

Sistemi e modelli matematici

Acquisizione dati in Fisica

Definizioni

- Un sistema è un insieme di elementi interconnessi in cui si possono distinguere delle grandezze che possono variare nel tempo, dette *variabili*.
- Si possono distinguere le variabili di ingresso o *cause* e le variabili di uscita o *dipendenti* o anche *effetti*.
- Un sistema in cui le variabili siano state divise in ingresso e uscita si dice *orientato*.
- Nei sistemi soggetti a controllo, le variabili di ingresso possono essere anche divise in *manipolabili* e *non manipolabili* o disturbi.

Schemi a Blocchi

- È molto utile rappresentare i sistemi come blocchi e le loro variabili come collegamenti dei blocchi con l'ambiente esterno o altri sistemi.
- I collegamenti sono contraddistinti con frecce entranti o uscenti dal sistema.
- Lo schema a blocchi è uno schema in cui più sottosistemi collegati fra loro a costituire un sistema complesso sono rappresentati come blocchi interconnessi. Questo dà un'immediata visione delle relazioni di causa-effetto.

Modelli matematici

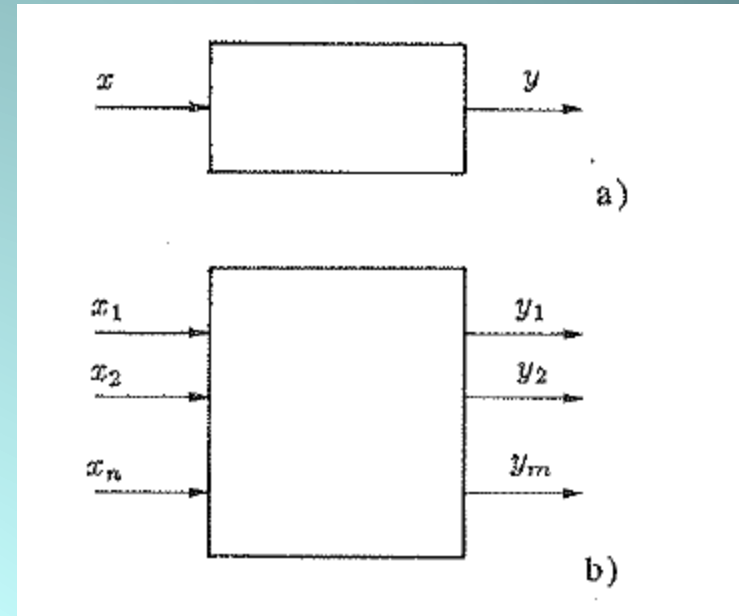
- Si dice che si conosce il *modello matematico* di un sistema quando si dispone delle equazioni e dei parametri che permettono di determinare l'andamento nel tempo delle uscite, noto quello degli ingressi.
- Nei modelli matematici le variabili sono numeri reali che sono le misure in prefissate unità e le funzioni, le relazioni che legano queste misure alla variabile reale tempo.

Modello statico/caratteristica statica

- Quando gli ingressi sono costanti per lunghi periodi, è sufficiente ricorrere ad un modello matematico *statico* o *puramente algebrico* che descrive il legame fra il valore costante degli ingressi e quelli delle uscite quando il sistema abbia raggiunto uno *stato di equilibrio* o di *regime stazionario*
- Un modello statico è accettabile anche quando la variazione degli ingressi è sufficientemente lenta rispetto ai tempi di risposta propri del sistema
- La rappresentazione grafica del modello è la *caratteristica statica* ingresso-uscita.

Modelli a molte variabili

- Mentre il modello statico del sistema della figura a) è dato dalla sola funzione $y=f(x)$, il modello del sistema in b) sarà costituito dall'insieme delle relazioni $y_i=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $i=1\dots m$.
- Se i requisiti di precisione lo consentono si può effettuare una linearizzazione per i valori nominali degli ingressi ottenendo delle equazioni lineari delle variazioni: $\Delta y_i = \sum_j a_{ij} \Delta x^j$ $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right|_{x_k=X_k}$



$$\Delta y_i := y_i - Y_i = y_i - f_i(X_1, \dots, X_n) \quad (i = 1, \dots, m),$$
$$\Delta x_j := x_j - X_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

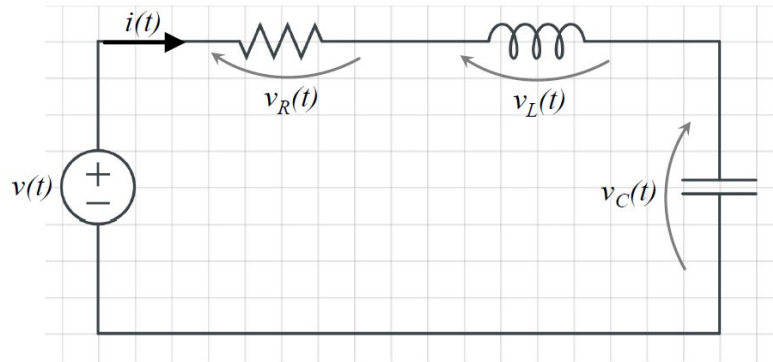
Modelli dinamici

- Per descrivere il comportamento di un sistema nel regime transitorio c'è bisogno di un modello matematico che leghi non solo le variabili di ingresso e quelle di uscita ma anche le loro derivate rispetto al tempo: il *modello dinamico*.
- Lo studio del regime transitorio consiste nel determinare l'andamento delle uscite (la *risposta*) in relazione agli ingressi dati (l'*eccitazione*), partendo da una situazione di quiete in cui gli ingressi e le uscite sono nulli.
- Il valore 0 di una variabile può essere un opportuno riferimento rispetto al quale viene misurata e dunque la condizione di quiete è un qualunque stato di equilibrio.

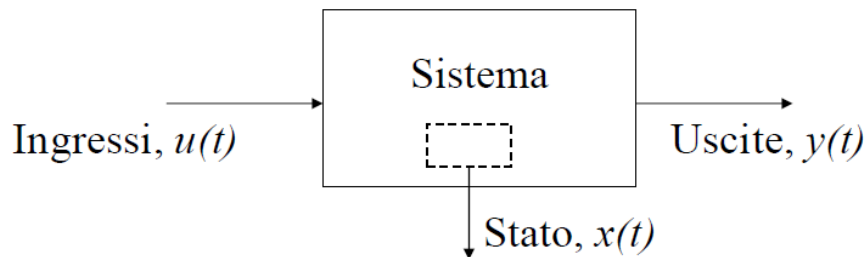
Linearità e stazionarietà

- Un sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti ovvero quando, essendo inizialmente in quiete, per due qualunque insiemi di segnali in ingresso $x_1'(t) \dots x_n'(t)$ e $x_1''(t) \dots x_n''(t)$ e di risposte corrispondenti, $y_1'(t) \dots y_m'(t)$ e $y_1''(t) \dots y_m''(t)$, per qualunque k_1 e k_2 , agli ingressi $k_1 x_1'(t) + k_2 x_1''(t), \dots, k_1 x_n'(t) + k_2 x_n''(t)$ corrispondono le uscite $k_1 y_1'(t) + k_2 y_1''(t), \dots, k_1 y_m'(t) + k_2 y_m''(t)$
- Un sistema si dice stazionario quando soddisfa la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti, cioè quando per ogni costante reale positiva T , agli ingressi $x_1(t-T) \dots x_n(t-T)$ corrispondono le uscite $y_1(t-T) \dots y_m(t-T)$
- La linearità può essere ottenuta localmente come visto precedentemente nei sistemi statici.
- Un sistema Lineare e Stazionario viene indicato come LSI (Linear and Shift Invariant) o LTI (Lineare Tempo Invariante).

Esempio di sistema LTI, circuito RLC

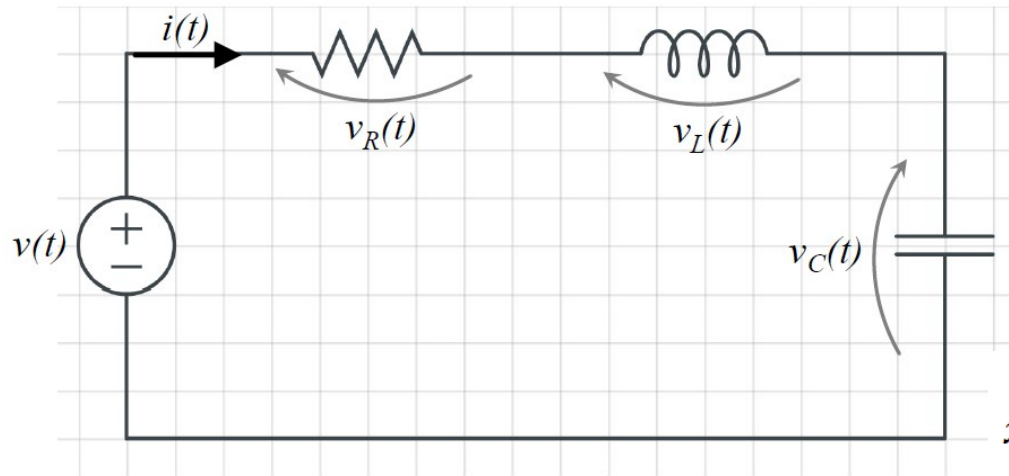


$$u(t) = v(t)$$
$$y(t) = v_C(t)$$



- $v(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + v_C$
- $v_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
- $\Rightarrow i(t) = C\dot{y}$ e, sostituendo:
- $u(t) = LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y$
- Abbiamo ottenuto un modello ingresso-uscita (IU) che è equivalente ad un sistema ISU (ingresso-stato-uscita)

Modello ISU



$$\begin{aligned} u(t) &= v(t) & x_1(t) &= v_C(t) \\ y(t) &= v_C(t) & x_2(t) &= i(t) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$y = x_1$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0)x$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

- Le variabili di stato sono quelle coinvolte nell'operazione di derivazione.

Avrei potuto scegliere: $x_1 = v_C$ $x_2 = v_R$ e avrei ottenuto una rappresentazione diversa ma equivalente

Modelli IU e ISU

- Per scrivere il modello di un sistema si possono utilizzare due tipi di rappresentazione: IU e ISU;
- Queste due rappresentazioni, per un dato modello sono equivalenti.
- La rappresentazione ISU, oltre a presentare altri vantaggi che vedremo in seguito, permette anche di arrivare più facilmente alla scrittura del modello.

Inoltre:

- Una volta che si sono assegnati gli ingressi e le uscite di un dato sistema, la sua rappresentazione IU è unica.
- Viceversa, poiché la scelta delle variabili di stato non è univoca, esistono infinite rappresentazioni ISU, tutte equivalenti tra loro.

Sistemi LTI

Matrici caratteristiche dei sistemi lineari:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \leftarrow \text{N.B.: } \mathbf{quadrata}$$
$$B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$
$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}$$
$$D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & \dots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

Sistemi dinamici **lineari e stazionari** (o **lineari tempo-invarianti, LTI**):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Classificazione in base al numero di I/O

- Sistemi Multi-Ingresso Multi-Uscita (o Multi-Output, MIMO) $m > 1$ e $r > 1$
- Sistemi Singolo-Ingresso Multi-Uscita (SIMO) $m > 1$ e $r = 1$
- Sistemi Multi-Ingresso Singola-Uscita (MISO) $m = 1$ e $r > 1$
- Sistemi Singolo-Ingresso Singola-Uscita (SISO) $m = 1$ e $r = 1$

Classificazione dei modelli

■ Lineare

Stazionario

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

→ o Lineare Tempo-Invariante (LTI)

Non Stazionario

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$
continue a tratti

■ Non lineare

Stazionario

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Non Stazionario

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Sistemi con e senza memoria

- Un sistema il cui stato dipenda dallo stato degli ingressi a tempi precedenti è detto con memoria.
- Per esempio, una capacità è un sistema con memoria quando si consideri l'input la corrente e l'output la tensione:
$$V(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$
- Una resistenza, invece è un sistema senza memoria

Causalità e stabilità

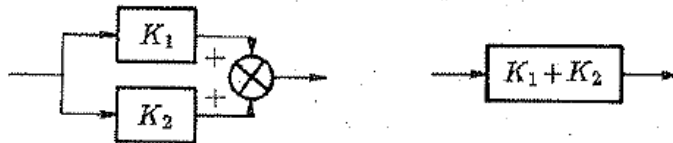
- Un sistema le cui uscite dipendano solo dagli ingressi al tempo presente o passato è detto causale.
- Un esempio di sistema non causale è $y(t)=x(t+1)$
- I sistemi con memoria sono tutti causali
- Un sistema è stabile quando i suoi ingressi portano ad un'uscita che non diverge
- Se gli ingressi di un sistema stabile sono limitati, allora le uscite saranno limitate.

Regole di riduzione dei blocchi

1. Riduzione di blocchi in cascata:



2. Riduzione di blocchi in parallelo:



3. Scambio di giunzioni sommantanti:



4. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a monte di un blocco:



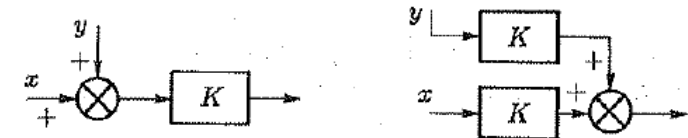
5. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a valle di un blocco:



6. Spostamento di una giunzione sommannte a monte di un blocco:



7. Spostamento di una giunzione sommannte a valle di un blocco:



8. Eliminazione di un anello:

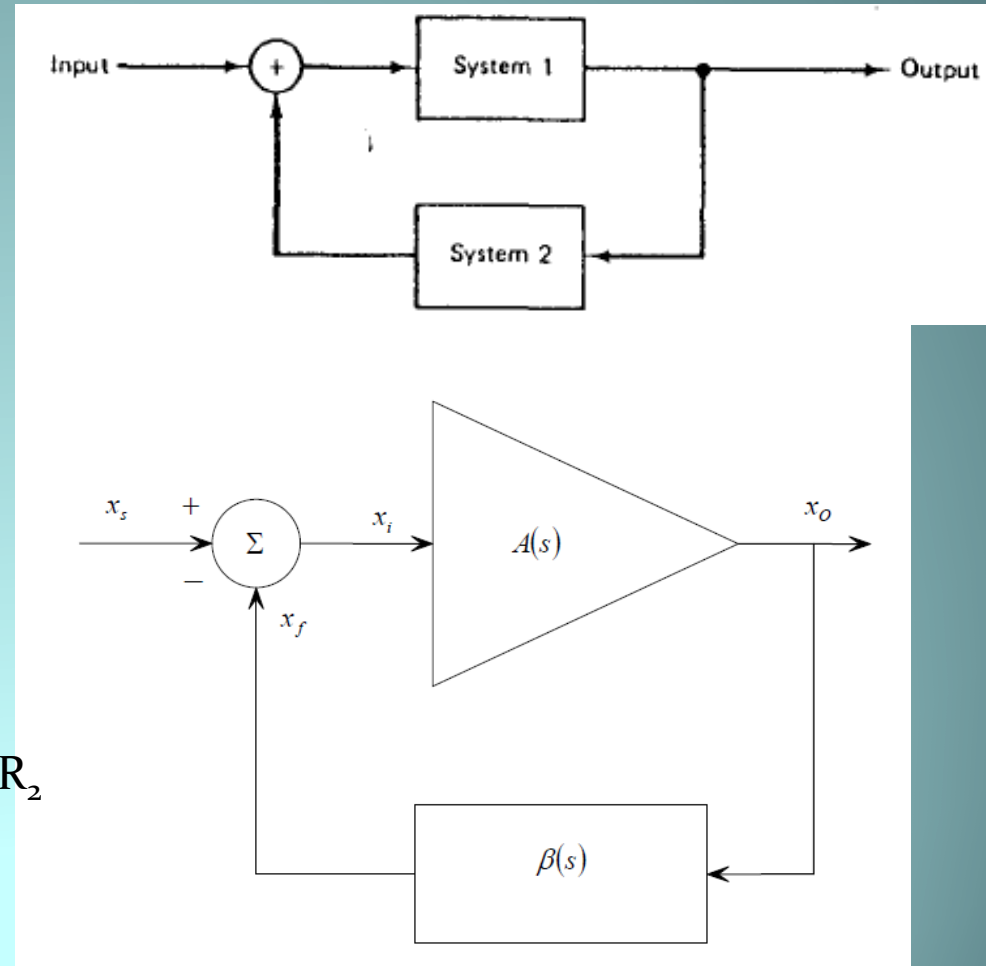


Interconnessione ad anello

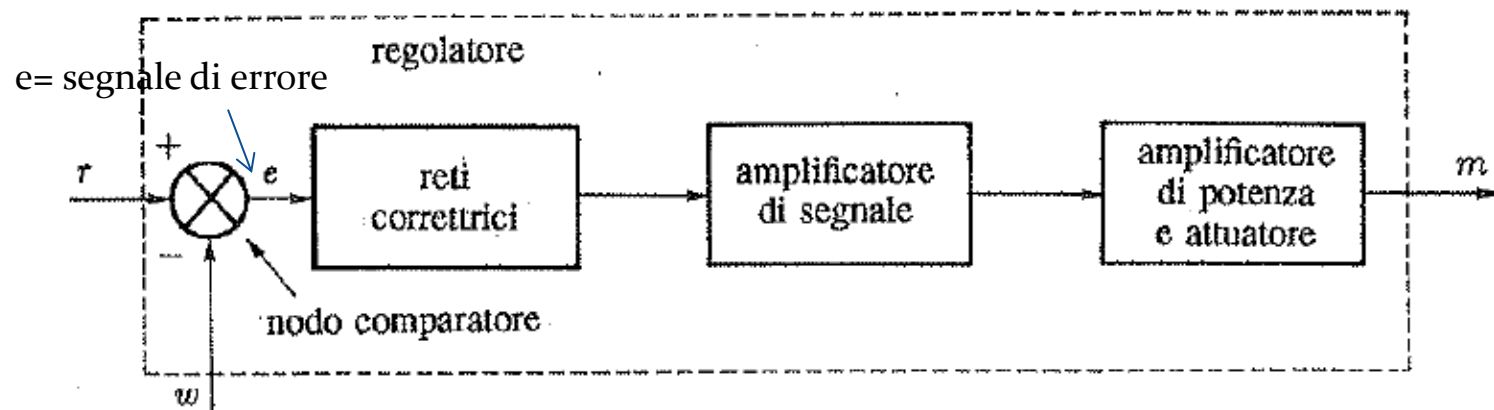
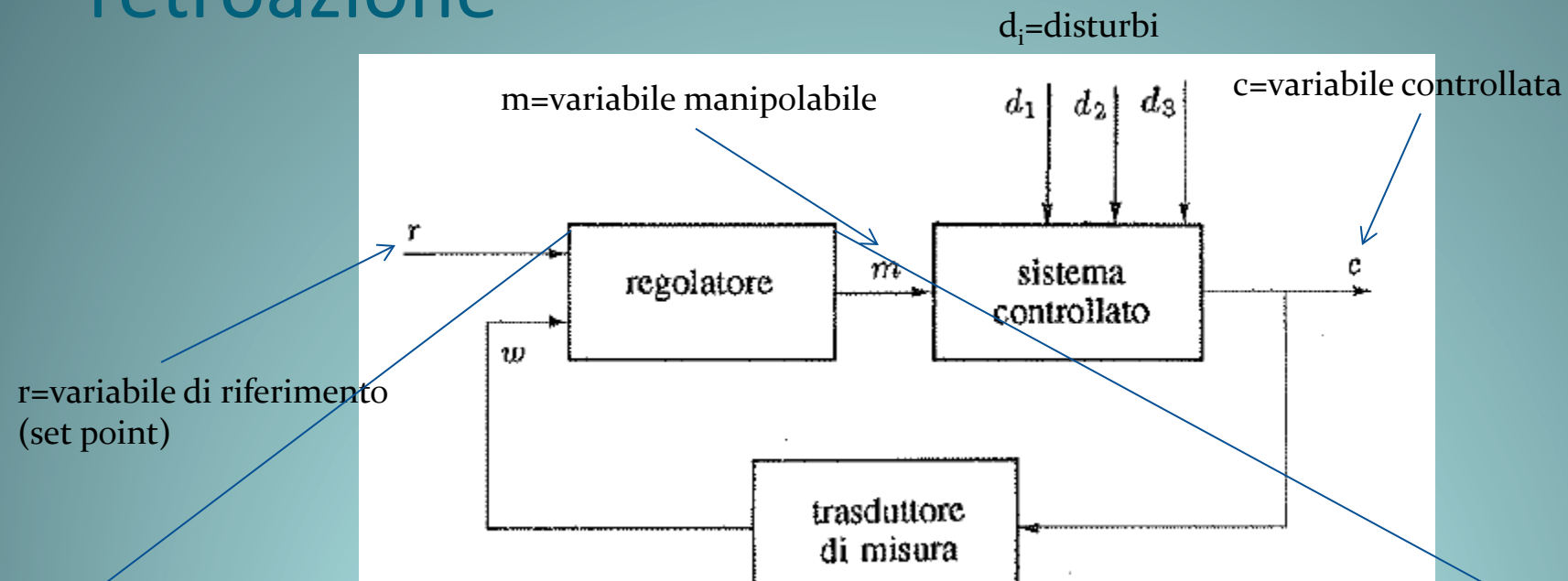
- Un'importante configurazione è l'interconnessione ad anello o *feedback*
- L'amplificatore invertente è un tipico esempio di sistema con feedback;

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_s - \beta x_o; & x_s &= i_i \\
 x_o &= A x_i = A(x_s - \beta x_o) & i_i &= v_i / R_1 \\
 \frac{x_o}{x_s} &= \frac{A}{1 + \beta A} & x_f &= i_f = -v_o / R_2 \\
 & & A &= \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{v_o}{i_i} &= \frac{A}{1 + \beta A} = \frac{1}{\beta} \\
 &= -R_2 \\
 \frac{v_o}{v_i} &= -\frac{R_2}{R_1}
 \end{aligned}$$



Schema a blocchi di un apparato in retroazione

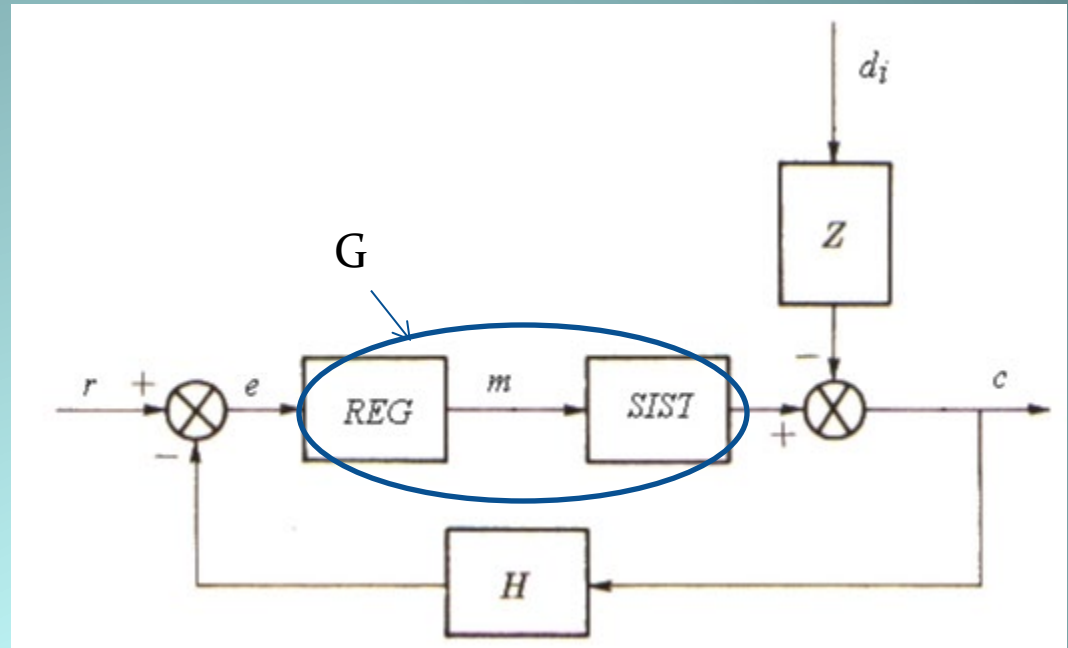


$$c(t) = Ge(t) - Zd_i(t) =$$

$$= \frac{G}{1 + GH} r(t) - \frac{Z}{1 + GH} d_i(t)$$

Se $GH \gg 1$, l'effetto dei disturbi è molto mitigato, infatti:

$$c(t) \cong \frac{1}{H} r(t) - \frac{Z}{GH} d_i(t) \approx \frac{1}{H} r(t)$$



Retroazione e instabilità

- L'interconnessione ad anello, ha un effetto positivo sulla robustezza della regolazione rispetto all'incertezza del sistema regolato (diminuisce l'effetto dei disturbi);
- Il sistema in retroazione ha un punto debole che si evidenzia quando si considerano modelli dinamici: l'instabilità.
- Se per esempio vogliamo smorzare il moto di un pendolo con un sistema reazionato:
 - Leggiamo la posizione (variabile di uscita, per es una tensione ai capi di una capacità; la posizione di riferimento è lo zero)
 - Riportiamo la tensione letta ad un attuatore che spinge il pendolo nella direzione opposta (retroazione)
 - Se non si applica l'attuazione perfettamente in controfase, o se la correzione è eccessiva, il pendolo aumenterà l'ampiezza dell'oscillazione invece di diminuire (instabilità).

Modelli matematici di sistemi dinamici

Se definiamo l'operatore derivata temporale i -esima $D^{(i)}$, e il suo inverso integrazione come $1/D^{(i)}$ possiamo definire i modelli matematici di sistemi dinamici. Per i sistemi elettrici in figura:

a) $v(t) = Ri(t)$

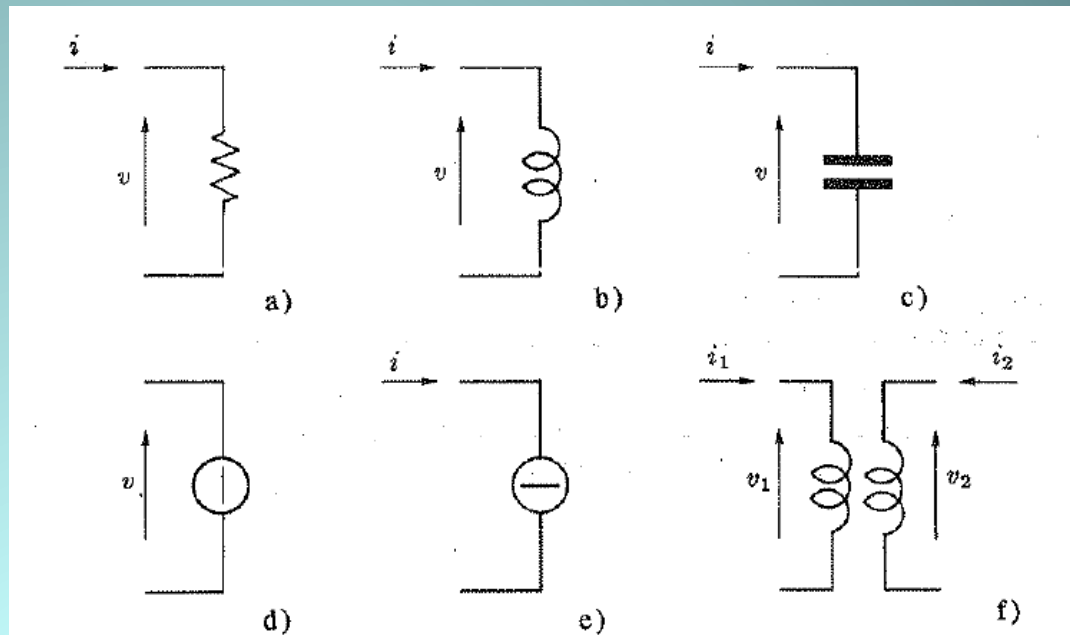
b) $v(t) = L D i(t)$

c) $v(t) = (1/C)(1/D) i(t)$

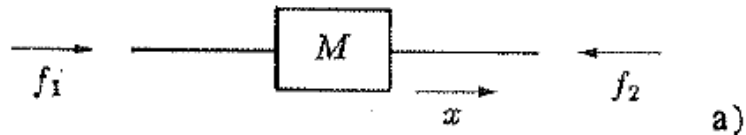
d) $v(t) = V_o$

e) $i(t) = I_o$

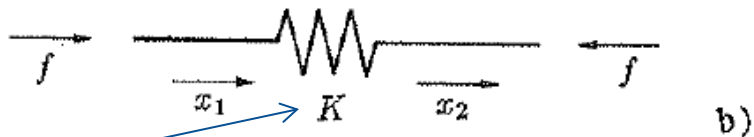
f) $v_1(t) = N_1/N_2 v_2(t)$



Modelli di sistemi meccanici

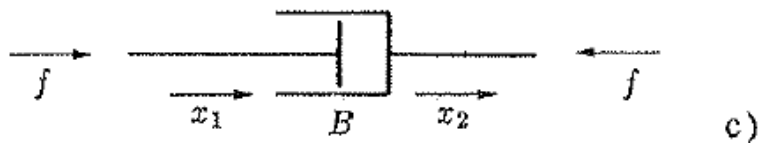


$$\Delta f(t) = f_1(t) - f_2(t) = M \frac{D^2 x}{dt^2} = M D^2 x(t)$$



$$f(t) = K (x_1(t) - x_2(t))$$

K=costante elastica



$$f(t) = B \frac{d}{dt} (x_1(t) - x_2(t)) = B D (x_1(t) - x_2(t))$$

B=attrito viscoso

Trasformazioni funzionali

- Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le trasformazioni funzionali, cioè le trasformazioni che associano funzioni a funzioni, ed in particolar modo la trasformazione di Laplace.
- Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra funzioni oggetto, normalmente funzioni del tempo, e funzioni immagine di diversa natura, cosicché ad operazioni eseguite sulle funzioni oggetto, come la derivazione, corrispondano operazioni più semplici sulle funzioni immagine: al problema oggetto viene così associato un nuovo problema immagine di più facile soluzione.

La trasformata di Laplace

- La trasformata di Laplace e la sua antitrasformata sono definite dalle relazioni:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

in cui s è una variabile complessa. Nel caso in cui s sia puramente immaginaria, si riduce alla trasformata di Fourier.

Gradino unitario	$L[u(t)] = \frac{1}{s}$
------------------	-------------------------

Rampa unitaria	$L[t] = \frac{1}{s^2}$
----------------	------------------------

Parabola unitaria	$L\left[\frac{t^2}{2}\right] = \frac{1}{s^3}$
-------------------	---

Esponenziale	$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$
--------------	-----------------------------

Sinusoide	$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
-----------	---

Cosinusoide	$L[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
-------------	--

Integrale e derivata della trasf. Di Laplace

- **Teorema della traslazione nel tempo.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s) . \quad (2.25)$$

- **Teorema della trasformata dell'integrale.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) . \quad (2.26)$$

- **Teorema della trasformata della derivata.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, continua per $t \geq 0$. Vale la relazione

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s F(s) - f(0+) . \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}[D^2 f(t)] = s^2 F(s) - s f(0-) - D f(t)|_{t=0-}$$

Procedendo iterativamente, si deduce la seguente espressione per la trasformata della generica derivata i -esima.

$$\mathcal{L}[D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(t) \Big|_{t=0-} . \quad (2.33)$$

Funzione di trasferimento di un sistema LTI

$$L[D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(t) \Big|_{t=0-}$$

$$L \left[\int_0^t f(t') dt' \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y_0(t) = 0$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y_1(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^j x(t)$$

Da cui si ricava che la relazione che descrive un sistema lineare stazionario:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^j x(t) \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j X(s) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0}$$

e dunque, la trasformata

di Laplace della soluzione $Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s)$

dell'equazione che

descrive il sistema è la
somma di due funzioni:

$$Y_0(s) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0}}{\sum_{i=0}^n s^i a_i}; Y_1(s) = \frac{\sum_{j=0}^m s^j b_j}{\sum_{i=0}^n s^i a_i} X(s)$$

Cond.ni iniziali

Funzione di trasferimento

Prodotto di convoluzione

- **Teorema della trasformata del prodotto integrale.** Siano $F_1(s)$ e $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s) . \quad (2.60)$$

Per un sistema inizialmente in quiete vale la:
 $Y(s) = G(s)X(s)$,
 in cui $G(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema

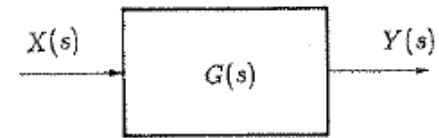
Siano $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ la risposta all'impulso, rappresentata in Fig. 2.19,b,
 $g_u(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]$ la risposta al gradino, rappresentata in Fig. 2.19,c.

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau ,$$

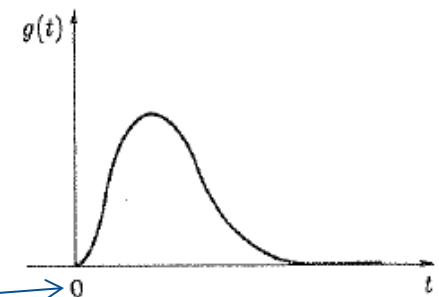
$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t-\tau) d\tau .$$

Gli integrali a secondo membro delle (2.65) e (2.66) vengono detti *integrali di convoluzione* o *integrali di Duhamel* ed esprimono la risposta forzata del sistema a un qualunque segnale di ingresso $x(t)$ in funzione della sua risposta all'impulso.

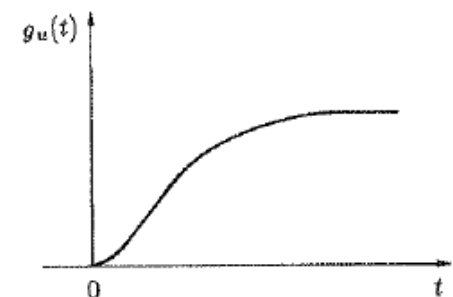
La risposta all'impulso caratterizza completamente il sistema perché da questa si può risalire alla risposta di qualunque segnale in ingresso, anche il gradino.



a)



b)



c)

Fig. 2.19,a-c Funzione di trasferimento, risposta all'impulso e risposta al gradino.

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} s X(s) \quad y(t) = \int_0^t x'(\tau) g_u(t-\tau) d\tau + x(0+) g_u(t)$$

Sistemi lineari non stazionari

- Per sistemi lineari non stazionari, non vale più la proprietà che, dette $x(t)$ e $y(t)$ una coppia di eccitazione risposta, all'eccitazione dx/dt corrisponde una risposta dy/dt .
- Per es. per il sistema lineare non stazionario descritto da: $y(t) = \alpha(t)x(t)$ la derivata vale:

$$\frac{d}{dt} y(t) = \alpha(t) \frac{d}{dt} x(t) + x(t) \frac{d}{dt} \alpha(t)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) g(t, \tau) d\tau ,$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t x'(\tau) g_u(t, \tau) d\tau + x(t_0+) g_u(t, t_0)$$

$$g_u(t, \tau) = \int_{\tau}^t g(t, \sigma) d\sigma$$

$$g(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} g_u(t, \tau)$$

Sistemi elementari del primo e secondo ordine.

Primo ordine

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Risposta al gradino

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + \tau s)} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Secondo ordine

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Risposta al gradino

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A := \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}, \quad \omega := \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\varphi := \arctan \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} = \arcsen \sqrt{1 - \delta^2} = \arccos \delta$$

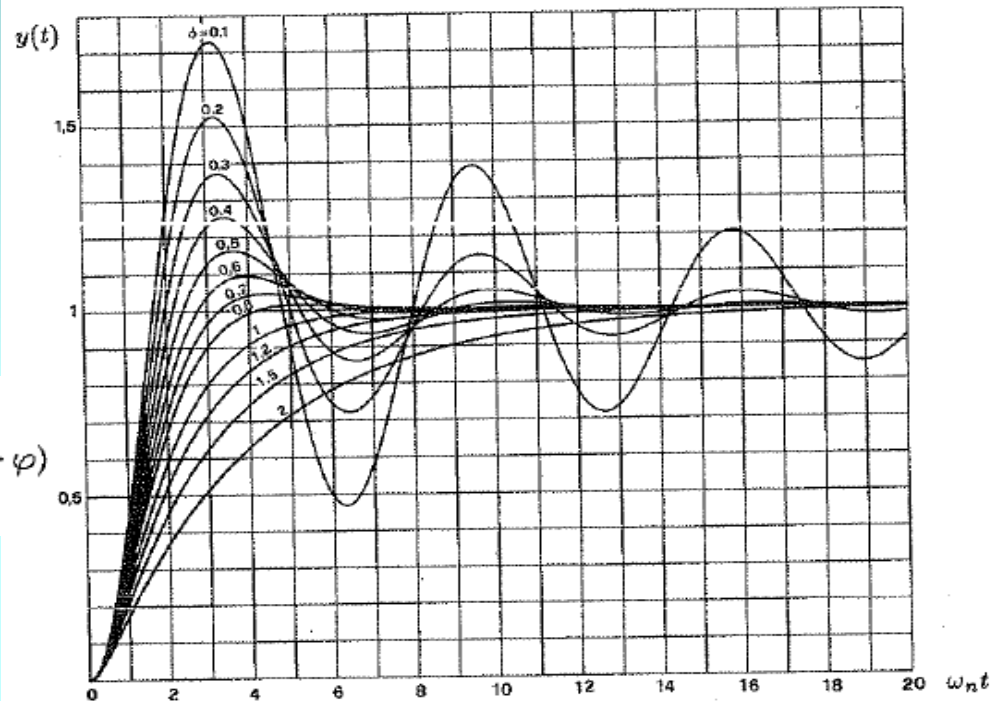
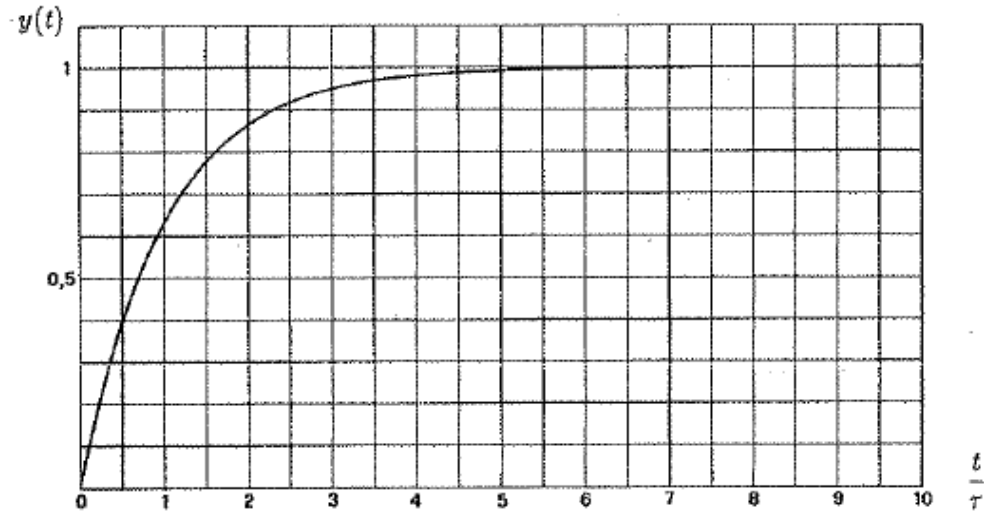


Fig. 2.28 Risposta al gradino del sistema elementare del secondo ordine.

Parametri di un sistema del II ordine

La risposta al gradino di un sistema del II ordine è caratterizzata da 5 parametri:

1. Massima sovraelongazione S : differenza tra il massimo valore raggiunto dall'uscita e quello a regime (in % sul valore di regime)
2. Tempo di ritardo T_r : tempo per raggiungere il 50% del valore di regime
3. Tempo di salita T_s : tempo per passare dal 10 al 90% del valore di regime
4. Tempo di assestamento T_a : tempo perché l'uscita rimanga entro il 5% del valore di regime
5. Istante di massima sovraelongazione T_m : il tempo al quale si presenta il massimo valore dell'uscita

