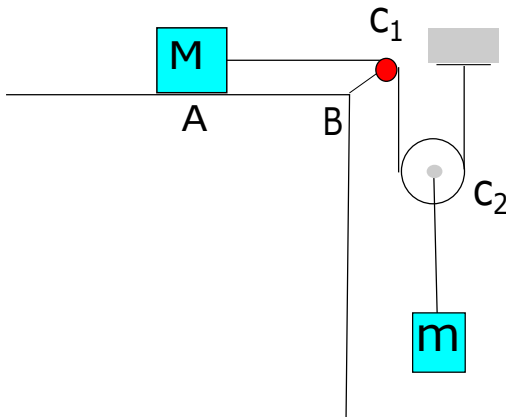


ESERCIZIO 1. Un blocco di massa $M = 46\text{g}$ è posto su un piano orizzontale e fissato ad un sostegno attraverso una fune inestensibile e di massa trascurabile. La fune passa prima su una carrucola fissa C_1 e poi su una seconda carrucola mobile C_2 , entrambe senza attrito e massa trascurabile. A C_2 è appeso un corpo di massa m . Il piano AB è lungo $l = 37\text{cm}$ ed ha un coefficiente d'attrito $\mu = 0.6$. Determinare il valore di m perché il blocco, inizialmente fermo in A, arrivi in B con velocità $v = 1\text{ms}^{-1}$.

10 punti



Soluzione: L'equazione fondamentale della dinamica per la massa m , con l'asse verticale rivolto verso l'alto, e la massa M con l'asse orizzontale orientato verso ds si scrive (considerato che lo spostamento della massa in caduta è la metà di quello in orizzontale):

$$\begin{aligned} 2T - mg &= -m\frac{a}{2} \\ T - F_A &= Ma \\ F_A &= \mu g M \end{aligned}$$

Dalla prima: $T = \frac{m(2g-a)}{4}$ e, sostituendo nella seconda, $4(Ma + F_A) = m(2g - a)$ da cui:

$$a = g \frac{2(m - 2\mu M)}{(4M + m)}$$

Il blocco si muove con accelerazione costante partendo da fermo, dunque:

$$v^2 = 2al = 4gl \frac{m - 2\mu M}{4M + m}$$

Invertendo, possiamo trovare m in funzione di v^2 e successivamente porre $v^2 = 1\text{ m}^2\text{s}^{-2} = 10^4\text{ cm}^2\text{s}^{-2}$:

$$m = 4M \frac{v^2 + 2\mu gl}{4gl - v^2} = 72,89\text{ g}$$

ESERCIZIO 2. Un'automobile del peso di $P_a = 11084$ N, che viaggia alla velocità di $v_a = 96$ km/h, urta frontalmente contro un autocarro del peso di $P_c = 90.0$ kN che viaggia verso l'automobile alla velocità di $v_c = 54$ km/h. L'automobile e l'autocarro rimangono uniti dopo l'urto. Quanto vale la velocità finale dell'automobile e dell'autocarro uniti?

7 punti

Soluzione: Nel sistema di riferimento in cui l'asse x è positivo nella direzione del moto dell'auto, le velocità dell'auto e dell'autocarro hanno segno opposto; le quantità di moto sono:

$$p_a = m_a v_a$$

$$p_c = m_c v_c$$

Dopo l'urto, la somma delle quantità di moto si conserva:

$$p_a + p_c = (m_a + m_c) v_{fin}$$

da cui

$$v_{fin} = \frac{p_a + p_c}{m_a + m_c} = \frac{P_a v_a + P_c v_c}{P_a + P_c} = -37,55$$

ESERCIZIO 3. Un blocco di 283 N deve essere fatto muovere su un pavimento scabro a velocità costante. Il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.5$. Il trasportatore è più alto del blocco e può spingere da dietro o tirare da davanti e applica una forza lungo una direzione che forma un angolo di $\vartheta = 30^\circ$ con l'orizzontale. a) Quanto vale la forza se si spinge verso il blocco?

b) Quanto vale invece se si tira?

Soluzione: Se la velocità è costante, a regime la componente orizzontale della forza traente deve eguagliare la forza d'attito:

$$F \cos \vartheta = \mu(mg \pm F \sin \vartheta)$$

valendo il segno + quando si spinge e - quando si tira. Dunque:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \vartheta \pm \mu \sin \vartheta}$$

$$\begin{cases} F_+ = 126,79 \text{ Tiro} \\ F_- = 229,7 \text{ Spingo} \end{cases}$$

7 punti

ESERCIZIO 4. Un disco ruota in un piano verticale attorno al suo asse, con velocità angolare $\omega = 2.8 \text{ rad/s}$ e reca sull'orlo un forellino. A distanza $d = 45 \text{ m}$ dal disco, un tiratore deve colpire il forellino sparando orizzontalmente con una pistola (si trascuri l'effetto della gravità). Sapendo che quando parte il proiettile, il forellino è nella posizione A, dire quale è la decelerazione costante imposta dall'aria al proiettile, che parte con velocità iniziale $v_0 = 100 \text{ m/s}$, affinché il tiratore colpisca il forellino nella posizione B a 90° da A. Dire inoltre con quale velocità e a che tempo il proiettile arriva in B.

10 punti

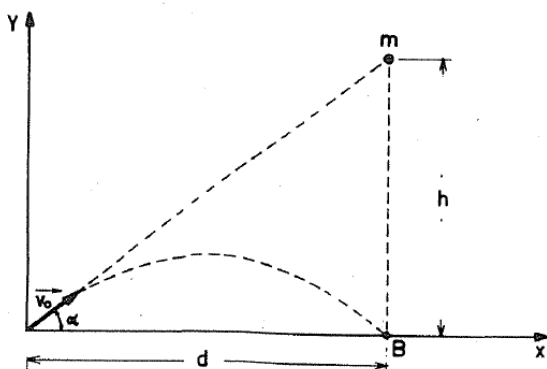
Soluzione: $d = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$. Siccome $\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$, allora $t = \frac{\pi}{2\omega} = 0.56 \text{ s}$. Dunque:

$$a = 2 \frac{(v_0 t - d)}{t^2} = \frac{8\omega^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi v_0}{2\omega} - d \right) = 70.15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v = v_0 - at = 60,72$$

ESERCIZIO 5. Un cannone C è puntato sulla sfera di massa m posta all'altezza $h = 3$ m dal livello del suolo e ad una distanza orizzontale $d = 1.5$ m, inizialmente in quiete. All'istante $t = 0$ il cannone spara e la sfera m viene lasciata cadere. Determinare la velocità iniziale v_0 del proiettile affinché esso colpisca m al livello del suolo.

6 punti



Soluzione: Indichiamo con il pedice "p" le grandezze relative al proiettile e "s" le grandezze relative alla sfera. Scelti i due assi di riferimento xy come in figura, la legge oraria proiettata sugli assi, per il proiettile si scrive (con le condizioni iniziali dette):

$$x_p = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y_p = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$$

Analogamente, per il moto della sfera:

$$x_s = d$$

$$y_s = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

Perché la sfera ed il proiettile si urtino al suolo, dovrà essere: $x_s = x_p = d$ e $y_s = y_p = 0$. Sostituendo nelle precedenti:

$$t_1 = \frac{d}{v_0 \cos \alpha}$$

e sostituirlo a t nelle equazioni per $y=0$:

$$0 = h - \frac{1}{2}g \left(\frac{d}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

Dunque

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2h \cos^2 \alpha}}$$

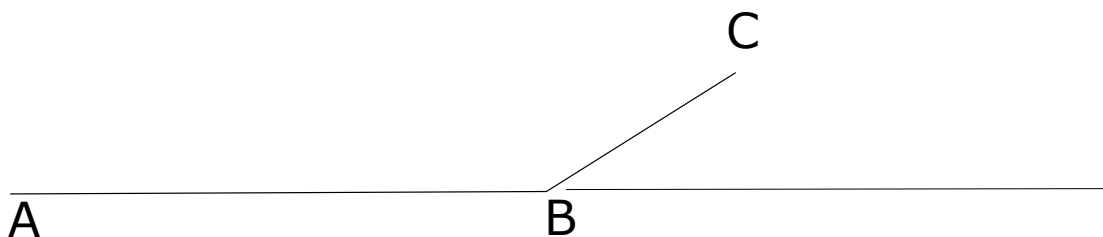
Rimane da calcolare l'angolo $\alpha = \arctan h/d$ o $\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}$, dunque:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g(d^2+h^2)}{2h}} = 4,29 \text{ m.s}^{-1}$$

ESERCIZIO 6. Un motociclista acrobatico esegue un salto dalla piattaforma, come in figura. Parte dal punto A con velocità zero ed accelerazione costante $a_1 = 4 \text{ m/s}^2$ fino al punto B, distante 50 m. Quindi sale la piattaforma BC, di lunghezza $BC = 10 \text{ m}$, con accelerazione costante $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$ fino al punto C, dove stacca. L'angolo che la piattaforma forma con l'asse orizzontale è $\vartheta = 30^\circ$.

10 punti

1. Calcolare il modulo della velocità in B e della velocità di stacco in C
2. Calcolare la altezza della quota massima.
3. Calcolare la velocità del centro di massa immediatamente prima di toccare terra
4. Supponendo che quando tocca terra conservi la velocità del centro di massa e che quindi freni con accelerazione dipendente dal tempo $a_3 = -0.5t$, calcolare lo spazio di frenata.



Soluzione:

$$1. v_B = \sqrt{2a_1 AB} = 20 \text{ ms}^{-1};$$

$$\begin{cases} v_C = v_B + a_2 t \\ BC = v_B t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \end{cases}$$

dalla prima: $t = (v_C - v_B)/a_2$ e sostituendo nella seconda: $2a_2 BC = v_B^2 - v_C^2$ e dunque: $v_C = \sqrt{v_B^2 + 2a_2 BC} = 20.98 \text{ ms}^{-1}$

2. la quota massima è data dalla quota di stacco sommata alla quota relativa che si può calcolare con la conservazione dell'energia: $h = BC \sin \vartheta + (v_C \sin \vartheta)^2 / 2g = 10.61$
3. la velocità subito prima di toccare terra è un vettore nel piano xy che ha per componenti:

$$\begin{cases} v_x = v_C \cos \vartheta = 18.17 \\ v_y = \sqrt{2gh} = 14.43 \end{cases}$$

il modulo è $v_D = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 23.2$.

Dopo aver toccato il suolo, la velocità avrà un andamento nel tempo data dalla relazione:

$$v - v_D = \int a(t) dt = -0.5 \int t dt = -\frac{1}{4} t^2$$

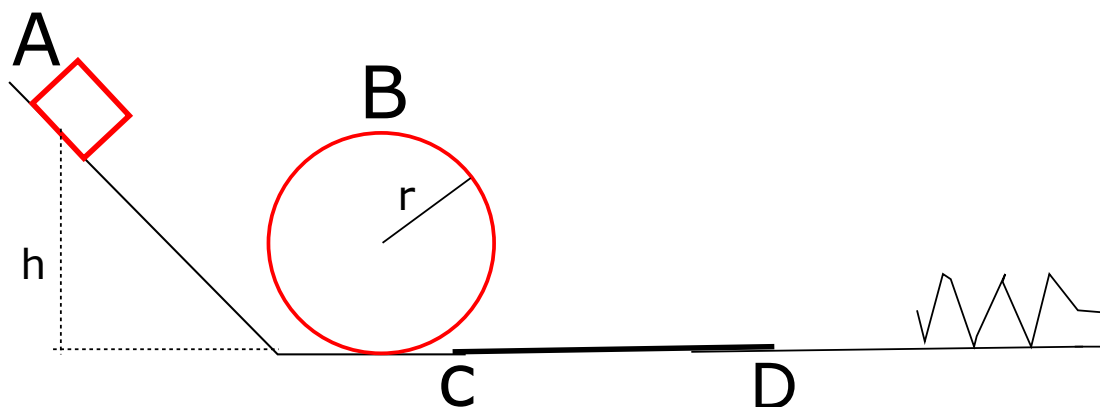
Il tempo della frenata sarà quello $\bar{t}$ per cui si annulla la velocità a partire da v_D : $v_D = 1/4 \bar{t}^2$ e dunque $\bar{t} = 2\sqrt{v_D}$. Per calcolare lo spazio di frenata dobbiamo integrare ulteriormente:

$$x = \int_0^{\bar{t}} \left(v_D - \frac{1}{4} t^2 \right) dt = v_D \bar{t} - \frac{1}{12} \bar{t}^3 = \frac{4}{3} v_D^{3/2}$$

ESERCIZIO 7. Un corpo di massa $m = 4 \text{ kg}$ viene posto su una guida liscia inclinata con un angolo $\alpha = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il corpo, inizialmente a velocità nulla, viene lasciato libero ad un'altezza $h = 6 \text{ m}$ dal suolo. La guida, raggiunto il piano orizzontale, si raccorda con una guida circolare di raggio $r = 1.5 \text{ m}$ e poi con un piano orizzontale scabro lungo $d = 5 \text{ m}$ e con attrito dinamico $\mu_d = 0.2$, che prosegue liscio per altri 15 m . Alla fine del tratto liscio c'è una molla, di lunghezza a riposo $\ell_0 = 0.8 \text{ m}$ e costante elastica $K = 1366 \text{ N/m}$.

10 punti

1. Calcolare la velocità con cui il corpo raggiunge la quota massima B nella guida circolare;
2. calcolare la reazione della guida nel punto B;
3. calcolare la compressione massima della molla;
4. determinare se, dopo essere stato respinto dalla molla, il corpo raggiunge nuovamente il piano inclinato.



Soluzione: $v_0 = \sqrt{2gh} = 10.85$ è la velocità iniziale prima della guida circolare. La velocità lineare nel punto B, la calcoliamo con la conservazione dell'energia: $1/2(mv_0^2 - v_B^2) = mg \cdot 2r$; dunque: $v_B = \sqrt{v_0^2 - 4gr} = 7.67$ e dunque l'accelerazione centripeta $a = v_B^2/r = v_0^2/r - 4g = 39.24$. Detta F_v la reazione vincolare, sarà $ma = mg + F_v$ e dunque $F_v = m(a - g) = 117.72 \text{ N}$.

La velocità con cui il corpo raggiunge il tratto scabro è la stessa che ha alla base del piano inclinato: $v_C^2 = 2gh$ e quella che avrà nel punto D si ricava dal teorema dell'energia: $1/2mv_C^2 = 1/2mv_D^2 + \mu_dgd$ dunque: $1/2v_D^2 = 1/2v_C^2 - \mu_dgd = g(h - \mu_d d)$; $v_D = 9.9$ Questa sarà anche la velocità con cui raggiunge la molla. Dunque dalla conservazione dell'energia: $1/2mv_D^2 = 1/2K\Delta x^2$ ci dà: $\Delta x = \sqrt{mv_D^2/K} = 0.54$

Siccome la molla esercita una forza conservativa, la velocità con cui il corpo torna al punto D è la stessa con cui ci era arrivato. Affinché il corpo ritorni alla base del piano inclinato, questi deve raggiungere la guida circolare con una velocità tale che l'accelerazione centripeta in B sia maggiore di g , quindi $v_B'^2 = v_C'^2 - 4gr > gr$ $v_C' = v_f > \sqrt{5gr}$. Dunque $v_f = \sqrt{v_D^2 - 2\mu_dgd} > \sqrt{5gr}$, quindi: $v_D^2 > g(5r + 2\mu_d d) = 93.2$ e $v_D^2 = 98.01$

ESERCIZIO 8. Un blocco di massa $m = 1$ kg è inizialmente fermo alla base A di un piano scabro inclinato di un angolo $\vartheta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Al blocco viene data una spinta, in conseguenza della quale parte con un'energia cinetica $K_0 = 34$ J, salendo lungo il piano inclinato. Giunto nel punto B, distante $s = 3$ m da A, il blocco si ferma e inverte il moto, ritornando in A con un'energia cinetica $k < k_0$. Calcolare:

7 punti

1. Il coefficiente d'attrito μ_d fra il blocco e il piano inclinato;
2. l'energia cinetica K del blocco quando ripassa per il punto A

Soluzione: Perché si fermi tutta la sua energia cinetica deve essere dissipata in energia potenziale e lavoro della forza d'attrito: $K_0 = mgs \sin \vartheta + \mu_d mgs \cos \vartheta$; dunque:

$$\mu_d = \frac{K_0 - mgs \sin \vartheta}{mgs \cos \vartheta} = 0.76$$

L'energia cinetica alla fine del percorso è data, di nuovo, dall'energia potenziale meno il lavoro delle forze d'attrito:

$$K = mgs \sin \vartheta - \mu_d mg \cos \vartheta \cdot s = mgs(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) = -4,66 \text{ J}$$

ESERCIZIO 9. Un blocco di massa $M=1\text{kg}$ si muove di moto rettilineo sopra un piano orizzontale scabro di coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.5$. Nell'istante in cui blocco ha una velocità $V_0 = 3 \text{ m/s}$, esso viene colpito da un proiettile, di massa $m = 10 \text{ g}$, che viaggia orizzontalmente nella stessa direzione e verso del blocco con una velocità $v = 117 \text{ m/s}$. Il proiettile, dopo l'impatto supposto istantaneo, rimane conficcato nel blocco, Determinare:

7 punti

1. la velocità del sistema blocco-proiettile subito dopo l'urto;
2. il tempo trascorso fra l'istante dell'urto e quello in cui il sistema si ferma;
3. la distanza percorsa dal sistema blocco-proiettile prima di fermarsi.

Soluzione: Applichiamo la conservazione della quantità di moto: $MV_0 + mv = (M + m)v_f$ da cui

$$v_f = \frac{MV_0 + mv}{M + m} = 4.13 \text{ m/s}^{-1}$$

La forza d'attrito è $F_a = \mu(m + M)g$ ed è l'unica ad agire nella direzione opposta al moto. Dunque: $(m + M)a = \mu(m + M)g$, sicché $a = \mu g$ e visto che il corpo si ferma al tempo t , sarà: $0 = v_f - at$ e dunque:

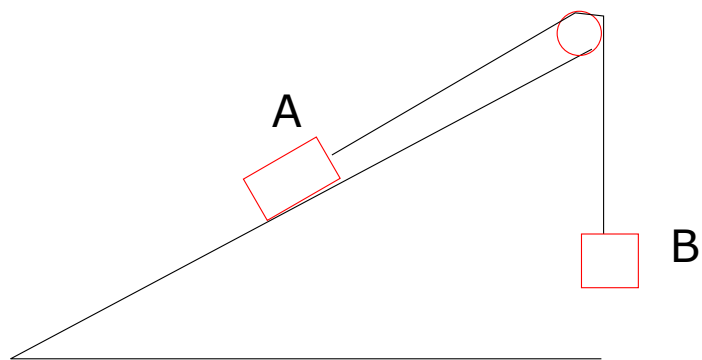
$$t = \frac{v_f}{a} = \frac{v_f}{\mu g} = 0.84 \text{ s}$$

Per l'ultima risposta possiamo usare l'equazione del moto uniformemente accelerato o il teorema dell'energia: $\frac{1}{2}(m + M)v_f^2 = \mu(m + M)gL$, dunque

$$L = \frac{v_f^2}{2\mu g} = 1.74 \text{ m}$$

ESERCIZIO 10. Due blocchi sono collegati attraverso una puleggia come in figura. La massa di A vale $m_a = 11 \text{ kg}$ ed il coefficiente di attrito dinamico fra piano e corpo $\mu_d = 0.1$ e l'angolo di inclinazione $\vartheta = 30^\circ$. Il corpo A scivola giù a velocità costante. Determinare la massa di B.

10 punti



Soluzione:

$$\begin{cases} -m_B g + T = 0 \\ m_a g \sin \vartheta - m_a \mu_d g \cos \vartheta - T = 0 \end{cases}$$

$$m_B = m_A (\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) = 4,55$$

ESERCIZIO 11. Su un piano inclinato avente angolo di inclinazione $\alpha = 45^\circ$, un corpo di massa $m = 10 \text{ kg}$ è trattenuto in quiete mediante una fune disposta parallelamente al piano nella direzione di massima pendenza. Determinare:

1. la forza che la fune esercita sul corpo se il piano è liscio ;
2. se invece il piano è scabro con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.6$, il corpo rimarrebbe in quiete se la fune fosse tagliata? In caso negativo quanto vale la minima tensione necessaria per tenere in equilibrio il corpo?

10 punti

Soluzione:

$$\begin{cases} -T + mg \sin \alpha = 0 \\ N + mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

da cui: $T = mg \sin \alpha$

Se c'è l'attrito, affinché il corpo resti fermo la forza d'attrito statico deve essere uguale alla forza lungo il piano inclinato: $mg\mu_s \cos \alpha = mg \sin \alpha$ dunque $\mu_s = \tan \alpha = 1 > 0.5$, dunque si muove.

$$\begin{cases} -T + mg \sin \alpha - N\mu_s = 0 \\ N + mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Quindi la minima tensione da applicare è $T = mg(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) = 27,74$

ESERCIZIO 12. Una pistola giocattolo a molla lancia per aria, con un angolo α incognito, una biglia di massa $m = 10$ g. La costante elastica vale $k = 6 \text{ N/cm}$, e prima dello sparo la molla è compressa di $\Delta\ell = 4 \text{ cm}$ rispetto alla sua lunghezza a riposo:

10 punti

1. determinare la velocità con cui viene lanciata la biglia;
2. se la biglia ricade ad una distanza di $D = 0,7 \text{ m}$ sul piano orizzontale determinare l'angolo rispetto all'orizzontale con cui è stata lanciata.

Soluzione: Applicando la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

dunque:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta\ell} = 979.8 \text{ cm/s}$$

La gittata di un proiettile è data da:

$$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$$

da cui:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{gD}{v^2} \right) = 0.036 \text{ rad}$$

ESERCIZIO 13. Una pallina da $m = 1.3 \text{ kg}$ è collegata da due fili ideali, di uguale lunghezza $\ell = 2 \text{ m}$, ad un'asta verticale rotante. Durante la rotazione uniforme i fili si tendono e formano insieme all'asta un triangolo equilatero. Se il modulo della tensione del filo superiore vale $T_s = 36 \text{ N}$, determinare:

<i>10 punti</i>

1. Il modulo della tensione del filo inferiore;
2. la velocità con cui ruota la palla.

Soluzione: Siccome il triangolo è equilatero $\vartheta = 30^\circ$.

$$\begin{cases} T_s \cos \vartheta + T_i \cos \vartheta = ma = m \frac{v^2}{r} \\ T_s \sin \vartheta - T_i \sin \vartheta - mg = 0 \end{cases}$$

ove $r = \ell \cos \vartheta$ Da cui possiamo ricavare:

$$T_i = T_s - \frac{mg}{\sin \vartheta} = 10.51 \text{ N}$$

e

$$v = \sqrt{\frac{(T_s + T_i)\ell \cos^2(\vartheta)}{m}} = 7.32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ESERCIZIO 14. Un blocco di massa $m_1 = 4 \text{ kg}$, fermo su una superficie orizzontale priva di attrito, è attaccato ad una molla, di costante elastica $K = 242 \text{ N/m}$, nel suo stato di riposo. Un secondo blocchetto di massa $m_2 = 5 \text{ kg}$ si muove sul piano con velocità v_2 e colpisce il primo nella direzione dell'asse della molla. Se l'urto è elastico:

10 punti

1. determinare l'espressione letterale della velocità del blocco attaccato alla molla subito dopo l'urto;
2. nel moto dopo l'urto il blocco, attaccato alla molla, la comprime di una lunghezza massima $\delta = 39 \text{ cm}$. Determinare la velocità iniziale del secondo blocco v_2

Soluzione: Siccome l'urto è elastico, possiamo conservare l'energia e la quantità di moto:

$$\begin{cases} m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} m_2 (v_2^2 - v_{2f}^2) = m_1 v_{1f}^2 \\ m_2 (v_2 - v_{2f}) = m_1 v_{1f} \end{cases}$$

e, sviluppando la differenza dei quadrati e sostituendo:

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_{2f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

Dopo l'urto si deve conservare l'energia totale:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = \frac{1}{2} K * \delta^2$$

dunque

$$v_{1f} = \delta \sqrt{\frac{K}{m_1}}$$

Sostituendo nell'espressione per v_{1f}

$$v_2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_2} \delta \sqrt{\frac{K}{m_1}} = 2,73 \text{ ms}^{-1}$$

ESERCIZIO 15. Un atleta del peso di $m = 81 \text{ kg}$ dondola appeso ad una corda lunga $\ell = 10 \text{ m}$. Sapendo che la massima altezza raggiunta è $h = 3 \text{ m}$, determinare la tensione della corda nel punto in cui la corda passa per la verticale.

Soluzione: Siccome la lunghezza della corda non cambia, il moto è lungo una circonferenza. Dunque sarà presente un'accelerazione centripeta diretta verso il punto di sospensione di modulo $a_c = v^2/\ell$. La velocità nel punto in cui la corda passa per la verticale, si può ricavare dal teorema della conservazione dell'energia meccanica: $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ dunque, $v^2 = 2gh$.

Quando la corda passa per la verticale, l'atleta è fermo nella direzione di ℓ , dunque:

$$T - mg = m \frac{v^2}{\ell} = \frac{2mgh}{\ell}$$

dunque

$$T = mg \left(1 + 2 \frac{h}{\ell} \right) = 1271,38 \text{ N}$$

10 punti

ESERCIZIO 16. Una sciovvia è installata su un pendio inclinato di un angolo $\vartheta = 38^\circ$ rispetto all'orizzontale e, a pieno carico, può trasportare in salita $N = 85$ sciatori ognuno di massa $m = 70\text{kg}$. Considerando un coefficiente di attrito dinamico fra neve e sci $\mu = 0.05$ determinare:

<i>punti</i>

1. la forza F esercitata dal cavo della sciovvia sul singolo sciatore per farlo salire a velocità costante;
2. la potenza totale fornita dal motore per risalire con velocità $v = 2\text{ m/s}$

Soluzione: Visto che la velocità è costante, la forza di trazione deve uguagliare la forza peso più quella d'attrito:

$$F = mg(\sin \vartheta + \mu \cos \vartheta) = 449.83\text{ N}$$

La potenza è pari al lavoro compiuto per spostare tutti gli sciatori di una distanza dx nell'unità di tempo dt ; dunque:

$$W = NFv = 76\,471.1\text{ W}$$

ESERCIZIO 17. Un trampolino per il salto con gli sci è schematizzabile con una discesa lungo uno scivolo da una quota di $h_1 = 54\text{m}$ a quella di $h_2 = 17\text{m}$ e tale che al momento del distacco la velocità dello sciatore sia orizzontale. Supponendo di potere trascurare ogni forma di attrito, determinare:

<i>punti</i>

1. la velocità al momento del salto;
2. la durata del salto;
3. la lunghezza del salto

Soluzione: La velocità di stacco, ricavabile dalla conservazione dell'energia meccanica è: $v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 26.94 \text{ ms}^{-1}$.

La durata del salto è data dal tempo in cui lo sciatore passa dall'altezza h_2 al suolo: $t = \sqrt{2h_2/g} = 1.86\text{s}$.

In questo tempo, alla velocità v_0 lo sciatore avrà percorso una lunghezza $x = v_0 t_0 = 50,11$

ESERCIZIO 18. Un corpo di massa m è lanciato con velocità $v_0 = 7 \text{ m/s}$ lungo un tratto orizzontale di un piano scabro. Dopo avere percorso una distanza $d_1 = 6 \text{ m}$ il corpo “rimbalza” elasticamente contro una parete (inverte la sua velocità in un tempo trascurabile) e riparte in direzione opposta sul medesimo piano, sul quale percorre una ulteriore distanza $d_2 = 1 \text{ m}$ prima di fermarsi. Determinare:

<i>punti</i>

1. il coefficiente di attrito dinamico μ_d del piano scabro;
2. il tempo intercorso fra la partenza e l'arresto del corpo.

Soluzione: Scriviamo le equazioni dell'energia prima e dopo il rimbalzo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(v_r^2 - v_0^2) = \mu_d mgd_1 \\ 0 - \frac{1}{2}mv_r^2 = \mu_d mgd_2 \end{cases}$$

essendo v_r la velocità con cui arriva sulla parete. Sommando membro a membro e ricavando μ_d :

$$\mu_d = \frac{v_0^2}{2g(d_1 + d_2)} = 0.36$$

Il moto è uniformemente decelerato lungo una distanza $d_1 + d_2$ con accelerazione $a = -\mu_d g$, dunque:

$$0 - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v_0}{\mu_d g} = \frac{2(d_1 + d_2)}{v_0} = 2 \text{ s}$$

ESERCIZIO 19. Una palla viene lanciata orizzontalmente dal tetto di un edificio con velocità iniziale $v_0 = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e raggiunge il suolo ad una distanza di $x_f = 38 \text{ m}$ dalla base dell'edificio. Quanto è alto l'edificio?

Soluzione: Il tempo che la palla impiega a raggiungere il suolo partendo con velocità verticale nulla è: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. In questo tempo la palla percorre una distanza x_f in orizzontale a velocità v_0 , dunque: $v_0 t = x_f \Rightarrow x_f^2 = v_0^2 \frac{2h}{g}$, da cui:

$$h = \frac{gx_f^2}{2v_0^2} = 10,48 \text{ m}$$

7 punti

ESERCIZIO 20. Uno sciatore, inizialmente in quiete, scende strisciando lungo la pista percorrendo $d = 44$ m. La pista forma un angolo di $\vartheta = 30^\circ$ con l'orizzontale.

1. Se il coefficiente di attrito tra gli sci e la pista è $\mu_d = 0.100$, si trovi la velocità dello sciatore al fondo della pista.
2. Giunto al fondo della pista, lo sciatore continua a muoversi su una distesa di neve orizzontale. Si trovi quanto spazio percorre ancora prima di arrestarsi

7 punti

Soluzione: Si applica la conservazione dell'energia meccanica: l'energia cinetica finale più il lavoro delle forze d'attrito deve uguagliare la variazione di energia potenziale

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \mu_d mg \cos \vartheta d = mgd \sin \vartheta$$

da cui:

$$v_f = \sqrt{2gd(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta)} = 18.82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Analogamente, quando lo sciatore si muove orizzontalmente, il lavoro delle forze d'attrito sullo spazio percorso s dovrà eguagliare l'energia cinetica iniziale:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \mu_d mgs$$

quindi:

$$s = \frac{v_f^2}{2\mu_d g} = 180,53 \text{ m}$$

ESERCIZIO 21. Un elicottero, che vola ad un'altezza $h = 29$ m velocità orizzontale $v_x = 37$ m/s, deve lanciare un pacco di aiuti su un carrello che viaggia con velocità $v_{0x} = 20$ m/s. Il carrello ha massa $m_c = 102$ Kg e il pacco ha massa $m_p = 32$ Kg. Trascurando la resistenza dell'aria, supponendo che il carrello proceda senza attrito e che il pacco atterri sul carrello e quindi viaggi insieme al carrello calcolare:

10 punti

1. L'angolo sotto cui il pilota dell'elicottero deve vedere il carrello affinché il pacco cada sul carrello
2. La velocità del carrello dopo che il pacco è atterrato
3. La differenza di energia cinetica tra (immediatamente) prima e dopo l'atterraggio

Soluzione: Nel sistema di riferimento del carrello, la velocità dell'elicottero è $v_{rx} = 17$. Il tempo che il pacco impiega per raggiungere il suolo è $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ in questo tempo, il pacco percorre una distanza orizzontale: $\ell = v_{rx}t = v_{rx}\sqrt{\frac{2h}{g}}$, dunque l'angolo di vista sarà: $\vartheta = \arctan \frac{\ell}{h} = 0.96$ rad.

La velocità del carrello si ricava dalla conservazione della quantità di moto nella direzione orizzontale: $m_c v_{0x} + m_p v_x = (m_c + m_p)v$, dunque:

$$v = \frac{m_c v_{0x} + m_p v_x}{m_c + m_p} = 24.06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'energia cinetica del pacco subito prima di atterrare è $K_p = \frac{1}{2}m_p(v_x^2 + 2gh) = 31007.68$ J e quella del carrello è $K_c = \frac{1}{2}m_c v_{0x}^2 = 20400$ J. L'energia cinetica finale è $K_f = \frac{1}{2}(m_c + m_p)v^2 = \frac{(m_c v_{0x} + m_p v_x)^2}{m_c + m_p} = 38785.2$ J quindi la differenza tra prima e dopo l'atterraggio è $K_p + K_c - K_f = 12622.48$ J.

ESERCIZIO 22.

Due barche partecipano ad una regata partendo al tempo t_0 dallo stesso porto. La prima si dirige a Nord percorrendo $N = 35$ miglia marine alla velocità di $v_N = 11$ nodi e quindi $E = 27$ miglia verso Est alla velocità di $v_E = 18$ nodi, finché giunge alla prima boa. La seconda punta direttamente alla boa con una velocità di $v_{Bt} = 12$ nodi. Sapendo che un miglio marino è pari a 1852 m e che un nodo è pari ad un miglio all'ora, calcolare:

<i>punti</i>

1. La distanza (in km) fra la boa ed il punto di partenza;
2. Il tempo (in h) impiegato dalla prima barca a raggiungere la boa;
3. Il tempo (in h) impiegato dalla seconda barca a raggiungere la boa;
4. l'angolo ϑ , espresso in gradi, tra la velocità della seconda barca v_B e la direzione che indica il Nord.

Soluzione: Prendendo un sistema di riferimento in con x che punta ad est e y che punta a nord, la distanza percorsa è il modulo del vettore spostamento $d = \sqrt{N^2 + E^2} = 81,86$ km
 Il tempo impiegato per ciascuna tratta è: $t_N = N/v_N$ e $t_E = E/v_E$, il tempo totale della prima barca è dato dalla somma $t_N + t_E = 4,68$ h. Il tempo che la seconda barca impiega è $d/v_{Bt} = 3,68$ h. L'angolo tra la velocità della seconda barca rispetto al nord è $\vartheta = \arctan\left(\frac{E}{N}\right) = 37,65^\circ$

ESERCIZIO 23. Un corpo si muove di moto circolare uniforme lungo una traiettoria circolare con energia cinetica $E_c = 200$ J. Il corpo è tenuto in orbita tramite una fune tesa inestensibile di massa trascurabile. Se il modulo della tensione della fune è $\tau = 12$ N e il periodo di rotazione è $T = 33$ s, calcolare (esprimendo le unità di misura nel Sistema Internazionale):

<i>punti</i>

1. il raggio R della traiettoria;
2. il modulo della velocità v del corpo;
3. la massa m del corpo;
4. il modulo del momento angolare L .

Soluzione:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}mv^2 \\ \tau = m\frac{v^2}{R} \\ \omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

Dividendo la prima per la seconda: $E_c/\tau = R/2$ Dunque: $R = 2E_c/\tau = 33.33$ m.

Dalla terza: $v/R \equiv v\tau/2E_c = 2\pi/T$, quindi: $v = 4\pi E_c/T\tau = 6.35 \text{ ms}^{-1}$. Sostituendo nella prima, troviamo: $m = 2E_c/v^2 = 9.92$ kg. Infine, il momento angolare è $L = R \times mv = 2099,52 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$.

ESERCIZIO 24. Un ascensore di massa $m = 113 \text{ Kg}$ è tirato verso l'alto da una fune, che può sopportare una tensione massima di $T = 2240 \text{ N}$. Quale è il tempo minimo necessario per portare, in totale assenza di attriti, l'ascensore dal primo al quinto piano, tra cui c'è un dislivello di $h = 12 \text{ m}$? Quale è invece il tempo se si aggiunge un attrito dinamico di $F_a = 359 \text{ N}$?

<i>punti</i>

Soluzione: Le forze agenti sull'ascensore sono la tensione, la forza peso e, nel secondo caso, l'attrito. Dunque: $T - mg = ma$ e quindi: $a = T/m - g = 10.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. L'ascensore percorrerà un dislivello $h = 1/2 at^2$, nel tempo:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1,55 \text{ s}$$

In presenza di attrito, il bilancio delle forze sarà: $T - mg - F_a = ma$, e dunque:

$$a = \frac{T - F}{m} - g = 6.84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

e dunque $t = 1,87 \text{ s}$

ESERCIZIO 25. Una pallottola di massa $m = 12 \text{ g}$ viene sparata contro un blocco di massa $M = 3 \text{ kg}$ inizialmente in quiete sul bordo di un tavolo alto $h = 1 \text{ m}$. Il proiettile si conficca nel blocco e, dopo l'urto, il blocco cade al suolo ad una distanza $L = 1 \text{ m}$ dallo spigolo del tavolo.

<i>punti</i>

1. Determinare la velocità iniziale v_0 del proiettile.
2. Determinare l'energia trasformata in calore dopo l'urto,
3. l'energia cinetica iniziale con cui il blocco cade dal punto al bordo del tavolo,
4. l'energia cinetica con cui arriva al suolo.

Soluzione: Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto, quindi: $mv_0 = (m + M)v_b$ dove v_b è la velocità del blocco con il proiettile incastrato dopo l'urto. Con questa velocità, il sistema percorre una distanza orizzontale $L = v_b \cdot t^*$ dove t^* è il tempo che ci vuole per raggiungere il suolo: $t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; dunque $v_b = L \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}} = 2.21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e quindi:

$$v_0 = \frac{m + M}{m} L \sqrt{\frac{g}{2h}} = 554.71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

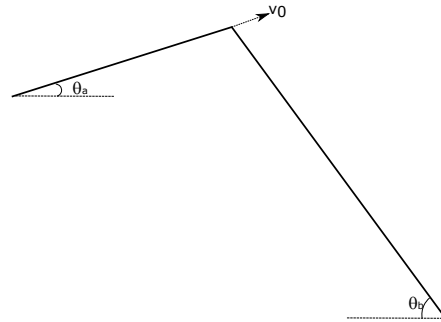
L'energia trasformata in calore sarà la differenza tra le energie cinetiche prima e dopo l'urto $E = E_p - E_d = 1/2mv_0^2 - 1/2(m + M)v_b^2 = 1846.22 - 7.36 = 1838.86 \text{ J}$

L'energia cinetica con cui il sistema comincia a muoversi dopo l'urto è $E_d = 7.36 \text{ J}$

L'energia cinetica con cui raggiunge il suolo è $E_f = 1/2(m + M)(v_b^2 + 2gh) = 36.91 \text{ J}$

ESERCIZIO 26. Uno sciatore compie un salto da una rampa inclinata di $\vartheta_a = 15^\circ$ rispetto all'orizzontale per poi ricadere su un piano inclinato di $\vartheta = 45^\circ$. Sapendo che lo sciatore lascia la rampa con una velocità in modulo pari a $v_0 = 9 \text{ m/s}$ e trascurando la resistenza dell'aria, calcolare a che distanza dal punto di lancio lo sciatore atterra sul piano inclinato e le componenti della velocità nel punto di atterraggio.

punti



Soluzione: Fissando l'origine nel punto di stacco:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \vartheta_a t \\ y = v_0 \sin \vartheta_a t - 1/2 g t^2 \end{cases}$$

da cui, ricavando t dalla prima e sostituendo nella seconda

$$y = x \tan \vartheta_a - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \vartheta_a v_0^2}$$

che, messa a sistema con l'equazione del piano inclinato $y = -x$, permette di ricavare l'ascissa del punto di contatto:

$$x_c = \frac{2 \cos^2 \vartheta_a (\tan \vartheta_a + 1) v_0^2}{g} = 19.54 \text{ m}$$

che equivale ad una distanza sul piano inclinato $d = x_c / \cos \vartheta_b = 27.63 \text{ m}$.

Le componenti della velocità, saranno:

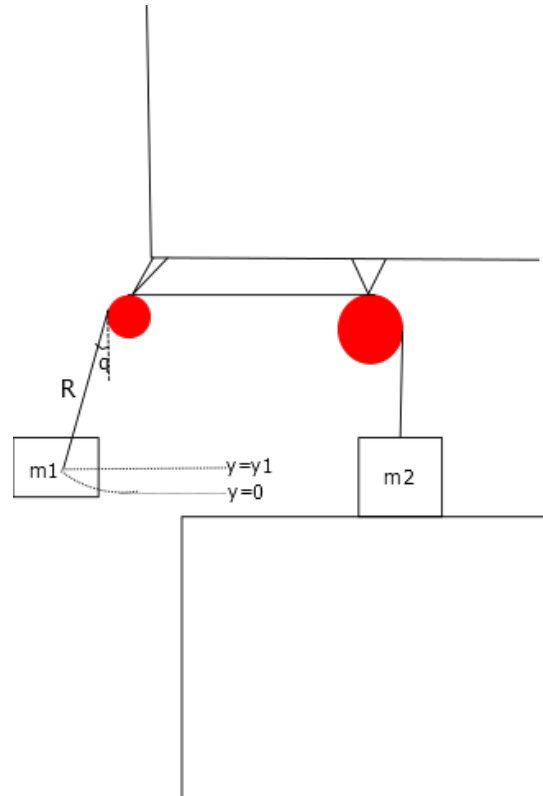
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \vartheta_a \\ v_y = v_0 \sin \vartheta_a - g t_c \end{cases}$$

dove t_c è il tempo a cui lo sciatore tocca il piano: dunque quando $x(t_c) = x_c$

$$v_0 \cos \vartheta_a t_c = x_c \Rightarrow t_c = \frac{x_c}{v_0 \cos \vartheta_a} = 2.25 \text{ s}$$

ESERCIZIO 27. Due blocchi di massa $m_1 = 3$ e $m_2 = 7$ sono collegati attraverso una fune inestensibile e di massa trascurabile che passa attraverso due carrucole ideali. La massa m_1 pende dalla carrucola per una distanza $R = 1.42$ m mentre la massa m_2 è appoggiata ad un piano. Se si sposta la massa m_1 dalla posizione verticale di un angolo ϑ e la si rilascia, quale deve essere il minimo angolo ϑ affinché la massa m_2 si stacchi dal tavolo?

<i>punti</i>



Soluzione: La massa m_2 si solleverà quando la tensione del filo sarà maggiore del suo peso. La tensione del filo sarà massima quando la massa m_1 passa per la verticale e sarà pari a $T = m_1g + m_1v^2/R$. Bisogna quindi trovare la velocità nel punto in cui passa per la verticale. Possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica:

$$m_1gR(1 - \cos \vartheta) = 1/2m_1v^2$$

da cui $v^2 = 2gR(1 - \cos \vartheta)$ e quindi, la tensione è $T = m_1g(1 + 2(1 - \cos \vartheta)) = m_1g(3 - 2 \cos \vartheta)$. Dalla condizione $m_2g \leq T$, ricaviamo $m_2g = m_1g(3 - 2 \cos \vartheta_{min})$ e quindi:

$$\cos \vartheta_{min} = \frac{3m_1 - m_2}{2m_1}$$

e dunque $\vartheta_{min} = 1.43 \text{ rad}$

ESERCIZIO 28. Un dischetto è posto alla distanza $r = 16 \text{ cm}$ dall'asse di una piattaforma ruotante con velocità angolare $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$, restando fermo rispetto ad essa. Imprimendo alla piattaforma una accelerazione angolare $\dot{\omega} = 3 \text{ rad/s}^2$ osserva che dopo un intervallo di tempo $t = 1.5 \text{ s}$ il dischetto inizia a muoversi. Determinare il coefficiente di attrito statico.

<i>punti</i>

Soluzione: Il dischetto comincia a muoversi quando la forza che agisce sul corpo supera l'attrito statico: $\mu_s mg \leq ma$ dove $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ e $a_t = \dot{\omega}r$; $a_n = r\omega^2$ e $\omega = \omega_0 + \dot{\omega}t = 7.5 \text{ rad/s}$. Dunque: $\mu_s = \frac{r}{g}\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = 0,92$

ESERCIZIO 29. Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 21 \text{ cm}$ con velocità angolare costante $\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$. A partire dall'istante $t = 0$ il punto materiale inizia a decelerare fino ad arrestarsi. Dall'istante $t_0 = 0$ all'istante $t_1 = 10 \text{ s}$ la sua accelerazione angolare vale $\alpha = kt \text{ rad/s}^2$ con $k = 0.4$ mentre per $t \geq t_1$ resta costante al valore $\alpha_1 = 4 \text{ rad/s}^2$. Calcolare il modulo dell'accelerazione lineare del punto nell'istante t_1 e il tempo che questo impiega ad arrestarsi.

<i>punti</i>

Soluzione: All'istante t_1 il punto che parte da una velocità angolare ω_0 avrà una velocità angolare:

$$\omega(t_1) = \omega_0 - \int_{t_0}^{t_1} -kt \, dt = \omega_0 - \frac{k}{2} t_1^2 = 10 \text{ rad/s}$$

Il modulo dell'accelerazione a quest'istante di tempo è $a(t_1) = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ dove $a_n = \omega(t_1)^2 R = 21 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione normale (centripeta) e $a_t = \alpha(t_1) R = -0.08 \text{ m/s}^2$. Dunque $a = 21 \text{ m/s}^2$.

Da quest'istante in poi il moto è uniformemente decelerato dalla velocità $\omega(t_1)$ a zero, dunque: $\omega(t_1) - \alpha_1 t = 0$ quindi: $t = \omega(t_1)/\alpha_1 = 2,5 \text{ s}$

ESERCIZIO 30. Due imbarcazioni A e B procedono in direzioni opposte avvicinandosi con velocità costanti $v_A = 24 \text{ km/h}$ e $v_B = 38 \text{ km/h}$. Nell'istante in cui la distanza tra le imbarcazioni è d , da A viene sparato un proiettile con velocità, relativa all'imbarcazione, di modulo $v_P = 150 \text{ m/s}$ ed angolo $\vartheta = 30^\circ$. Determinare la distanza d perché il proiettile colpisca B. Trascurare le dimensioni delle imbarcazioni e la resistenza dell'aria.

<i>punti</i>

Soluzione: Nel sistema di riferimento della barca A, $v'_A = 0$ e $v'_B = v_A + v_B$. Possiamo scrivere le equazioni del moto del proiettile:

$$\begin{cases} x'_p = v_p \cos \vartheta t \\ y'_p = v_p \sin \vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Il tempo in cui il proiettile raggiunge il suolo si ottiene per $y'_p = 0$: $t_G = 2v_p \sin \vartheta / g$. In questo tempo l'imbarcazione B ha percorso una distanza $v'_B t_G$, dunque dovrà essere $d - v'_B t_G = v_P \cos \vartheta t_G$ da cui $d = (v'_B + v_P \cos \vartheta) t_G = 2056.82 \text{ m}$

ESERCIZIO 1. Un'asta sottile omogenea, avente massa $m = 5$ g e lunghezza $d = 26$ m ruota nel piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro O con velocità angolare $\omega_0 = 27$ rad/s. Si vuole fermarla in un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ s applicando un momento frenante costante. Determinare:

10 punti

1. il momento frenante;
2. il numero di giri compiuto prima di fermarsi

Soluzione: Utilizziamo l'equazione cardinale della dinamica rotazionale: $M = I\dot{\omega}$, in cui l'accelerazione angolare la possiamo ricavare dal fatto che la decelerazione è costante e termina con $\omega = 0$. Dunque: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{\Delta t}$., Visto che $I = \frac{md^2}{12}$:

$$M = \frac{md^2\omega_0}{12\Delta t} = 0,76 \text{ Nm}$$

Il numero di giri lo ricaviamo integrando l'equazione della dinamica rotazionale:

$$2\pi N = \omega_0\Delta t - \frac{1}{2}\dot{\omega}(\Delta t)^2 = \omega_0\Delta t \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

dunque: $N = \frac{\omega_0\Delta t}{4\pi} = 21$

ESERCIZIO 2. Una gru è costituita da un'asta verticale AC (albero) di lunghezza $L = 3$ m, rigidamente fissata al terreno e da un'asta (braccio) AB di lunghezza $H = 9$ m, incernierata alla base A dell'albero. Il braccio è tenuto inclinato di un angolo $\alpha = 45^\circ$ rispetto all'albero da una fune CB inestensibile e di massa trascurabile ed alla sua estremità è appeso un carico di peso $p = 335$ kg. Calcolare:

10 punti

1. la tensione della fune
2. la lunghezza ℓ della fune
3. la forza di compressione S esercitata lungo il braccio AB supposto di peso trascurabile

Soluzione: Siccome il sistema è fermo, la somma delle forze applicate al punto B deve essere nulla. Le forze in B sono: la forza peso p , la compressione S e la tensione T del tirante. Il triangolo formato da queste tre forze è simile al triangolo ABC, perché ha tutti i lati paralleli a questo, dunque valgono le proporzioni:

$$\frac{T}{BC} = \frac{p}{AC} \rightarrow T = p \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{S}{AB} = \frac{p}{AC} \rightarrow S = p \frac{AB}{AC} = 1005 \text{ N}$$

Per trovare BC, sfruttiamo la proprietà che $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, dunque elevando al quadrato entrambi i membri:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \overline{AC} \cos \alpha$$

quindi:

$$\ell^2 = L^2 + H^2 - 2LH \cos \alpha = 51.82$$

e dunque

$$\ell = 7.2 \text{ m}$$

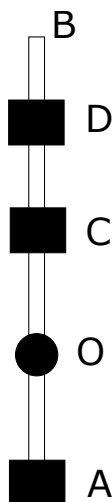
e, infine:

$$T = 804 \text{ N}$$

ESERCIZIO 3. Un metronomo è costituito da un'asta rigida verticale AB impernata in un suo punto O che può oscillare in un piano verticale, e tre masse puntiformi $m_A = 31$ g all'estremo A dell'asta, $m_C = 9$ g nel punto C simmetrico di rispetto ad O e $m_D = 10$ g nel punto D che può scorrere lungo l'asta. Considerando $OA = OC = 3$ cm e $OD = 7$ cm e trascurando il peso dell'asta, determinare:

10 punti

- la posizione del centro di massa del sistema ed il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse orizzontale passante per O;
- la posizione di equilibrio stabile del sistema ed il periodo delle piccole oscillazioni intorno a questa posizione



Soluzione: Prendendo il sistema di riferimento centrato in O, sarà $x_A = -OA = -3$ cm, $x_C = +3$ cm, $x_D = 7$ cm. Il baricentro sarà in:

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_C x_C + m_D x_D}{m_A + m_C + m_D} = 0.08 \text{ cm}$$

La posizione di equilibrio stabile è quella con in cui il centro di massa è al di sotto del punto O e il periodo delle piccole oscillazioni, detta $M = m_A + m_C + m_D = 50$ e

$$I_0 = m_A x_A^2 + m_C x_C^2 + m_D x_D^2 = 850 \text{ g cm}^2$$

sarà:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mg|x_G|}} = 2.92 \text{ s}$$

ESERCIZIO 4. Un cilindro omogeneo di massa $m = 6$ kg e raggio $r = 10$ cm, ruota con velocità angolare ω_0 attorno ad un asse parallelo all'asse del cilindro e posto ad una distanza $d = r/2$ da questo. Applicando un momento costante $M = 9$ N m, il cilindro si ferma in un tempo $t_0 = 3$ s. Calcolare:

10 punti

1. la velocità angolare ω_0 del cilindro;
2. dopo quanto tempo acquista una velocità angolare uguale ed opposta a quella iniziale;
3. dopo quanti giri a partire dall'inizio ciò avverrà.

Soluzione:

$$M = I\dot{\omega} = I\frac{\omega_0}{t_0}$$

essendo $I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2 = \frac{3}{4}mr^2$ dunque:

$$\omega_0 = \frac{Mt_0}{I} = \frac{4Mt_0}{3mr^2} = 600 \text{ rad s}^{-1}$$

Il momento applicato è costante, quindi per raggiungere la velocità uguale ed opposta all'iniziale ci vogliono t_0 secondi da quando si ferma. Per trovare il numero di giri bisogna risolvere l'equazione del moto:

$$\omega_0 t + \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = \alpha = 2N\pi$$

essendo N il numero di giri e $t = 2t_0$. Dunque

$$N = \frac{2\omega_0 t_0(1 + 1/(2t_0) \cdot 2t_0)}{2\pi} = \frac{4\omega_0 t_0}{2\pi} = 1146$$

ESERCIZIO 5. Un corpo di massa $m_1 = 2$ kg è inizialmente posto su un piano inclinato liscio di angolo $\alpha = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il corpo viene lanciato con velocità $v_0 = 5$ m/s e, percorsa la distanza $d = 5$ m lungo il piano inclinato, raggiunge un piano orizzontale che nella parte iniziale è liscio e quindi scabro con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.2$, per una distanza $L = 5$ m, e quindi di nuovo liscio. Alla fine del piano orizzontale, si trova un'asta di lunghezza $L_a = 5$ m e massa $m_a = 3$ kg, incernierata nel punto O, che si trova ad un'altezza $h = 2.5$ m, attorno al quale può ruotare senza attrito. All'estremo inferiore dell'asta è fissata una massa $m_2 = 1$ kg ed a metà tra il punto O e l'estremo superiore dell'asta, un'altra massa $m_3 = 3$ kg. Il corpo m_1 compie un urto completamente anelastico e rimane attaccato al corpo m_2 .

10 punti

1. Calcolare la velocità del corpo m_1 alla base del piano inclinato
2. Calcolare la velocità del corpo m_1 all'istante dell'urto
3. Calcolare la velocità angolare del sistema composto dall'asta con le masse attaccate, immediatamente dopo l'urto
4. Determinare se l'asta si ribalta

Soluzione: Col teorema dell'energia: $\frac{1}{2}m_1v_0^2 + m_1gd\sin\alpha = \frac{1}{2}m_1v_1^2$. Dunque:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gd\sin\alpha} = 10.49 \text{ m/s}$$

La velocità alla fine del piano scabro è data sempre dal teorema dell'energia considerando il lavoro delle forze d'attrito: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 - m_1g\mu_dL = \frac{1}{2}m_1v_2^2$, dunque:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2g\mu_dL} = 9.51$$

Prendendo il sistema di riferimento centrato nell'asse di rotazione e rivolto verso l'alto, il centro di massa si troverà ad una coordinata

$$y_g = \frac{m_3L_a/4 - (m_1 + m_2)L_a/2}{m_1 + m_2 + m_3} = -0.63$$

essendo il centro di massa dell'asta nell'origine. Applichiamo il teorema della conservazione del momento della quantità di moto prima e dopo l'urto:

$$m_1v_2h = I\omega$$

dove $I = m_aL_a^2/12 + (m_1 + m_2)h^2 + m_3(\frac{L_a-h}{2})^2 = 43.75$ è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione. Per trovare $\omega = m_1v_2h/I = 1.09$

Perché l'asta si ribalti, dovrà essere:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \geq (m_a + m_1 + m_2 + m_3)g \cdot 2y_g$$

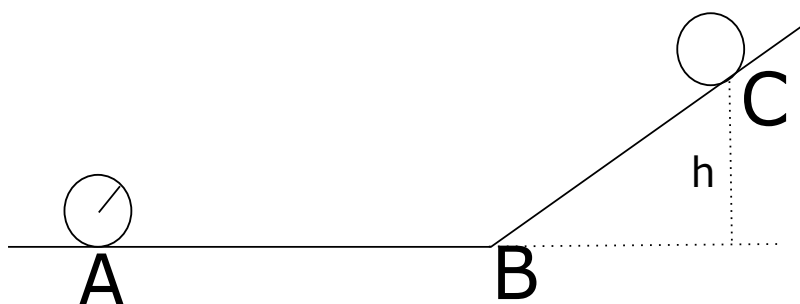
perché la differenza di quota è $2y_g$. Dunque: $\omega^2 \geq 4(m_a + m_1 + m_2 + m_3)gy_g/I$ ovvero $\omega \geq 2.26$

ESERCIZIO 6.

Un cilindro omogeneo di massa $M = 6$ kg. si trova fermo nel punto A sul piano orizzontale AB (vedi fig.). Ad un certo istante viene applicata al centro di massa del cilindro una forza F di modulo costante, parallela al piano AB e diretta da A verso B. La distanza è $AB = 1$ m; Tale forza viene bruscamente rimossa quando il cilindro transita per il punto B e, di qui, esso poi prosegue per inerzia fino al punto C. Supponendo che durante il suo moto il cilindro rotoli sempre senza strisciare, valutare:

10 punti

1. il valore della forza F affinché il baricentro del cilindro raggiunga la quota $h = 2$ m.
2. la velocità; di traslazione del cilindro quando passa per B



Soluzione: Il lavoro eseguito dalla forza nel tratto AB si traduce in energia cinetica traslazionale e rotazionale:

$$L_{AB} = F \cdot AB = \frac{1}{2} (Mv_{CM}^2 + I\omega^2)$$

ma siccome il moto è di puro rotolamento $\omega = v_{CM}/R$ e $I = 1/2MR^2$, dunque:

$$F \cdot AB = \frac{1}{2} \left(Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \right) = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2$$

Per arrivare fermo nel punto C, tutta l'energia cinetica testé calcolata, si trasformerà in energia potenziale nel punto C $E_{pot} = Mgh$, dunque: $\frac{3}{4}Mv_{CM}^2 = Mgh$ e, in definitiva:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 5,11 \quad ms^{-1}$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro otteniamo:

$$F = \frac{3}{4AB}Mv_{CM}^2 = \frac{Mgh}{AB} = 117,72 \text{ N}$$

ESERCIZIO 7. Una ruota, inizialmente in quiete, può ruotare intorno ad un asse in presenza di un attrito che è schematizzabile con un momento frenante costante M_f .

Alla ruota viene applicato un momento motore $M_m = 36 \text{ N m}$ per un tempo $t_1 = 20 \text{ s}$ ed alla fine di questa fase di accelerazione la velocità angolare vale $\omega_f = 53 \text{ rad/s}$. A questo istante si elimina il momento motore e si osserva che la ruota si ferma in un tempo $t_2 = 117 \text{ s}$. Avendo impostato le equazioni del moto nelle due fasi, determinare:

10 punti

1. il momento d'inerzia I della ruota rispetto all'asse di rotazione;
2. il momento della forza di attrito M_f .

Soluzione: Applichiamo la legge di Newton per i moti rotatori alle due fasi del moto e la legge dell'accelerazione angolare:

$$\begin{aligned}\omega_f &= \dot{\omega}_1 t_1 \\ 0 &= \omega_f - \dot{\omega}_2 t_2 \\ M_m - M_f &= I \dot{\omega}_1 \\ M_f &= I \dot{\omega}_2\end{aligned}$$

da cui: $\dot{\omega}_1 = \frac{\omega_f}{t_1}$ $\dot{\omega}_2 = \frac{\omega_f}{t_2}$ e, risolvendo rispetto a I ed M_f :

$$\begin{aligned}I &= \frac{M_m}{\omega_f} \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} &= 11,6 \text{ kg m}^2 \\ M_f &= M_m \frac{t_1}{t_1 + t_2} &= 5,26 \text{ N m}\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8. Un disco di grammofono di massa $M = 96\text{g}$ e raggio $R = 14\text{ cm}$ gira intorno al suo asse centrale alla velocità angolare di $\omega_i = 45$ giri/minuto. Un pezzetto di stucco di massa $m = 18\text{g}$ cade dall'alto verticalmente sul disco e si attacca al suo bordo. Determinare:

<i>10 punti</i>

1. il momento d'inerzia del disco I_0 ;
2. la velocità angolare del disco subito dopo che lo stucco si è attaccato;
3. l'energia meccanica dissipata nell'urto

Soluzione: Momento d'inerzia del disco: $I_0 = 1/2 MR^2 = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$. Conserviamo il momento della quantità di moto: $I_0\omega_i = (I_0 + mR^2)\omega_f$, dunque:

$$\omega_f = \frac{I_0\omega_i}{(I_0 + mR^2)} = \omega_i \frac{M}{M + 2m} = 3,43 \text{ rad/s}$$

L'energia meccanica dissipata nell'urto è data dalla differenza delle energie cinetiche iniziale e finale.

$$\begin{cases} K_i = \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2 \\ K_f = \frac{1}{2} (I_0 + mR^2) \omega_f^2 \end{cases}$$

$$K_i - K_f = \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2 \frac{mR^2}{I_0 + mR^2} = \frac{mMR^2}{2(M + 2m)} \omega_i^2 = K_i \frac{2m}{M + 2m}$$

ESERCIZIO 9. Due palle di 1kg, sono attaccate agli estremi di un asta sottile di massa trascurabile e lunghezza $L = 1\text{ m}$, libera di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse passante per il suo centro. Mentre l'asta è ferma in posizione orizzontale, un pezzetto di stucco di massa $m_s = 56\text{ g}$ cade, verticalmente con velocità $v_s = 4\text{ m/s}$, su una palla e vi rimane attaccato. Determinare:

10 punti

1. La velocità angolare ω_0 del sistema sbarra-stucco subito dopo l'urto;
2. Il rapporto fra l'energia cinetica dopo e prima dell'urto;
3. L'angolo massimo rispetto all'orizzontale fino al quale risale la sbarra

Soluzione: Nell'urto si conserva il momento della quantità di moto rispetto all'asse orizzontale di rotazione

$$m_s v_s \frac{L}{2} = I \omega_0 = \left[m_s \left(\frac{L}{2} \right)^2 + 2m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \omega_0$$

dunque:

$$\omega_0 = \frac{m_s}{m_s + 2m} \frac{2v_s}{L} = 0.218$$

L'energia cinetica iniziale è quella dello stucco, quella finale è quella del sistema, dunque:

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I \omega_0^2}{m_s v_s^2} = \frac{m_s}{m_s + 2m} = 0.03$$

Dopo l'urto, il moto è senza dissipazione, dunque vale il principio di conservazione dell'energia in cui la variazione di energia potenziale delle due palle si compensa e rimane solo quella dello stucco:

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = m_s g \frac{L}{2} \sin \vartheta_{max}$$

da cui si ricava:

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{I \omega_0^2}{m_s g L} = \frac{m_s}{2m + m_s} \frac{v_s^2}{gL} = 0.04$$

ESERCIZIO 10. Un cilindro omogeneo di massa $m_c = 6 \text{ kg}$ e raggio r è appoggiato su un tavolo orizzontale. L'asse del cilindro è collegato ad una massa $m = 2 \text{ kg}$ libera di scendere lungo la verticale, tramite un filo inestensibile che scorre senza attrito su una puleggia P al bordo del tavolo (le masse del filo e della puleggia sono trascurabili). Supponendo il sistema inizialmente in quiete, calcolare la velocità della massa m quando è discesa di un tratto $h = 3 \text{ m}$ sapendo che il cilindro rotola senza strisciare sul piano orizzontale e non vi sono attriti.

10 punti

Soluzione: Non essendoci attrito possiamo scrivere la legge della conservazione dell'energia quando la massa m è scesa di un tratto h :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_cv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

ove $\omega = v_c/r$ ed $I = \frac{1}{2}m_cr^2$ è il momento di inerzia del cilindro. Sostituendo:

$$\frac{1}{2} \left(m + m_c + \frac{I}{r^2} \right) v^2 = mgh$$

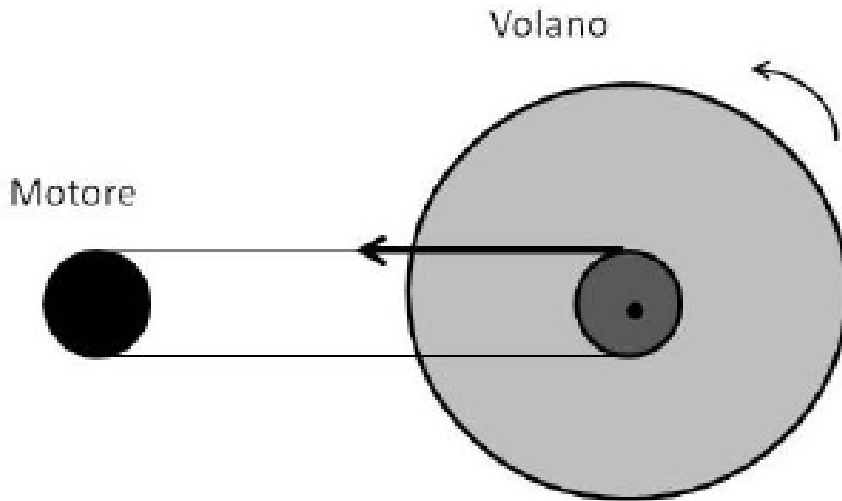
da cui:

$$v = \sqrt{2gh \left(\frac{m}{m + \frac{3}{2}m_c} \right)} = 3,27 \text{ ms}^{-1}$$

ESERCIZIO 11. Un motore elettrico fa girare un volano mediante una puleggia come in figura. Il volano è un cilindro omogeneo di diametro $d = 1 \text{ m}$ e massa $m = 9 \text{ kg}$ che ruota intorno al suo asse. La puleggia alla quale è connessa la fascia elastica ha massa trascurabile e diametro $d_{in} = 20 \text{ cm}$. Partendo da fermo il volano raggiunge, con accelerazione costante, la velocità angolare di $\omega = 11 \text{ rad/s}$ dopo avere effettuato $N = 5$ giri; e la tensione nel punto più alto della fascia è $T_{sup} = 100 \text{ N}$. Determinare:

<i>punti</i>

1. L'accelerazione angolare del moto;
2. Il valore della tensione nel punto più basso della fascia T_{inf}



Soluzione: Le equazioni del moto del volano ci dicono che:

$$\frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = 2\pi N$$

$$\dot{\omega}t = \omega$$

da cui, ricavando t dalla seconda e sostituendo nella prima:

$$\dot{\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi N} = 1.93 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

Il momento delle forze che mettono il corpo in rotazione è:

$$M = r_{int}(T_{sup} - T_{inf}) = I\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}$$

da cui:

$$T_{inf} = T_{sup} - \frac{mR^2\dot{\omega}}{2r_{int}} = 78,29 \text{ N}$$

ESERCIZIO 12. Una ruota disomogenea di raggio $R = 36$ cm è montata su un asse orizzontale intorno al quale può girare senza attrito. Una corda priva di massa, avvolta intorno alla ruota, porta fissato all'estremità libera un corpo di massa $m = 4$ kg che scende lungo la verticale con accelerazione $a = 1$ m/s². Determinare il momento d'inerzia della ruota. Quanto vale il momento di inerzia se c'è un momento delle forze d'attrito $M = 0.5$ N m? Quanto vale il lavoro compiuto dalle forze d'attrito dopo un tempo $t = 2$ s?

10 punti

Soluzione:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = I\dot{\omega} = I\frac{a}{R} \end{cases}$$

dunque: dalla prima $T = m(g - a)$ e sostituendo nella seconda:

$$I = mR^2 \frac{g - a}{a} = 4,57 \text{ kg m}^2$$

L'equazione dei momenti delle forze cambia con l'attrito che si oppone all'effetto della tensione:

$$TR - M = I\dot{\omega} = I\frac{a}{R}$$

mentre l'equazione delle forze sulla massa in caduta non cambia. Dunque:

$$I = (TR - M)\frac{R}{a} = (m(g - a)R - M)\frac{R}{a} = 3,85 \text{ kg m}^2$$

Il lavoro compiuto dalle forze d'attrito è $L = M\alpha$ dove α è l'angolo di cui ha girato la ruota nel tempo t :

$$\alpha = \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = \frac{a}{2R}t^2 = 5,56 \text{ rad}$$

e dunque: $L = 2,78$ J

ESERCIZIO 13. Una sfera omogenea di massa $m = 129$ kg e raggio $R = 2$ m può ruotare liberamente rispetto ad un asse verticale ad essa tangente. Determinare:

1. il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse di rotazione;

2. se si applica alla sfera inizialmente ferma, una forza sul punto diametralmente opposto al punto in cui tange l'asse di rotazione, quanto vale la sua intensità affinché la sfera ruoti di $\vartheta = 90$ gradi in $t = 6$ secondi?

10 punti

Soluzione: Il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse passante per il centro di massa vale $I_c = \frac{2}{5}mR^2$, dunque, per il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_c + md^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 = 722.4$$

$$\begin{cases} F \cdot 2R = I\dot{\omega} \\ \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = \vartheta \end{cases}$$

Dalla seconda:

$$\dot{\omega} = \frac{2\vartheta}{t^2}$$

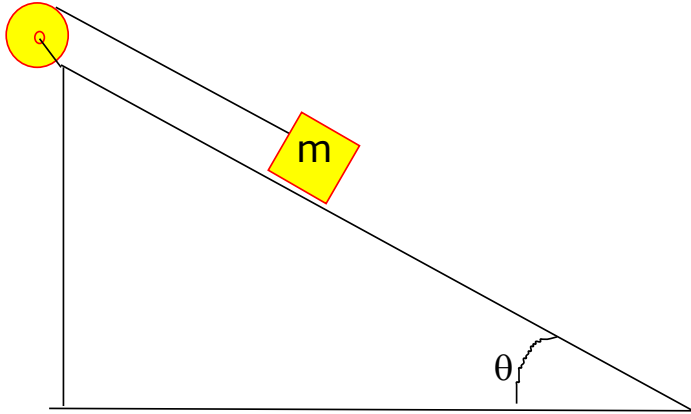
e sostituendo nella prima:

$$F = \frac{I\vartheta}{Rt^2} = 15,76 \text{ N}$$

ESERCIZIO 14. Una ruota non omogenea di raggio r è montata su un asse orizzontale intorno al quale può girare senza attrito e con momento d'inerzia $I = 1010 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$. Una corda priva di massa avvolta intorno alla ruota porta fissato all'estremità libera un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$ che scende lungo un piano liscio, inclinato di un angolo $\vartheta = 20^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il corpo scende con accelerazione $a = 1 \text{ m/s}^2$.

10 punti

1. Determinare il raggio r della ruota
2. Se il piano è scabro con attrito dinamico $\mu_d = 0.1$ ed il raggio rimane quello calcolato, quanto cambierà l'accelerazione?



Soluzione: Dobbiamo uguagliare il momento della tensione alla variazione del momento angolare e scrivere la legge del moto della massa:

$$\begin{cases} Tr = I\dot{\omega} = I\frac{a}{r} \\ ma = mg \sin \vartheta - T \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} r^2 = \frac{Ia}{T} \\ T = m(g \sin \vartheta - a) \end{cases}$$

Sostituendo:

$$r = \sqrt{\frac{aI}{m(g \sin \vartheta - a)}} = 0.15 \text{ m}$$

La seconda equazione del sistema cambierà in presenza dell'attrito:

$$ma = mg(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) - T = mg(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) - \frac{Ia}{r^2}$$

quindi:

$$ma \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right) = mg(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta)$$

da cui

$$a = \frac{g(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta)}{\left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)} = 0.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

ESERCIZIO 15. Il rotore di un elicottero è costituito da tre pale di massa $m = 233$ Kg e lunghezza $L = 5.1$ m ciascuna. Determinare:

<i>punti</i>

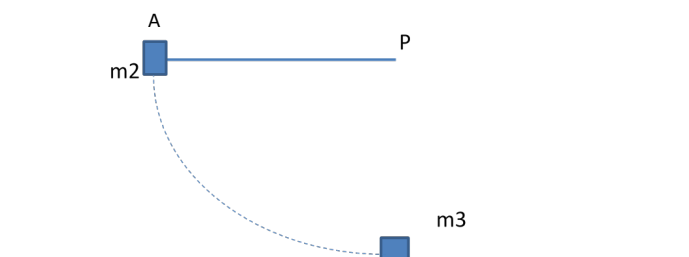
1. il momento d'inerzia del rotore rispetto ad un asse perpendicolare al piano in cui giacciono le pale e passante per il loro punto di raccordo;
2. il momento M_R della coppia fornita dal motore dell'elicottero per portare il rotore alla velocità angolare di regime $\omega_f = 339$ giri/minuto in un tempo $\Delta t = 6$ s.

Soluzione: Il momento di inerzia è dato dalla somma dei momenti di inerzia di ciascuna pala che è un'asta incernierata ad un estremo: $I = 3 \cdot \frac{1}{3}mL^2 = mL^2 = 6060.33 \text{ Kg m}^2$
L'accelerazione angolare è $\dot{\omega} = (\omega_f - \omega_0)/\Delta T$. $M_r = I\dot{\omega} = I\omega_f/\Delta t = 342\,408,65 \text{ N m}$

ESERCIZIO 16. Un'asta di massa $m_1 = 8 \text{ kg}$ e lunghezza $L = 1.5 \text{ m}$ è incernierata ad un punto P, attorno al quale può ruotare senza attrito, come in figura. All'altra estremità dell'asta, nel punto A, è fissato un corpo di massa $m_2 = 4 \text{ kg}$. Sul piano orizzontale, liscio, si trova un corpo di massa m_3 . L'asta, inizialmente in quiete e disposta orizzontalmente, viene lasciata libera di ruotare. Calcolare

punti

1. L'energia potenziale iniziale del sistema.
2. La velocità angolare con cui l'asta passa dalla verticale.
3. La velocità del corpo m_2 quando l'asta passa dalla verticale
4. Al momento del passaggio il punto estremo dell'asta, dove si trova il corpo m_2 , urta in modo elastico il corpo di massa m_3 , inizialmente fermo. A seguito dell'urto l'asta si ferma. Calcolare la massa del corpo m_3 .



Soluzione: Cominciamo a trovare la posizione del centro di massa:

$$\begin{cases} x_G = \frac{m_1 L/2 + m_2 L}{m_1 + m_2} \\ y_G = 0 \end{cases}$$

Siccome l'asta inizialmente è orizzontale, l'energia potenziale è

$$U = (m_1 + m_2)gx_G = (m_1 + 2m_2)\frac{Lg}{2} = 117.72 \text{ J}$$

Per calcolare la velocità angolare, dobbiamo trovare preventivamente il momento di inerzia del sistema: $I = I_{asta} + m_2 L^2 = 1/3 m_1 L^2 + m_2 L^2 = L^2/3(m_1 + 3m_2)$. A questo punto possiamo usare il teorema della conservazione dell'energia meccanica:

$$U = \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 3m_2} \frac{3g}{L}$$

da cui $\omega = 3.96$.

La velocità del corpo m_2 quando passa per la verticale sarà $v_2 = \omega L = 5.94 \text{ m/s}$.

Per trovare la velocità del corpo m_3 dopo l'urto dobbiamo conservare l'energia cinetica e il momento delle quantità di moto, visto che l'urto è elastico:

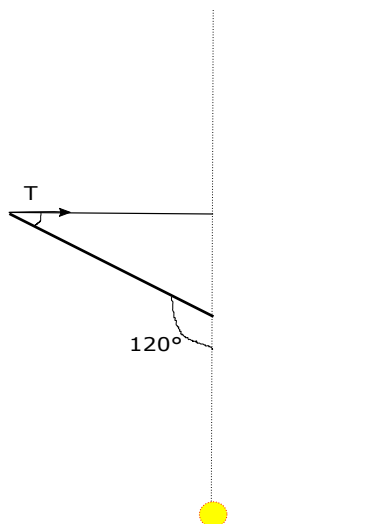
$$\begin{cases} \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m_3 v_3^2 \\ I\omega = m_3 v_3 L \end{cases}$$

da cui $I = m_3 L^2$ e dunque $m_3 = I/L^2 = 1/3 m_1 + m_2 = 6.67 \text{ kg}$

ESERCIZIO 17. Un'asta di lunghezza $51 = 1\text{m}$ e massa $m_a = 4\text{kg}$ è vincolata ad un asse orizzontale, intorno al quale può ruotare liberamente. L'asta è tenuta ferma in una posizione che forma un angolo di $\vartheta = 120^\circ$ rispetto alla verticale dell'equilibrio stabile, tramite un filo ideale orizzontale.

punti

1. determinare il valore della tensione;
2. se si taglia il filo, determinare la velocità angolare con cui l'asta arriva nella posizione di equilibrio stabile;
3. in quel punto l'asta urta elasticamente una pallina ferma di massa $m_p = 177\text{g}$; determinare la velocità della pallina subito dopo l'urto.



Soluzione: Per trovare il valore della tensione dobbiamo equilibrare i momenti delle forze in gioco: la forza peso applicata al centro di massa e la tensione, applicata all'estremo. L'angolo che la fune forma con l'asta è $\alpha = \pi/2 - \vartheta$ dunque $\sin \alpha = \cos \vartheta$

$$m_a g \frac{51}{2} \sin(\vartheta) = T 51 \sin(\alpha)$$

da cui:

$$T = \frac{m_a g}{2} \tan \vartheta = -33,98 \text{ N}$$

Nel momento in cui si taglia il filo possiamo utilizzare il teorema di conservazione dell'energia. inizialmente l'energia è tutta potenziale: $E = mg 51/2(1 + \cos(\pi - \vartheta))$ che si trasforma in energia cinetica al passaggio nel punto di equilibrio stabile:

$$m_a g \frac{51}{2} (1 + \cos(\pi - \vartheta)) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove $I = m_a 51^2/3$ è il momento di inerzia dell'asta rispetto ad un estremo. Dunque la velocità angolare dell'asta al momento dell'urto è:

$$\omega = \sqrt{\frac{3m_a g(1 + \cos(\pi - \vartheta))}{51}} = \sqrt{\frac{3m_a g(1 - \cos \vartheta)}{51}} = 13.29 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

per trovare la velocità della pallina dobbiamo mettere a sistema le energie cinetiche prima e dopo l'urto e i momenti della q.d.m.:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega_f^2 + \frac{1}{2} m_p v^2 \\ I \omega = I \omega_f + m_p v 51 \end{cases}$$

da cui troviamo

$$\begin{cases} I(\omega + \omega_f)(\omega - \omega_f) = m_p v^2 \\ I(\omega - \omega_f) = m_p v 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega + \omega_f) = \frac{v}{51} \\ (\omega - \omega_f) = \frac{m_p v 51}{I} \end{cases} \quad (1)$$

dunque:

$$v = 2\omega 51 \left(\frac{I}{m_p 51^2 + I} \right) = 23,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ESERCIZIO 18. Una ruota di raggio $R = 0.1$ m, massa $m = 2$ kg e momento di Inerzia I (la massa è tutta concentrata nella circonferenza) inizialmente ferma nel punto A all'altezza $h_1 = 6$ m, cade rotolando su di un piano inclinato. Il piano si raccorda ad $h=0$, senza spigoli, con un altro piano, inclinato verso l'alto, che termina nel punto B di altezza $h_2 = 3$ m con un angolo $\vartheta = 27^\circ$

<i>punti</i>

1. Calcolare l'energia cinetica nel punto B
2. Calcolare le componenti V_x e V_y della velocità del centro di massa nel punto B
3. Calcolare l'altezza della quota massima raggiunta dopo lo stacco in B;
4. Quando raggiunge la quota massima, utilizzando forze interne, il raggio raddoppia. Supponendo che la massa risulti concentrata nella nuova circonferenza, calcolare la variazione di energia cinetica

Soluzione: L'energia cinetica della ruota è determinata dalla variazione dell'energia potenziale : $K_B = mg(h_1 - h_2) = 58.86$ J

La velocità del centro di massa la ricaviamo dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}(mv_c^2 + I\omega^2) = K_B$$

ove $\omega = v_c/R$ e $I = mR^2$. Dunque: $mv_c^2 = K_B$ e di conseguenza $v_c = \sqrt{K_B/m} = 5.42$. Le sue componenti saranno: $v_x = v_c \cos \vartheta = 4.83$ m · s⁻¹, e $v_y = v_c \sin \vartheta = 2.46$ m · s⁻¹

La quota massima è $h_2 + \frac{v_y^2}{2g} = 3,31$ m.

Se il raggio diventa $2R$ l'energia cinetica di traslazione non cambia, mentre quella di rotazione sì perché cambiano momento di inerzia e velocità angolare. Per trovare la nuova velocità angolare, si impone la conservazione del momento della quantità di moto: $I\omega = I_1\omega_1$ con $I = mR^2$ e $I_1 = 4mR^2$; dunque $\omega' = \omega I/I_1 = \omega/4$. La nuova energia cinetica di rotazione è: $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{4mR^2\omega^2}{16} = \frac{1}{8}mR^2\omega^2 = \frac{1}{4}K_i$

ESERCIZIO 19. Un corpo di massa $m_1 = 704 \text{ g}$ è appoggiato ad una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 1000 \text{ N/m}$ e inizialmente compressa della lunghezza $x = 11 \text{ cm}$. L'altra estremità della molla è rigidamente fissata ad una parete. Il corpo è inizialmente fermo e si può muovere su un piano liscio orizzontale. Viene rilasciata la molla. Il corpo, dopo essersi staccato dalla molla prosegue sul piano liscio e quindi urta in modo anelastico un corpo $m_2 = 704 \text{ g}$ connesso ad un'asta verticale di lunghezza $51 = 1.02 \text{ m}$ e massa $m_a = 210 \text{ g}$, incernierata all'estremità superiore ed inizialmente ferma. Calcolare:

punti

1. La velocità del corpo m_1 sul piano liscio prima di urtare il corpo m_2
2. La velocità di rotazione dell'asta immediatamente dopo l'urto.
3. Determinare se l'asta percorre (almeno) un giro completo

Soluzione: Dalla conservazione dell'energia meccanica: $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$, dunque:

$$v_1 = x\sqrt{\frac{k}{m_1}} = 4.16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'urto è completamente anelastico, quindi possiamo conservare solo il momento delle quantità di moto:

$$m_1v_151 = I_{tot}\omega_f$$

dove $I_{tot} = \frac{1}{3}m_a51^2 + m_251^2 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ è il momento di inerzia totale del sistema asta-massa e ω_f la velocità di rotazione cercata. Dunque:

$$\omega_f = \frac{m_1v_151}{I_{tot}} = \frac{3m_1v_1}{(m_a + 3m_2)51} = 3.86 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Affinché il sistema compia almeno un giro, l'energia cinetica iniziale di rotazione deve essere sufficiente a superare l'energia potenziale del sistema quando il centro di massa è al di sopra del punto di rotazione. Posta l'origine nel punto di rotazione, la coordinata iniziale del c.m. è $y_0 = -(m_a51/2 + m_151)/(m_a + m_1)$, la differenza di quota è $h = 2|y_0|$, quindi:

$$\frac{1}{2}I_{tot}\omega_f^2 \geq (m_a + m_1)gh = \frac{1}{2}(m_a + 2m_1)g51$$

è la condizione affinché l'asta si ribalti. Da cui

$$\frac{(m_1v_151)^2}{2I_{tot}^2}I_{tot} = \frac{3}{2}\frac{m_1^2}{m_a + 3m_2}v_1^2 \geq \frac{1}{2}(m_a + 2m_1)g51$$

ovvero deve essere:

$$v_1^2 \geq (m_a + 2m_1)(m_a + 3m_2)\frac{g51}{3m_1^2} = 25.32 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

dunque: $v_1 \geq 5.03 \text{ ms}^{-1}$

ESERCIZIO 20. Una piattaforma circolare di raggio $R = 2 \text{ m}$ ruota con velocità angolare $\omega_0 = 0.3 \text{ rad/s}$. Un cannone posto sul bordo spara un proiettile di massa $m_p = 552 \text{ g}$ tangenzialmente al bordo della piattaforma, nel verso di rotazione e con velocità rispetto al suolo di $v_p = 73 \text{ m/s}$. Se il momento d'inerzia del sistema piattaforma-cannone vale $I = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ determinare:

<i>punti</i>

1. la velocità angolare finale della piattaforma;
2. la variazione di energia cinetica del sistema e chi la produce;

Soluzione: Dobbiamo conservare il momento angolare totale: $(I + m_p R^2)\omega_0 = I\omega_f + m_p v_p R$ dunque:

$$\omega_f = \frac{(I + m_p R^2)\omega_0 - m_p v_p R}{I}$$

Per la variazione di energia cinetica, inizialmente $E_i = 1/2(I + m_p R^2)\omega_0^2$, mentre nello stato finale: $E_f = 1/2(I\omega_f^2 + m_p v_p^2)$ dunque $\Delta E = 1444,57$ è prodotta dall'energia dell'esplosione.

ESERCIZIO 21. Un volano cilindrico omogeneo di raggio $R = 1 \text{ m}$ e massa $m = 9 \text{ kg}$ ruota con velocità angolare di $\omega_0 = 1310 \text{ giri/min}$ intorno al suo asse. Al volano viene applicata una forza frenante tangenziale costante ad una distanza radiale $r = 0.5 \text{ m}$. Il volano si ferma in $t = 2 \text{ minuti}$, determinare:

<i>punti</i>

1. Il lavoro compiuto dalla forza per fermare il volano;
2. Il modulo della forza frenante;
3. Il numero di giri compiuti prima di fermarsi.

Soluzione: Il lavoro della forza frenante deve dissipare tutta l'energia cinetica iniziale: $K_i = 1/2 I \omega_0^2$ dove $I = 1/2 m R^2$ e $\omega_0 = 137.18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, dunque $L = -1/4 m R^2 \omega_0^2 = -42341.29 \text{ J}$

Il moto di rotazione del volano uniformemente decelerato con un'accelerazione angolare fornita dall'equazione del momento: $I \dot{\omega} = F \times r$, dunque $\dot{\omega} = -Fr/I$. D'altra parte, si è detto che il volano si ferma in 2 minuti $\Delta t = 120 \text{ s}$, dunque:

$$F = \frac{I \omega_0}{r \Delta t} = \frac{m R^2 \omega_0}{2 r \Delta t} = 10.29 \text{ N}$$

Il numero di giri lo ricaviamo dal momento della forza e dal lavoro che compie: $L = Fr \Delta \vartheta$, dunque: $\Delta \vartheta = -L/Fr = 8229.6 \text{ rad}$ pari a $N = 1309.8$ giri.

ESERCIZIO 22. Due sferette di massa $m_s = 2$ kg sono attaccate alle estremità di un'asta sottile di massa trascurabile e lunghezza $L = 1$ m. L'asta, inizialmente ferma, è libera di ruotare in un piano orizzontale, attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Ad un dato istante, un proiettile di massa $m_p = 27$ g viene sparato con velocità di $v_p = 11$ m/s perpendicolare all'asta contro una delle due sferette e vi si conficca. Calcolare:

<i>punti</i>

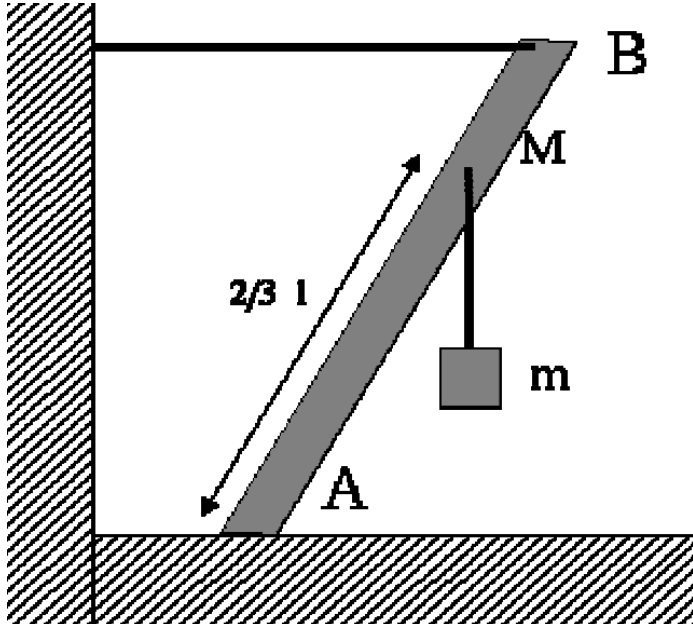
1. il momento di inerzia dell'intero sistema;
2. la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
3. il rapporto tra l'energia cinetica del sistema dopo l'urto e quella del proiettile prima dell'urto.

Soluzione: Ponendo l'origine al centro dell'asta, il momento di inerzia è dato da $I = 2m_s(L/2)^2 + m_p(L/2)^2 = L^2/4(m_p + 2m_s) = 1.007 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Per trovare la velocità angolare ω dopo l'urto che è anelastico, dobbiamo conservare il momento angolare: $m_p v_p L/2 = I\omega$, dunque $\omega = m_p v_p L/2I = 0.147 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. L'energia cinetica iniziale è quella del proiettile: $E_p = 1/2 m_p v_p^2$, quella finale è $E_f = 1/2 I \omega^2$, dunque il rapporto è $I\omega^2/(m_p v_p^2) = m_p L^2/4I = 6,703 \cdot 10^{-3}$

ESERCIZIO 23. Un'asta omogenea lunga 51 e di massa $M = 23$ kg è poggiata con un estremo (A) su un piano orizzontale scabro mentre l'altro estremo (B) è vincolato ad una parete mediante un filo inestensibile e di massa trascurabile. Un punto materiale di massa $m = 5$ kg è, inoltre, sospeso ad un punto dell'asta che dista $2/351$ dall'estremo A. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra l'asta ed il piano orizzontale è $\mu_s = 0.5$, calcolare l'angolo minimo che l'asta deve formare con il piano orizzontale affinché il sistema sia in equilibrio.

<i>punti</i>



Soluzione: Per le condizioni di equilibrio dobbiamo uguagliare a zero la somma delle forze e quella dei momenti. Proiettando sugli assi il bilancio delle forze:

$$\begin{cases} R_{Ax} - T_B = 0 \\ -R_{Ay} + Mg + mg = 0 \end{cases}$$

Essendo R_A la reazione vincolare nel punto A e T_B la tensione del filo attaccato al punto B. $R_{Ax} \leq \mu_s R_{Ay}$ Dalla prima $R_{Ax} = T_B$; ci serve trovare T_B e lo possiamo fare con i momenti. Per i momenti rispetto al polo A possiamo scrivere: $-T_B 51 \sin \vartheta + mg \cdot 2/351 \cos \vartheta + Mg 51/2 \cos \vartheta = 0$; dunque $T_B = g/6(4m + 3M) \cot \vartheta$. In totale deve essere:

$$\cot \vartheta \leq \frac{6\mu_s(M + m)}{4m + 3M} = 0.9438 \Rightarrow \vartheta \geq 0,81 \text{ rad}$$

ESERCIZIO 24. Una bicicletta la cui ruota ha un diametro $d = 68$ cm, viaggia alla velocità di $v = 24$ km/h. Sapendo che la ruota ha una massa di 500 g, supponendo che il peso sia concentrato nella circonferenza, calcolare il momento angolare della ruota.

Soluzione: La velocità angolare della ruota è $\omega = v/R = 4.9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, il momento angolare sarà pari a $L = I\omega$ dove $I = mR^2$ è il momento di inerzia di un disco. Dunque $L = mR^2\omega = 4.53 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$

<i>punti</i>

ESERCIZIO 25. Si consideri la leva formata da un'asta di massa M con il fulcro nell'estremo destro. La leva è orizzontale ed in equilibrio. Una forza di intensità $P = 16\text{N}$ è applicata verso l'alto all'estremo sinistro, ad una distanza $d = 1.5\text{m}$ dal fulcro. La forza R è invece applicata verso il basso a una distanza $x = 1\text{m}$ dal fulcro. Sapendo che il fulcro esercita una reazione vincolare di $F = 11.2\text{N}$: - Trovare R e la massa M della leva

<i>punti</i>

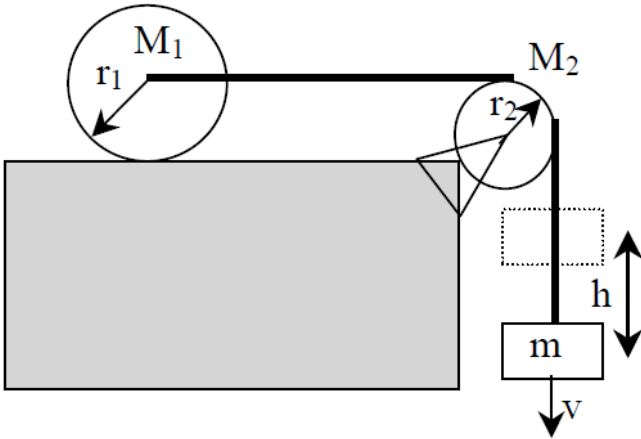
Soluzione: Dobbiamo scrivere le equazioni del bilancio delle forze e dei momenti delle forze:

$$\begin{cases} P - R - Mg + F = 0 \\ Pd - Rx - Mg(d/2) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima: $R = P - Mg + F$, sostituendo nella seconda: $Pd - (P - Mg + F)x - Mg(d/2) = 0$, dunque: $P(d - x) + Mg(d/2 + x) - Fx = 0$ e dunque: $M = (Fx - P(d - x))/g(x - d/2) = 1.3$ e $R = 14.45\text{N}$

ESERCIZIO 26. Un cilindro di massa $M_1 = 7 \text{ kg}$ e raggio r_1 è appoggiato su un piano orizzontale. L'asse del cilindro è collegato ad una massa $m = 6 \text{ kg}$ tramite un filo inestensibile di massa trascurabile che scorre su di una puleggia di massa $M_2 = 2 \text{ kg}$ e di raggio $r_2 < r_1$ mettendola in rotazione. Supponendo il sistema inizialmente in quiete, calcolare la velocità della massa m quando è scesa di una quota $h = 1 \text{ m}$. Si supponga che il cilindro rotoli senza strisciare sul piano.

<i>punti</i>



Soluzione: Il sistema è isolato e gli attriti non compiono lavoro, quindi si conserva l'energia meccanica: $Mgh = 1/2mv^2 + 1/2M_1(v^2 + I_1\omega_1^2) + 1/2I_2\omega_2^2$ dove $I_1 = 1/2M_1r_1^2$, $I_2 = 1/2M_2r_2^2$, $\omega_1 = v^2/r_1$ e $\omega_2 = v^2/r_2$. Per cui: $mgh = 3/4M_1v^2 + 1/4M_2v^2 + 1/2mv^2$; quindi:

$$v = \sqrt{2gh \frac{m}{3/2M_1 + 1/2M_2 + m}} = 2,49 \text{ ms}^{-1}$$

ESERCIZIO 1. Un contenitore adiabatico contiene $M = 10 \text{ kg}$ di ghiaccio alla temperatura $T_0 = -20^\circ\text{C}$. Una massa m_{Cu} di rame alla temperatura $T_{Cu} = 883^\circ\text{C}$ viene introdotta nel contenitore. Determinare il valore della massa m_{Cu} nei due casi in cui nello stato finale ci siano:

10 punti

1. solo acqua e rame alla temperatura $T_f = 60^\circ\text{C}$

2. vapore e rame alla temperatura di equilibrio $T_f = 150^\circ\text{C}$

(Dati: $c_{H_2O} = 4,18 \text{ kJ}/(\text{kg K})$, $c_{ghiaccio} = 2,09 \text{ kJ}/(\text{kg K})$, $\lambda_{ghiaccio} = 333 \text{ kJ/kg}$, $\lambda_{ev} = 2272 \text{ kJ/kg}$, $c_{Cu} = 0,385 \text{ kJ}/(\text{kg K})$, $c_{vap} = 0,85 \text{ kJ}/(\text{kg K})$)

Soluzione: Il contenitore non scambia calore con l'esterno, dunque la somma delle quantità di calore perso dal rame ed acquistato dall'acqua è 0, in entrambi i casi. Nel primo caso:

$$Q_{Cu} + Q_{ghiaccio} + M\lambda_{ghiaccio} + Q_{H_2O} = 0$$

ove $Q_{Cu} = mc_{Cu}(T_f - T_{Cu})$ è la quantità di calore persa dal rame nel raffreddamento $Q_{H_2O} = Mc_{H_2O}(T_f - T_{cong})$ quella acquistata dall'acqua dopo la fusione e $Q_{ghiaccio} = Mc_{ghiaccio}(T_{cong} - T_0)$ la quantità di calore assorbita dal ghiaccio fino alla temperatura di fusione.

Sostituendo:

$$mc_{Cu}(T_f - T_{Cu}) + Mc_{ghiaccio}(T_{cong} - T_0) + Mc_{H_2O}(T_f - T_{cong}) + Mc_{ghiaccio}(T_{cong} - T_0) + M\lambda_{ghiaccio} = 0$$

da cui:

$$m = \frac{Mc_{H_2O}(T_f - T_{cong}) + M\lambda_{ghiaccio} + Mc_{ghiaccio}(T_{cong} - T_0)}{c_{Cu}(T_{Cu} - T_f)}$$

$m = 19,74 \text{ kg}$ Nel secondo caso:

$$Q_{Cu} + Mc_{ghiaccio}((T_{cong} - T_0) + M\lambda_{ghiaccio} + Q_{H_2O} + M\lambda_{ev} + Mc_{vap}(T_f - T_{eb}) = 0$$

ove $Q_{H_2O} = Mc_{H_2O}(T_{eb} - T_{cong}) = Q_{H_2O} = 100Mc_{H_2O}$. Dunque:

$$mc_{Cu}(T_f - T_{Cu}) + M(100c_{H_2O} + \lambda_{ev} + \lambda_{ghiaccio}) = 0$$

quindi:

$$m = M \left(\frac{100c_{H_2O} + \lambda_{ev} + \lambda_{ghiaccio} + c_{ghiaccio}(T_{cong} - T_i) + c_{vap}(T_f - T_{eb})}{c_{Cu}(T_{Cu} - T_f)} \right)$$

$m = 110,11 \text{ kg}$.

ESERCIZIO 2. Un cilindro di ottone di sezione $S = 13 \text{ cm}^2$ contiene un volume $V_0 = 200 \text{ cm}^3$ di glicerina compresso da un pistone di massa trascurabile che è schiacciato da una forza $F = 593 \text{ N}$. Trascurando la dilatazione dell'ottone e scaldando il recipiente da $T_1 = 60^\circ\text{C}$ a $T_2 = 147^\circ\text{C}$, calcolare:

10 punti

1. l'aumento di volume della glicerina;
2. il lavoro compiuto dalla glicerina contro la forza F ;
3. la quantità di calore ΔQ assorbita dalla glicerina

sapendo che la densità della glicerina a 60°C è $\varrho = 1,26 \text{ g cm}^{-3}$ ed il suo calore specifico $c = 0,58 \text{ cal g}^{-1}^\circ\text{C}^{-1}$ e che il coefficiente di dilatazione termica di volume della glicerina è $\gamma = 5,3 \cdot 10^{-4}^\circ\text{C}^{-1}$

Soluzione: Il volume finale è dato da

$$V = V_0(1 + \gamma\Delta T) = 209,22 \text{ cm}^3$$

dunque

$$\Delta V = V_0\gamma\Delta T = 9,22 \text{ cm}^3$$

L'aumento di volume è dato da $\Delta V = \Delta l \cdot S'$ dunque: $\Delta l = \Delta V/S = 0,71 \text{ cm}$, pertanto il lavoro compiuto contro la forza F è :

$$L = F \cdot \Delta l = 4,21 \text{ J}$$

La quantità di calore assorbita dalla glicerina è data da:

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

dove $m = \varrho V_0 = 252$; dunque $\Delta Q = 12\,716 \text{ J}$

ESERCIZIO 3. Un cilindro rigido posto orizzontalmente è chiuso all'estremità da un pistone che si può muovere liberamente senza attrito. Il cilindro è riempito da una mole di gas perfetto monoatomico in equilibrio con la pressione esterna di un'atmosfera ad una temperatura di $T_i = 35\text{ }^{\circ}\text{C}$. Il pistone viene bloccato ed al gas viene fornita una quantità di calore pari a $Q = 2063\text{ J}$. Tolto il blocco del pistone il gas subisce un'espansione che nel piano V-P è rappresentata con un segmento di retta, che lo porta ad un nuovo stato di equilibrio a temperatura $T_f = 138\text{ }^{\circ}\text{C}$ e pressione $P_f = \frac{7}{8}P_1$ dove P_1 è la pressione dopo il riscaldamento. Dopo aver disegnato le trasformazioni su un diagramma V-P:

a) Si determini la variazione di energia interna del gas durante l'espansione.

b) Si trovi il lavoro fatto dal gas.

Soluzione: Possiamo ricavare il volume iniziale dall'equazione di stato e la temperatura raggiunta durante la trasformazione a volume costante in cui $Q = nc_v\Delta T$ e quindi: $\Delta T = \frac{Q}{nc_v}$. Il gas è monoatomico, dunque $c_v = \frac{3}{2}R$. In definitiva,

$$V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = 0.025\text{ m}^3$$

$$T_1 = T + \Delta T = 473.58\text{ K}$$

La variazione di energia interna nella trasformazione irreversibile è data da;

$$\Delta U = nc_v(T_f - T_1) = -778,44\text{ J}$$

Il volume finale dopo l'espansione è:

$$V_f = \frac{nRT_f}{P_f}$$

La pressione dopo l'isocora è :

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_i} = 157,49\text{ kPa} = 1,55\text{ Atm}$$

Il lavoro svolto sarà dato dall'area del trapezio nel piano V-P, avente per basi le pressioni P_1 e P_i ed altezza ΔV .

$$L = \frac{1}{2}(P_i + P_1)(V_f - V_i)$$

10 punti

ESERCIZIO 4. Si riscalda, su un fornello a fuoco lento per un tempo Δt , una pentola contenente inizialmente 7 litri di acqua ed una quantità ignota di ghiaccio in equilibrio a $T_0 = 0^\circ C$. Durante la prima metà del tempo la temperatura rimane a $0^\circ C$ mentre nella seconda cresce linearmente fino a raggiungere $T_f = 22^\circ C$. Assumendo che la potenza fornita dal fornello resti costante, e trascurando le perdite e la capacità termica della pentola, determinare la massa iniziale del ghiaccio (si ricorda che $c_{H_2O} = 4.18 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ e $\lambda_{fus} = 333 \text{ kJ/kg}$).

10 punti

Soluzione: $Q = P \cdot t$, inizialmente $P \cdot t/2 = \lambda_{fus} m_g$ e dopo: $P \cdot t/2 = (m_{H_2O} + m_g) c_{H_2O} (T - T_0)$. Sottraendo membro a membro:

$$\lambda_{fus} m_g - (m_{H_2O} + m_g) c_{H_2O} (T - T_0) = 0$$

da cui:

$$m_g = m_{H_2O} \frac{c_{H_2O} (T - T_0)}{\lambda_{fus} - c_{H_2O} (T - T_0)} = 2,67 \text{ kg}$$

ESERCIZIO 5. Una mole di gas perfetto biatomico è contenuta in un cilindro a pareti isolanti munito di un pistone mobile di sezione $S = 19 \text{ cm}^2$. Sul fondo del cilindro, una resistenza di volume trascurabile e di potenza $W = 21 \text{ W}$, viene alimentata per un tempo $t = 5' : 50''$, liberando una quantità E di energia sotto forma di calore. Sapendo che il gas occupa un volume iniziale di $V = 1 \text{ l}$ alla pressione $P = 2.2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$,

10 punti

1. calcolare la temperatura finale T_2 del gas, considerando l'espansione del gas isobara
2. l'innalzamento x_1 del pistone .

(fornire i risultati nelle unità del Sistema Internazionale)

Soluzione: Energia erogata: $Q = E = W \cdot t = 7350 \text{ J}$;

Primo principio della termodinamica: $Q = mc_p \Delta T$; $V_2 = V_1 + S \cdot x_1$; dall'equazione di stato: $PV_1 = nRT_1$; dunque $T_1 = PV_1/R = 264.74 \text{ K}$ Il gas è biatomico, dunque $mc_p = (7/2)nR$, sicché:

$$\Delta T = \frac{Q}{7/2R} = \frac{2Q}{7R} = 252.71$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 517.45 \text{ K}$$

$$\Delta V = nR\Delta T/P \text{ dunque } x_1 = \Delta V/S = nR\Delta T/SP = 0.5 \text{ m}$$

ESERCIZIO 6. Un pallone aerostatico consiste in un involucro, che non consente scambi di calore con l'esterno, con pareti di massa totale trascurabile che possono deformarsi senza sforzo. Il pallone, fissato al suolo con una corda, viene riempito con $V_i = 3 \text{ m}^3$ di aria, a pressione atmosferica e alla temperatura ambiente di $T_i = 25^\circ\text{C}$. Dopo che il pallone è stato chiuso, l'aria viene riscaldata, fino a che la forza ascensionale esercitata sulla corda è di $F = 5 \text{ N}$. Sapendo che l'aria può essere assimilata ad un gas perfetto di densità $\varrho_0 = 1.3 \text{ Kg/m}^3$ (a $T = 25^\circ\text{C}$), calcolare:

10 punti

1. la pressione all'interno del pallone alla temperatura finale;
2. il volume del pallone alla temperatura finale.
3. la temperatura finale.

Soluzione: Dall'equazione di stato dei gas perfetti: $P_i V_i / T_i = P_f V_f / T_f$. Siccome il pallone si può deformare senza sforzo ed è in equilibrio con l'aria all'esterno, $P_i = P_f = 1 \text{ Atm}$ e dunque $V_f = V_i T_f / T_i$.

La forza ascensionale è determinata dall'espansione del gas che avrà, nello stato finale, una densità $\varrho_f = m / V_f$, ma la massa del gas non varia, dunque $m = \varrho_0 V_i$ e quindi: $\varrho_f = \varrho_0 V_i / V_f$. La forza ascensionale, dalla legge di galleggiamento è pari alla forza peso del palloncino meno il peso del volume d'aria spostato $F = mg - \varrho_0 V_f g = \varrho_0 V_i g - \varrho_0 V_f g = \varrho_0 g V_i (1 - V_f / V_i)$ e quindi:

$$\frac{F}{\varrho_0 g V_i} + 1 = \frac{V_f}{V_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

e, di conseguenza, la temperatura finale sarà:

$$T_f = T_i \left(\frac{F}{\varrho_0 g V_i} + 1 \right) = 337.13 \text{ K}$$

e $V_f = V_i T_f / T_i = 3.39 \text{ m}^3$

ESERCIZIO 7. Due moli di gas perfetto monoatomico compiono un ciclo composto da una trasformazione isoterma tra lo stato 1 e lo stato 2, una trasformazione a volume costante (isocora) dallo stato 2 allo stato 3 ed una trasformazione adiabatica dallo stato 3 allo stato 1. Sapendo che: $V_1 = 15$ litri, $P_1 = 7$ Atm, $V_2 = 3V_1$; $P_3 = 1.12$ Atm, determinare:

10 punti

1. il lavoro compiuto dal ciclo;
2. la quantità di calore assorbita durante l'espansione isoterma
3. il rendimento del ciclo

Soluzione: Il lavoro è eseguito nelle trasformazioni isoterma e adiabatica:

$$L_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln 3 = P_1 V_1 \ln 3 = 115.35 \text{ l Atm}$$

dove per calcolare T_1 abbiamo usato l'equazione di stato : $T_1 = P_1 V_1 / nR = 640,24 \text{ K}$. Nella trasformazione adiabatica:

$$L_2 = -\Delta U = -mc_v(T_1 - T_3) = -nC_v(T_1 - T_3) = -\frac{3}{2}nR(T_1 - T_3) = -\frac{3}{2}(P_1 V_1 - P_3 V_2) = -81.9 \text{ l Atm}$$

Dove ancora, per trovare T_2 abbiamo usato l'equazione di stato: $T_3 = P_3 V_2 / nR = 307,32 \text{ K}$. La quantità di calore assorbita durante la trasformazione isoterma è pari al lavoro eseguito nella trasformazione perché è nulla la variazione di energia interna. Dunque il rendimento sarà

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{L_1 + L_2}{L_1} = 0,29$$

ESERCIZIO 8. Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente alla temperatura $T_1 = 27\text{ }^{\circ}\text{C}$, compie una trasformazione adiabatica reversibile che ne raddoppia il volume. Determinare:

1. la variazione di temperatura del gas;
2. il lavoro ottenuto durante la trasformazione.

8 punti

Soluzione: Sfruttiamo l'equazione che lega la temperatura al volume per le adiabatiche: $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$ essendo $\gamma = 5/3$ perché il gas è monoatomico:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{\gamma-1}$$

dunque

$$\Delta T = T_1 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) = -111.07\text{ K}$$

Il lavoro in una trasformazione adiabatica è

$$L = -\Delta U = -nc_v\Delta T = -\frac{3}{2}R\Delta T = 1384,49\text{ J}$$

ESERCIZIO 9. In un thermos ideale si mescolano del vapore acqueo a $100^{\circ}C$ e del ghiaccio fondente a $0^{\circ}C$. Determinare la composizione e temperatura dello stato finale se inizialmente ci sono :

1. 10 g di vapore e 54 g di ghiaccio;

2. 4 g di vapore e 54 g di ghiaccio.

10 punti

Si ricordano i calori latenti dell'acqua nei rispettivi processi: $\lambda_{ev} = 2260 \text{ kJ/kg}$, $\lambda_{fus} = 333 \text{ kJ/kg}$ e $C_{H_2O} = 4,18 \text{ kJ/(kg} \cdot K)$

Soluzione: Il calore che serve a fondere tutto il ghiaccio è: $Q_{tot} = m_g \lambda_{fus} = 17.98$. Il calore massimo ceduto dal vapore nel primo caso è $Q_{max} = m_v \lambda_{ev} + m_v C_{H_2O} (T_v - T_g) = 26,78 > 17.98$, dunque la composizione sarà sola acqua alla temperatura:

$$\frac{m_v \lambda_{ev} - m_g \lambda_{fus} + m_v C_{H_2O} T_v + m_g C_{H_2O} T_g}{C_{H_2O} (m_v + m_g)} = 305.89 \text{ K}$$

Nel secondo caso: $Q_{max} = m_v \lambda_{ev} + m_v C_{H_2O} (T_v - T_g) = 10.71 \text{ kJ} < 17.98$ dunque la composizione è acqua e ghiaccio. La massa di ghiaccio che si è trasformata in acqua è data da: $Q_{max} = \lambda_{fus} m_{H_2O}$ dunque $m_{H_2O} = Q_{max} / \lambda_{fus} = 32,16 \text{ g}$ che va aggiunta alla massa di vapore che si è interamente trasformata in acqua.

ESERCIZIO 10. Un cilindro rigido posto orizzontalmente è chiuso ad un'estremità da un pistone che può muoversi liberamente senza attrito. il cilindro è riempito da una mole di gas perfetto monoatomico in equilibrio con la pressione esterna di 1 Atm, alla temperatura $T_A = 23^\circ C$. Il pistone viene bloccato ed al gas viene fornita una quantità di calore $Q = 1952 \text{ J}$. Sia B il nuovo stato di equilibrio del gas. Tolto il blocco dal pistone, il gas si espande irreversibilmente con perdita di calore verso l'esterno e raggiunge un nuovo stato di equilibrio C, alla temperatura $T_C = 190^\circ C$. Per la trasformazione BC, calcolare

10 punti

1. La variazione di energia interna
2. il lavoro compiuto dal gas
3. il calore ceduto

Soluzione: Determiniamo la temperatura dello stato B: $Q = nc_v \Delta T$ dunque $\Delta T = Q/(nc_v)$. il gas è monoatomico, dunque $c_v = 3/2R$, sicché: $\Delta T = 156.52 \text{ K}$ e quindi $T_B = 179.52^\circ C$. La variazione di energia interna tra gli stati B e C vale:

$$\Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = 130.7 \text{ J}$$

e non dipende dalla trasformazione perché è una funzione di stato.

L'espansione avviene contro la pressione esterna costante, dunque, $L_{BC} = P_{ext}(V_C - V_B)$.

$$V_B = V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 0.024 \text{ m}^3$$

$$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = 0.038 \text{ m}^3$$

Comunque, sostituendo, visto che $P_C = P_A = P_{ext}$: $L_{BC} = nR(T_C - T_A) = 1387.77 \text{ J}$

La quantità di calore ceduta si ricava dal primo principio: $Q = \Delta U_{BC} + L_{BC} = 1518,47 \text{ J}$

ESERCIZIO 11. Si vuole realizzare un dispositivo capace di comprimere $V = 341 \text{ m}^3$ di aria da una a $P_f = 11$ atmosfere in un intervallo di tempo di un'ora. Approssimando la trasformazione come un'isoterma reversibile e considerando l'aria come un gas perfetto, valutare la potenza meccanica necessaria per il compressore

10 punti

Soluzione: La trasformazione è isoterma, dunque $PV = \text{cost} = nRT_0$, dunque: $PdV + VdP = 0$. Il lavoro compiuto sul gas dal compressore è:

$$L = -PdV = VdP = nRT_0 \int_{P_f}^{P_i} \frac{dP}{P} = P_0 V_0 \ln \frac{P_f}{P_i} = 82831.22 \text{ kJ}$$

La potenza del compressore è data da $dW = \frac{dL}{dt}$: $W = L/t = 23,01 \text{ kW}$

ESERCIZIO 12. Una mole di gas perfetto monoatomico esegue un ciclo ABCA nel quale la trasformazione AB è una isocora, BC è un'adiabatica reversibile e CA una isobara. Nel punto B la pressione vale $P_B = 10\text{bar}$ ed il volume $V_B = 2\text{ l}$, ed in C il volume è $V_C = 4V_B$. Disegnare il ciclo nel piano VP e determinare:

<i>punti</i>

1. le temperature T_B , T_C e T_A ;
2. le quantità di calore scambiate dal gas ed il rendimento del ciclo.

Soluzione: $T_B = P_B V_B / R = 243.9\text{K}$, le altre variabili le calcoliamo con l'equazione dell'adiabatica $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$ con $\gamma = 5/3$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \rightarrow T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{2/3} = 96,79\text{ K}$$

$$T_A = P_A V_A / R = P_C V_B / R = (T_C R / V_C)(V_B / R) = T_C (V_B / V_C) = T_C / 4 = 24.2\text{K}$$

Nella trasformazione AB si acquista calore $Q_{AB} = c_v(T_B - T_A) = 3/2R(T_B - T_A) = 2738.56\text{J}$;

Nella trasformazione CA si cede calore $Q_{CA} = c_p(T_A - T_C) = 5/2R(T_A - T_C) = -1508.06\text{J}$;

La trasformazione adiabatica non scambia calore. Il rendimento è $\eta = (Q_{AB} + Q_{AC})/Q_{AB} = 0,45$

ESERCIZIO 13. Un solido di massa $m = 0.12$ g, calore specifico medio $c = 0.38$ kJ/(kg · K), inizialmente alla temperatura $T_1 = 1174$ K è introdotto in un cilindro, a pareti rigide e adiabatiche, contenente $n = 3.5$ moli di gas perfetto biatomico alla temperatura di $T_2 = 587$ K. Il volume del solido e le sue variazioni con la temperatura sono trascurabili rispetto al volume del gas. Determinare:

<i>punti</i>

1. la temperatura finale di equilibrio del sistema;
2. la variazione di energia interna del sistema gas più solido;
3. la variazione di entropia del gas, del solido

Soluzione: La trasformazione è a volume costante, quindi il calore assorbito dal gas sarà a volume costante: $Q_G = nc_v(T_f - T_2) = n\frac{5}{2}R(T_f - T_2)$ e la quantità di calore ceduta dal solido è $Q_s = mc(T_1 - T_f)$. Siccome non c'è scambio di calore con l'esterno queste dovranno essere uguali. Dunque: $n\frac{5}{2}R(T_f - T_2) = -mc(T_f - T_1)$ da cui,

$$T_f = \frac{5nRT_2 + 2 * mcT_1}{5nR + 2mc} = 587.37 \text{ K}$$

Il sistema è adiabatico, quindi $\Delta U = 0$.

$$\Delta S_G = \int_{T_2}^{T_f} dQ/T = nc_v \ln \frac{T_f}{T_2} = 0.09 \text{ K}$$

$$\Delta S_s = mc \ln \frac{T_f}{T_1} = -0.03 \text{ K}$$

ESERCIZIO 14. In un recipiente adiabatico contenente $m_g = 231\text{g}$ di ghiaccio a $T_0 = 0^\circ\text{C}$ si introducono $m_v = 57.75\text{ g}$ di vapore acqueo a $T_1 = 100^\circ\text{C}$. Conoscendo i calori latenti di fusione ed evaporazione, rispettivamente $\lambda_g = 333\text{kJ/kg}$ e $\lambda_v = 2257\text{kJ/kg}$, ed il calore specifico dell'acqua $c = 4.18\text{kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ determinare la composizione finale del sistema e la sua temperatura finale T_F

<i>punti</i>

Soluzione: Il calore che può cedere il vapore è $Q_v = m_v\lambda_v = 135.42\text{ kJ}$ mentre per fondere tutto il ghiaccio e portarlo alla temperatura del vapore servirebbero $Q_g = m_g\lambda_g + m_g c(T_1 - T_0) = 172.73\text{ kJ}$. Dunque, quando tutto il vapore è tornato allo stato liquido, l'acqua è ad una temperatura inferiore a T_1

$$-m_v\lambda_v + m_v c(T_F - T_1) + m_g\lambda_g + m_g c(T_F - T_0) = 0$$

da cui

$$T_F = \frac{m_v\lambda_v - m_g\lambda_g + m_v c T_1 + m_g c T_0}{c(m_g + m_v)} = 342.38\text{ K}$$

ESERCIZIO 15. Una macchina termica ipotetica opera con un ciclo costituito da due isobare e due isocore. Il fluido operante è costituito da 1 kmole di gas perfetto monoatomico. Se il volume minimo e il volume massimo sono rispettivamente $V_{min} = 28 \text{ m}^3$ e $V_{max} = 112 \text{ m}^3$ e la pressione minima e la pressione massima sono rispettivamente $P_{min} = 1 \text{ atm}$ e $P_{max} = 4 \text{ atm}$, determinare:

<i>punti</i>

1. il rendimento della macchina
2. la temperatura minima e la temperatura massima raggiunta dal gas nel ciclo,
3. il rendimento di una macchina di Carnot operante tra queste due temperature.

(Suggerimento: disegnate il ciclo prima di iniziare il calcolo).

Soluzione: Il rendimento è dato dal rapporto tra il lavoro eseguito e la quantità di calore assorbita. Il lavoro è l'area del rettangolo: $L = (P_{max} - P_{min})(V_{max} - V_{min}) = 252000 \text{ l} \cdot \text{atm}$. Il calore viene assorbito nella prima isobara e nella prima isocora: $Q_1 = nc_p \Delta T = nc_p P_1 \Delta V / nR = 5/2 P_{max} (V_{max} - V_{min}) = 840000 \text{ l} \cdot \text{atm}$; $Q_2 = nc_v \Delta T = nc_v V_{max} \Delta P / nR = 3/2 V_{min} (P_{max} - P_{min}) = 126000 \text{ l} \cdot \text{atm}$. Da cui

$$\eta = \frac{L}{Q_1 + Q_2} = 0.26$$

Le temperature estreme si hanno per $T_{min} = P_{min} V_{min} / nR = 341.46 \text{ K}$ e $T_{max} = P_{max} V_{max} / nR = 5463.41 \text{ K}$. Il rendimento della macchina di Carnot dipende solo dalle temperature estreme

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 0.94$$

ESERCIZIO 16. Una massa di ossigeno O_2 alla temperatura di $T_i = 75\text{ }^\circ C$ è contenuta in un cilindro munito di pistone mobile con attrito trascurabile ed è in equilibrio con la pressione atmosferica esterna. Il volume iniziale è di $V_i = 4$ litri. Al gas viene sottratta una quantità di calore pari a $Q = 44\text{ cal}$ a pressione costante. Determinare:

10 punti

1. Il volume e la temperatura finale del gas
2. Il lavoro compiuto e la variazione di energie interna

(Si consiglia di riportare le unità nel SI)

Soluzione: $Q = nc_p \Delta T$ ove c_p è il calore specifico molare del gas che essendo biatomico vale $c_p = 7/2R$. Dunque $\Delta T = (T_f - T_i) = Q/(nc_p) = 2Q/(7nR)$

$$Q = \frac{7}{2} nR \Delta T$$

$$P \Delta V = nR \Delta T$$

dividendo membro a membro:

$$\Delta V = \frac{2Q}{7P} = -\frac{2 \cdot 44 \cdot 4.186\text{ J}}{7 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = -0.0005\text{ m}^3$$

e $V_f = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Dalla seconda, $\Delta T = P \Delta V / nR$; dall'equazione di stato nello stato iniziale: $P_i V_i = nR T_i$, dunque $nR = P_i V_i / (R T_i)$, quindi:

$$(T_f - T_i) = \frac{P \Delta V}{P_i V_i} T_i$$

da cui:

$$T_f = T_i \left(\frac{P}{P_i} \frac{\Delta V}{V_i} + 1 \right) = 304,64\text{ K}$$

$$\Delta U = nC_v \Delta T = 5/2 nR \Delta T = 5/2 * P_i V_i \Delta T / T_i \text{ e } L = Q - \Delta U.$$

ESERCIZIO 17. Una pentola a pressione, di volume $V = 15$ litri, è riempita di ossigeno O_2 a pressione atmosferica e a temperatura di $T_i = 28^\circ C$, e poi chiusa. La pentola è quindi posta a contatto di una sorgente di calore, in modo da ricevere $Q = 470$ J di energia termica, con una trasformazione irreversibile.

Trascurando la dilatazione termica della pentola ed usando l'approssimazione di gas perfetto, si calcoli:

punti

1. la variazione di energia interna del gas;
2. la temperatura finale e la pressione finale del gas;
3. la variazione di entropia del gas.

Soluzione: La pentola a pressione non cambia volume, dunque la trasformazione irreversibile è a volume costante, dunque il lavoro è nullo e la quantità di calore è pari alla variazione di energia interna: $\Delta U = Q$ Il numero di moli del gas è dato dalla legge dei gas perfetti:

$$n = \frac{P_i V_i}{RT_i} = 0.61 \text{ mol}$$

La variazione di energia interna è $\Delta U = nc_v \Delta T$ da cui si trova la temperatura finale

$$T_f = T_i + \frac{Q}{nc_v} = 338.25 \text{ K}$$

essendo $C_v = \frac{5}{2}R$ perché il gas è biatomico.

$$P_f = \frac{nRT_f}{V} = 1,13 \text{ atm}$$

La variazione di entropia dipende solo dagli stati estremi della trasformazione e vale

$$\Delta S = nc_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = 1,47 \text{ J/K}$$

ESERCIZIO 18. Una certa quantità di ossigeno O_2 alla temperatura $T_0 = 337$ K è contenuta in un cilindro con pistone di massa trascurabile in equilibrio con la pressione atmosferica. Il suo volume iniziale è $V_0 = 5$ ℓ . Al gas viene sottratta lentamente una quantità di calore $Q = 33$ cal.

<i>punti</i>

1. Calcolare il volume e la temperatura finale;
2. Calcolare il lavoro compiuto e la variazione di energia interna

Soluzione: La quantità di calore sottratta sarà data da $Q = nc_p\Delta T$ con $c_p = 7/2R$ perché il gas è biatomico. D'altra parte $n = P_0V_0/RT_0 = 0.18$ moli; Dunque

$$\Delta T = \frac{-Q}{nc_p} = \frac{-2Q}{7nR} = -26.36$$

da cui $T_f = T_0 + \Delta T = 310.64$. Il volume finale è dato da $V_f = nRT_f/P_0 = 4.59$ ℓ .
La variazione di energia interna è $\Delta U = nc_v\Delta T = 5/2nR\Delta T = -23.57$ cal ed il lavoro è $L = Q - \Delta U$

ESERCIZIO 19. Tre moli di un gas ideale biatomico si trovano inizialmente in equilibrio nello stato A. Tramite una espansione isobara reversibile, il gas si porta nello stato di equilibrio B. Successivamente, tramite una trasformazione adiabatica irreversibile in cui il gas varia la sua energia interna di $\Delta U_{BC} = -2650 \text{ J}$, il gas si porta nello stato C. Infine, per mezzo di una trasformazione isoterma reversibile in cui scambia con l'ambiente un calore $Q_{CA} = -3669 \text{ J}$, il gas ritorna nello stato A. Sapendo che il rapporto tra i volumi occupati dal gas negli stati A e C è $V_A/V_C = 0.2$, determinare:

<i>punti</i>

1. il valore T_B della temperatura del gas in B;
2. il diagramma del ciclo nel piano (V-P) di Clapeyron;
3. il rendimento η del ciclo;

Soluzione: La trasformazione CA a temperatura costante del gas perfetto non ha associata alcuna variazione di energia interna. Quindi abbiamo che

$$Q_{CA} = L_{CA} = nRT_C \ln(V_A/V_C)$$

Segue: $T_C = T_A = Q_{CA}/(nR \ln(V_A/V_C)) = 91.44 \text{ K}$

La trasformazione adiabatica irreversibile è caratterizzata da $Q_{BC} = 0$ e $\Delta U_{BC} = nc_v(T_B - T_C)$, essendo $c_v = 5/2$ perché il gas è biatomico. Dunque $T_B = T_C - [\Delta U_{BC}/(nc_v)] = 133.96 \text{ K}$

Per calcolare il rendimento deduciamo il calore assorbito $Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) = 3710.08 \text{ J}$. Per quel che riguarda il lavoro eseguito: $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$;

$$\begin{cases} L_{AB} = nR(T_B - T_A) = 1060.02 \\ L_{BC} = -\Delta U_{BC} = 2650 \\ L_{CA} = Q_{CA} = -3669 \end{cases}$$

$$\eta = L/Q_{AB} = 0,01$$

ESERCIZIO 20. Una mole di un gas perfetto, inizialmente nello stato A ($T_A = 252$ K), compie una trasformazione isoterma fino a raddoppiare il proprio volume, una trasformazione isocora che lo porta ad una temperatura T_C , ed infine una adiabatica che lo riporta in uno stato finale F in cui il volume è uguale a quello iniziale. Se lo stato finale coincide con quello iniziale:

<i>punti</i>

1. disegnare le trasformazioni nel piano di Clapeyron
2. quale sarà la temperatura T_C quando il gas è monoatomico e quale se biatomico.
3. In questa condizione (stato F = stato A) calcolare il rendimento del ciclo risultante nei due casi.

Soluzione: Lungo l'adiabatica: $T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$, ovvero:

$$\frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_A} \right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}$$

Dunque, se il gas è monoatomico, $T_C = T_A \cdot 2^{1-\gamma} = 158.75$ K, altrimenti $T_C = 190.98$ K

Per calcolare il rendimento, consideriamo che nell'adiabatica CA non si scambia calore, nella isocora BC si cede il calore: $Q_{BC} = n c_v (T_C - T_B) = n c_v (T_C - T_A)$ e nell'isoterma si acquista il calore: $Q_{AB} = L_{AB} = n R T_A \ln V_B / V_A = n R T_A \ln 2$.

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{(2N+1)(T_C - T_A)}{2T_A \ln 2}$$

dove N è il numero di atomi che compongono la molecola. Quindi, $\eta_{mono} = 0.33$ e $\eta_{bi} = 0.27$.

ESERCIZIO 21. Un gas perfetto biatomico si espande liberamente raddoppiando il suo volume da uno stato A di equilibrio ($T_A = 322$ K e $P_A = 2.00$ atm) fino allo stato B. Il gas poi subisce una compressione adiabatica irreversibile (nella quale viene compiuto il lavoro $|L_{BC}| = 84977$ J) e raggiunge un nuovo stato C con $P_C = 15P_A$ e $T_C = 1344.59$ K. Successivamente, il gas viene compresso in modo irreversibile, rimanendo in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_C con la quale scambia una quantità di calore pari a $Q_{CD} = -110$ kJ, fino a un nuovo stato di equilibrio D. Infine una trasformazione adiabatica reversibile riporta il gas nello suo stato iniziale A.

<i>punti</i>

1. determinare i parametri degli stati A, B, C, D
2. calcolare il lavoro scambiato nel ciclo ABCDA e valutare il COP ($COP = |Q_{ass}|/|L_{tot}|$) se il ciclo è frigorifero o l'efficienza in caso contrario.

Soluzione: Per ricavare i parametri di stato è necessario ricavare prima il numero di moli. Il lavoro nella trasformazione adiabatica BC è dato da $L_{BC} = nc_v(T_C - T_B)$ dunque: $n = |L_{BC}|/c_v(T_C - T_B) = 4$ mol;

- Stato A: $P_A = 2$ atm; $T_A = 322$ K; $V_A = nRT_A/P_A = 52.83 \cdot 10^{-3} m^3$
- stato B: $V_B = 2V_A = 105,66 \cdot 10^{-3} m^3$; $P_B = P_A/2 = 1$ atm; $T_B = T_A$ perché AB è una espansione libera e la temperatura non cambia ($\Delta U = 0$).
- stato C: $T_C = L_{BC} = T_A + L_{BC}/(nc_v) = 1344.59$ K; $P_C = 15 \cdot P_A = 30$ atm; $V_C = nRT_C/P_C = 14.71 \cdot 10^{-3} m^3$
- Stato D: $T_D = T_C$. La trasf. DA è un'adiabatica reversibile, dunque: $T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ per cui: $V_D = V_A(T_A/T_C)^{1/(\gamma-1)} = 1.48 \cdot 10^{-3} m^3$, avendo posto $\gamma = 7/5$ perché il gas è biatomico.

Il calore viene scambiato solo nella trasf. isoterma CD, perché le altre sono un'espansione libera e due adiabatiche. Quindi $Q_{Tot} = Q_{CD} = -110$ kJ. Questa quantità è anche pari al lavoro eseguito. Dunque si tratta di un ciclo frigorifero di efficienza $COP = Q_{ass}/L = 0$

ESERCIZIO 22. Una mole di gas perfetto biatomico, che si trova inizialmente alla pressione P_A e volume $V_A = 1.3 \cdot 10^{-2} m^3$, si espande irreversibilmente, in condizioni adiabatiche contro la pressione atmosferica esterna $P_0 = 1.013 \cdot 10^5 Pa$, fino a raggiungere l'equilibrio ad un volume $V_B = 2.4 \cdot 10^{-2} m^3$. Il gas raggiunge poi lo stato C di equilibrio mediante una trasformazione isoterma reversibile durante la quale cede la quantità di calore di modulo $|Q_{BC}| = 6790 J$. Una generica trasformazione reversibile CA, nella quale il gas compie il lavoro $L_{CA} = 6500 J$, lo riporta allo stato iniziale A. Calcolare:

<i>punti</i>

1. le temperature T_A e T_B
2. il volume V_C
3. la quantità di calore scambiata durante la trasformazione CA

Soluzione: Il punto B è in equilibrio con la pressione atmosferica P_0 e dall'equazione di stato: $T_B = P_0 V_B / nR = 292.56 K$. In AB non c'è scambio di calore e la pressione esterna è costante, dunque: $L_{AB} = -\Delta U_{AB} = 1114.3 J$.

$L_{AB} = P_0(V_B - V_A) = -nc_v(T_B - T_A)$ Dunque $T_A = T_B + P_0(V_B - V_A)/nc_v = 346.2 K$.

Nella trasformazione BC, $L_{BC} = Q_{BC}$. $L_{BC} = nRT_B \ln(V_C/V_B)$. La quantità di calore è ceduta, quindi ha segno negativo: $Q_{BC} = -6790 J$ dunque:

$$V_C = V_B e^{\frac{Q_{BC}}{nRT_B}} = 15 \cdot 10^{-2} m^3$$

La quantità di calore totale scambiata è: $Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = Q_{BC} + Q_{CA}$ e sarà uguale al lavoro eseguito, perché in un ciclo $\Delta U = 0$. Dunque: $Q_{CA} = L_{tot} - Q_{BC} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} - Q_{BC}$ ma $L_{BC} = Q_{BC}$ quindi: $Q_{CA} = L_{AB} + L_{CA} = 7614,3 J$

ESERCIZIO 23. Due moli di un gas perfetto monoatomico hanno la pressione iniziale $P_1 = 3 \text{ atm}$ e il volume iniziale $V_1 = 3 \text{ l}$. Al gas viene fatto percorrere il seguente ciclo quasistatico (reversibile): viene fatto espandere isotermicamente finché il suo volume non è diventato $V_2 = 6 \text{ l}$, poi viene riscaldato a volume costante fino ad avere la stessa pressione iniziale e poi viene compresso a pressione costante fino a tornare allo stato iniziale.

<i>punti</i>

1. Si rappresenti questo ciclo su un diagramma PV.
2. Si calcolino il calore fornito al gas e il lavoro compiuto dal gas durante ogni parte del ciclo.
3. Si trovino le temperature T_1 , T_2 e T_3 .

Soluzione: Nell'isoterma: $P_1 V_1 = P_2 V_2$, $T_1 = P_1 V_1 / nR = 54.88 \text{ K}$ ed il lavoro è $L_{12} = nRT_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 6.24 \text{ l atm}$ e la quantità di calore è pari al lavoro.

A volume costante il lavoro è nullo e $P_2/P_3 = T_2/T_3$ ma $P_3 = P_1$ e $T_2 = T_1$ dunque, $P_2/P_1 = T_1/T_3$, e quindi: $T_3 = 2T_1 = 109,76 \text{ K}$. $Q_{23} = nc_v \Delta T = 13,5 \text{ l atm}$.

Nella isobara, $L = P_1 \Delta V = P_1 (V_3 - V_1)$ ma $V_3 = V_2$ dunque: $L = 9$, $Q_{31} = nc_p \Delta T = 22,5 \text{ l atm}$.

ESERCIZIO 24. Un vaso Dewar di rame di massa $m_d = 145 \text{ g}$ contiene $m_{H_2O} = 200 \text{ g}$ di acqua, entrambi sono inizialmente alla temperatura di $T_i = 17^\circ\text{C}$. Un cilindro di rame di massa $m_{Cu} = 253 \text{ g}$ molto caldo viene immerso nell'acqua, facendola bollire e $m_v = 6 \text{ g}$ di acqua evaporano. La temperatura finale vale 100°C , determinare:

10 punti

1. Le quantità di calore cedute all'acqua ed al vaso;
2. La temperatura iniziale del cilindro

Si ricordano il calore latente dell'acqua nel processo di evaporazione $\lambda_{eva} = 2260 \text{ kJ/kg}$ ed i calori specifici $c_{H_2O} = 4,18 \text{ kJ/kg}$ e $c_{Cu} = 0,39 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$

Soluzione: Sia T_c la temperatura iniziale del cilindro e T_f quella finale di tutto il sistema. Utilizzando i calori specifici di rame ed acqua ed il calore latente di evaporazione dell'acqua, possiamo scrivere le quantità di calore assorbite dal vaso e dall'acqua:

$$Q_{H_2O} = m_{H_2O}c_{H_2O}(T_f - T_i) + m_v\lambda_{eva} = 82.95$$

$$Q_d = m_dc_{Cu}(T_f - T_i) = 4.69$$

La somma di questi calori assorbiti è ceduta dal cilindro di rame:

$$-Q_{Cu} = -m_{Cu}c_{Cu}(T_f - T_c) = Q_{H_2O} + Q_d$$

da cui

$$T_c = T_f + \frac{Q_{H_2O} + Q_d}{m_{Cu}c_{Cu}} = 988,21^\circ\text{C}$$

ESERCIZIO 25. In un cilindro adiabatico di sezione $S = 784 \text{ cm}^2$ può scorrere senza attrito un pistone di massa trascurabile. Nel cilindro sono sistemate 2 moli di un gas perfetto monoatomico e piccole quantità di acqua e ghiaccio. Inizialmente sul pistone è posta una massa $m = 44 \text{ kg}$ ed il sistema è all'equilibrio termodinamico. Ad un certo istante la massa viene rimossa ed il sistema raggiunge un nuovo stato di equilibrio (espansione libera) in cui sono ancora presenti acqua e ghiaccio. Calcolare la quantità di acqua che si solidifica durante la trasformazione (trascurare il volume occupato da acqua e ghiaccio).

($\lambda = 335 \text{ kJ/kg}$; $1 \text{ atm} = 101352 \text{ N/m}^2$)

Soluzione: Il sistema esegue una espansione irreversibile in cui la temperatura iniziale e finale sono quella di fusione del ghiaccio: $T_0 = 273.16 \text{ K}$, dunque la variazione di energia interna è nulla. Il Lavoro compiuto dal sistema sarà pari alla quantità di calore sottratta.

Lo stato iniziale sarà a pressione $P_i = P_{atm} + mg/S$ dunque occupa un volume $V_i = nRT_0/P_i = 0.0425 \text{ m}^3$. La trasformazione avviene alla pressione atmosferica fino ad un volume: $V_f = nRT_0/P_{atm} = 0.0448$. Dunque il lavoro compiuto dal sistema sarà $L = P_{atm}(V_f - V_i) = 233.11 \text{ J}$, pari alla quantità di calore sottratta, che, essendo la temperatura costante andrà tutta a congelare l'acqua: $L = m_g \lambda$; quindi, $m = L/\lambda = 0,696 \text{ g}$

<i>punti</i>

ESERCIZIO 26. Un gas biatomico compie un ciclo di Ericsson ABCDA formato dalle isobare AB a pressione P_1 e CD a pressione P_2 e dalle isoterme BC alla temperatura $T_1 = 407K$ e DA alla temperatura $T_2 = 324K$. Sapendo che il rapporto fra le pressioni è $P_1/P_2 = 4$ calcolare il rendimento del ciclo.

Soluzione: Il rendimento è dato da: $\eta = \frac{Q_{Ass} - |Q_{ced}|}{Q_{Ass}}$.

Il calore è assorbito nelle trasformazioni AB e BC, e ceduto nelle altre due.

$$\begin{cases} Q_{AB} = nc_P(T_1 - T_2) = \frac{7}{2}nR(T_1 - T_2) \\ Q_{BC} = nRT_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \\ Q_{CD} = -nc_P(T_1 - T_2) = -\frac{7}{2}nR(T_1 - T_2) \\ Q_{DA} = -nRT_2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \end{cases}$$

Dunque

$$\eta = \frac{T_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}{T_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \frac{7}{2}(T_1 - T_2)} = 0.66$$

<i>punti</i>

ESERCIZIO 27. In un cilindro rigido adiabatico dotato di un pistone di massa trascurabile e superficie $A = 0.024 \text{ m}^2$ libero di scorrere e pieno d'aria a temperatura ambiente $T_0 = 300 \text{ K}$, viene posto un cilindretto di rame di massa $m = 49 \text{ g}$ a temperatura $T_c = 113^\circ \text{C}$. Il sistema raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura di $T_f = 46^\circ \text{C}$ ed il pistone si alza di $h = 4.52 \text{ cm}$. Calcolare la variazione di energia interna dell'aria sapendo che il calore specifico del rame è $c = 385 \text{ J/(Kg} \cdot \text{K)}$.

<i>punti</i>

Soluzione: Il calore ceduto dal cilindretto di rame è $Q = mc\Delta T = -1263.96 \text{ J}$ uguale e contrario al calore Q_a assorbito dall'aria. Il lavoro compiuto dall'aria è contro la pressione atmosferica, quindi: $L = P_{atm}\Delta V = P_{atm}Ah = 109.89 \text{ J}$ e, dal primo principio: $\Delta U = Q_a - L = 1154.07 \text{ J}$

ESERCIZIO 28. Un forno solare consiste di uno specchio riflettente curvo, che focalizza la luce del sole sull'oggetto da riscaldare. L'intensità della radiazione solare nel posto dov'è situato il forno è di $W = 654 \text{ W/m}^2$ e la superficie dello specchio è di $S = 1 \text{ m}^2$. Assumendo che il 40% dell'energia incidente sullo specchio sia trasformata in energia termica, quanto tempo è necessario per vaporizzare mezzo litro d'acqua, inizialmente a $T_0 = 20^\circ\text{C}$. (Il calore latente di vaporizzazione dell'acqua è di $\lambda_e = 2.26 \text{ MJ/Kg}$ ed il suo calore specifico è 4.186 KJ/(Kg K))

<i>punti</i>

Soluzione: La potenza disponibile per riscaldare è $P = 0.4 * W * S$; la quantità di calore necessaria a far evaporare l'acqua è quella che serve a portarla a temperatura di ebollizione + quella che serve a farla evaporare: $Q = mc * (T_e - T_0) + m\lambda_e$, da cui : $W = Q/t$ e quindi $t = Q/W = 4959,63 \text{ s}$

ESERCIZIO 29.

Calcolare la quantità di ghiaccio che viene sciolta in un'ora da una macchina di Carnot di potenza $P = 4W$ e rendimento $\eta = 0.5$ che usa del ghiaccio fondente come sorgente a temperatura più bassa. Quanto vale la temperatura superiore? ($\lambda_{fus} = 333kJ/kg$)

<i>punti</i>

Soluzione: Il lavoro compiuto dalla macchina è $L = Pt = 14400 J$ ed il rendimento è $\eta = L/Q_{ass}$. Dunque $Q_{ass} = L/\eta = 28800 J$. Il calore necessario a fondere l'acqua è il calore ceduto e $L = Q_{ass} - |Q_{ced}|$; dunque $|Q_{ced}| = Q_{ass} - L = 14400$ e questo va tutto a sciogliere il ghiaccio: $Q_{ced} = m\lambda_{fus}$. Dunque $m = Q_{ced}/\lambda_{fus} = 0.04 kg$

Il rendimento di un macchina di Carnot dipende solo dalle temperature secondo la $\eta = 1 - T_{inf}/T_{sup}$ dunque, essendo $T_{inf} = 273.16K$, $T_{sup}(1 - \eta) = T_{inf}$ e quindi: $T_{sup} = T_{inf}/(1 - \eta) = 546.32 K$.