rotolamento $\omega = v_{CM}/R$ e $I = 1/2MR^2$, dunque:

$$F \cdot AB = \frac{1}{2} \left(Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \right) = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2$$

Per arrivare fermo nel punto C, tutta l'energia cinetica testé calcolata, si trasformerà in energia potenziale nel punto C $E_{pot} = Mgh$, dunque: $\frac{3}{4}Mv_{CM}^2 = Mgh$ e, in definitiva:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 5,11 \quad ms^{-1}$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro otteniamo:

$$F = \frac{3}{4AB}Mv_{CM}^2 = \frac{Mgh}{AB} = 117,72 \text{ N}$$

ESERCIZIO 7. Una ruota, inizialmente in quiete, può ruotare intorno ad un asse in presenza di un attrito che è schematizzabile con un momento frenante costante M_f .

Alla ruota viene applicato un momento motore $M_m = 36 \text{ N m}$ per un tempo $t_1 = 20 \text{ s}$ ed alla fine di questa fase di accelerazione la velocità angolare vale $\omega_f = 53 \text{ rad/s}$. A questo istante si elimina il momento motore e si osserva che la ruota si ferma in un tempo $t_2 = 117 \text{ s}$. Avendo impostato le equazioni del moto nelle due fasi, determinare:

10 punti

1. il momento d'inerzia I della ruota rispetto all'asse di rotazione;
2. il momento della forza di attrito M_f .

Soluzione: Applichiamo la legge di Newton per i moti rotatori alle due fasi del moto e la legge dell'accelerazione angolare:

$$\begin{aligned}\omega_f &= \dot{\omega}_1 t_1 \\ 0 &= \omega_f - \dot{\omega}_2 t_2 \\ M_m - M_f &= I \dot{\omega}_1 \\ M_f &= I \dot{\omega}_2\end{aligned}$$

da cui: $\dot{\omega}_1 = \frac{\omega_f}{t_1}$ $\dot{\omega}_2 = \frac{\omega_f}{t_2}$ e, risolvendo rispetto a I ed M_f :

$$\begin{aligned}I &= \frac{M_m}{\omega_f} \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} &= 11,6 \text{ kg m}^2 \\ M_f &= M_m \frac{t_1}{t_1 + t_2} &= 5,26 \text{ N m}\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8. Un disco di grammofono di massa $M = 96\text{g}$ e raggio $R = 14\text{ cm}$ gira intorno al suo asse centrale alla velocità angolare di $\omega_i = 45$ giri/minuto. Un pezzetto di stucco di massa $m = 18\text{g}$ cade dall'alto verticalmente sul disco e si attacca al suo bordo. Determinare:

<i>10 punti</i>

1. il momento d'inerzia del disco I_0 ;
2. la velocità angolare del disco subito dopo che lo stucco si è attaccato;
3. l'energia meccanica dissipata nell'urto

Soluzione: Momento d'inerzia del disco: $I_0 = 1/2 MR^2 = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$. Conserviamo il momento della quantità di moto: $I_0 \omega_i = (I_0 + mR^2) \omega_f$, dunque:

$$\omega_f = \frac{I_0 \omega_i}{(I_0 + mR^2)} = \omega_i \frac{M}{M + 2m} = 3,43 \text{ rad/s}$$

L'energia meccanica dissipata nell'urto è data dalla differenza delle energie cinetiche iniziale e finale.

$$\begin{cases} K_i = \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2 \\ K_f = \frac{1}{2} (I_0 + mR^2) \omega_f^2 \end{cases}$$

$$K_i - K_f = \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2 \frac{mR^2}{I_0 + mR^2} = \frac{mMR^2}{2(M + 2m)} \omega_i^2 = K_i \frac{2m}{M + 2m}$$

ESERCIZIO 9. Due palle di 1kg, sono attaccate agli estremi di un asta sottile di massa trascurabile e lunghezza $L = 1\text{ m}$, libera di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse passante per il suo centro. Mentre l'asta è ferma in posizione orizzontale, un pezzetto di stucco di massa $m_s = 56\text{ g}$ cade, verticalmente con velocità $v_s = 4\text{ m/s}$, su una palla e vi rimane attaccato. Determinare:

10 punti

1. La velocità angolare ω_0 del sistema sbarra-stucco subito dopo l'urto;
2. Il rapporto fra l'energia cinetica dopo e prima dell'urto;
3. L'angolo massimo rispetto all'orizzontale fino al quale risale la sbarra

Soluzione: Nell'urto si conserva il momento della quantità di moto rispetto all'asse orizzontale di rotazione

$$m_s v_s \frac{L}{2} = I \omega_0 = \left[m_s \left(\frac{L}{2} \right)^2 + 2m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \omega_0$$

dunque:

$$\omega_0 = \frac{m_s}{m_s + 2m} \frac{2v_s}{L} = 0.218$$

L'energia cinetica iniziale è quella dello stucco, quella finale è quella del sistema, dunque:

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I \omega_0^2}{m_s v_s^2} = \frac{m_s}{m_s + 2m} = 0.03$$

Dopo l'urto, il moto è senza dissipazione, dunque vale il principio di conservazione dell'energia in cui la variazione di energia potenziale delle due palle si compensa e rimane solo quella dello stucco:

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = m_s g \frac{L}{2} \sin \vartheta_{max}$$

da cui si ricava:

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{I \omega_0^2}{m_s g L} = \frac{m_s}{2m + m_s} \frac{v_s^2}{gL} = 0.04$$

ESERCIZIO 10. Un cilindro omogeneo di massa $m_c = 6 \text{ kg}$ e raggio r è appoggiato su un tavolo orizzontale. L'asse del cilindro è collegato ad una massa $m = 2 \text{ kg}$ libera di scendere lungo la verticale, tramite un filo inestensibile che scorre senza attrito su una puleggia P al bordo del tavolo (le masse del filo e della puleggia sono trascurabili). Supponendo il sistema inizialmente in quiete, calcolare la velocità della massa m quando è discesa di un tratto $h = 3 \text{ m}$ sapendo che il cilindro rotola senza strisciare sul piano orizzontale e non vi sono attriti.

10 punti

Soluzione: Non essendoci attrito possiamo scrivere la legge della conservazione dell'energia quando la massa m è scesa di un tratto h :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_cv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

ove $\omega = v_c/r$ ed $I = \frac{1}{2}m_cr^2$ è il momento di inerzia del cilindro. Sostituendo:

$$\frac{1}{2} \left(m + m_c + \frac{I}{r^2} \right) v^2 = mgh$$

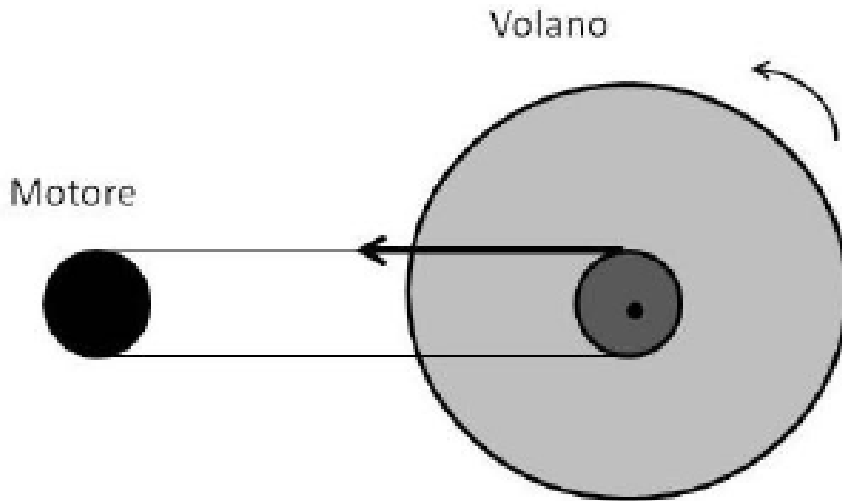
da cui:

$$v = \sqrt{2gh \left(\frac{m}{m + \frac{3}{2}m_c} \right)} = 3,27 \text{ ms}^{-1}$$

ESERCIZIO 11. Un motore elettrico fa girare un volano mediante una puleggia come in figura. Il volano è un cilindro omogeneo di diametro $d = 1 \text{ m}$ e massa $m = 9 \text{ kg}$ che ruota intorno al suo asse. La puleggia alla quale è connessa la fascia elastica ha massa trascurabile e diametro $d_{in} = 20 \text{ cm}$. Partendo da fermo il volano raggiunge, con accelerazione costante, la velocità angolare di $\omega = 11 \text{ rad/s}$ dopo avere effettuato $N = 5$ giri; e la tensione nel punto più alto della fascia è $T_{sup} = 100 \text{ N}$. Determinare:

<i>punti</i>

1. L'accelerazione angolare del moto;
2. Il valore della tensione nel punto più basso della fascia T_{inf}



Soluzione: Le equazioni del moto del volano ci dicono che:

$$\frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = 2\pi N$$

$$\dot{\omega}t = \omega$$

da cui, ricavando t dalla seconda e sostituendo nella prima:

$$\dot{\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi N} = 1.93 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

Il momento delle forze che mettono il corpo in rotazione è:

$$M = r_{int}(T_{sup} - T_{inf}) = I\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}$$

da cui:

$$T_{inf} = T_{sup} - \frac{mR^2\dot{\omega}}{2r_{int}} = 78,29 \text{ N}$$

ESERCIZIO 12. Una ruota disomogenea di raggio $R = 36 \text{ cm}$ è montata su un asse orizzontale intorno al quale può girare senza attrito. Una corda priva di massa, avvolta intorno alla ruota, porta fissato all'estremità libera un corpo di massa $m = 4 \text{ kg}$ che scende lungo la verticale con accelerazione $a = 1 \text{ m/s}^2$. Determinare il momento d'inerzia della ruota. Quanto vale il momento di inerzia se c'è un momento delle forze d'attrito $M = 0.5 \text{ N m}$? Quanto vale il lavoro compiuto dalle forze d'attrito dopo un tempo $t = 2 \text{ s}$?

10 punti

Soluzione:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = I\dot{\omega} = I\frac{a}{R} \end{cases}$$

dunque: dalla prima $T = m(g - a)$ e sostituendo nella seconda:

$$I = mR^2 \frac{g - a}{a} = 4,57 \text{ kg m}^2$$

L'equazione dei momenti delle forze cambia con l'attrito che si oppone all'effetto della tensione:

$$TR - M = I\dot{\omega} = I\frac{a}{R}$$

mentre l'equazione delle forze sulla massa in caduta non cambia. Dunque:

$$I = (TR - M)\frac{R}{a} = (m(g - a)R - M)\frac{R}{a} = 3,85 \text{ kg m}^2$$

Il lavoro compiuto dalle forze d'attrito è $L = M\alpha$ dove α è l'angolo di cui ha girato la ruota nel tempo t :

$$\alpha = \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = \frac{a}{2R}t^2 = 5,56 \text{ rad}$$

e dunque: $L = 2,78 \text{ J}$

ESERCIZIO 13. Una sfera omogenea di massa $m = 129$ kg e raggio $R = 2$ m può ruotare liberamente rispetto ad un asse verticale ad essa tangente. Determinare:

1. il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse di rotazione;

2. se si applica alla sfera inizialmente ferma, una forza sul punto diametralmente opposto al punto in cui tange l'asse di rotazione, quanto vale la sua intensità affinché la sfera ruoti di $\vartheta = 90$ gradi in $t = 6$ secondi?

10 punti

Soluzione: Il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse passante per il centro di massa vale $I_c = \frac{2}{5}mR^2$, dunque, per il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_c + md^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 = 722.4$$

$$\begin{cases} F \cdot 2R = I\dot{\omega} \\ \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = \vartheta \end{cases}$$

Dalla seconda:

$$\dot{\omega} = \frac{2\vartheta}{t^2}$$

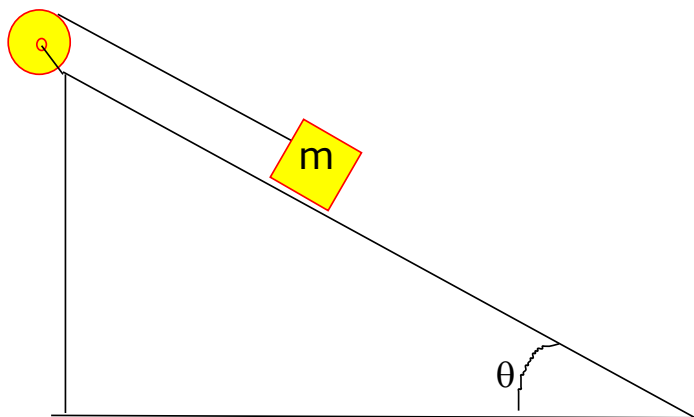
e sostituendo nella prima:

$$F = \frac{I\vartheta}{Rt^2} = 15,76 \text{ N}$$

ESERCIZIO 14. Una ruota non omogenea di raggio r è montata su un asse orizzontale intorno al quale può girare senza attrito e con momento d'inerzia $I = 1010 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$. Una corda priva di massa avvolta intorno alla ruota porta fissato all'estremità libera un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$ che scende lungo un piano liscio, inclinato di un angolo $\vartheta = 20^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il corpo scende con accelerazione $a = 1 \text{ m/s}^2$.

10 punti

1. Determinare il raggio r della ruota
2. Se il piano è scabro con attrito dinamico $\mu_d = 0.1$ ed il raggio rimane quello calcolato, quanto cambierà l'accelerazione?



Soluzione: Dobbiamo uguagliare il momento della tensione alla variazione del momento angolare e scrivere la legge del moto della massa:

$$\begin{cases} Tr = I\dot{\omega} = I\frac{a}{r} \\ ma = mg \sin \vartheta - T \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} r^2 = \frac{Ia}{T} \\ T = m(g \sin \vartheta - a) \end{cases}$$

Sostituendo:

$$r = \sqrt{\frac{aI}{m(g \sin \vartheta - a)}} = 0.15 \text{ m}$$

La seconda equazione del sistema cambierà in presenza dell'attrito:

$$ma = mg(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) - T = mg(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) - \frac{Ia}{r^2}$$

quindi:

$$ma \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right) = mg(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta)$$

da cui

$$a = \frac{g(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta)}{\left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)} = 0.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

ESERCIZIO 15. Il rotore di un elicottero è costituito da tre pale di massa $m = 233$ Kg e lunghezza $L = 5.1$ m ciascuna. Determinare:

<i>punti</i>

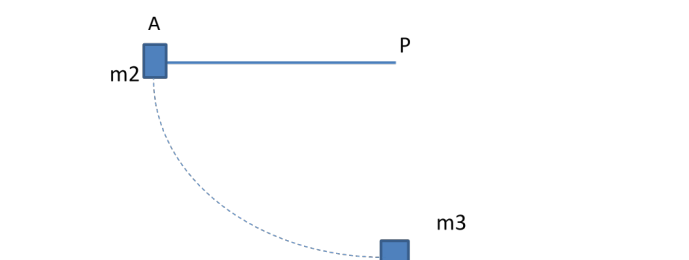
1. il momento d'inerzia del rotore rispetto ad un asse perpendicolare al piano in cui giacciono le pale e passante per il loro punto di raccordo;
2. il momento M_R della coppia fornita dal motore dell'elicottero per portare il rotore alla velocità angolare di regime $\omega_f = 339$ giri/minuto in un tempo $\Delta t = 6$ s.

Soluzione: Il momento di inerzia è dato dalla somma dei momenti di inerzia di ciascuna pala che è un'asta incernierata ad un estremo: $I = 3 \cdot \frac{1}{3}mL^2 = mL^2 = 6060.33 \text{ Kg m}^2$
L'accelerazione angolare è $\dot{\omega} = (\omega_f - \omega_0)/\Delta T$. $M_r = I\dot{\omega} = I\omega_f/\Delta t = 342\,408,65 \text{ N m}$

ESERCIZIO 16. Un'asta di massa $m_1 = 8 \text{ kg}$ e lunghezza $L = 1.5 \text{ m}$ è incernierata ad un punto P, attorno al quale può ruotare senza attrito, come in figura. All'altra estremità dell'asta, nel punto A, è fissato un corpo di massa $m_2 = 4 \text{ kg}$. Sul piano orizzontale, liscio, si trova un corpo di massa m_3 . L'asta, inizialmente in quiete e disposta orizzontalmente, viene lasciata libera di ruotare. Calcolare

punti

1. L'energia potenziale iniziale del sistema.
2. La velocità angolare con cui l'asta passa dalla verticale.
3. La velocità del corpo m_2 quando l'asta passa dalla verticale
4. Al momento del passaggio il punto estremo dell'asta, dove si trova il corpo m_2 , urta in modo elastico il corpo di massa m_3 , inizialmente fermo. A seguito dell'urto l'asta si ferma. Calcolare la massa del corpo m_3 .



Soluzione: Cominciamo a trovare la posizione del centro di massa:

$$\begin{cases} x_G = \frac{m_1 L/2 + m_2 L}{m_1 + m_2} \\ y_G = 0 \end{cases}$$

Siccome l'asta inizialmente è orizzontale, l'energia potenziale è

$$U = (m_1 + m_2)gx_G = (m_1 + 2m_2)\frac{Lg}{2} = 117.72 \text{ J}$$

Per calcolare la velocità angolare, dobbiamo trovare preventivamente il momento di inerzia del sistema: $I = I_{asta} + m_2 L^2 = 1/3 m_1 L^2 + m_2 L^2 = L^2/3(m_1 + 3m_2)$. A questo punto possiamo usare il teorema della conservazione dell'energia meccanica:

$$U = \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 3m_2} \frac{3g}{L}$$

da cui $\omega = 3.96$.

La velocità del corpo m_2 quando passa per la verticale sarà $v_2 = \omega L = 5.94 \text{ m/s}$.

Per trovare la velocità del corpo m_3 dopo l'urto dobbiamo conservare l'energia cinetica e il momento delle quantità di moto, visto che l'urto è elastico:

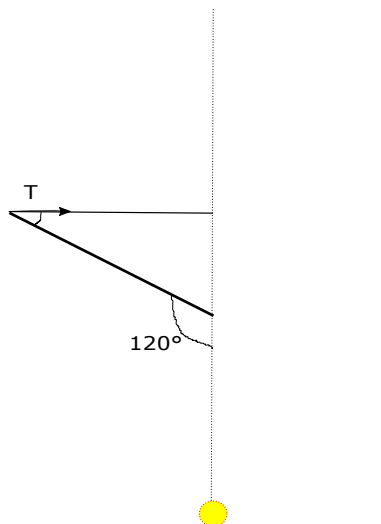
$$\begin{cases} \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \\ I \omega = m_3 v_3 L \end{cases}$$

da cui $I = m_3 L^2$ e dunque $m_3 = I/L^2 = 1/3 m_1 + m_2 = 6.67 \text{ kg}$

ESERCIZIO 17. Un'asta di lunghezza $L = 1\text{m}$ e massa $m_a = 4\text{kg}$ è vincolata ad un asse orizzontale, intorno al quale può ruotare liberamente. L'asta è tenuta ferma in una posizione che forma un angolo di $\vartheta = 120^\circ$ rispetto alla verticale dell'equilibrio stabile, tramite un filo ideale orizzontale.

punti

1. determinare il valore della tensione;
2. se si taglia il filo, determinare la velocità angolare con cui l'asta arriva nella posizione di equilibrio stabile;
3. in quel punto l'asta urta elasticamente una pallina ferma di massa $m_p = 177\text{g}$; determinare la velocità della pallina subito dopo l'urto.



Soluzione: Per trovare il valore della tensione dobbiamo equilibrare i momenti delle forze in gioco: la forza peso applicata al centro di massa e la tensione, applicata all'estremo. L'angolo che la fune forma con l'asta è $\alpha = \pi/2 - \vartheta$ dunque $\sin \alpha = \cos \vartheta$

$$m_a g \frac{L}{2} \sin(\vartheta) = T L \sin(\alpha)$$

da cui:

$$T = \frac{m_a g}{2} \tan \vartheta = -33,98 \text{ N}$$

Nel momento in cui si taglia il filo possiamo utilizzare il teorema di conservazione dell'energia. inizialmente l'energia è tutta potenziale: $E = mgL/2(1 + \cos(\pi - \vartheta))$ che si trasforma in energia cinetica al passaggio nel punto di equilibrio stabile:

$$m_a g \frac{L}{2} (1 + \cos(\pi - \vartheta)) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove $I = m_a L^2/3$ è il momento di inerzia dell'asta rispetto ad un estremo. Dunque la velocità angolare dell'asta al momento dell'urto è:

$$\omega = \sqrt{\frac{3m_a g (1 + \cos(\pi - \vartheta))}{L}} = \sqrt{\frac{3m_a g (1 - \cos \vartheta)}{L}} = 13,29 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

per trovare la velocità della pallina dobbiamo mettere a sistema le energie cinetiche prima e dopo l'urto e i momenti della q.d.m.:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega_f^2 + \frac{1}{2} m_p v^2 \\ I \omega = I \omega_f + m_p v L \end{cases}$$

da cui troviamo

$$\begin{cases} I(\omega + \omega_f)(\omega - \omega_f) = m_p v^2 \\ I(\omega - \omega_f) = m_p v L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega + \omega_f) = \frac{v}{L} \\ (\omega - \omega_f) = \frac{m_p v L}{I} \end{cases} \quad (1)$$

dunque:

$$v = 2\omega L \left(\frac{I}{m_p L^2 + I} \right) = 23,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ESERCIZIO 18. Una ruota di raggio $R = 0.1$ m, massa $m = 2$ kg e momento di Inerzia I (la massa è tutta concentrata nella circonferenza) inizialmente ferma nel punto A all'altezza $h_1 = 6$ m, cade rotolando su di un piano inclinato. Il piano si raccorda ad $h=0$, senza spigoli, con un altro piano, inclinato verso l'alto, che termina nel punto B di altezza $h_2 = 3$ m con un angolo $\vartheta = 27^\circ$

<i>punti</i>

1. Calcolare l'energia cinetica nel punto B
2. Calcolare le componenti V_x e V_y della velocità del centro di massa nel punto B
3. Calcolare l'altezza della quota massima raggiunta dopo lo stacco in B;
4. Quando raggiunge la quota massima, utilizzando forze interne, il raggio raddoppia. Supponendo che la massa risulti concentrata nella nuova circonferenza, calcolare la variazione di energia cinetica

Soluzione: L'energia cinetica della ruota è determinata dalla variazione dell'energia potenziale : $K_B = mg(h_1 - h_2) = 58.86$ J

La velocità del centro di massa la ricaviamo dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}(mv_c^2 + I\omega^2) = K_B$$

ove $\omega = v_c/R$ e $I = mR^2$. Dunque: $mv_c^2 = K_B$ e di conseguenza $v_c = \sqrt{K_B/m} = 5.42$. Le sue componenti saranno: $v_x = v_c \cos \vartheta = 4.83$ m · s⁻¹, e $v_y = v_c \sin \vartheta = 2.46$ m · s⁻¹

La quota massima è $h_2 + \frac{v_y^2}{2g} = 3,31$ m.

Se il raggio diventa $2R$ l'energia cinetica di traslazione non cambia, mentre quella di rotazione sì perché cambiano momento di inerzia e velocità angolare. Per trovare la nuova velocità angolare, si impone la conservazione del momento della quantità di moto: $I\omega = I_1\omega_1$ con $I = mR^2$ e $I_1 = 4mR^2$; dunque $\omega' = \omega I/I_1 = \omega/4$. La nuova energia cinetica di rotazione è: $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{4mR^2\omega^2}{16} = \frac{1}{8}mR^2\omega^2 = \frac{1}{4}K_i$

ESERCIZIO 19. Un corpo di massa $m_1 = 704 \text{ g}$ è appoggiato ad una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 1000 \text{ N/m}$ e inizialmente compressa della lunghezza $x = 11 \text{ cm}$. L'altra estremità della molla è rigidamente fissata ad una parete. Il corpo è inizialmente fermo e si può muovere su un piano liscio orizzontale. Viene rilasciata la molla. Il corpo, dopo essersi staccato dalla molla prosegue sul piano liscio e quindi urta in modo anelastico un corpo $m_2 = 704 \text{ g}$ connesso ad un'asta verticale di lunghezza $\ell = 1.02 \text{ m}$ e massa $m_a = 210 \text{ g}$, incernierata all'estremità superiore ed inizialmente ferma. Calcolare:

<i>punti</i>

1. La velocità del corpo m_1 sul piano liscio prima di urtare il corpo m_2
2. La velocità di rotazione dell'asta immediatamente dopo l'urto.
3. Determinare se l'asta percorre (almeno) un giro completo

Soluzione: Dalla conservazione dell'energia meccanica: $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$, dunque:

$$v_1 = x\sqrt{\frac{k}{m_1}} = 4.16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'urto è completamente anelastico, quindi possiamo conservare solo il momento delle quantità di moto:

$$m_1v_1\ell = I_{tot}\omega_f$$

dove $I_{tot} = \frac{1}{3}m_a\ell^2 + m_2\ell^2 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ è il momento di inerzia totale del sistema asta-massa e ω_f la velocità di rotazione cercata. Dunque:

$$\omega_f = \frac{m_1v_1\ell}{I_{tot}} = \frac{3m_1v_1}{(m_a + 3m_2)\ell} = 3.86 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Affinché il sistema compia almeno un giro, l'energia cinetica iniziale di rotazione deve essere sufficiente a superare l'energia potenziale del sistema quando il centro di massa è al di sopra del punto di rotazione. Posta l'origine nel punto di rotazione, la coordinata iniziale del c.m. è $y_0 = -(m_a\ell/2 + m_1\ell)/(m_a + m_1)$, la differenza di quota è $h = 2|y_0|$, quindi:

$$\frac{1}{2}I_{tot}\omega_f^2 \geq (m_a + m_1)gh = \frac{1}{2}(m_a + 2m_1)g\ell$$

è la condizione affinché l'asta si ribalti. Da cui

$$\frac{(m_1v_1\ell)^2}{2I_{tot}^2}I_{tot} = \frac{3}{2}\frac{m_1^2}{m_a + 3m_2}v_1^2 \geq \frac{1}{2}(m_a + 2m_1)g\ell$$

ovvero deve essere:

$$v_1^2 \geq (m_a + 2m_1)(m_a + 3m_2)\frac{g\ell}{3m_1^2} = 25.32 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

dunque: $v_1 \geq 5.03 \text{ ms}^{-1}$

ESERCIZIO 20. Una piattaforma circolare di raggio $R = 2 \text{ m}$ ruota con velocità angolare $\omega_0 = 0.3 \text{ rad/s}$. Un cannone posto sul bordo spara un proiettile di massa $m_p = 552 \text{ g}$ tangenzialmente al bordo della piattaforma, nel verso di rotazione e con velocità rispetto al suolo di $v_p = 73 \text{ m/s}$. Se il momento d'inerzia del sistema piattaforma-cannone vale $I = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ determinare:

<i>punti</i>

1. la velocità angolare finale della piattaforma;
2. la variazione di energia cinetica del sistema e chi la produce;

Soluzione: Dobbiamo conservare il momento angolare totale: $(I + m_p R^2)\omega_0 = I\omega_f + m_p v_p R$ dunque:

$$\omega_f = \frac{(I + m_p R^2)\omega_0 - m_p v_p R}{I}$$

Per la variazione di energia cinetica, inizialmente $E_i = 1/2(I + m_p R^2)\omega_0^2$, mentre nello stato finale: $E_f = 1/2(I\omega_f^2 + m_p v_p^2)$ dunque $\Delta E = 1444,57$ è prodotta dall'energia dell'esplosione.

ESERCIZIO 21. Un volano cilindrico omogeneo di raggio $R = 1 \text{ m}$ e massa $m = 9 \text{ kg}$ ruota con velocità angolare di $\omega_0 = 1310 \text{ giri/min}$ intorno al suo asse. Al volano viene applicata una forza frenante tangenziale costante ad una distanza radiale $r = 0.5 \text{ m}$. Il volano si ferma in $t = 2 \text{ minuti}$, determinare:

<i>punti</i>

1. Il lavoro compiuto dalla forza per fermare il volano;
2. Il modulo della forza frenante;
3. Il numero di giri compiuti prima di fermarsi.

Soluzione: Il lavoro della forza frenante deve dissipare tutta l'energia cinetica iniziale: $K_i = 1/2 I \omega_0^2$ dove $I = 1/2 m R^2$ e $\omega_0 = 137.18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, dunque $L = -1/4 m R^2 \omega_0^2 = -42341.29 \text{ J}$

Il moto di rotazione del volano uniformemente decelerato con un'accelerazione angolare fornita dall'equazione del momento: $I \dot{\omega} = F \times r$, dunque $\dot{\omega} = -Fr/I$. D'altra parte, si è detto che il volano si ferma in 2 minuti $\Delta t = 120 \text{ s}$, dunque:

$$F = \frac{I \omega_0}{r \Delta t} = \frac{m R^2 \omega_0}{2 r \Delta t} = 10.29 \text{ N}$$

Il numero di giri lo ricaviamo dal momento della forza e dal lavoro che compie: $L = Fr \Delta \vartheta$, dunque: $\Delta \vartheta = -L/Fr = 8229.6 \text{ rad}$ pari a $N = 1309.8$ giri.

ESERCIZIO 22. Due sferette di massa $m_s = 2$ kg sono attaccate alle estremità di un'asta sottile di massa trascurabile e lunghezza $L = 1$ m. L'asta, inizialmente ferma, è libera di ruotare in un piano orizzontale, attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Ad un dato istante, un proiettile di massa $m_p = 27$ g viene sparato con velocità di $v_p = 11$ m/s perpendicolare all'asta contro una delle due sferette e vi si conficca. Calcolare:

<i>punti</i>

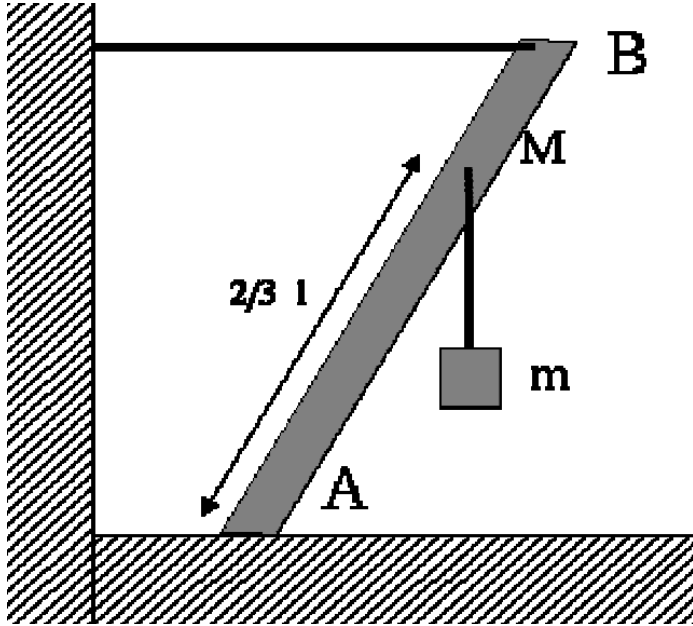
1. il momento di inerzia dell'intero sistema;
2. la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
3. il rapporto tra l'energia cinetica del sistema dopo l'urto e quella del proiettile prima dell'urto.

Soluzione: Ponendo l'origine al centro dell'asta, il momento di inerzia è dato da $I = 2m_s(L/2)^2 + m_p(L/2)^2 = L^2/4(m_p + 2m_s) = 1.007 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Per trovare la velocità angolare ω dopo l'urto che è anelastico, dobbiamo conservare il momento angolare: $m_p v_p L/2 = I\omega$, dunque $\omega = m_p v_p L/2I = 0.147 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. L'energia cinetica iniziale è quella del proiettile: $E_p = 1/2 m_p v_p^2$, quella finale è $E_f = 1/2 I \omega^2$, dunque il rapporto è $I\omega^2/(m_p v_p^2) = m_p L^2/4I = 6,703 \cdot 10^{-3}$

ESERCIZIO 23. Un'asta omogenea lunga ℓ e di massa $M = 23 \text{ kg}$ è poggiata con un estremo (A) su un piano orizzontale scabro mentre l'altro estremo (B) è vincolato ad una parete mediante un filo inestensibile e di massa trascurabile. Un punto materiale di massa $m = 5 \text{ kg}$ è, inoltre, sospeso ad un punto dell'asta che dista $2/3\ell$ dall'estremo A. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra l'asta ed il piano orizzontale è $\mu_s = 0.5$, calcolare l'angolo minimo che l'asta deve formare con il piano orizzontale affinché il sistema sia in equilibrio.

<i>punti</i>



Soluzione: Per le condizioni di equilibrio dobbiamo uguagliare a zero la somma delle forze e quella dei momenti. Proiettando sugli assi il bilancio delle forze:

$$\begin{cases} R_{Ax} - T_B = 0 \\ -R_{Ay} + Mg + mg = 0 \end{cases}$$

Essendo R_A la reazione vincolare nel punto A e T_B la tensione del filo attaccato al punto B. $R_{Ax} \leq \mu_s R_{Ay}$ Dalla prima $R_{Ax} = T_B$; ci serve trovare T_B e lo possiamo fare con i momenti. Per i momenti rispetto al polo A possiamo scrivere: $-T_B \ell \sin \vartheta + mg \cdot 2/3 \ell \cos \vartheta + Mg \ell/2 \cos \vartheta = 0$; dunque $T_B = g/6(4m + 3M) \cot \vartheta$. In totale deve essere:

$$\cot \vartheta \leq \frac{6\mu_s(M + m)}{4m + 3M} = 0.9438 \Rightarrow \vartheta \geq 0.81 \text{ rad}$$

ESERCIZIO 24. Una bicicletta la cui ruota ha un diametro $d = 68$ cm, viaggia alla velocità di $v = 24$ km/h. Sapendo che la ruota ha una massa di 500 g, supponendo che il peso sia concentrato nella circonferenza, calcolare il momento angolare della ruota.

Soluzione: La velocità angolare della ruota è $\omega = v/R = 4.9$ rad $\cdot$ s⁻¹, il momento angolare sarà pari a $L = I\omega$ dove $I = mR^2$ è il momento di inerzia di un disco. Dunque $L = mR^2\omega = 4.53$ kgm²s⁻¹

<i>punti</i>

ESERCIZIO 25. Si consideri la leva formata da un'asta di massa M con il fulcro nell'estremo destro. La leva è orizzontale ed in equilibrio. Una forza di intensità $P = 16\text{N}$ è applicata verso l'alto all'estremo sinistro, ad una distanza $d = 1.5\text{m}$ dal fulcro. La forza R è invece applicata verso il basso a una distanza $x = 1\text{m}$ dal fulcro. Sapendo che il fulcro esercita una reazione vincolare di $F = 11.2\text{N}$: - Trovare R e la massa M della leva

<i>punti</i>

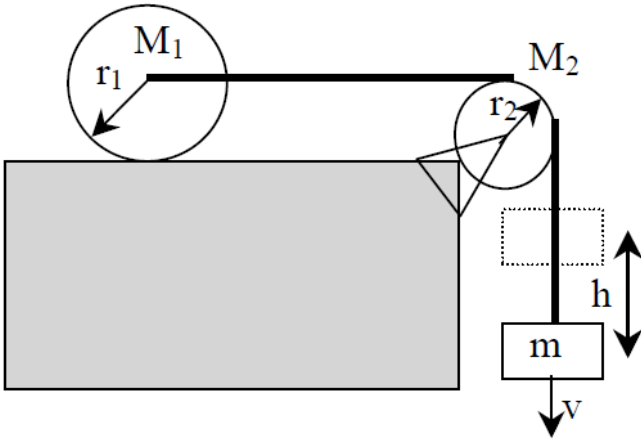
Soluzione: Dobbiamo scrivere le equazioni del bilancio delle forze e dei momenti delle forze:

$$\begin{cases} P - R - Mg + F = 0 \\ Pd - Rx - Mg(d/2) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima: $R = P - Mg + F$, sostituendo nella seconda: $Pd - (P - Mg + F)x - Mg(d/2) = 0$, dunque: $P(d - x) + Mg(d/2 + x) - Fx = 0$ e dunque: $M = (Fx - P(d - x))/g(x - d/2) = 1.3$ e $R = 14.45\text{N}$

ESERCIZIO 26. Un cilindro di massa $M_1 = 7 \text{ kg}$ e raggio r_1 è appoggiato su un piano orizzontale. L'asse del cilindro è collegato ad una massa $m = 6 \text{ kg}$ tramite un filo inestensibile di massa trascurabile che scorre su di una puleggia di massa $M_2 = 2 \text{ kg}$ e di raggio $r_2 < r_1$ mettendola in rotazione. Supponendo il sistema inizialmente in quiete, calcolare la velocità della massa m quando è scesa di una quota $h = 1 \text{ m}$. Si supponga che il cilindro rotoli senza strisciare sul piano.

<i>punti</i>



Soluzione: Il sistema è isolato e gli attriti non compiono lavoro, quindi si conserva l'energia meccanica: $Mgh = 1/2mv^2 + 1/2M_1(v^2 + I_1\omega_1^2) + 1/2I_2\omega_2^2$ dove $I_1 = 1/2M_1r_1^2$, $I_2 = 1/2M_2r_2^2$, $\omega_1 = v^2/r_1$ e $\omega_2 = v^2/r_2$. Per cui: $mgh = 3/4M_1v^2 + 1/4M_2v^2 + 1/2mv^2$; quindi:

$$v = \sqrt{2gh \frac{m}{3/2M_1 + 1/2M_2 + m}} = 2,49 \text{ ms}^{-1}$$