

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
"FEDERICO II"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Dispense del corso di Complementi di fisica

Prof. Fabio Garufi

8 ottobre 2025



# Indice

<b>I</b>	<b>modulo I</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Oscillazioni e Onde</b>	<b>3</b>
1.1	Il problema	3
1.2	La soluzione di D'Alambert	4
1.2.1	Corda finita	5
1.3	Oscillazioni di un gas compresso	6
1.4	Il metodo di Fourier	8
1.5	Oscillazioni di una membrana	10
<b>2</b>	<b>Serie e trasformate di Fourier</b>	<b>13</b>
2.1	Serie di Fourier	13
2.1.1	Definizioni	13
2.1.2	Esempio: la onda quadra	14
2.1.3	Condizioni per la convergenza	15
2.2	Trasformate di Fourier	16
2.2.1	Esempi di Trasformata di Fourier	17
2.2.2	Proprietà delle trasformate di Fourier	18
	Prodotto di convoluzione	19
	Spettro di una funzione	19
2.2.3	Campionamento	20
	Aliasing di campionamento	22
<b>3</b>	<b>Elementi di Campi</b>	<b>25</b>
3.1	Definizioni	25
3.1.1	Campo Scalare	25
	Superfici di livello	26
	Gradiente di un campo scalare	26
	Un esempio di uso del gradiente: il flusso di calore	27
3.1.2	Campi vettoriali	27
3.1.3	Formule integrali utili	28
	Formula di Ostrogradskij	28
	Divergenza di un campo vettoriale	29
3.1.4	Potenziale e Rotore del campo vettoriale	29
<b>4</b>	<b>Solidi</b>	<b>31</b>
4.1	Deformazioni e sforzi	31
4.1.1	Deformazioni	31
4.1.2	Dilatazione	32

4.1.3	Sforzi . . . . .	32
4.2	Onde S e P . . . . .	34
4.2.1	Equazioni del moto . . . . .	34
4.2.2	Onde . . . . .	35
4.2.3	Rifrazione e riflessione su una superficie di discontinuità . . . . .	36
4.3	Oscillazioni di un reticolo cristallino monodimensionale . . . . .	39
4.3.1	Reticoli di Bravais . . . . .	39
4.3.2	Oscillazioni in un reticolo monodimensionale monoatomico . . . . .	39
4.3.3	Oscillazioni in un reticolo monodimensionale con una base . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Equazione del calore</b> . . . . .	<b>43</b>
5.1	Impostazione . . . . .	43
5.1.1	Geoterme e lunghezza di diffusione . . . . .	44
	Lunghezza di diffusione . . . . .	44
5.2	Soluzione nel caso monodimensionale . . . . .	45
5.3	Soluzione per spazio semi-infinito . . . . .	47
5.3.1	Flusso di calore . . . . .	49
	Stima dell'età della Terra . . . . .	49
	Perdita di calore per decadimento . . . . .	50
5.3.2	Spessore del fondo oceanico . . . . .	51
	Profondità del fondale oceanico . . . . .	53
<b>6</b>	<b>La distribuzione di Maxwell-Boltzmann</b> . . . . .	<b>57</b>
6.1	La distribuzione delle velocità in una dimensione . . . . .	57
6.2	La distribuzione delle velocità in tre dimensioni . . . . .	58
6.3	Velocità più probabile e velocità quadratica media . . . . .	59
6.4	Velocità quadratica media . . . . .	60
6.4.1	La funzione $\Gamma$ di Eulero . . . . .	60
6.5	Distribuzione dell'energia . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Potenziali Termodinamici</b> . . . . .	<b>63</b>
7.1	Introduzione . . . . .	63
7.2	Energia Libera di Helmholtz . . . . .	64
7.3	L'Entalpia . . . . .	64
7.3.1	Entalpia di legame e di trasformazione . . . . .	65
7.4	L'energia libera di Gibbs . . . . .	66
7.4.1	Uso del potenziale di Gibbs per ricavare l'equazione di Clapeyron . . . . .	66
7.4.2	La regola delle Fasi . . . . .	67
7.5	Trasformazioni di Legendre e relazioni di Maxwell . . . . .	69
7.6	Radiazione di corpo nero . . . . .	70
7.6.1	legge di Stefan . . . . .	70
7.6.2	Lo spettro di corpo nero . . . . .	71
7.6.3	Coefficienti di Einstein e spettro di corpo nero . . . . .	73
7.6.4	Spettro di corpo nero e oscillatori quantistici . . . . .	74

<b>II</b>	<b>modulo II</b>	<b>77</b>
<b>8</b>	<b>Elettrostatica e conduzione</b>	<b>79</b>
8.1	Richiami di elettrostatica nel vuoto . . . . .	79
8.1.1	Il Campo Elettrico . . . . .	79
8.1.2	Teorema di Gauss . . . . .	80
8.1.3	Potenziale scalare . . . . .	80
8.1.4	Distribuzione superficiale di carica e doppio strato . . . . .	81
8.1.5	Equazione di Poisson ed energia del campo . . . . .	83
8.2	Dielettrici . . . . .	84
8.2.1	Costante dielettrica relativa . . . . .	84
8.2.2	Il vettore induzione elettrica . . . . .	84
8.2.3	Energia del campo nei dielettrici . . . . .	86
8.2.4	Polarizzazione per deformazione ed orientamento . . . . .	86
	Deformazione dell'atomo di idrogeno . . . . .	87
	Polarizzazione media per orientamento . . . . .	87
	Relazione di Clausius-Mossotti . . . . .	89
8.2.5	Passaggio fra due dielettrici . . . . .	89
8.2.6	Dielettrici in presenza di campi variabili nel tempo . . . . .	90
	Polarizzazione per deformazione: modello "a molla" . . . . .	90
	Polarizzazione di una molecola biatomica in un reticolo . . . . .	91
	Catastrofe di polarizzazione . . . . .	93
8.2.7	Teorie di campo medio . . . . .	94
8.2.8	Cristalli Piroelettrici . . . . .	95
8.2.9	Transizioni di fase strutturali . . . . .	96
8.3	Conduzione elettrica . . . . .	97
8.3.1	Elementi della teoria di Drude . . . . .	97
8.3.2	Lavoro meccanico della corrente e legge di Joule . . . . .	98
8.3.3	Correnti di origine termica . . . . .	98
8.3.4	Conduzione nei materiali semiconduttori . . . . .	100
	Funzione d'onda ed Equazione di Schrödinger . . . . .	100
	Potenziali periodici e massa efficace . . . . .	101
	Densità degli stati e numero di portatori . . . . .	104
8.3.5	Giunzione PN . . . . .	105
<b>9</b>	<b>Magnetismo</b>	<b>109</b>
9.1	Richiami di magnetismo nel vuoto . . . . .	109
9.1.1	Il potenziale vettore . . . . .	113
9.1.2	Effetto Hall . . . . .	113
9.1.3	Forza su una spira percorsa da corrente . . . . .	114
9.1.4	Campo prodotto da una spira circolare . . . . .	116
9.1.5	Campo generato da una distribuzione localizzata di correnti . . . . .	117
	Campo di un solenoide indefinito . . . . .	119
9.2	Magnetismo nella materia . . . . .	120
9.2.1	Campo microscopico generato da atomi vicini . . . . .	120
9.2.2	Momento magnetico di atomi idrogenoidi . . . . .	121
9.2.3	Paramagnetismo . . . . .	123
9.2.4	Ferromagnetismo . . . . .	124
9.2.5	Paramagnetismo in un sistema quantizzato a due livelli . . . . .	125
9.2.6	Correnti indotte e legge di Faraday-Neumann . . . . .	127

9.2.7	Flusso tagliato e flusso concatenato . . . . .	128
	Flusso tagliato . . . . .	128
	Flusso concatenato . . . . .	129
9.2.8	Energia del campo magnetico e induzione mutua . . . . .	129
	Il trasformatore a bobine . . . . .	131
9.2.9	Campi variabili lentamente . . . . .	133
9.3	Elettromagnetismo . . . . .	134
9.3.1	La corrente di spostamento . . . . .	134
9.3.2	Equazioni di Maxwell complete e onde elettromagnetiche . . . . .	135
9.3.3	Risoluzione delle equazioni disomogenee con le funzioni di Green . . . . .	137
9.3.4	Vettore e teorema di Poynting . . . . .	139
9.3.5	Radiazione di dipolo . . . . .	141
9.3.6	Soluzione delle equazioni della propagazione dei campi . . . . .	143
9.3.7	Propagazione delle onde EM attraverso la superficie di separazione fra due mezzi . . . . .	145
9.3.8	Teorema di Poynting nei mezzi dispersivi . . . . .	147
<b>10</b>	<b>Relatività Ristretta</b> . . . . .	<b>149</b>
10.1	Sincronizzazione degli orologi . . . . .	149
10.2	Sistemi di riferimento in moto relativo . . . . .	150
10.3	Trasformazioni di Lorentz come conseguenza dei postulati di Einstein . . . . .	154
10.4	Composizione delle velocità . . . . .	156
10.5	Intervalli . . . . .	156
10.6	Quadrivettori . . . . .	158
10.6.1	Tensori . . . . .	159
10.6.2	Trasformazioni di Lorentz nello spazio 4-dimensionale . . . . .	160
10.7	Operatori differenziali . . . . .	161
10.8	Meccanica relativistica e principio di minima azione . . . . .	162
10.9	Rappresentazione covariante delle equazioni di Maxwell . . . . .	164
10.10	Particella carica in moto in un campo EM . . . . .	165
10.11	Trasformazioni di Lorentz del campo EM . . . . .	168
<b>11</b>	<b>Teoria della Relatività Generale</b> . . . . .	<b>169</b>
11.1	Campo gravitazionale in meccanica non relativistica . . . . .	169
11.2	Campo gravitazionale in meccanica relativistica . . . . .	171
11.3	Moto libero in un sistema di riferimento qualsiasi . . . . .	172
11.4	Intervalli temporali e distanze . . . . .	173
11.5	Moto di una particella in un campo gravitazionale . . . . .	175
11.5.1	Campo gravitazionale costante: il problema del GPS . . . . .	176
11.6	Derivata covariante . . . . .	178
11.6.1	Relazione tra simboli di Christoffel e tensore metrico . . . . .	179
11.7	Curvatura e tensore di Riemann . . . . .	179
11.7.1	Proprietà del tensore di Riemann . . . . .	181
11.8	Il tensore Energia-impulso . . . . .	182
11.8.1	Variazioni dell'azione ed equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	182
11.8.2	Il tensore energia-impulso dal teorema di Noether . . . . .	183
11.9	Le equazioni del campo gravitazionale . . . . .	184
11.10	Equazioni linearizzate . . . . .	188

11.10.1 Onde gravitazionali - approssimazione di onda piana . . .	189
11.10.2 Effetto delle onde gravitazionali . . . . .	190
11.11 Cenni sulla produzione di onde gravitazionali . . . . .	191
11.11.1 Esempi di produzione di GW . . . . .	193



Parte I  
modulo I



# Capitolo 1

## Oscillazioni e Onde

### 1.1 Il problema

Consideriamo una corda ideale, di dimensione trasversale trascurabile e densità  $\rho$ . La corda, in condizioni di riposo giace sull'asse delle ascisse del piano  $Oxy$  ed è soggetta ad una tensione  $T$ . Se applichiamo una forza  $F$  parallelamente all'asse  $y$ , la corda si deformerà in una curva nel piano  $Oxy$ . Lasciata libera,

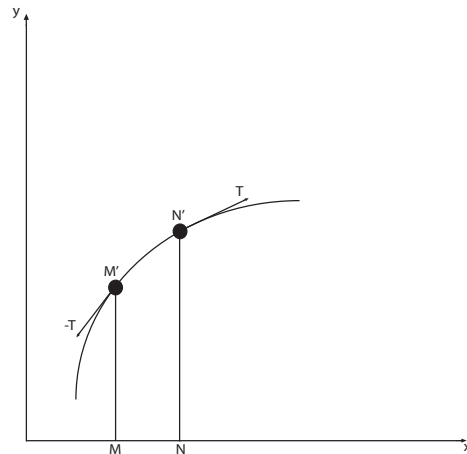


Figura 1.1: Schematizzazione delle forze agenti su una corda lasciata libera fuori dalla posizione di equilibrio

consideriamo le forze agenti sul segmento di corda  $M'N'$  nella direzione dell'asse  $y$ . Se consideriamo trascurabile la differenza tra i moduli delle tensioni nei punti  $M'$  ed  $N'$ , e chiamiamo  $u(x, t)$  lo spostamento della corda nel punto  $x$  all'istante  $t$  potremo scrivere:

$$M \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -T \sin(\theta') + T \sin(\theta) \quad (1.1)$$

essendo  $\theta'$  e  $\theta$  gli angoli delle tangenti a  $u(x, t)$  rispettivamente in  $M'$  ed  $N'$  ed  $M = \rho dx$ .

Al primo ordine, potremo dire che

$$\sin(\theta) \sim \theta \sim tg(\theta) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

e dunque:

$$\sin(\theta') - \sin(\theta) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx$$

Sostituendo in 1.1, troviamo:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

La (1.2) è un caso semplice dell'equazione delle onde.

Se consideriamo le dimensioni del rapporto  $\frac{T}{\rho}$ , vediamo che:

$$\left[ \frac{T}{\rho} \right] = \left[ \frac{m l t^{-2}}{m l^{-1}} \right] = [l^2 t^{-2}]$$

e dunque ha le dimensioni del quadrato di una velocità, verrà indicata con  $c^2$  e, vedremo, è la velocità di propagazione della perturbazione lungo la corda.

## 1.2 La soluzione di D'Alambert

Il primo a dimostrare l'esistenza ed unicità ed a trovare una soluzione di questa equazione fu il matematico francese D'Alambert, e, l'operatore differenziale che applicato ad una funzione delle coordinate  $u(x, y, z, t)$ , restituisce l'equazione delle onde, da lui, prende il nome di *d'alambertiano* e si indica con il simbolo:

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2$$

La soluzione di D'Alambert parte dal cambiamento di variabili (suggerito dal fatto che  $\partial_t^2 - c^2 \nabla^2 = (\partial_t - c\nabla)(\partial_t + c\nabla)$ ):

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \quad (1.3)$$

dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\ &= -c \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Derivando una seconda volta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \quad (1.7)$$

e dunque, sostituendo nella (1.2) otteniamo che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (1.8)$$

L'Eq.(1.8) indica che la derivata rispetto a  $\eta$  è una costante rispetto a  $\xi$ , dunque una funzione della sola  $\eta$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f_1(\eta) \quad (1.9)$$

Integrando ancora rispetto a  $\eta$  :

$$u(\xi, \eta) = \int f_1(\eta) d\eta + C \quad (1.10)$$

in cui  $C$  è una costante rispetto a  $\eta$  e può essere una funzione della sola  $\xi$

$$u(x, t) = g_1(x - ct) + g_2(x + ct) \quad (1.11)$$

Le funzioni generiche  $f_1(x - ct)$  e  $f_2(x + ct)$  indicano due perturbazioni che si propagano lungo la corda nelle due direzioni opposte con velocità di modulo  $c$ . Queste funzioni possono essere determinate imponendo le condizioni iniziali:

$$u(x, t = 0) = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \phi_1(x) \quad (1.12)$$

Si ricava:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(z) dz \quad (1.13)$$

nota come soluzione di D'Alambert e le rette  $x \pm ct = cost$  nel piano  $xt$  sono le *caratteristiche*.

### 1.2.1 Corda finita

Se la corda ha dimensione finita di lunghezza  $l$ , fissata agli estremi ( $x = 0$   $x = l$ ), oltre alle condizioni (1.12) devono essere soddisfatte le condizioni ulteriori:

$$u(x = 0, t) = 0 \quad u(x = l, t) = 0 \quad (1.14)$$

La soluzione di D'Alambert, continua ad essere valida, ma le funzioni  $g_1(x - ct)$  e  $g_2(x + ct)$  hanno un argomento che può essere all'estremo dell'intervallo di definizione del problema. Per poter risolvere il problema occorrerà considerare solo la perturbazione iniziale della corda infinita tale che il movimento della sua porzione  $(0, l)$  sia quello indicato dalle condizioni.

$$\begin{cases} g_1(-ct) + g_2(ct) = 0 \\ g_1(l - ct) + g_2(l + ct) = 0 \end{cases}$$

o, indicando la variabile indipendente semplicemente con  $x$ :

$$\begin{cases} g_1(-x) = -g_2(x) \\ g_1(l - x) = -g_2(l + x) \end{cases} \quad (1.15)$$

Possiamo verificare che, sostituendo nella seconda delle (1.15)  $x$  con  $(l + x)$ , e utilizzando la prima, si ottiene:

$$g_2(x + 2l) = -g_1(-x) = g_2(x)$$

e dunque  $g_2(x)$  è periodica di periodo  $2l$ , e analogamente per la  $g_1(x)$ .

### 1.3 Oscillazioni di un gas compresso

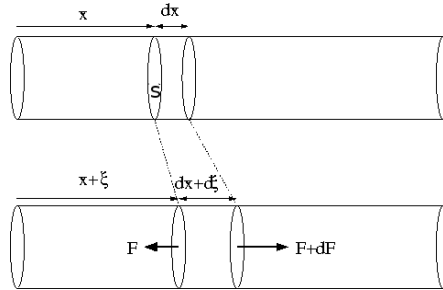


Figura 1.2: Schematizzazione delle forze agenti su un gas compresso in un cilindro

Consideriamo un gas contenuto in un cilindro di volume  $dV = Sdx$  e limitato da un lato da un pistone. Se il pistone (la parete sinistra del cilindro) si muove di  $d\xi$ , la variazione di pressione fra le due facce, all'inizio, sarà, al primo ordine:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

e di conseguenza, la forza agente sul pistone

$$dF = SdP = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

Applicando la prima legge di Newton  $F = ma$  ed essendo  $m = \rho_0 V$  si ottiene:

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (1.16)$$

Dividendo tutto per  $Sdx$  si ha:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.17)$$

La variazione di pressione può essere calcolata introducendo il coefficiente di compressibilità  $k$  tale che:

$$dP = -\frac{1}{k} \frac{dV}{V} \quad (1.18)$$

La variazione relativa di volume sarà

$$\frac{S(dx + d\xi) - S(dx)}{Sdx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

e dunque:

$$dP = -\frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.19)$$

ovvero:

$$P_{x+\xi} = P_0 - \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dunque, sostituendo la (1.19) nella (1.17), otteniamo:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1.20)$$

ovvero:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \xi = 0 \quad (1.21)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho k}} \quad (1.22)$$

In una trasformazione adiabatica, è:  $PV^\gamma = Cost$ , dunque  $P\rho^{-\gamma} = k$  implica che:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1} \quad (1.23)$$

Dunque, utilizzando la  $\rho^\gamma = P/k$  e la definizione di  $k$  (1.18):

$$dP = \frac{\gamma P d\rho}{\rho} = -\frac{1}{k} \frac{d\rho}{\rho}$$

da cui si ricava, che per un gas adiabatico, il coefficiente di compressibilità vale:

$$\frac{1}{k} = \gamma P \quad (1.24)$$

L'equazione delle onde che abbiamo ricavato, riguarda lo spostamento. Per ricavare il comportamento della pressione, possiamo partire dalla (1.18), scritta come:

$$P = P_0 - \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

dunque, derivando due volte rispetto a  $x$  otteniamo:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ma, per la (1.20):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.25)$$

D'altra parte derivando rispetto a  $t$  due volte:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.26)$$

e, confrontando le (1.25) e (1.26), si ricava:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 k} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.27)$$

Dunque anche la pressione varia nel cilindro secondo l'equazione delle onde, e analogamente si può ragionare per la densità.

## 1.4 Il metodo di Fourier

Per una corda fissata agli estremi, un metodo alternativo, che porta ad interessanti conseguenze è quello di Fourier o di separazione delle variabili. Si tratta di cercare soluzioni particolari dell'equazione di D'Alembert, che siano il prodotto di una funzione solo del tempo e di una del solo spazio:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (1.28)$$

Sostituendo questa soluzione nell'eq. (1.2), otteniamo:

$$c^2 X''(x)T(t) = X(x)\ddot{T}(t) \quad (1.29)$$

avendo indicato con il punto la derivazione rispetto al tempo e con l'apice quella rispetto alla  $x$ . Dividendo entrambi i membri per  $X(x)T(t)$  otteniamo:

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad (1.30)$$

Poiché il primo membro è solo funzione di  $x$  e il secondo solo di  $t$ , l'uguaglianza vale solo se entrambi i rapporti sono uguali ad una medesima costante  $\lambda$  (detta di separazione). Pertanto, l'Eq.(1.30) è equivalente al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \\ \ddot{T}(t) - \lambda T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

La soluzione delle (1.31) è del tipo:

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ T(t) &= Ce^{\sqrt{\lambda}t} + De^{-\sqrt{\lambda}t} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Alla prima delle (1.32) possiamo aggiungere le condizioni al contorno:  $X(0) = X(l) = 0$ . Sostituendo la prima condizione nella (1.32) otteniamo  $A = -B$  e dunque, se  $\lambda > 0$  allora  $X(x) = 2A \sinh(\sqrt{\lambda}x)$ . Siccome il seno iperbolico si annulla solo nell'origine, allora non può essere verificata la seconda condizione al contorno. Pertanto  $\lambda$  dovrà essere negativa:  $\lambda = -k^2$  e quindi:

$$X(x) = 2iA \sin(kx) \quad (1.33)$$

Sostituendo la seconda condizione si ha che  $\sin(kl) = 0$  che è soddisfatta solo per  $k_n = \frac{n\pi}{l}$ . Si avranno dunque infinite soluzioni, tutte equivalenti, anche la somma di queste è una soluzione. Pertanto la soluzione generale sarà:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (1.34)$$

La costante  $A$  può essere trovata imponendo che la soluzione sia "normalizzata", ovvero

$$\int_0^l X^2 dx = 1 \Leftrightarrow A^2 \cdot \frac{l}{2} = 1 \quad (1.35)$$

e dunque

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \quad \forall n \quad (1.36)$$

Passando alla parte temporale, possiamo scrivere, ponendo anche qui  $\lambda = -k^2$ :

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

con  $\omega_n = ck_n$  e la costante  $k_n$  è quella trovata precedentemente. Sostituendo nella seconda delle (1.32) otteniamo:

$$T(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}$$

Imponendo le condizioni (1.12) e conglobando il fattore di normalizzazione nelle costanti:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (C_n \cdot e^{i\omega_n t} + D_n \cdot e^{-i\omega_n t}) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \quad (1.37)$$

$$u(x, t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \phi(x)$$

$$\dot{u}(t=0) = i \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (C_n - D_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \phi_1(x)$$

Se chiamiamo:  $C_n + D_n = \alpha_n$  e  $i(C_n - D_n) = \beta_n$ , moltiplichiamo entrambi i membri per  $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  e integriamo, ricordando la (1.35), otteniamo:

$$\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \quad (1.38)$$

Prolungando analiticamente per disparità, visto che appare solo il seno, l'integrale al secondo membro, vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{l}{2n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin(ny) \sin(my) dy \quad (1.39)$$

che è l'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico, che fa 0, a meno che non sia  $m = n$ , in tal caso è

$$\int_{-n\pi}^{n\pi} \sin^2(ny) dy$$

e il  $\sin^2(y)$  è pari, quindi

$$\int_{-n\pi}^{n\pi} \sin^2(ny) dy = 4/n \int_0^{\pi/2} \sin^2(z) dz$$

Scrivendo  $\sin^2(z) dz = \sin(z) d \cos(z)$  e integrando per parti, viene che  $2 \int \sin^2(z) dz = \sin(z) \cos(z) + z$ , il primo addendo sparisce agli estremi di integrazione e il secondo fa  $\pi/2$ . In definitiva si seleziona nella somma solo il termine  $m$ , e il coefficiente a  $\alpha_m$  è  $1/2 \cdot 2nl/\pi \cdot \pi/2 \cdot 4/n = 2/l$ , sicché:

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \phi(x) dx \quad (1.40)$$

$$\beta_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \phi_1(x) dx \quad (1.41)$$

dove nella seconda si è tenuto conto delle relazioni  $\omega_n = ck_n$  e  $k_n = n\pi/l$ . Considerato che  $C_n = \alpha_n - i\beta_n$  e  $D_n = \alpha_n + i\beta_n$ , si vede che sono uno il complesso coniugato dell'altro, e la  $u(x,t)$ , può essere scritta come una somma bilaterale con un unico parametro complesso. I coefficienti  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  che abbiamo trovato sono i coefficienti (di Fourier) dello sviluppo di  $u(x,t)$  in una serie che possiamo ricavare manipolando la (1.37) e che prende il nome di Serie di Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (1.42)$$

che in forma complessa può essere scritta come:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} \quad (1.43)$$

in cui vale la relazione (di *dispersione*)  $\omega_n = c \cdot k_n$ ,  $D_{-n} = \bar{D}_n$  e

$$D_0 = \frac{1}{2l} \int_0^l \phi(x) dx$$

## 1.5 Oscillazioni di una membrana

Consideriamo le oscillazioni libere di una membrana rettangolare i cui contorni consistano nei punti del piano  $(x,y): x=0, x=l, y=0, y=m$ . Cerchiamo soluzioni dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.44)$$

che si annullino sul contorno e di cui siano note, all'istante iniziale, la forma funzionale  $\phi_1(x,y)$  e la quella della sua derivata temporale  $\phi_2(x,y)$ .

Di nuovo, applichiamo il metodo di Fourier, cioè cerchiamo soluzioni del tipo:

$$(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) U(x,y) \quad (1.45)$$

Queste inserite nella (1.44) danno:

$$-\omega^2 (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) U(x,y) = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) \quad (1.46)$$

da cui, raccogliendo i termini e ponendo  $\omega^2/a^2 = k^2$ , si ottiene:

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + k^2 U = 0 \quad (1.47)$$

Come al solito, separando le variabili:  $U(x,y) = X(x)Y(y)$ , otteniamo due equazioni:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ Y'' + \mu^2 Y = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

ove:  $\lambda^2 + \mu^2 = k^2$ .

Il sistema (1.48) dà la soluzione generica:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \\ Y(y) &= C_3 \sin(\mu y) + C_4 \cos(\mu y) \end{aligned}$$

La condizione al contorno  $X(0) = X(l) = 0$  e  $Y(0) = Y(m) = 0$  ci permettono di dire che  $C_2 = C_4 = 0$ , e dunque, a meno delle costanti non nulle:

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin(\lambda x) \\ Y(y) &= \sin(\mu y) \end{aligned} \quad (1.49)$$

Dalla (1.49), segue che  $\lambda$  e  $\mu$  hanno un'infinità di valori tali che:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{i\pi}{l} \\ \mu_j &= \frac{j\pi}{m} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Corrispondentemente, per le costanti  $k^2$  e  $\omega^2$  otteniamo:

$$k_{ij}^2 = \pi^2 \left( \frac{i^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right) \quad (1.51)$$

$$\omega_{ij}^2 = ak_{ij}^2 \quad (1.52)$$

La soluzione sarà del tipo

$$u(x, y, t) = \sum_{ij} (\alpha_{ij} \cos(\omega_{ij}t) + \beta_{ij} \sin(\omega_{ij}t)) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{m}\right) \quad (1.53)$$

Ove le costanti si calcolano imponendo le condizioni iniziali. Vediamo dalla (1.53) che, per per ciascuna frequenza propria, esistono più forme differenti della membrana, con differenti linee nodali, cioè linee in cui l'ampiezza della vibrazione si annulla.

Consideriamo il caso di una membrana quadrata:  $l = m = r$ .

La frequenza in quest caso è data da:

$$\omega_{ij} = \frac{a\pi}{r} \sqrt{i^2 + j^2} \quad (1.54)$$

Cominciamo a considerare il caso  $i = 1, j = 1$ :  $\omega_{11} = \alpha\sqrt{2}$  frequenza fondamentale;

$$u_{11} = N_{11} \sin(\omega_{11}t + \phi_{11}) \sin\left(\frac{\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{r}\right)$$

Non si annulla in nessun altro punto che non sia il bordo.

Passiamo al caso  $i = 1, j = 2$ . La frequenza sarà:  $\omega_{12} = \omega_{21} = \alpha\sqrt{5}$  in corrispondenza della quale saranno possibili due forme della membrana:

$$u_{12} = N_{12} \sin(\omega_{12}t + \phi_{12}) \sin\left(\frac{\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{r}\right)$$

$$u_{21} = N_{21} \sin(\omega_{12}t + \phi_{21}) \sin\left(\frac{2\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{r}\right)$$

che hanno linee nodali per:

$$x = \frac{r}{2}; y = \frac{r}{2}$$

Oltre alle  $u_{12}$  e  $u_{21}$  ci sono anche altre infinite soluzioni equivalenti date dalle loro combinazioni lineari, per es. (ponendo per semplicità  $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$ ):

$$u(x, y, t) = \sin(\omega_{21}t) \left[ N_1 \sin\left(\frac{\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{r}\right) + N_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{r}\right) \right]$$

Ponendo  $N_1 = N_2$  e  $u(x, y, t) = 0$ , ricaviamo la linea nodale:  $x + y = 0$ , mentre per  $N_1 = -N_2$ , si ha  $x - y = 0$ . I modi corrispondenti a questo caso sono mostrati in Fig. 1.3

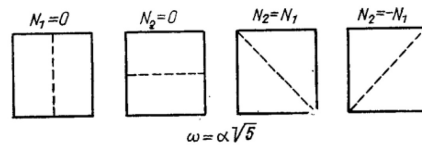


Figura 1.3: Posizione delle linee nodali per il caso  $i=1, j=2$

## Capitolo 2

# Serie e trasformate di Fourier

### 2.1 Serie di Fourier

#### 2.1.1 Definizioni

Abbiamo visto nel par. 1.4, che la risoluzione del problema della corda vibrante, conduce ad una soluzione che è la somma di seni e coseni moltiplicati per opportuni coefficienti:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (2.1)$$

In generale, diremo che una funzione della variabile  $x$ ,  $f(x)$ , definita nell'intervallo  $-\pi < x < \pi$ , è sviluppabile in serie di Fourier, se converge la somma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (2.2)$$

Il termine  $a_0/2$  è il valor medio della funzione, e si può ricavare integrando la (2.2) ad ambo i membri fra  $-\pi$  e  $\pi$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.3)$$

Avendo tenuto conto che gli integrali di seno e coseno, su un numero intero di periodi, sono nulli. I parametri  $a_n$  e  $b_n$  si possono ricavare moltiplicando ambo i membri della (2.2) rispettivamente per  $\cos(mx)$  e  $\sin(mx)$  ed integrando:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad (2.4)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \quad (2.5)$$

avendo considerato che l'integrale del seno e coseno al quadrato, su un numero intero di periodi, è  $1/2$  e l'integrale dei prodotti misti si annulla.

Se la  $f(x)$  è definita in un intervallo  $c - d < x < c + d$ , allora sarà:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( n\pi \frac{(x+c)}{d} \right) + b_n \sin \left( n\pi \frac{(x+c)}{d} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$a_n = \frac{1}{d} \int_{c-d}^{c+d} f(x) \cos \left( n\pi \frac{(x+c)}{d} \right) dx \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{1}{d} \int_{c-d}^{c+d} f(x) \sin \left( n\pi \frac{(x+c)}{d} \right) dx \quad (2.8)$$

Considerato che la somma (2.2) è composta da termini pari e termini dispari, è chiaro che se la funzione è pari ( $f(x) = f(-x)$ ), i coefficienti dei termini dispari saranno tutti nulli (come si può vedere anche direttamente dalle definizioni (2.5)), e viceversa, per le funzioni dispari ( $f(x) = -f(-x)$ ), sarà una somma di soli seni.

Abbiamo già visto in 1.4, che la serie di Fourier può essere espressa come somma bilatera attraverso l'uso di una unica variabile complessa, usando la definizione di seno e coseno in termini di esponenziali complesse:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (2.9)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \left( \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left( \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n \geq 1 \\ \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & n < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Esempio: la onda quadra

Come esempio di sviluppo in serie di Fourier consideriamo la funzione onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

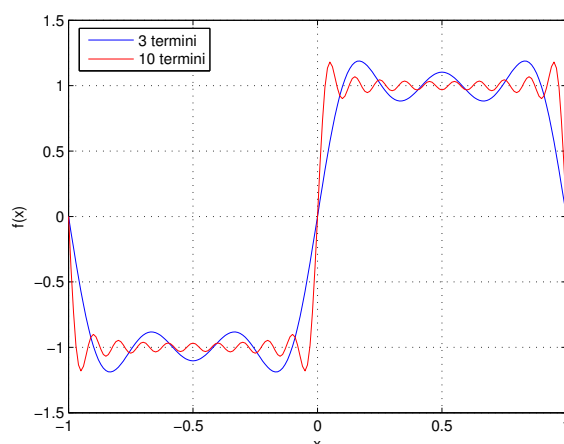


Figura 2.1: Risultato dello sviluppo in serie di Fourier relativo all'onda quadra. In blu la curva relativa ai primi 3 termini, in rosso quella con 10 termini

Questa funzione è dispari, dunque sarà composta da una serie di soli seni. Dalla definizione (2.8):

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 \sin(\pi n x) dx \\
 &= 2 \left[ -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right]_0^1 = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n + 1] = \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n = 2m \\ 0 & n = 2m + 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

In Fig.2.1 è mostrato il risultato dello sviluppo in serie per i primi 3 e 10 termini diversi da 0. Si può notare - in particolare nella curva a 10 termini - che l'ampiezza dell'oscillazione vicino allo "spigolo" dell'onda quadra è maggiore di quella nella parte piatta. Questo fenomeno è una caratteristica generale delle rappresentazioni di funzioni discontinue in serie di Fourier troncate ad un numero finito di termini, e prende il nome di *fenomeno di Gibbs*. Più in generale, data una funzione periodica differenziabile che presenta un punto di discontinuità di altezza  $a$ , la serie di Fourier troncata presenta una sovrelevazione di circa  $0.089490a$  ad ogni estremità. Ovvero la funzione che deriva dalla serie di Fourier troncata presenta una discontinuità del 18% più grande della funzione originale.

### 2.1.3 Condizioni per la convergenza

Una condizione ovvia per la convergenza della serie di Fourier è che tutti i suoi coefficienti siano finiti. Questo si traduce nella *condizione di Dirichlet*:

Condizione necessaria per la convergenza della serie che rappresenta la funzione periodica  $f(x)$  è che la funzione sia assolutamente integrabile su un periodo  $T$ , ovvero che:

$$\int_T |f(x)| dx < \infty \quad (2.13)$$

Infatti, dalla definizione dei coefficienti della serie espressa in forma bilatera (complessa), risulta:

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \left| \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{ikx} dx \right| = \\ &= \frac{1}{T} \int_T |f(x) e^{ikx}| dx = \\ &= \frac{1}{T} \int_T |f(x)| dx \end{aligned}$$

essendo 1 il modulo dell'esponenziale complesso. Quindi, se la (2.13) è verificata, per un qualsiasi periodo  $T$  finito, sarà anche verificata la:  $|a_k| < \infty$ .

Una funzione che viola la condizione di Dirichlet è  $f(x) = \frac{1}{x}$  per  $0 < x < 1$ .

Un'altra condizione di convergenza è che: *in qualsiasi intervallo finito della variabile indipendente, ci siano un numero finito di massimi e minimi durante un singolo periodo della funzione.*

Un esempio di funzione che rispetta la condizione di Dirichlet ma non quest'ultima condizione è:

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$$

che è di periodo 1, si può verificare che è assolutamente integrabile:

$$\int_0^1 |f(x)| dx < 1$$

ma ha un numero infinito di massimi e minimi che si addensano verso  $x = 0$ .

Ultima condizione è che *in qualsiasi intervallo finito della variabile indipendente, ci siano un numero finito di discontinuità e che ciascuna di queste sia finita.*

## 2.2 Trasformate di Fourier

Consideriamo una funzione qualsiasi  $f(x)$  non periodica definita in un intervallo della  $x$ :  $|x| < T$  e nulla altrove. Questa può essere resa periodica considerando copie identiche della funzione centrate ad intervalli  $T_0 > T$  sull'asse delle  $x$ . Se scriviamo la serie di Fourier di  $f(x)$  in forma complessa, esprimendo per esteso i coefficienti:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(x) e^{-ik\omega_0 x} dx \right] e^{ik\omega_0 x} \quad (2.14)$$

Siccome  $f(x) = 0$  per  $|x| > T_0/2$ , l'integrale può essere esteso all'intervallo  $[-\infty, \infty]$ , e definire l'involuppo di  $T_0 a_k$  la funzione:

$$X(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik\omega_0 x} dx \quad (2.15)$$

così che i coefficienti dello sviluppo di Fourier possano essere scritti come:

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

Considerato che:  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  è la frequenza della funzione, possiamo scrivere la serie:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) \omega_0 e^{ik\omega_0 x} \quad (2.16)$$

Quando  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0 \rightarrow 0$  e la somma tende ad un integrale, di modo che le (2.16) e (2.15) diventano:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (2.17)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (2.18)$$

L'eq. (2.18) è la *trasformata di Fourier* della funzione  $f(x)$ , mentre la (2.17) è l'*antitrasformata di Fourier* della funzione  $X(\omega)$ .

### 2.2.1 Esempi di Trasformata di Fourier

Come primo esempio di funzione di cui calcolare la trasformata prendiamo il caso in cui:

$$f(x) = \delta(x)$$

la trasformata sarà:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = 1$$

essendo la  $\delta(x)$  sempre nulla tranne che per  $x = 0$  dove vale 1.

Prendiamo ora la funzione impulso quadrato:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < T_1; \\ 0 & |x| > T_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega T_1} - e^{i\omega T_1}] = \\ &= 2 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega} \end{aligned}$$

Al contrario, troviamo adesso la funzione  $f(x)$  la cui trasformata sia un gradino nel piano delle frequenze:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W; \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

L'antitrasformata ci dà:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{i\omega x} d\omega = \frac{\sin(Wx)}{\pi x}$$

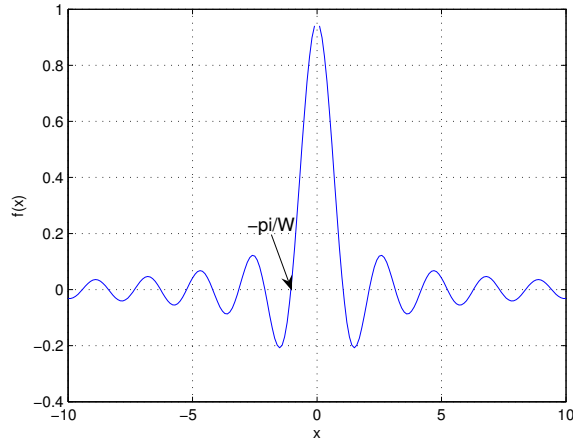


Figura 2.2: Risultato dell'antitrasformata di Fourier della funzione impulso, per  $W=3$

### 2.2.2 Proprietà delle trasformate di Fourier

Enunciamo, senza dimostrazione alcune delle proprietà delle trasformate di Fourier:

- **La trasformata di Fourier è lineare:**

$$af_1(x) + bf_2(x) \rightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega) \quad (2.19)$$

- **Simmetria della trasformata:** se  $f(x)$  è una funzione di  $x$  a valori reali allora

$$F(-\omega) = \bar{F}(\omega) \quad (2.20)$$

- **Proprietà di shift:**

$$f(x - x_0) \rightarrow e^{-i\omega x_0} F(\omega) \quad (2.21)$$

- **differenziazione e integrazione:**

$$\frac{f(x)}{dx} \rightarrow i\omega F(\omega) \quad (2.22)$$

$$\int f(x) dx \rightarrow \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (2.23)$$

- **Proprietà di scala:**

$$f(ax) \rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (2.24)$$

- **Relazione di chiusura:** è l'analogo della relazione di chiusura esistente fra due vettori ortonormali:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-x')} d\omega = \delta(x - x') \quad (2.25)$$

(che riflette il fatto che le  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x}$  formano una base ortonormale in uno spazio funzionale)

Legata a quest'ultima proprietà, è la relazione di Parseval, che dimostriamo:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)e^{-i\omega x} d\omega \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)F(\omega) d\omega \end{aligned}$$

### Prodotto di convoluzione

Si definisce *prodotto di convoluzione* (folding) di due funzioni  $f(x)$  e  $h(x)$ , l'integrale:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)h(x - \xi)d\xi \quad (2.27)$$

Quando le funzioni sono nel dominio del tempo, la  $h(t - \tau)$  è la *risposta all'impulso* e  $f(\tau)$  è la sollecitazione.

La trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione è il prodotto ordinario delle trasformate di Fourier delle funzioni. Infatti:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)h(x - \xi)d\xi \right] e^{-i\omega x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi)e^{-i\omega x} dx \right] d\xi \end{aligned}$$

Sfruttando la proprietà di shift (2.21),

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi)e^{i\omega x} dx = H(\omega)e^{-i\omega\xi}$$

dunque:

$$Y(\omega) = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi} d\xi = H(\omega)X(\omega)$$

$H(\omega)$  prende il nome di *Risposta in Frequenza* del sistema.

### Spettro di una funzione

Si definisce spettro di frequenza di una funzione, l'andamento delle ampiezze dei coefficienti di Fourier in funzione delle frequenze, o, nel continuo, l'andamento della trasformata di Fourier.

Spesso, si fa riferimento alla *densità di potenza spettrale* (Power Spectral Density - PSD) che è una quantità reale e deriva dalla funzione di autocorrelazione. Questa funzione deriva dall'esigenza di voler stimare la distribuzione della potenza di un segnale alle varie frequenze, basandosi su un insieme finito di dati. La correlazione fra due segnali continui  $x(t)$  e  $y(t)$  è il prodotto di convoluzione:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau)dt \quad (2.28)$$

che dà un'idea della simiglianza dei segnali. Se  $x$  ed  $y$  sono lo stesso segnale, si ottiene la funzione di *autocorrelazione*  $R_{xx}(\tau)$  che è massima per  $\tau = 0$  ove esprime il valore dell'energia del segnale. Lo spettro di potenza è legato all'autocorrelazione dalla trasformata di Fourier:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (2.29)$$

da cui si può ricavare la autocorrelazione antitrasformando. Come si è detto la funzione di autocorrelazione, per ritardo nullo esprime l'energia del segnale:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega)d\omega \quad (2.30)$$

La densità di potenza spettrale PSD è definita dall'integrando di (2.30)

$$PSD(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{2\pi} \quad (2.31)$$

### 2.2.3 Campionamento

Il campionamento di un segnale continuo consiste nel considerare la serie dei valori che questo segnale assume ad intervalli di tempo discreti. Per semplicità assumeremo che gli intervalli di tempo considerati siano istantanei ed equispaziati con un periodo  $T$ . In questa ipotesi, campionare equivale a considerare la somma:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) \quad (2.32)$$

Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri, otteniamo:

$$X_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right) e^{-i\omega t} dt \quad (2.33)$$

La somma di funzioni delta di Dirac centrate in punti equispaziati (Fig.2.3) è una funzione periodica pari, e dunque può essere sviluppata in serie di Fourier i cui coefficienti sono:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \quad (2.34)$$

e dunque:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega_s t} \quad (2.35)$$

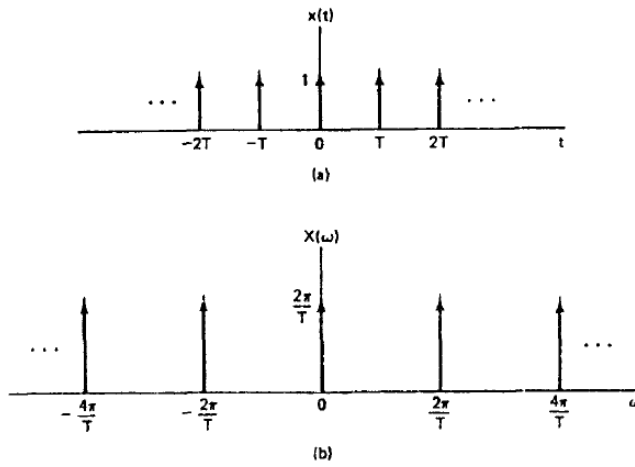


Figura 2.3: Treno di impulsi periodici e la sua trasformata di Fourier

ove  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ .

Sostituendo la (2.35) al posto della somma nella (2.33), otteniamo:

$$\begin{aligned}
 X_p(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - k\omega_s)t} \right) dt = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(\omega - k\omega_s)t} dt \right) = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

In definitiva, la trasformata di Fourier  $X_p(\omega)$  di un segnale campionato, è

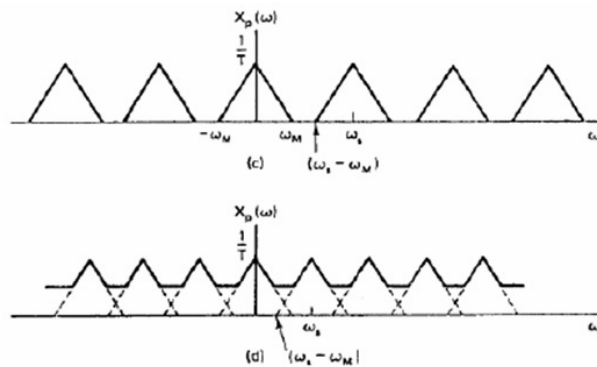


Figura 2.4: Effetto del campionamento di un segnale limitato in banda sullo spettro delle frequenze, per  $\omega_s > 2\omega_M$  e per  $\omega_s < 2\omega_M$

la somma di repliche della trasformata di Fourier del segnale continuo  $X(\omega)$ , centrate in multipli della frequenza di campionamento  $\omega_s$  scalate di un fattore  $1/T$  (vedi Fig. 2.3).

Se  $X(\omega)$  è limitato in banda, ovvero se è diverso da zero solo per un certo intervallo di frequenze che per semplicità scegliamo simmetricamente tra  $-\omega_M$  e  $\omega_M$ , allora le repliche non si sovrapporranno solo se  $\omega_M < (\omega_s - \omega_M)$  cioè, se  $\omega_s > 2\omega_M$ . In caso contrario, nella trasformata di Fourier del segnale campionato, saranno presenti delle frequenze che non appartengono al segnale ma alle sue repliche (Fig. 2.4). Quanto mostrato è il teorema del campionamento:

*Dato un segnale  $x(t)$  limitato in banda, la cui trasformata di Fourier  $X(\omega) = 0$  per  $|\omega| > \omega_M$ , il segnale è univocamente determinato dai suoi campioni  $x_p(kT_s)$  se la frequenza di campionamento è maggiore di 2 volte la frequenza massima del segnale:  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\omega_M$  e considerando lo spettro contenuto nella banda di frequenze  $|\omega_c| \leq \frac{\omega_s}{2}$ . La frequenza  $\omega_s = 2\omega_M$  è la Frequenza di Nyquist per il segnale considerato.*

### Aliasing di campionamento

Consideriamo di voler campionare un segnale sinusoidale:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

Il suo spettro è composto da due sole linee, centrate a  $\pm\omega_0$ . Se campioniamo il segnale con una frequenza di campionamento  $\omega_s < 2\omega_0$  otteniamo lo spettro in Fig. 2.5.

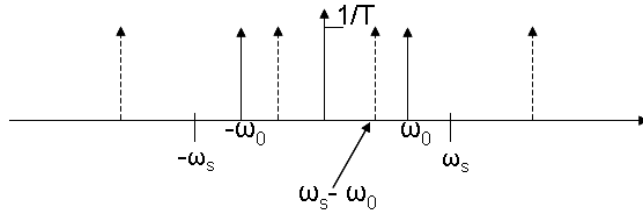


Figura 2.5: Effetto del campionamento di un segnale sinusoidale, per  $\omega_s < 2\omega_M$ . La frequenza  $\omega_s - \omega_0$  è minore di  $\omega_0$

Se consideriamo solo le frequenze entro  $\omega_s/2$ , sopravvivono solo  $\omega_s - \omega_0$ , dunque:

$$x_p(t) = \cos[(\omega_s - \omega_0)t] \neq x(t)$$

In altre parole, il segnale campionato rappresenta un segnale con una frequenza minore di quella del segnale originale (alias di campionamento). Se, invece, la

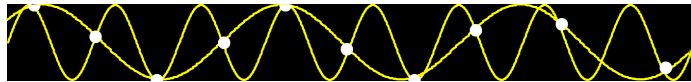


Figura 2.6: Esempio di aliasing da campionamento, i punti sono a frequenza minore del segnale e identificano una funzione di frequenza pari alla differenza tra quella di campionamento e quella del segnale

frequenza di campionamento è maggiore della frequenza di Nyquist, applicando il taglio a  $\omega_s/2$  le frequenze originali sopravvivono al taglio, mentre quelle delle repliche vengono tagliate.



## Capitolo 3

# Elementi di Campi

### 3.1 Definizioni

Una quantità fisica che assuma un valore ben definito in ogni punto dello spazio, definisce un *campo* di questa quantità. Per esempio, la temperatura dell'aria sulla superficie terrestre, varia con continuità da punto a punto, ma in ogni punto in un determinato istante assume un valore ben determinato (per es. da una misura a quell'istante), definisce il campo termico al momento della misura. Se la quantità considerata è uno scalare, come, appunto, la temperatura o la pressione, definisce un campo scalare, se vettoriale, come la velocità, una forza, definisce un campo vettoriale.

#### 3.1.1 Campo Scalare

Un campo scalare è definito da una funzione  $U(x, y, z)$  del punto determinato dalle coordinate  $x, y, z$ . In corpo riscaldato, la temperatura varia da punto a punto e si può definire il campo termico nel volume o sulla superficie del corpo. Se consideriamo un punto  $M$  e tracciamo una linea orientata  $\ell$ , attraverso il punto  $M$ , preso un altro punto  $M'$  sulla medesima retta, possiamo considerare la derivata del campo rispetto alla direzione  $\ell$ , come limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{U(M') - U(M)}{MM'} \quad (3.1)$$

In ciascun punto si possono definire infinite derivate in tutte le direzioni, ma queste possono tutte essere espresse in termini delle derivate rispetto alle direzioni di  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(\ell, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\ell, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(\ell, z) \quad (3.2)$$

Se la linea  $\ell$ , invece di essere una retta è una curva  $s$  che attraversa il punto  $M$ , la (3.2) continua ad essere valida, pur di considerare i coseni, come i coseni direttori della tangente alla curva  $s$  nel punto  $M$  nella direzione di  $M'$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (3.3)$$

### Superfici di livello

Consideriamo le superfici caratterizzate dalla proprietà che in ciascun loro punto, il campo scalare  $U(M)$  ha lo stesso valore costante  $C$ . Queste sono la famiglia di superfici di livello  $U(M) = C$  definite dalla costante  $C$ . Per es. nel caso del corpo riscaldato, le superfici di uguale temperatura. Sia  $S$  la superficie di livello che passa attraverso il punto  $M$  (Fig. 3.1). Prendiamo 3 direzioni perpendicolari

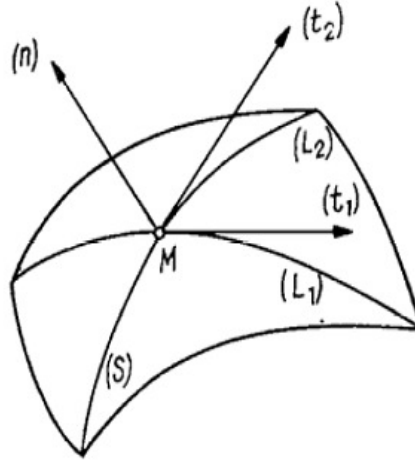


Figura 3.1: Definizione delle direzioni su una superficie di livello attraverso il punto  $M$

attraverso  $M$ , la normale alla superficie  $\vec{n}$ , e le direzioni  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$ , sul piano tangente. Siccome  $U(M)$  è costante lungo tutti i punti di  $S$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = \frac{\partial U}{\partial t_2} = 0 \quad (3.4)$$

e dunque, presa una qualsiasi direzione  $\ell$ , vista la (3.3), sarà:

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial n} \frac{d\vec{n}}{d\ell} \quad (3.5)$$

### Gradiente di un campo scalare

Se consideriamo un vettore di modulo  $\frac{\partial U}{\partial n}$  nella direzione  $\vec{n}$ , normale alla superficie di livello, la cui proiezione in una direzione  $\ell$  dà la derivata di  $U$  rispetto ad  $\ell$  questo definisce il *gradiente* del campo scalare  $U$ :

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \text{grad}_\ell U(M) \quad (3.6)$$

dove  $\text{grad}_\ell U(M)$  è la proiezione del gradiente di  $U$  lungo  $\ell$ , nel punto  $M$ . Viste le (3.2) e (3.5), possiamo scrivere:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \ell} = \vec{\nabla} U(M) \cdot \vec{\ell} \quad (3.7)$$

in cui abbiamo introdotto l'operatore vettoriale  $\vec{\nabla}$  (*nabla* dal greco  $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ , arpa), tale che  $\vec{\nabla}U \equiv \text{grad}U(M)$ . In coordinate cartesiane:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

La direzione del gradiente di  $U$  è sempre quella della normale alla superficie di livello nel verso in cui il campo è crescente.

### Un esempio di uso del gradiente: il flusso di calore

Se i punti di un corpo hanno temperature differenti, il calore tenderà a passare da quelli a temperatura maggiore a quelli a temperatura minore. La quantità di calore che attraversa un elemento di superficie  $dS$  nell'unità di tempo  $dt$ , sarà proporzionale a  $dS$ ,  $dt$ , e alla derivata della temperatura nella direzione  $\mathbf{n}$  normale a  $dS$ :

$$dQ = k dS dt \left| \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right| \quad (3.8)$$

in cui, il coefficiente di proporzionalità  $k$  è la conducibilità termica. Il modulo è necessario perché, se utilizziamo la definizione di gradiente, questa porta ad un segno negativo, perché il flusso di calore va nella direzione delle temperature decrescenti, mentre il gradiente di  $T$ , va nella direzione opposta per definizione. Dunque, la (3.8) si può scrivere:

$$dQ = k \left| \vec{\nabla}T \cdot \mathbf{n} \right| dS dt \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Campi vettoriali

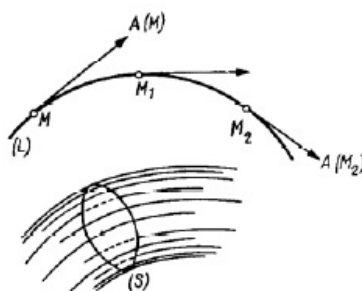


Figura 3.2: Linea del campo vettoriale e tubo vettoriale

Consideriamo ora un campo vettoriale: ovvero un vettore  $A(M)$  il cui modulo e direzione sono definiti in ciascun punto  $M$  dello spazio occupato dal campo. Definiamo una linea del campo vettoriale, la curva tale che la tangente in ogni punto abbia la direzione del campo  $A(M)$  in quel punto. Si può mostrare che la linea di campo ha equazione:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (3.10)$$

Se  $A_x, A_y, A_z$  sono continue e con derivate continue, per ogni punto  $M$  passa una ed una sola linea di campo vettoriale. Se tracciamo le linee di campo attraverso tutti i punti di una superficie  $S$ , il loro insieme forma un *tubo vettoriale* (Fig.3.2). Per esempio, un tubo di flusso è l'insieme dei vettori densità  $\times$  velocità di un fluido attraverso una superficie.

### 3.1.3 Formule integrali utili

#### Formola di Ostrogradskij

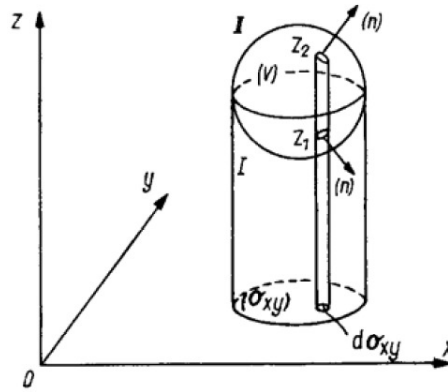


Figura 3.3: Definizione delle variabili per la formula di Ostrogradskij

Consideriamo una funzione  $R(x,y,z)$  continua e con le derivate continue in un dominio  $V$  limitato dalla superficie  $S$ , e consideriamo l'integrale su  $dV$  della funzione  $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ .

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dV &= \int_{\sigma_{xy}} d\sigma_{xy} \int \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz = \\ &= \int_{\sigma_{xy}} [R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)] d\sigma_{xy} = \\ &= \int R(x,y,z) \cos(n,z) dS \end{aligned} \quad (3.11)$$

Analogamente posso procedere per l'integrazione di altre due funzioni  $P(x,y,z)$  e  $Q(x,y,z)$  rispettivamente lungo  $x$  e  $y$  e ottenere la *Formola di Ostrogradskij*

$$\begin{aligned} \int_V \left( \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dV = \\ = \int_S [P(x,y,z) \cos(n,x) + Q(x,y,z) \cos(n,y) + R(x,y,z) \cos(n,z)] dS \end{aligned} \quad (3.12)$$

### Divergenza di un campo vettoriale

Se applichiamo la (3.12) alle  $A_x, A_y, A_z$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_V \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV &= \\ \int_S [A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)] dS &= \\ \int_S \vec{A} \cdot \mathbf{n} dS & \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il primo membro della (3.13) è l'integrale sul volume della *divergenza* del vettore  $\vec{A}$ , che risulta uguale al flusso del vettore  $\vec{A}$  attraverso la superficie  $S$  che racchiude il volume:

$$\int_V \text{div } \vec{A} dV = \Phi_S(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.14)$$

avendo definito:

$$\boxed{\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}} \quad (3.15)$$

### 3.1.4 Potenziale e Rotore del campo vettoriale

Consideriamo un campo di forze  $\mathbf{F}$ , il lavoro compiuto dal campo o sul campo è

$$L = \int \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$$

dove  $d\mathbf{r}$  è lo spostamento infinitesimo. Quando il lavoro non dipende dal percorso ma solo dai punti iniziali e finali  $A$  e  $B$ , allora il campo è *conservativo* possiamo scrivere

$$L = \int_A^B \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = U(A) - U(B) = -\Delta U \quad (3.16)$$

dove  $U$  è una funzione scalare del punto, che prende il nome di *potenziale* del campo  $\mathbf{F}$ . Scrivendo  $\mathbf{F}$  per componenti

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$$

quindi:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (3.17)$$

Vista la 3.16, l'integrale lungo una curva chiusa è nullo, quindi

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Riscrivendo per componenti la 3.17:

$$\mathbf{F} = - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \hat{e}_i$$

possiamo dire  $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$ . Se  $F \in C^1$  e  $U \in C^2$  allora possiamo uguagliare:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$$

ovvero

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \nabla_i F_j = 0$$

Il secondo membro altro non è che la componente k della espressione:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{F}) \quad (3.18)$$

dove abbiamo definito il rotore di F.

Dunque, per le forze conservative, il rotore è nullo, e, pertanto si dicono irrotazionali. In generale (Smirnov II), dato un contorno chiuso che delimita una superficie  $\sigma$ , e data una funzione  $P(x, y) \in C^2$ :

$$\iint \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} d\sigma = \int_A^B dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_A^B [P(x, y_2) - P(x, y_1)] dx$$

dove  $y_1(x), y_2(x)$  sono le porzioni inferiore (I) e superiore (II) del contorno limitato in  $x=A$  e  $x=B$ . Sicché: il primo addendo è

$$\int_A^B P(x, y_2) dx = - \int_{B(II)}^A P(x, y) dx$$

e, analogamente, il II addendo è l'integrale da A a B. In definitiva:

$$\iint \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} d\sigma = - \oint_{\ell} P(x, y) dx$$

Possiamo fare lo stesso ragionamento per una funzione  $Q(x, y)$ :

$$\iint \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)] dy = \int_{\ell} Q(x, y) dy$$

Dunque, sommando:

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \int_{\ell} P dx + Q dy$$

In 3 dimensioni possiamo introdurre un'altra funzione R e ripetere il tutto in z. All'integrale di volume, applichiamo la formula di Ostrogradskij 3.14, dunque:

$$\begin{aligned} \int_i P dx + Q dy + R dz &= \\ &= \iint \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right. \\ &+ \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) \\ &+ \left. \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS = \\ &= \iint_S \nabla \times (P, Q, R) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.19) \end{aligned}$$

# Capitolo 4

## Solidi

### 4.1 Deformazioni e sforzi

Consideriamo le proprietà elastiche di un solido visto come un mezzo continuo omogeneo. quest'approssimazione è in genere valida per onde elastiche di lunghezza d'onda maggiore di  $10^{-8} m$ . Le idee fisiche alla base di questa trattazione sono essenzialmente la II legge di Newton e la legge di Hooke. La legge di Hooke dice che la deformazione è direttamente proporzionale allo sforzo; questa legge si applica al caso di piccole deformazioni.

#### 4.1.1 Deformazioni

Consideriamo tre assi ortogonali unitari  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  solidali al solido indeformato (Fig.(4.1)); dopo una deformazione gli assi coordinati saranno cambiati in orientazione e lunghezza. I nuovi assi  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  possono essere descritti in funzione

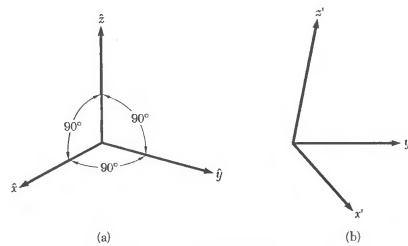


Figura 4.1: Assi coordinati per la descrizione delle deformazioni elastiche nel caso indeformato (a) e dopo la deformazione (b)

dei vecchi, al primo ordine:

$$\begin{cases} x' = (1 + \epsilon_{xx})\hat{x} + \epsilon_{xy}\hat{y} + \epsilon_{xz}\hat{z} \\ y' = \epsilon_{yx}\hat{x} + (1 + \epsilon_{yy})\hat{y} + \epsilon_{yz}\hat{z} \\ z' = \epsilon_{zx}\hat{x} + \epsilon_{zy}\hat{y} + (1 + \epsilon_{zz})\hat{z} \end{cases} \quad (4.1)$$

I termini  $\epsilon_{\alpha\beta}$  definiscono le *deformazioni* del solido e sono adimensionali. Se anche gli assi originali avevano dimensioni unitarie, non altrettanto si può dire

degli assi deformati. Per provarlo possiamo calcolare il modulo quadro dell'asse deformato:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1 + 2\epsilon_{xx} + \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2$$

dunque, al primo ordine è  $x' = 1 + \epsilon_{xx}\hat{x}$ .

L'effetto di una deformazione su un punto originariamente posto ad  $\mathbf{r} = \hat{x}\mathbf{x} + \hat{y}\mathbf{y} + \hat{z}\mathbf{z}$  sarà di spostare il punto in  $\mathbf{r}'$ . Lo spostamento indotto dalla deformazione è

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = x(\hat{\mathbf{x}}' - \hat{\mathbf{x}}) + y(\hat{\mathbf{y}}' - \hat{\mathbf{y}}) + z(\hat{\mathbf{z}}' - \hat{\mathbf{z}}) \quad (4.2)$$

sostituendo le (4.1) e raccogliendo i termini, otteniamo:

$$\mathbf{R} = (x\epsilon_{xx} + y\epsilon_{yx} + z\epsilon_{zx})\hat{\mathbf{x}} + (x\epsilon_{xy} + y\epsilon_{yy} + z\epsilon_{zy})\hat{\mathbf{y}} + (x\epsilon_{xz} + y\epsilon_{yz} + z\epsilon_{zz})\hat{\mathbf{z}} \quad (4.3)$$

che può essere espressa tramite tre parametri di deformazione locale  $u(\mathbf{r})$ ,  $v(\mathbf{r})$  e  $w(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{R} = u(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + v(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + w(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}} \quad (4.4)$$

Per  $\mathbf{r}$  piccoli, confrontando le (4.3) e (4.4) otteniamo (con  $\mathbf{R}(0) = 0$ ):

$$x\epsilon_{xx} \simeq x \frac{\partial u}{\partial x}; \quad y\epsilon_{yx} \simeq y \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \dots \quad (4.5)$$

Normalmente si lavora con dei parametri  $e_{\alpha\beta}$  definiti a partire dai parametri  $\epsilon_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} e_{xx} = \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{xy} = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = \epsilon_{yx} + \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad e_{xz} = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{z}' = \epsilon_{zx} + \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ e_{yx} = e_{xy}; \quad e_{yy} = \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{yz} = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z}' = \epsilon_{zy} + \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_{zx} = e_{xz}; \quad e_{zy} = e_{yz}; \quad e_{zz} = \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.6)$$

### 4.1.2 Dilatazione

L'aumento relativo di volume dovuto ad una deformazione è la *dilatazione*. Il cubo di lati  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$ , dopo la deformazione avrà un volume:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z}' = \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & 1 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & 1 + \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \simeq 1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + O(\epsilon^2) \quad (4.7)$$

dunque la dilatazione è:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (4.8)$$

### 4.1.3 Sforzi

Per i solidi una forza applicata ad una superficie unitaria è uno *sforzo*. Esistono 9 componenti dello sforzo, ciascuna indicata da una lettera maiuscola con un pedice. La lettera indica la direzione dello sforzo e il pedice indica la direzione della normale alla superficie a cui è applicata, per cui, per es.  $X_y$  è la forza applicata

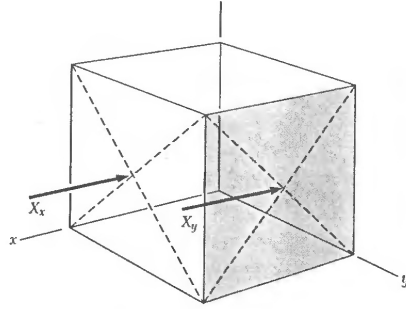


Figura 4.2: Definizione delle componenti dello sforzo:  $X_x$  è la forza applicata nella direzione di  $x$  ad una faccia con normale nella direzione  $x$ ;  $X_y$  è applicata in direzione  $x$  alla faccia la cui normale è nella direzione  $y$

in direzione dell'asse  $x$  alla faccia la cui normale giace lungo l'asse  $y$  (vedi Fig. 4.2). Il numero di componenti può essere ridotto se si applica la condizione che, per un cubo elementare, l'accelerazione angolare sia nulla e dunque la torsione sia nulla. Da questo segue che (Fig. 4.3)  $X_y = Y_x$ ,  $Y_z = Z_y$  e  $Z_x = X_z$ . In totale rimangono 6 componenti indipendenti:  $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_x, Z_x$ . Per convenzione il segno positivo è quello della trazione, la pressione ha quello negativo.

Una notazione alternativa per le componenti dello sforzo, che permette espressioni più compatte, è quella di una lettera (per es  $S$  o  $\sigma$ ) con due indici, il primo indice indica l'asse cui è ortogonale il piano, la seconda la direzione. Per es.  $\sigma_{12}$  è la trazione nella direzione di  $x_2$  del piano ortogonale a  $x_1$ . In questo modo la componente  $i$ -esima di una trazione, che è data dalla somma delle componenti  $i$ -esime sulle facce ortogonali all'asse  $j$  si scrive:

$$t_i = \sum_j \sigma_{ij} n^j$$

in cui, spesso, il simbolo di sommatoria viene omissso con la convenzione che indici uguali, in alto ed in basso indicano la somma rispetto a quell'indice (si saturano, in gergo).

Da questa notazione è evidente che lo sforzo forma un tensore di rango 2 (una matrice) con tre righe e tre colonne (9 elementi), che, con le considerazioni fatte precedentemente è simmetrico:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , il che porta le componenti indipendenti a 6:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Le componenti normali dello sforzo sono quelle sulla diagonale, le componenti *di taglio* sono quelle off-diagonal. Il tensore degli sforzi può essere diagonalizzato in modo che non compaiano sforzi di taglio sulle facce ortogonali agli assi principali.

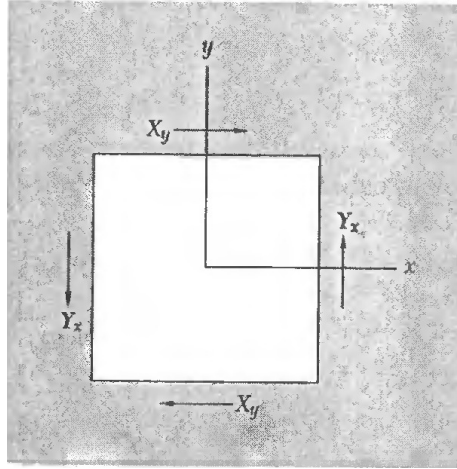


Figura 4.3: Dimostrazione che per un corpo in equilibrio  $X_y = Y_x$ . Le forze in ciascuna delle due direzioni si annullano. Anche il momento rispetto all'origine si annulla se  $X_y = Y_x$

## 4.2 Onde S e P

### 4.2.1 Equazioni del moto

Se con la notazione sopra esposta vogliamo scrivere la legge di Newton  $F=ma$ , applicata ad un solido, otteniamo:

$$\sum_i F_i = \int_V f_i dV + \int_S t_i dS = \int_V f_i dV + \int_S \sigma_{ij} n^j dS = ma_i \quad (4.10)$$

Per il teorema della divergenza, possiamo scrivere:

$$\int_S \sigma_{ij} n^j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$$

da cui si deduce l'equazione di Navier:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (4.11)$$

Ignorare le forze di volume  $f_i$ , semplifica le cose ma può essere pericoloso quando si trattano oscillazioni a bassa frequenza (per es. quando si considerano le oscillazioni di tutta la terra, le forze di gravità sono importanti).

La relazione che lega le deformazioni agli sforzi se è lineare è la legge di Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon^{kl} \quad (4.12)$$

in cui abbiamo definito il tensore di rigidità (stiffness) del quarto ordine  $C_{ijkl}$  le cui componenti sono note come costanti di rigidità elastica o moduli di elasticità.

La legge (4.12), sostituita nella (4.11) e con le definizioni (4.5) ci fornisce la legge di propagazione di una deformazione in un solido:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} C_{ijkl} \frac{\partial u^k}{\partial x_l} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^j \partial x^l} \quad (4.13)$$

Le 81 componenti del tensore di rigidità, possono essere ridotte grazie a numerose considerazioni: in primo luogo, la simmetria delle  $\sigma_{ij}$  e delle  $\epsilon_{kl}$  riduce il numero delle componenti indipendenti a 36 (prodotto delle 6  $\sigma$  indipendenti per le 6  $\epsilon$  indipendenti); altre considerazioni meno banali portano le componenti indipendenti a 21. Per ottenere qualche risultato, però dobbiamo ridurre la complessità del mezzo. Il caso più semplice è quello di un mezzo isotropo e omogeneo. In questo caso si dimostra che (vedi par. ??):

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.14)$$

dove le costanti  $\lambda$  e  $\mu$  sono le costanti di Lamé. Sostituendo la (4.14) nella (4.12) si ottiene:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon^{kl} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (4.15)$$

ma  $\delta_{kl} \epsilon^{kl} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \partial u_k / \partial x_k$  che è l'aumento frazionario di volume  $\Delta$ , Dunque:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \Delta + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (4.16)$$

La costante di Lamé  $\mu$  è nota come modulo di deformazione o rigidità, la  $\lambda$ , di per sé non ha significato fisico ma in combinazione con l'altra definisce la costante  $\kappa = \lambda + 2/3\mu$  nota come incomprimibilità o modulo di volume. La rigidità è piccola per materiali con bassa viscosità. Il modulo di volume esprime la resistenza ai cambi di volume  $\kappa = -\partial P / \partial \Delta$  in cui P è la pressione. Concludendo, sostituendo la (4.16) nella (4.13) otteniamo:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (4.17)$$

### 4.2.2 Onde

Possiamo scrivere la (4.17) in notazione vettoriale come:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.18)$$

Facendo uso della identità vettoriale  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$  applicata al vettore  $\nabla$  si ottiene che:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

e di conseguenza:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

Sostituendo nella (4.18) si ottiene:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (4.19)$$

che è formata da un primo termine dilazionale ed un secondo termine rotazionale. L'equazione (4.19) è di difficile risoluzione in generale, e si preferisce separarla in equazioni che considerino solo la parte rotazionale o solo quella dilazionale. Per eliminare la parte rotazionale si fa uso della proprietà  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  che è evidente se si pensa che il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale a entrambi i vettori. Prendendo la divergenza della (4.19), allora si ottiene:

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4.20)$$

e, detta  $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ :

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Theta \quad (4.21)$$

che è l'equazione (scalare) della propagazione di un'onda di volume attraverso il mezzo con una velocità di propagazione:

$$v_s = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa + 4/3\mu}{\rho}} \quad (4.22)$$

Analogamente, prendendo il rotore, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 (\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} = \beta \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.23)$$

che è l'equazione vettoriale della propagazione di un disturbo rotazionale con velocità  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ . Le onde dilazionali e rotazionali sono note rispettivamente come *onde P* e *onde S*.

Un modo più elegante per ottenere i risultati appena mostrati è utilizzare il teorema di Helmholtz che dice che qualsiasi campo vettoriale può essere decomposto nella somma di un gradiente di un potenziale scalare e del rotore di un campo vettoriale:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \quad (4.24)$$

$$\nabla \cdot \Psi = 0 \quad (4.25)$$

Possiamo riscrivere la (4.20) in termini dei campi  $\Phi$  e  $\Psi$

$$\begin{aligned} \rho \left( \nabla \ddot{\Phi} + \nabla \times \ddot{\Psi} \right) &= (\lambda + 2\mu) \nabla [\nabla \cdot (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi)] + \\ &\quad - \mu [\nabla \times \nabla \times (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

dalla quale, eseguendo i prodotti misti ed eliminando le divergenze nulle:

$$\nabla \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \rho \ddot{\Phi} \right] + \nabla \times \left[ \mu \nabla^2 \Psi - \rho \ddot{\Psi} \right] = 0 \quad (4.27)$$

che è verificata se sono separatamente nulli gli addendi nelle due variabili e definisce le velocità delle onde di pressione:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

e per le onde di taglio

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

### 4.2.3 Rifrazione e riflessione su una superficie di discontinuità

Consideriamo ora un'onda  $u(\mathbf{x}, t)$  che vibri solo nel piano  $xz$ , incidente su una superficie di separazione fra due mezzi, posta nel piano  $xy$ . Dunque sarà

$\partial\Phi/\partial y = 0$  e analogamente per  $\Psi$ . Il gradiente di  $\Phi$  è :

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

e il rotore di  $\Psi$ :

$$\nabla \times \psi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\Psi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

che contiene una parte che vibra nel piano  $xz$ , che chiameremo  $\Psi_V$  ed una parte che vibra lungo  $y$ , che chiameremo  $\Psi_H$ . di conseguenza, per il vettore completo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Se per questa cerchiamo soluzioni oscillanti del tipo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{u}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d\omega d^3k \quad (4.31)$$

dalla (4.27) ricaviamo le *relazioni di dispersione* per le onde di pressione e di taglio:

$$\omega^2\Phi - \alpha^2|\mathbf{k}|^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\alpha^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (4.32)$$

$$\omega^2\Psi - \beta^2|\mathbf{k}|^2\Psi = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\beta^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (4.33)$$

Sulla superficie di separazione le tensioni  $t_i = \sigma_{ij}n^j$  devono essere nulle. Se consideriamo il vettore normale alla superficie di separazione, questi sarà lungo l'asse  $z$ , dunque  $\mathbf{t} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$ .

Consideriamo ora l'espressione del tensore degli sforzi (4.16) applicato al vettore (4.30). Avremo, per le componenti che ci interessano:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 2\mu \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial z} \\ \sigma_{23} &= 0 \\ \sigma_{33} &= \lambda \nabla^2\Phi + 2\mu \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Per quello che riguarda le onde  $\Psi_V$  avremo:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \mu [\partial_3(-\partial_3\Psi_2) + \partial_1\partial_1\Psi_2] = \mu \left( \frac{\partial^2\Psi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi_y}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{23} &= 0 \\ \sigma_{33} &= 2\mu \frac{\partial^2\Psi_y}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (4.35)$$

mentre per le onde  $\Psi_H$  ci sarà solo

$$\sigma_{23} = \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z \partial x} \right)$$

Siccome l'onda P incidente vibra solo nel piano  $xz$ , le eventuali onde riflesse e rifratte dovranno vibrare solo nello stesso piano, dunque saranno solo P e SV e non ci saranno onde SH.

Le condizioni al contorno sulla superficie di separazione: l'annullarsi degli sforzi e la continuità degli spostamenti, forniranno le relazioni fra le ampiezze delle onde incidenti, riflesse e rifratte. Se consideriamo le (4.32) e (4.33) riferite al piano  $xz$ , detti  $\theta_i$ ,  $\theta_{i'}$ ,  $\phi$  rispettivamente gli angoli di incidenza, e di riflessione delle onde P e SV e  $\theta_r$  e  $\phi_r$  gli angoli di rifrazione delle onde P e SV, sarà:

$$\mathbf{k}_P^{\text{inc}} = \left( \sin(\theta_i) = \omega \frac{\sin(\theta_i)}{\alpha}, \quad 0, \quad -\cos(\theta_i) = -\omega \frac{\cos(\theta_i)}{\alpha} \right) \quad (4.36)$$

$$\mathbf{k}_P^{\text{rifl}} = \left( \omega \frac{\sin(\theta_{i'})}{\alpha}, \quad 0, \quad \omega \frac{\cos(\theta_{i'})}{\alpha} \right) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{k}_{SV}^{\text{rifl}} = \left( \omega \frac{\sin(\phi)}{\beta}, \quad 0, \quad \omega \frac{\cos(\phi)}{\beta} \right) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{k}_P^{\text{rifr}} = \left( \sin(\theta_r) = \omega \frac{\sin(\theta_r)}{\alpha'}, \quad 0, \quad \cos(\theta_r) = \omega \frac{\cos(\theta_r)}{\alpha'} \right) \quad (4.39)$$

$$(4.40)$$

Quindi per i potenziali, sarà:

$$\Phi^{\text{inc}} = A e^{-i\omega \left( t - \frac{\sin(\theta_i)}{\alpha} x + \frac{\cos(\theta_i)}{\alpha} z \right)} \quad (4.41)$$

$$\Phi^{\text{rifl}} = B e^{-i\omega \left( t - \frac{\sin(\theta_{i'})}{\alpha} x - \frac{\cos(\theta_{i'})}{\alpha} z \right)} \quad (4.42)$$

$$\Psi^{\text{rifl}} = C e^{-i\omega \left( t - \frac{\sin(\phi)}{\beta} x - \frac{\cos(\phi)}{\beta} z \right)} \quad (4.43)$$

per  $z = 0$  deve essere nulla la somma delle tre onde; dunque dovranno essere gli esponenti uguali fra loro e nulla la somma delle costanti. Da ciò si ricava che:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\alpha} = \frac{\sin(\theta_{i'})}{\alpha} = \frac{\sin(\phi)}{\beta} = p \quad (4.44)$$

che ci dice che gli angoli di incidenza e riflessione delle onde P sono uguali, e:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\phi)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Analogamente possiamo ricavare le relazioni fra l'angolo dell'onda P incidente e gli angoli delle onde rifratte:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} = \frac{\alpha}{\alpha'} \quad (4.45)$$

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\phi_r)} = \frac{\alpha}{\beta'} \quad (4.46)$$

### 4.3 Oscillazioni di un reticolo cristallino monodimensionale

Fin'ora abbiamo considerato i solidi come dei continui omogenei. Nei materiali cristallini, possiamo considerare gli atomi che compongono i cristalli, in posizioni che formano un reticolo periodico: il *reticolo cristallino*. Gli atomi che compongono il reticolo cristallino si attraggono reciprocamente con una forza che dipende dal tipo di cristallo considerato (ionico, covalente, molecolare, etc...) e, se spostati dalla posizione di equilibrio, tendono a ritornarci, oscillando. In prima approssimazione possiamo considerare che l'attrazione fra gli atomi del cristallo sia solo fra i primi vicini, trascurando l'attrazione con gli atomi a distanze maggiori di un passo reticolare.

#### 4.3.1 Reticoli di Bravais

Un concetto fondamentale nella descrizione dei cristalli è quello del reticolo di Bravais che specifica la matrice periodica in cui sono organizzate le unità ripetute del cristallo. Queste unità, possono essere composte da uno o più atomi o molecole, il reticolo di Bravais descrive solo la geometria della struttura periodica sottostante.

Un reticolo di Bravais tridimensionale può essere descritto da tutti i punti che abbiano un vettore di posizione:

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \quad (4.47)$$

dove  $\mathbf{a}_i$  sono tre vettori non complanari detti i vettori *primitivi* del reticolo e  $n_i$  tre numeri interi. È importante che, non solo l'arrangiamento ma anche l'orientazione di un reticolo di Bravais deve apparire lo stesso da qualunque punto del reticolo. Per esempio, un reticolo bidimensionale a nido d'ape (esagonale) non è un reticolo di Bravais, perché appare lo stesso se visto da punti adiacenti solo se si ruota di  $180^\circ$ .

Un volume di spazio che, traslato lungo tutti i vettori primitivi in un reticolo di Bravais, riempie tutto lo spazio senza sovrapposizioni o buchi, è detto *cella primitiva* del reticolo. La scelta della cella primitiva non è univoca, ma questa deve contenere esattamente un punto reticolare. Pertanto se  $n$  è la densità di punti, qualunque sia la scelta, il volume della cella sarà  $1/n$ . Un cristallo fisico può essere descritto dando il suo reticolo di Bravais e la disposizione degli atomi (molecole, ioni...) nella cella primitiva. Questo insieme è noto come la *struttura cristallina* e consiste della medesima unità, detta *base*, ripetuta in tutti i punti del reticolo di Bravais. Per esempio, il reticolo bidimensionale esagonale, pur non essendo in sé un reticolo di Bravais monoatomico, può essere considerato un reticolo di Bravais con una base composta da due punti (vedi Fig4.4).

#### 4.3.2 Oscillazioni in un reticolo monodimensionale monoatomico

Consideriamo, ora un reticolo cristallino monodimensionale. Gli ioni, di massa  $M$ , sono in equilibrio in posizioni:  $\mathbf{R} = n\mathbf{a}$ . Se lo ione in posizione  $n\mathbf{a}$  si sposta di  $\mathbf{u}(n\mathbf{a})$ , possiamo considerare che questo ione sia attratto dagli atomi in posizione  $(n-1)\mathbf{a}$  e  $(n+1)\mathbf{a}$  con una forza che è proporzionale alla distanza (se anche non

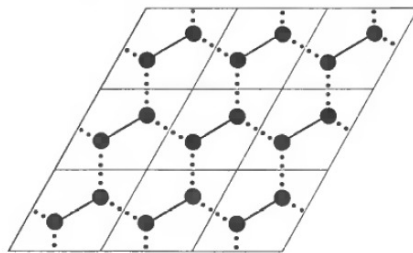


Figura 4.4: Il reticolo esagonale visto come reticolo con una base di due punti

è così, lo si consideri come uno sviluppo in serie al primo ordine). Se chiamiamo  $K$ , la costante elastica che lega gli atomi fra loro (la costante di proporzionalità fra la forza e la distanza reciproca, che, se gli atomi sono tutti uguali sarà la stessa per qualunque coppia), allora, possiamo scrivere l'equazione di Newton per l'atomo in posizione  $n\mathbf{a}$ , questo all'aumentare della distanza tra  $n$  e  $(n-1)$  viene tirato verso sinistra, quindi  $F = -K(u_n - u_{n-1})$ , al contrario con  $n+1$ , la trazione è verso destra:  $F = K(u_{n+1} - u_n)$ , sicché:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{u}}(n\mathbf{a}) &= K \{ \mathbf{u}((n+1)\mathbf{a}) - \mathbf{u}(n\mathbf{a}) - [\mathbf{u}(n\mathbf{a}) - \mathbf{u}((n-1)\mathbf{a})] \} \\ &= K \{ \mathbf{u}((n-1)\mathbf{a}) - 2\mathbf{u}(n\mathbf{a}) + \mathbf{u}((n+1)\mathbf{a}) \} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Cerchiamo soluzioni del tipo:

$$\mathbf{u}(n\mathbf{a}) = e^{i(kna - \omega t)} \quad (4.49)$$

e imponiamo le condizioni periodiche (di Born Von Neumann):

$$\begin{cases} \mathbf{u}((N+1)\mathbf{a}) = \mathbf{u}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(N\mathbf{a}) \end{cases} \quad (4.50)$$

La seconda delle (4.50) applicate alle 4.49 per  $t = 0$ , implica:

$$\mathbf{u}(N\mathbf{a}) = e^{ikNa} = \mathbf{u}(0) = 1$$

che è verificata solo per  $kNa = 2n\pi$ , e dunque  $k = \frac{2\pi}{a} \frac{n}{N}$ .

Sostituendo la (4.49) nella (4.48), otteniamo:

$$-M\omega^2 e^{i(kna - \omega t)} = K [e^{ika} - 2 + e^{-ikna}] e^{i(kna - \omega t)} = e^{i(kna - \omega t)} 2K [1 - \cos(ka)] \quad (4.51)$$

Da cui si ricava la relazione di dispersione:

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{M} (1 - \cos(ka))} = 2\sqrt{\frac{K}{M} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)} \quad (4.52)$$

Come si vede in Fig. 4.5, la relazione fra  $\omega$  e il numero d'onda, in questo caso non è lineare come nel caso dell'equazione delle onde. Rimane la definizione di velocità di propagazione delle oscillazioni nel mezzo, che, in questo tipo di circostanze dipenderà dalla frequenza della perturbazione:

$$c(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k} \equiv \nabla_k \omega \quad (4.53)$$

### 4.3. OSCILLAZIONI DI UN RETICOLO CRISTALLINO MONODIMENSIONALE 41

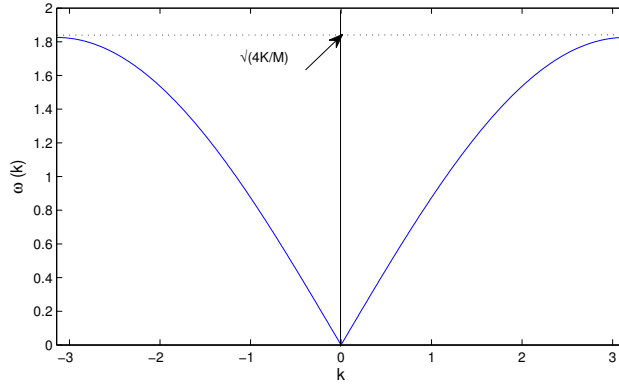


Figura 4.5: Relazione di dispersione per un reticolo monodimensionale monoatomico

Nel caso di reticoli tridimensionali, la velocità del suono potrà essere diversa nelle diverse direzioni.

#### 4.3.3 Oscillazioni in un reticolo monodimensionale con una base

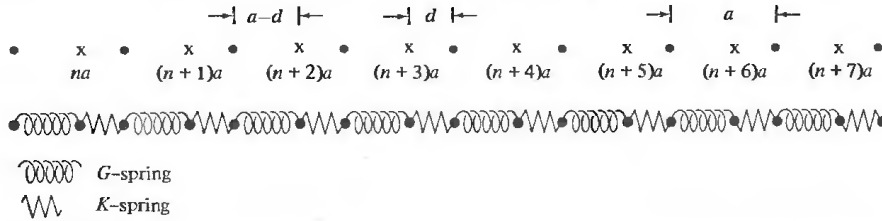


Figura 4.6: Catena monodimensionale di atomi identici connessi da costanti elastiche alternate

Consideriamo adesso una reticolo di Bravais monodimensionale con una base composta da due atomi per cella primitiva, con posizioni di equilibrio  $na$  e  $na+d$  (vedi Fig.4.6). Consideriamo gli atomi identici ma sia  $d \leq a/2$ , in modo che non ci sia sovrapposizione. Gli atomi a distanza  $d$  l'uno dall'altro risentiranno di un'attrazione maggiore rispetto a quelli che distano  $a-d$  dal vicino. Pertanto, potremo considerare due costanti elastiche:  $K$  e  $G$  con  $K > G$  e due spostamenti per ogni cella primitiva: lo spostamento dalla posizione di equilibrio dell'atomo in posizione  $na$ :  $\mathbf{u}_1(na)$ , e lo spostamento di quello in posizione  $na+d$ :  $\mathbf{u}_2(na)$ . Scrivendo le equazioni di Newton per questi due atomi, otteniamo:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{u}}_1(na) &= -K[\mathbf{u}_1(na) - \mathbf{u}_2(na)] - G[\mathbf{u}_1(na) - \mathbf{u}_2([n-1]a)] \\ M\ddot{\mathbf{u}}_2(na) &= -K[\mathbf{u}_2(na) - \mathbf{u}_1(na)] - G[\mathbf{u}_2(na) - \mathbf{u}_1([n+1]a)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Se cerchiamo soluzioni oscillanti del tipo:

$$\mathbf{u}_1(na) = \epsilon_1 e^{i(kna - \omega t)} \quad \mathbf{u}_2(na) = \epsilon_2 e^{i(kna - \omega t)}$$

Sostituendo nelle (4.54), e cancellando i fattori comuni, otteniamo un sistema lineare del primo ordine nelle variabili  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ :

$$\begin{aligned} [M\omega^2 - (K + G)]\epsilon_1 + (K + Ge^{-ika})\epsilon_2 &= 0 \\ (K + Ge^{ika})\epsilon_1 + [M\omega^2 - (K + G)]\epsilon_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

che avrà soluzione se si annulla il determinante dei coefficienti:

$$[M\omega^2 - (K + G)]^2 - [K^2 + G^2 + KG(e^{ika} + e^{-ika})] = 0 \quad (4.56)$$

che è un'equazione di secondo grado in  $\omega^2$  che ha soluzione per:

$$\omega^2 - \frac{K + G}{M} = \pm \frac{1}{M} \sqrt{K^2 + G^2 + 2KG \cos(ka)}$$

e dunque, la relazione di dispersione sarà:

$$\omega = \frac{K + G}{M} \pm \frac{1}{M} \sqrt{K^2 + G^2 + 2KG \cos(ka)} \quad (4.57)$$

che ci dice che per ciascuno degli  $N$  valori di  $k$  ci sono due possibili valori per  $\omega$ , che ci porta a  $2N$  possibili modi di vibrazione, come è giusto per un sistema con  $2n$  gradi di libertà. Le due curve di  $\omega(k)$  sono note come *branche* della relazione di dispersione e sono mostrate in Fig-4.7.

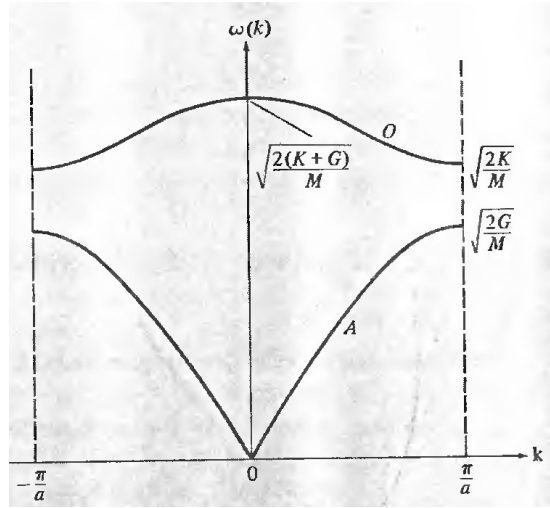


Figura 4.7: Relazione di dispersione per un reticolo monodimensionale con una base di due atomi. La branca inferiore è detta branca acustica ed ha la stessa struttura di quella della catena monoatomica. La branca superiore è detta branca ottica

## Capitolo 5

# Equazione del calore

### 5.1 Impostazione

Supponiamo che ad un corpo di volume  $V$  venga fornita *in un determinato istante* una quantità di calore  $Q$ . Nel volume elementare  $dV$  ci sarà una variazione di quantità di calore  $dQ = C_v dm dT$ , essendo  $C_v$  la capacità termica a volume costante,  $dm = \rho dV$  la massa del volume  $dV$  con densità  $\rho$  e  $dT$  la variazione di temperatura. Dunque, nell'unità di tempo, sarà:

$$(dQ)_v = C_v \rho dV \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (5.1)$$

Il flusso di calore che passa attraverso la superficie  $dS$  del nostro volume elementare  $dV$  nell'unità di tempo è:

$$(dQ)_s = k dS dt \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \quad (5.2)$$

essendo  $k$  la conducibilità termica (dimensioni  $[k] = W m^{-1} K^{-1}$ ), e

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \nabla T \cdot \mathbf{n}$$

la derivata della temperatura nella direzione normale alla superficie considerata.

Integrando su tutta la superficie del volume  $V$ , si ottiene, usando la formula di Ostrogradskij:

$$dQ = \int_S k dt \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \int_V k dt \nabla^2 T dV \quad (5.3)$$

e dunque, uguagliando alla variazione di calore (5.1):

$$\int_V \left( \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T \right) dV = 0 \quad (5.4)$$

Siccome questa equazione deve essere valida per qualsiasi volume, possiamo eliminare l'integrazione e scrivere l'equazione della trasmissione del calore:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \nabla^2 T = 0} \quad (5.5)$$

avendo definito la diffusività termica  $a^2 = \frac{k}{\rho C_v}$ , con dimensioni  $a^2 = m^2 s^{-1}$ .

### 5.1.1 Geoterme e lunghezza di diffusione

In presenza di una sorgente distribuita di calore nel volume considerato, se indichiamo con  $A$  la densità delle sorgenti, l'equazione di diffusione del calore diventa:

$$k\nabla^2 T + A = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.6)$$

che, in una situazione di stato stazionario – ovvero quando la produzione di calore e la sua dispersione sono in equilibrio e non c'è variazione di temperatura nel tempo – diventa, semplicemente:

$$\nabla^2 T = \frac{A}{k} \quad (5.7)$$

L'eq.(5.7), ci permette di stabilire la variazione della temperatura con la profondità. La dipendenza funzionale della temperatura con la profondità prende il nome di *geoterma*. Nel caso di assenza di sorgenti, la temperatura varierà linearmente con la profondità. Infatti, per  $A = 0$  e considerando solo la direzione  $z$ :

$$\nabla^2 T = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial z} = \text{cost} = C \Rightarrow T = Cz + T(z = 0)$$

Un valore tipico per la costante  $C$  (la geoterma) è di  $20Kkm^{-1}$ , che, combinato con il valore medio della conduttività  $k = 3.0Wm^{-1}K^{-1}$ , fornisce il flusso di calore per unità di superficie terrestre:  $0.06Wm^{-2}$ . Con questi valori, per una profondità di 60 km, si raggiungerebbe una temperatura di  $20 \times 60 + 300 = 1500K$ , che è superiore alla temperatura di fusione della maggior parte delle rocce. D'altra parte, da misure di propagazione di onde di taglio nel mantello, risulta che questo si comporta (su scale di tempi brevi) come un solido.

In presenza di sorgenti distribuite nel volume – come per es. in presenza di materiali radioattivi che forniscono calore per decadimento – sarà:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A}{k}x + C \Rightarrow T = \frac{A}{2k}x^2 + Cx + D$$

che, a profondità maggiori, peggiorerebbe la discrepanza con i dati sismici. Bisogna, però, tenere conto di due fattori:

- La temperatura di fusione aumenta con la pressione, e di conseguenza con la profondità
- Oltre una certa profondità, il gradiente di temperatura non è più determinato dal raffreddamento conduttivo ma dalla compressione adiabatica. Il gradiente dovuto a questo processo, in cui la temperatura aumenta per sola compressione, senza scambio con l'esterno, è molto minore di quello conduttivo.

#### Lunghezza di diffusione

L'analisi dimensionale del coefficiente di diffusività,  $a^2 = \frac{k}{\rho C_v}$  suggerisce una lunghezza di scala  $L$  – la *lunghezza di diffusione* – tale che una variazione di temperatura all'istante  $t_0$ , all'istante  $t$ , si sia propagata ad una distanza  $L$  nel mezzo la cui diffusività è  $a^2$ .

Per verificarlo, consideriamo variazioni periodiche di temperatura alla superficie:

$$T(0, t) = T_{max} e^{-i\omega t}$$

Ad una profondità  $z$ , la temperatura avrà l'andamento:

$$T(z, t) = T_{max} e^{i(kz - \omega t)} \quad (5.8)$$

Sostituendo nell'equazione (5.5), otteniamo la relazione *di dispersione*

$$a^2 k^2 = i\omega$$

da cui ricaviamo il "numero d'onda"

$$k = \frac{\sqrt{i\omega}}{a} \quad (5.9)$$

che, sostituito nella (5.8) dà:

$$T(z, t) = T_{max} e^{i\frac{3}{2}\frac{\omega}{a}z - i\omega t} \quad (5.10)$$

Ricordando che  $i^{\frac{3}{2}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$ , raccogliendo i termini reali e immaginari all'esponente:

$$T(z, t) = T_{max} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} \quad (5.11)$$

dove abbiamo definito la lunghezza di penetrazione (o *skin depth*)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega}} a \quad (5.12)$$

come la profondità alla quale l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta ad un fattore 1/e di quella iniziale.

La skin depth, introduce anche un ritardo di fase  $\Delta\phi$  delle oscillazioni visibili alla profondità  $z$  rispetto a quelle in superficie:

$$\Delta\phi = \frac{z}{\delta} = \left(\frac{\omega}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2}} z \quad (5.13)$$

Ad esempio, per una profondità di 1 m d'acqua ( $a^2 = 1.4 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$ ), il ciclo giorno-notte ( $\omega = \frac{2\pi}{24h \times 3600s/h} = 7.3 \times 10^{-5} s^{-1}$ ), è spostato in avanti di 16 secondi.

## 5.2 Soluzione nel caso monodimensionale

Come nel caso dell'equazione delle onde possiamo cercare la soluzione dell'equazione monodimensionale della trasmissione del calore, con la fattorizzazione della soluzione in una parte  $\tau(t)$ , dipendente dal tempo ed una  $X(x)$ , dipendente dallo spazio. L'equazione (5.5):

$$T_t - a^2 T_{xx} = 0 \quad (5.14)$$

con la condizione iniziale:

$$T(x, 0) = f(x) \quad (5.15)$$

ponendo  $T(x, t) = X(x)\tau(t)$ , diventa:

$$\dot{\tau}(t)X(x) - a^2\tau(t)X''(x) = 0 \quad (5.16)$$

Come nel caso dell'eq. delle onde, con le stesse considerazioni per la parte spaziale, possiamo dire:

$$\frac{\dot{\tau}(t)}{a^2\tau(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (5.17)$$

che, per la parte temporale dà, immediatamente:

$$\tau(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t} \quad (5.18)$$

In totale, la soluzione si può scrivere come:

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda \quad (5.19)$$

La condizione iniziale (5.15), può essere scritta esprimendo la  $f(x)$  in funzione della sua trasformata di Fourier (2.18):

$$\begin{aligned} T(x, 0) = f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i\lambda x'} dx' \right] e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda \end{aligned}$$

che è verificata per

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i\lambda x'} dx' \quad (5.20)$$

Sostituendo nella soluzione (5.19) otteniamo:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')dx' \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda(x-x')} d\lambda \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')dx \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos(\lambda(x-x')) d\lambda \end{aligned} \quad (5.21)$$

avendo sfruttato la simmetria dell'integrando rispetto a  $\lambda$  e la definizione di coseno in termini di esponenziali complessi. L'integrale (5.21) è del tipo (Smirnov [81])

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos(\beta x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

Dunque, la soluzione completa dell'equazione di trasmissione del calore sarà:

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2 t}} dx' \quad (5.22)$$

In particolare, se  $f(x') = \delta(x')$  (il calore inizialmente è somministrato in un punto a  $x'$ ), la soluzione è l'integrando che è la distribuzione di temperatura risultante dalla somministrazione istantanea all'istante  $t = 0$  di una quantità di calore  $\rho C_v$  nel punto  $x=x'$ .

### 5.3 Soluzione per spazio semi-infinito

La soluzione dell'equazione si può trovare più facilmente considerando uno spazio semi-infinito, come per es. il caso della propagazione del calore dalla superficie terrestre verso l'interno (o viceversa) quando si consideri infinito il raggio terrestre rispetto alle distanze di interesse ([Turcotte 4.15]).

Riscriviamo l'equazione in termini della profondità:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_v} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T(z, t = 0) = T_0 \\ T(z = 0, t) = T_1 \\ T(z = \infty, t) = T_0 \end{cases} \quad (5.23)$$

che indicano che all'istante  $t=0$ , il semispazio, inizialmente è a temperatura  $T_0$ , per  $t>0$ , la superficie viene mantenuta a temperatura  $T_1$ . Il calore si propagerà verso l'interno se  $T_1 > T_0$  (viceversa il semispazio si raffredderà se  $T_1 < T_0$ ) e a profondità infinita, la temperatura sarà quella iniziale. Se facciamo il cambiamento di variabile:

$$\theta = \frac{T(z, t) - T_0}{T_1 - T_0} \quad (5.24)$$

l'Equazione diventa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5.25)$$

le condizioni(5.23), saranno:

$$\begin{cases} \theta(z, 0) = 0 \\ \theta(0, t) = 1 \\ \theta(\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Effettuando, l'ulteriore cambiamento di variabili :

$$\eta(z, t) = \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (5.27)$$

risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left( -\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{1}{2t} \right) = -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

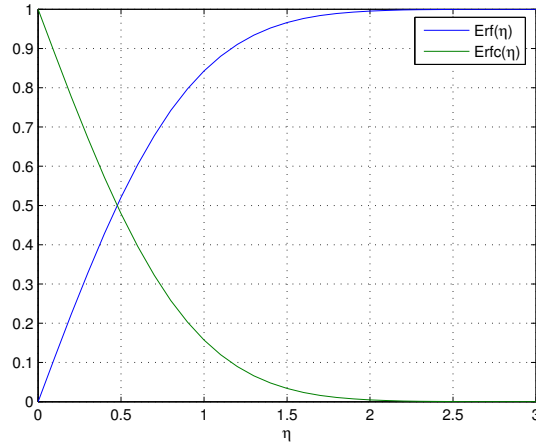


Figura 5.1: Andamento funzionale delle funzioni  $\text{Erf}(\eta)$  e  $\text{Erfc}(\eta)$  per  $\eta$  positivi

Sostituendo nella (5.25), otteniamo:

$$-\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (5.29)$$

che è nella sola variabile  $\eta$  e può essere facilmente integrata.

Infatti, se  $\phi = \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$ , allora:

$$-\eta \phi = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Rightarrow \phi = c_1 e^{(-\eta^2)}$$

Dunque:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = c_1 e^{-\eta^2} \Rightarrow \theta = \int_0^\eta c_1 e^{-\eta'^2} d\eta' + c_2$$

le costanti  $c_1$   $c_2$  si ricavano dalle condizioni iniziali  $\theta(\infty) = 0$  e  $\theta(0) = 1$ . Dalla prima condizione viene:

$$c_1 \int_0^\infty e^{-\eta'^2} d\eta' = -c_2 = c_1 \sqrt{\pi}/2$$

e dalla seconda:

$$c_2 = 1$$

Dunque risulta:

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' = 1 - \text{Erf}(\eta) = \text{Erfc}(\eta) \quad (5.30)$$

Ritornando alle variabili iniziali:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \text{Erf}(\eta) \Rightarrow (T_1 - T_0) - (T_1 - T_0)\text{Erf}(\eta) + T_0 = T(z, t)$$

$$\boxed{T(z, t) = T_1 \left[ 1 - \text{Erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] + T_0 \text{Erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right)} \quad (5.31)$$

Per  $t \rightarrow \infty$  o  $z = 0$ , vale  $T(z, t = \infty) = T(z = 0, t) = T_1$  (che significa che per tempi sufficientemente lunghi tutto il sistema si sarà portato alla temperatura superficiale), mentre, per tempi finiti e grandi profondità  $T(z \rightarrow \infty, t) = T_0$ .

### 5.3.1 Flusso di calore

Se conosciamo la temperatura in superficie, possiamo calcolare il flusso di calore dall'interno della terra, misurando il gradiente.

Il flusso è:

$$\begin{aligned}\Phi_u &= -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \\ &= -k (T_{sup} - T_0) \left. \frac{\partial}{\partial z} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \right|_{z=0} = \\ &= k (T_{sup} - T_0) \left. \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \right|_{\eta=0}\end{aligned}$$

Dunque, per  $t > 0$  sarà:

$$\Phi_u = k \frac{(T_{sup} - T_0)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad (5.32)$$

Da cui si vede che il flusso di calore decresce con l'inverso della radice dell'età della litosfera, e dunque si può determinare l'età della litosfera misurando il flusso.

### Stima dell'età della Terra

William Thomson (in seguito noto come Lord Kelvin), stimò l'età della Terra assumendo che la perdita di calore avvenisse per sola conduzione. Supponiamo che  $T_{sup} = 0$  e  $T_0 \sim 2 \cdot 10^3$  °C, e sia  $\alpha = 10^{-6} m^2 s^{-1}$ . Scrivendo la (5.32):

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{k T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

da cui:

$$t = \frac{T_0^2}{\pi \alpha \left( \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} \right)^2}$$

Assumendo un gradiente di temperatura (misurato) di  $3 \cdot 10^{-3}$  °Cm<sup>-1</sup>, si otterrebbe un valore per l'età della Terra di  $\sim 4.4 \cdot 10^7$  anni che è più di un ordine di grandezza in meno di quanto ci si aspettava già all'epoca in base a numerose altre prove. Da questo si dedusse che doveva esserci qualche altra sorgente di calore oltre al nucleo. Successivamente, questa fonte, venne attribuita alla presenza di sostanze radioattive distribuite all'interno della crosta, che perdono energia per decadimento radioattivo e forniscono il flusso mancante per stimare una giusta età. In realtà, anche questa sorgente non basta a spiegare l'età della terra, giacché la produzione di calore per decadimento radioattivo, si stima sia circa la metà dell'odierno flusso di calore. La soluzione, in realtà, fu data circa 30 anni dopo la stima di Thomson da John Perry, che, molto semplicemente, mostrò che la variazione della conduttività con la temperatura avrebbe cambiato di molto il risultato. In particolare, mostrò che il trasporto di calore per convezione avrebbe alterato grandemente il risultato di Thomson.

### Perdita di calore per decadimento

Il meccanismo del decadimento radioattivo deriva dalla circostanza che alcuni nuclei atomici hanno una probabilità finita di perdere neutroni o particelle  $\alpha$  (nuclei di elio), trasformandosi in nuclei più leggeri e cedendo all'ambiente la differenza di energia tra lo stato legato iniziale e quello finale.

Se prendiamo un certo numero di questi atomi, e verifichiamo, nell'unità di tempo quanti di questi sono decaduti, questa frazione ci darà la probabilità di decadimento  $P$  del singolo atomo. In altri termini, preso un atomo, in un tempo  $\tau$ , questi avrà una probabilità  $P = 1/\tau$  di decadere. Questo ci fornisce la legge di decadimento. Infatti, se  $N_0$  è il numero di atomi non decaduti iniziali e il numero di atomi al tempo  $t$  è  $N(t)$ , allora il numero di atomi non decaduti al tempo  $t + dt$  sarà:

$$N(t + dt) = N(t) + \frac{dN}{dt} dt = N(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)$$

avendo supposto che in un tempo  $dt$  siano decaduti  $P \cdot N(t)dt$  atomi. Dunque:

$$\frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dunque possiamo definire un tempo – il tempo di dimezzamento – dopo il quale gli atomi della specie iniziale si sono ridotti alla metà, dunque quando  $dN = 1/2N$  e quindi  $d(\ln N) = 1/2$ :

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln(2)$$

ed esprimere i tempi in termini del tempo di dimezzamento.

La concentrazione di atomi di una determinata specie radioattiva  $x$  ad un'epoca  $t$ , sarà dunque funzione del tempo di dimezzamento caratteristico della specie:

$$C^x(t) = C_0^x e^{-\frac{t \ln 2}{\tau_{1/2}}} \quad (5.33)$$

La quantità di calore  $H$  rilasciata dal complesso delle sostanze radioattive presenti nella crosta terrestre, sarà data dalla somma delle quantità di calore rilasciate da ciascuna specie, moltiplicate per la relativa concentrazione. I principali componenti che contribuiscono al flusso di calore nella crosta terrestre sono due isotopi dell'Uranio ( $^{238}\text{U}$  e  $^{235}\text{U}$ ) il Torio ( $^{232}\text{Th}$ ) e un isotopo del potassio ( $^{40}\text{K}$ ). Nella tabella che segue, diamo le concentrazioni, le quantità di calore rilasciate e i tempi di dimezzamento degli isotopi citati:

Elemento	H	$\tau_{1/2}$	Concentrazione
$^{238}\text{U}$	$9.37 \cdot 10^{-5} \text{Wkg}^{-1}$	$4.4 \cdot 10^8$ anni	99.27% U
$^{235}\text{U}$	$1.36 \cdot 10^{-7} \text{Wkg}^{-1}$	$7.04 \cdot 10^8$ anni	0.73% U
$^{232}\text{Th}$	$2.69 \cdot 10^{-5} \text{Wkg}^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{10}$ anni	100 % Th
$^{40}\text{K}$	$2.79 \cdot 10^{-5} \text{Wkg}^{-1}$	$1.25 \cdot 10^9$ anni	0.0128 % K

Con questi dati, la produzione di calore dovuta alle sostanze radioattive, in funzione del tempo si può scrivere come:

$$H = 0.9927 C_0^U H_{238U} e^{-\frac{t \ln 2}{\tau_{1/2}^{238U}}} + 0.0073 C_0^U H_{235U} e^{-\frac{t \ln 2}{\tau_{1/2}^{235U}}} + C_0^{\text{Th}} H_{\text{Th}} e^{-\frac{t \ln 2}{\tau_{1/2}^{\text{Th}}}} + 1.28 \cdot 10^{-4} C_0^K H_{40K} e^{-\frac{t \ln 2}{\tau_{1/2}^{40K}}} \quad (5.34)$$

L'andamento nel tempo della produzione di calore dovuta al decadimento radioattivo basata sulla (5.34) è mostrato in fig. 5.3.1, da cui si evince che, a causa della vita media più corta, nel passato  $^{235}\text{U}$  e  $^{40}\text{K}$ , erano dominanti, mentre ora predominano  $^{238}\text{U}$  e  $^{232}\text{Th}$ .

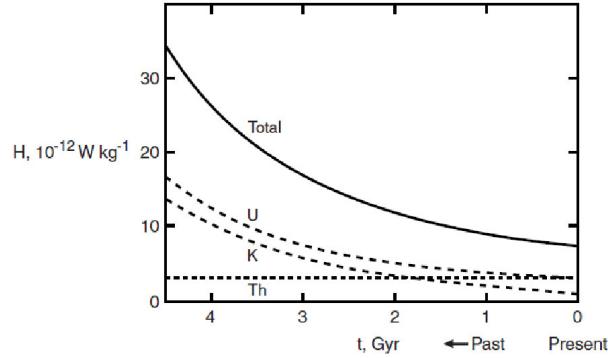


Figura 5.2: Andamento nel tempo della produzione di calore dovuto al decadimento degli isotopi radioattivi e contributo di ciascun isotopo

Consideriamo ora una distribuzione uniforme  $A = \rho H_0$  di sorgenti radiogeniche all'interno della crosta continentale ed uno spessore medio dei continenti di 35 km. Allora sarà:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho H_0}{k}$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T(z=0) = T_0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} = -\Phi_u \end{cases}$$

e dunque:

$$T(z) = T_0 + \frac{\Phi_u z}{k} - \frac{\rho H_0}{2k} z^2$$

Se consideriamo la composizione della crosta continentale come quella del granito, possiamo porre:  $H_0^{gr} = 1.6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{W}}{\text{kg}}$  e  $\rho^{gr} = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , dunque:

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=D} = \Phi_u - \rho H_0 D$$

Siccome a  $z = D$  la derivata deve essere nulla:

$$\Phi_u = \rho H_0 D = 2.7 \cdot 10^3 \cdot 3.5 \cdot 10^4 \cdot 9.6 \cdot 10^{-10} = 91 \text{ mW/m}^2$$

che è maggiore del flusso realmente osservato di  $65 \text{ mW/m}^2$ .

### 5.3.2 Spessore del fondo oceanico

Il modello delineato in Fig. 5.3.2, rappresenta la metà di un fondo oceanico in espansione. Le assunzioni del modello sono che:

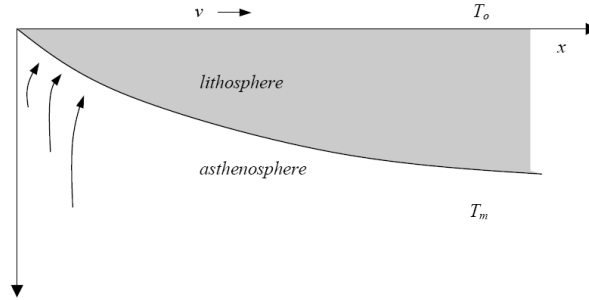


Figura 5.3: Modello per la descrizione dello spessore della crosta oceanica in funzione della distanza dal ridge

- Le placche litosferiche sono rigide e si allontanano dalla frattura medio-oceanica (il ridge) con velocità costante  $v$ .
- Il vuoto viene riempito da materiale caldo a bassa viscosità dall'astenosfera
- la generazione di calore interna è molto inferiore agli altri termini dell'equazione del calore e può essere trascurata
- c'è una singolarità a  $x = z = 0$

Si tratta, di un problema bidimensionale senza sorgenti e quindi l'equazione sarà:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{v}{k} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.35)$$

dove al secondo membro c'è il termine advettivo, ovvero il termine di trasporto di calore dovuto al movimento della placca. Si può mostrare che il termine di diffusione laterale si può trascurare per  $x \gg 0$ . Considerato che possiamo scrivere:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t}$$

l'eq. (5.35) diventa la solita equazione del calore.

Per stabilire lo spessore della crosta oceanica dobbiamo definire quale sarà la sua base, ovvero dove la crosta da solida passerà ad essere liquida. Consideriamo che questo passaggio avvenga ad una temperatura che è una frazione abbastanza grande della temperatura del mantello  $T_m$ , diciamo il 90%. La soluzione del problema bidimensionale l'abbiamo già vista in Eq.(5.31) e dunque possiamo ricavare la profondità:

$$\frac{T(z, t) - T_m}{T_{sup} - T_m} = \left( 1 - \text{Erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right) \quad (5.36)$$

Se imponiamo che  $T(z, t) = 0.9T_m$  e trascuriamo  $T_{sup}$  rispetto a  $T_m$  otteniamo:

$$0.9T_m = T_m \text{Erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (5.37)$$

La profondità cercata è, dunque quella per cui  $Erf(\eta) = 0.9$ . I valori della funzione inversa della  $Erf(\eta)$ , si possono trovare tabellati nei testi di statistica (esiste anche una funzione di Matlab), e si trova:  $\eta|_{T=0.9T_m} = Erf^{-1}(0.9) = 1.1631$ . Di conseguenza:

$$z|_{t=0.9T_m} = 2\eta_T\sqrt{\alpha t} = 2.326\sqrt{\alpha t}$$

Se consideriamo un valore di  $\alpha = 8 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$  e che in un anno ci sono  $3 \cdot 10^7$  secondi, otteniamo un valore di profondità di  $z(km) \sim 11.4\sqrt{t(Ma)}$ .

### Profondità del fondale oceanico

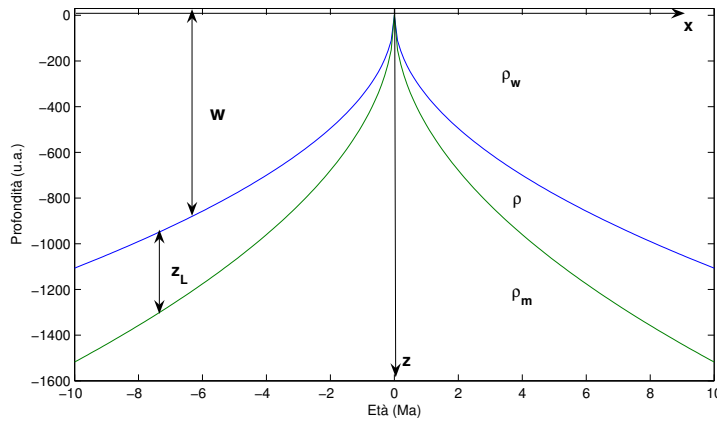


Figura 5.4: Modello per la descrizione della profondità oceanica in funzione del tempo. L'asse delle profondità non è in scala

Stabilito che lo spessore della crosta oceanica aumenta con l'età e, di conseguenza, con la distanza dal ridge, siccome la crosta oceanica è in equilibrio idrostatico (galleggia) con il mantello, ne deriva che la profondità del fondo oceanico aumenta con la distanza dal ridge. Per dare un'espressione più quantitativa, consideriamo anche l'andamento della densità della crosta in funzione della profondità  $\rho(z, t)$ . Dette  $\rho_w = 1.0 \cdot 10^3 kg m^{-3}$  la densità dell'acqua e  $\rho_m = 3.3 \cdot 10^3 kg m^{-3}$  quella del mantello, e fissata a 0 la profondità del ridge, l'espressione dell'equilibrio idrostatico di una sezione di litosfera spessa  $z_L$  a profondità  $w$  sarà (vedi Fig. 5.3.2):

$$(w + z_L)\rho_m = w\rho_w + \int_0^{z_L} \rho(z, t) dz \quad (5.38)$$

Raccogliendo i termini in  $w$ , la (5.38) si può scrivere:

$$(\rho_w - \rho_m)w + \int_0^{z_L} (\rho(z, t) - \rho_m) dz = 0 \quad (5.39)$$

da cui si vede che, visto che il primo termine è negativo, il secondo deve essere positivo, ovvero  $\rho(z, t) > \rho_m$ . I cambiamenti di pressione e temperatura con la

profondità, producono dei cambiamenti di volume e quindi di densità:

$$dV = \left( \frac{dV}{dT} \right)_P + \left( \frac{dV}{dP} \right)_T \quad (5.40)$$

Comunque, fissata una posizione ad una certa distanza dal ridge, non ci sono variazioni di pressione, e dunque rimane solo il primo termine. D'altra parte il primo termine è legato al coefficiente di espansione termica

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dT} \right)_P$$

e, visto che  $\rho = mV^{-1}$ , implica

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

risulta:

$$d\rho = -\alpha\rho dT \quad (5.41)$$

e, quindi, applicandola al nostro caso:

$$\rho(z, t) - \rho_m = -\alpha\rho_m [T - T_m]$$

che, sostituita nella (5.39), ci da:

$$(\rho_w - \rho_m)w - \rho_m\alpha \int_0^{z_L} [T_m - T(z, t)] dz = 0 \quad (5.42)$$

D'altra parte, dalla soluzione dell'equazione del calore, sappiamo che:

$$\frac{T - T_m}{T_s - T_m} = 1 - \text{Erf}(\eta)$$

e dunque

$$(\rho_m - \rho_w)w = \alpha\rho_m [T_m - T_s] \int_0^{z_L} \text{Erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{at}} \right) dz \quad (5.43)$$

Possiamo, con buona approssimazione, estendere l'integrale fino all'infinito ottenendo:

$$(\rho_m - \rho_w)w = \alpha\rho_m [T_m - T_s] 2\sqrt{\frac{at}{\pi}} \quad (5.44)$$

da cui si ricava l'espressione della profondità oceanica in funzione dell'età:

$$w(t) = \sqrt{\frac{at}{\pi}} \frac{2\alpha\rho_m}{\rho_m - \rho_w} (T_m - T_s) \quad (5.45)$$

che ci dice che la profondità degli oceani cresce con la radice dell'età della litosfera, ovvero con la radice della distanza dal ridge. Diamo ora una tabella con i numeri per stimare la profondità:

Parametro	definizione	valore
$T_s$	Temperatura superficiale	300 K
$T_m$	Temperatura del mantello	1600 K
$a$	Diffusività termica	$8 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$
$\alpha$	Coefficiente di espansione termica	$3.1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$
$\rho_w$	Densità dell'acqua marina	$1025 kg m^{-3}$
$\rho_m$	Densità del mantello	$3300 kg m^{-3}$

Con questi valori, tenendo conto che  $1 \text{ anno} \sim \pi \cdot 10^7 s$ , si ottiene che la profondità degli oceani è di circa  $d(m) = 350\sqrt{t(Ma)}$  al di sotto della profondità dell'asse del ridge.



## Capitolo 6

# La distribuzione di Maxwell-Boltzmann

### 6.1 La distribuzione delle velocità in una dimensione

L'equazione che descrive la pressione di un fluido in funzione della profondità in un riferimento in cui l'asse  $z$  punta in alto è:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (6.1)$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti  $P = nRT/V$  e  $V = M/\rho$ , dunque:

$$P = \frac{nRT\rho}{M} \Rightarrow \rho = \frac{MP}{nRT} \quad (6.2)$$

Ora, se  $M$  è la massa di una mole  $M = N_a m$  dove  $m$  è la massa della molecola di gas e  $N_a$  il numero di Avogadro. Detta  $R/N_a = k_B$  la costante di Boltzmann, la (6.1) diventa:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{mgz}{k_B T} \quad (6.3)$$

da cui:

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \quad (6.4)$$

Adesso,  $mgz$  è l'energia potenziale di una particella di massa  $m$  all'altezza  $z$ . Visto che dalla (6.2),  $P(z) \propto \rho(z)$ , e  $\rho$  altro non è che il numero di particelle per unità di volume e le particelle che arrivano a  $z$  hanno una velocità tale che  $1/2mv^2 = mgz$ :

$$n(v_z) = n(0)e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (6.5)$$

L'eq. (6.5) definisce la funzione di distribuzione delle velocità  $f(v)$  che ci dà la frazione di particelle con velocità compresa tra  $v$  e  $v+dv$ :

$$dn/n(0) = f(v)dv = f_0 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \quad (6.6)$$

La costante  $f_0$  si calcola imponendo che integrando su tutte le velocità, la frazione sia uguale ad 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv = 1 \quad (6.7)$$

che è l'integrale di una funzione di distribuzione di Gauss, che vale  $\sqrt{\pi}$ , a patto di eseguire il cambio di variabili:  $\xi^2 = m/2k_B T v^2$ , dunque:

$$f_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}$$

Quindi la distribuzione delle velocità lungo  $z$  si scrive:

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} \quad (6.8)$$

## 6.2 La distribuzione delle velocità in tre dimensioni

La velocità di una particella che si muove nello spazio tridimensionale è tale che:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

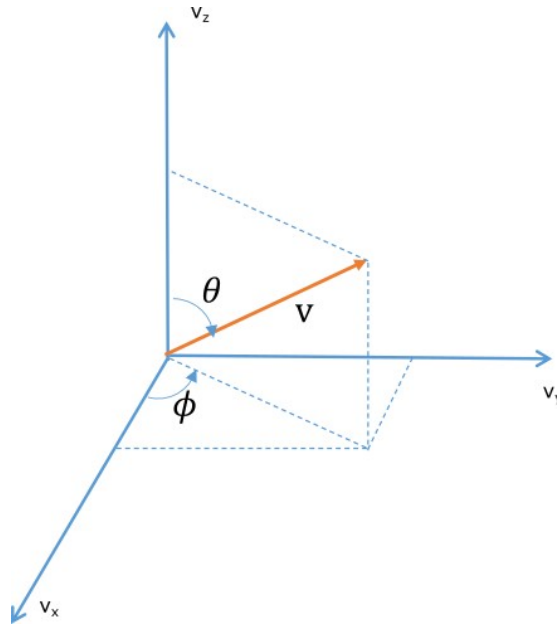


Figura 6.1: Definizione degli angoli in coordinate sferiche

dunque, la frazione di particelle con modulo della velocità compreso tra  $v$  e  $v+dv$  è (essendo le probabilità lungo i tre assi indipendenti) il prodotto delle funzioni di distribuzione delle velocità lungo ciascuna asse:

$$f(v)d^3v = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \quad (6.9)$$

### 6.3. VELOCITÀ PIÙ PROBABILE E VELOCITÀ QUADRATICA MEDIA 59

Passando in coordinate sferiche :

$$dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin(\theta) dv d\phi d\theta \quad (6.10)$$

Dunque la (6.9) diventa:

$$f(v) d^3v = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \sin\theta dv d\phi d\theta \quad (6.11)$$

Dunque integrando sugli angoli:

$$f(v) dv = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv \left[ \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \right] \quad (6.12)$$

ed, in definitiva:

$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (6.13)$$

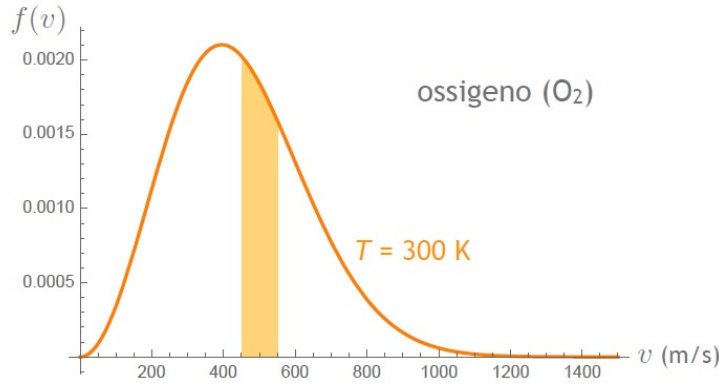


Figura 6.2: Grafico della funzione di distribuzione di Boltzmann del modulo della velocità per l'ossigeno molecolare a  $T=300\text{K}$

### 6.3 Velocità più probabile e velocità quadratica media

Dalla (6.13), possiamo ricavare la velocità più probabile derivando la (6.13) e ponendo la derivata a zero. Ponendo  $A = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{df(v)}{dv} = A \left[ \left( -\frac{m}{2k_B T} \right) 2v^3 + 2v \right] e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = 0 \quad (6.14)$$

dunque

$$\frac{m}{2k_B T} v^2 = 1$$

Quindi la velocità più probabile è

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (6.15)$$

La velocità media può essere calcolata come:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv} = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v dv \quad (6.16)$$

dove si è fatto uso della proprietà che l'integrale su tutto lo spazio della funzione di distribuzione fa 1. L'integrale nella (6.16) è del tipo:

$$A \int_0^{\infty} v^2 e^{-\beta v^2} \frac{dv^2}{2} = \frac{A}{2\beta^2} \int_0^{\infty} w e^{-w} dw \quad (6.17)$$

Integrandolo per parti, con  $e^{-w} dw$  fattore differenziale, si ha:

$$\frac{A}{2\beta^2} [(we^{-w})_0^{\infty} - e^{-w}|_0^{\infty}] = \frac{A}{2\beta^2} \quad (6.18)$$

con  $\beta = \frac{m}{2k_B T}$   $A = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} = 4\pi \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2}$  e, dunque:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (6.19)$$

## 6.4 Velocità quadratica media

La velocità quadratica media è il momento secondo della distribuzione di Maxwell Boltzmann:  $E(v^2)$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \quad (6.20)$$

Per risolvere quest'integrale, potremmo procedere per parti come nel caso precedente, scindendo  $v^4 dv$  in  $v^2 v^2 dv = v^2 \cdot d(v^3)/3$ , oppure, più facilmente fare ricorso alla funzione  $\Gamma$  di Eulero.

### 6.4.1 La funzione $\Gamma$ di Eulero

E' definita dall'equazione:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (6.21)$$

Si prova facilmente che

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (6.22)$$

, e che  $\Gamma(1) = 1$ , dunque, per  $z \equiv n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ .

L'integrale di Gauss, può essere espresso in termini di questa funzione:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

quindi  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Per quanto detto, l'integrale nella definizione della velocità quadratica media (6.20):

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-\beta v^2} v dv$$

con la sostituzione  $\beta v^2 = t$  e quindi  $v dv = \frac{1}{2\beta} dt$  e  $v^3 = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{3/2}$ , diventa:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

quindi

$$\langle v^2 \rangle = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^{5/2} \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \pi^{-3/2} \left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot 2\pi$$

dove abbiamo applicato la proprietà (6.22) della funzione  $\Gamma$ . Per la stessa proprietà  $\Gamma(3/2) = 1/2\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ , quindi:

$$\langle v^2 \rangle = 2\pi^{-3/2} \sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{3}{4} \pi = \frac{3k_B T}{m} \quad (6.23)$$

La (6.23) dà lo stesso valore che si trova con l'equipartizione dell'energia e la teoria cinetica dei gas.

I momenti di ordine superiore, possono essere trovati facendo uso della proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^n e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (6.24)$$

da cui risulta:

$$\langle v^n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \quad (6.25)$$

## 6.5 Distribuzione dell'energia

La frazione di particelle con energia compresa tra  $E$  e  $E+dE$  è uguale a quella delle particelle con velocità compresa tra  $v$  e  $v+dv$ :

$$f(E)dE = f(v)dv \Rightarrow f(E) = f(v) \frac{dv}{dE} \quad (6.26)$$

Siccome  $E = 1/2mv^2$ , allora  $dE = mv dv$ ,  $v = \sqrt{2E/m}$ , dunque:  $dv/dE = 1/(mv) = 1/m\sqrt{m/2E} = \sqrt{1/2mE}$ . La distribuzione dell'energia cinetica, dunque è:

$$\begin{aligned} f(E)dE &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2mE}} dE = \\ &= 2e^{-\frac{E}{k_B T}} \sqrt{\frac{E}{\pi k_B T}} \frac{dE}{k_B T} \end{aligned} \tag{6.27}$$

# Capitolo 7

## Potenziali Termodinamici

### 7.1 Introduzione

Lo stato di un sistema termodinamico è definito dalle variabili di stato  $P$ ,  $V$ ,  $T$  (e dal numero di molecole  $n$ ). Il calore scambiato (ceduto o ricevuto dal sistema) durante una trasformazione infinitesimale, dipenderà da quali delle variabili di stato si fanno variare nella trasformazione.

Considerando l'equazione che esprime il primo principio della termodinamica a pressione costante:

$$dQ = dU + PdV \quad (7.1)$$

a seconda di quali variabili consideriamo indipendenti avremo:

$$\begin{aligned} (V, T) \quad dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \\ \Rightarrow dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} (P, T) \quad dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dT \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$(V, P) \quad dQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P\right] dV + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V dP \quad (7.4)$$

Se introduciamo i calori specifici a volume e pressione costanti:

$$\begin{aligned} C_v &= \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \\ C_p &= \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \end{aligned} \quad (7.5)$$

in cui il termine

$$\alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad (7.6)$$

è il coefficiente di dilatazione termica che è una proprietà termodinamica delle sostanze. Il II termine della 7.5 è l'effetto sulla capacità termica del lavoro compiuto nell'espansione. Sostituendo, avremo:

$$dQ(V, T) = C_v dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV \quad (7.7)$$

$$dQ(P, T) = C_p dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right] dP \quad (7.8)$$

$$dQ(V, P) = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P + P\right] dV + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V dP \quad (7.9)$$

Il secondo termine nella parentesi quadra di (7.8) è la comprimibilità a temperatura costante.

## 7.2 Energia Libera di Helmholtz

Consideriamo l'espressione del primo principio della termodinamica in termini del lavoro:

$$L = Q - \Delta U \quad (7.10)$$

In una trasformazione in cui il sistema è a contatto con l'ambiente a temperatura uniforme  $T$ , e passa dallo stato  $A$  allo stato  $B$ , il differenziale  $\delta Q$  della quantità di calore non è un differenziale esatto, quindi per ottenere un'espressione che lo sia, passiamo dall'Entropia. La variazione di entropia sarà:

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \Leftrightarrow Q \leq T [S(B) - S(A)] \quad (7.11)$$

valendo il segno di uguaglianza per le trasformazioni reversibili. Sostituita nella (7.10), dà:

$$L \leq U(A) - U(B) + T [S(B) - S(A)] \quad (7.12)$$

L'equazione (7.12) pone un limite superiore alla quantità di lavoro che si può ottenere dalla trasformazione da  $A$  a  $B$ . Nel caso in cui le temperature degli stati  $A$  e  $B$  siano la stessa temperatura  $T$ , possiamo definire la quantità:

$$F = U - TS \quad (7.13)$$

che è l'*Energia Libera* del sistema. Con questa definizione risulta che il lavoro che si può ottenere da una trasformazione a temperatura uniforme è limitato dalla variazione di energia libera:

$$L \leq -\Delta F \quad (7.14)$$

L'energia libera assume per i sistemi termodinamici lo stesso significato che ha l'energia nei sistemi meccanici, con la differenza che il segno di uguaglianza, che per i sistemi meccanici è sempre vero, in questo caso, vale solo per le trasformazioni reversibili.

Per un sistema a volume costante e pressione uniforme, il lavoro compiuto dalla trasformazione è nullo, pertanto, dalla (7.14) ricaviamo che  $F(B) \leq F(A)$ . Dunque, in un sistema a contatto termico con l'ambiente, se non si può compiere o assorbire lavoro dall'esterno, l'energia libera non può aumentare nella trasformazione. Questo significa che lo stato in cui  $F$  è minima è uno stato di equilibrio stabile. Questa situazione è analoga a quello che avviene nei sistemi meccanici con l'energia potenziale, in cui lo stato di minimo potenziale è uno stato di equilibrio stabile. Per questo motivo la quantità  $F$  è il *Potenziale Termodinamico a Volume Costante*.

## 7.3 L'Entalpia

Consideriamo la forma non differenziale della (7.1):

$$Q = U + PV = H \quad (7.15)$$

questa equazione definisce il *potenziale termodinamico a pressione costante*  $H$ , anche noto con il nome di *Entalpia* (dal greco  $\epsilon\nu\theta\acute{\alpha}\lambda\pi\epsilon\upsilon\nu$  che significa riscaldare).

### 7.3.1 Entalpia di legame e di trasformazione

Nelle reazioni chimiche che avvengono in un laboratorio, tutto avviene alla pressione atmosferica, per cui la quantità di calore scambiata con l'ambiente nella reazione è coincidente con l'entalpia della reazione. Per convenzione, il segno della variazione di entalpia è riferito al sistema in reazione, per cui, una quantità di calore ceduta al sistema è positiva, mentre se è la reazione che cede calore all'ambiente, la variazione è negativa. La variazione di entalpia che accompagna la formazione di molecole a partire dagli atomi isolati è l'*entalpia di legame*. Ad esempio, la formazione della molecola di idrogeno a partire da due atomi isolati:  $2H \rightarrow H_2$ , avviene cedendo all'ambiente una quantità di calore  $\Delta H = -435.9 \text{ kJ/mol}$ , o, ancora, l'entalpia di legame della reazione  $3C + 8H \rightarrow C_3H_8$ , sarà  $\Delta H = -3997.6 \text{ kJ/mol}$ .

L'entalpia di legame non va confusa con l'*entalpia di formazione* che è la quantità di calore scambiata nella formazione delle molecole a partire dagli elementi nel loro stato molecolare di riferimento (a pressione atmosferica), che, solo per i gas nobili è quello monoatomico. A rigore lo stato-standard termodinamico dipende dalla temperatura d'interesse. I valori sono tabulati molto spesso come entalpia di formazione standard alla temperatura di 298,15 K (25 °C). L'entalpia standard di formazione è una funzione di stato termodinamica. Essa è quindi equivalente alla somma dei diversi processi di reazioni di sintesi. Per esempio, per calcolare l'entalpia standard di formazione del cloruro di sodio si usa la reazione:  $Na_{(s)} + (1/2)C_{12(g)} \rightarrow NaCl_{(s)}$ . Questo processo è costituito da sotto-processi separati, ognuno dei quali possiede la propria entalpia. Quindi, dobbiamo calcolare:

- La entalpia di atomizzazione standard di sodio solido.
- La prima energia di ionizzazione del sodio gassoso.
- L'entalpia standard di atomizzazione del gas cloro.
- L'affinità elettronica degli atomi di cloro.
- L'entalpia della matrice di atomi del cloruro di sodio.

La somma di tutti questi valori dà l'entalpia di formazione standard del cloruro di sodio.

Un concetto che viene impiegato molto in termochimica è anche l'entalpia di legame media, ossia l'entalpia di formazione media di un legame chimico  $A-B$ , ricavata analizzando le entalpie di formazione, di legame e di reazione associate a diversi composti. Contrariamente all'entalpia complessiva di legame del composto, quella del singolo legame chimico non può essere definita rigorosamente, in quanto variabile da composto a composto. Si tratta invece di una grandezza empirica che ha lo scopo di fornire una prima stima grossolana della forza dei legami.

In linea di principio la somma di tutte le entalpie di legame medie associate a ogni legame presente nella molecola dovrebbe essere uguale all'entalpia di legame della molecola, quindi nell'esempio del propano, in cui si hanno otto legami C-H e due legami C-C, si dovrebbe avere:  $8\Delta H(C-H) + 2\Delta H(C-C) = -3997.65 \text{ kJ/mol}$ . Tipici valori riportati per  $\Delta H(C-H)$  e  $\Delta H(C-C)$  sono rispettivamente -412 e -348 kJ/mol, dunque:  $8(-412) + 2(-348) = -3992 \text{ kJ/mol}$  che è abbastanza vicino a quanto riportato all'inizio del paragrafo.

## 7.4 L'energia libera di Gibbs

Il potenziale termodinamico che ci fornisce l'energia libera a temperatura e pressione costanti è l'*energia libera di Gibbs*. Per ricavare la sua espressione partiamo dalla considerazione che per il II principio della termodinamica:

$$\begin{cases} \frac{\delta Q}{T} \leq dS \\ \delta Q = dU + L \end{cases}$$

quindi, in generale, se il lavoro è espresso solo come PdV:

$$dS - \frac{dU + PdV}{T} \geq 0 \quad (7.16)$$

Quando sono costanti P e T allora  $d(U + PV - TS) \leq 0$  e dunque il potenziale termodinamico di Gibbs:

$$G = U + PV - TS \quad (7.17)$$

La 7.16, permette di calcolare l'espressione di tutti i potenziali termodinamici semplicemente tenendo conto di quali sono le variabili tenute costanti:

$$(V, T) \Rightarrow PdV = 0 \Rightarrow d(U - TS) = dF \leq 0 \quad (7.18)$$

$$(T, P) \Rightarrow VdP = 0 \Rightarrow d(TS - [U + PV]) = -dG \geq 0 \quad (7.19)$$

$$(U, V) \Rightarrow dS \geq 0 \quad (7.20)$$

$$(S, P) \Rightarrow dU + PdV \leq 0 \Rightarrow d(U + PV) = dH \leq 0 \quad (7.21)$$

### 7.4.1 Uso del potenziale di Gibbs per ricavare l'equazione di Clapeyron

Consideriamo un sistema composto da un liquido (1) in equilibrio con il suo vapore (2) in un cilindro a pressione e temperatura costanti. In tal caso sarà:

$$U = U_1 + U_2 \quad S = S_1 + S_2 \quad V = V_1 + V_2 \Rightarrow G = G_1 + G_2$$

Se  $m_1$  e  $m_2$  sono le rispettive masse, possiamo considerare le quantità specifiche:  $g_i = \frac{G_i}{m_i}$ . Tutte le quantità specifiche sono funzione della sola temperatura.

Eseguiamo una trasformazione isoterma, tenendo conto che  $m_1 + m_2 = \text{cost} \Rightarrow dm_1 = -dm_2$ . nello stato finale della trasformazione, sarà:

$$G_f = (m_1 + dm_1)g_1 + (m_2 - dm_1)g_2 = G + dm_1(g_1 - g_2)$$

Siccome al principio il sistema era in equilibrio,  $G$  deve essere in un minimo, dunque  $\Delta G = 0$  e quindi  $g_1 = g_2$ . Scrivendo per esteso le energie libere specifiche:

$$(u_2 - u_1) + P(v_2 - v_1) - T(s_2 - s_1) = 0$$

e, differenziando rispetto alla temperatura:

$$\frac{d(u_2 - u_1)}{dT} + \frac{dP}{dT}(v_2 - v_1) + P\frac{d(v_2 - v_1)}{dT} - (s_2 - s_1) - T\frac{d(s_2 - s_1)}{dT} = 0 \quad (7.22)$$

Siccome  $(dq =)Tds = du + Pdv$ , nella (7.22) rimane solo:

$$-(s_2 - s_1) + (v_2 - v_1) \frac{dP}{dT} = 0$$

La differenza di entropia che appare al primo termine, è la variazione dovuta alla vaporizzazione di un'unità di massa del liquido, cioè il suo calore latente di vaporizzazione  $\lambda$ . visto che  $Q = \lambda = TdS$ , sarà:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)} \quad (7.23)$$

che è l'equazione di Clapeyron.

### 7.4.2 La regola delle Fasi

Quando un sistema è composto di una sola sostanza omogenea, si dice che consista di una sola *fase*. Se un sistema eterogeneo è composto di varie parti, ciascuna delle quali omogenea, questo consiste di tante fasi quante sono le parti che lo compongono. Per esempio, il sistema liquido-vapore del paragrafo precedente è un sistema composto da due fasi di un solo componente.

Tutte le proprietà specifiche di una fase, dipendono dalla temperatura  $T$ , dalla pressione  $P$  e dalla composizione fisica della fase. Possiamo dire che una fase è una miscela omogenea di tutti i composti che si possono ottenere dagli elementi chimici presenti in essa e che la percentuale di ciascun composto è univocamente determinata da  $T$  e  $P$  e dalle concentrazioni degli elementi.

Consideriamo un sistema composto da  $f$  fasi e  $n$  componenti indipendenti. Sia  $m_{ik}$  la massa del  $k$ -mo componente presente nella fase  $i$ . La matrice  $m_{ik}$  rappresenta la distribuzione dei componenti nelle diverse fasi.

As una determinata temperatura, la condizione di equilibrio è che il potenziale termodinamico  $G$  sia minimo. Se consideriamo trascurabili le energie in gioco alle interfacce delle varie fasi, allora  $G$  sarà la somma delle  $G_i$  delle singole fasi. Ciascuna  $G_i$  dipenderà dalla temperatura, dalla pressione e dalle masse di ciascun componente:

$$G_i = G_i(T, P, m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{in})$$

La sua forma dipenderà dalle proprietà della fase  $i$ -esima, ma, comunque sarà una funzione omogenea di primo grado delle  $m_{ik}$ , per cui le  $\frac{\partial G_i}{\partial m_{ik}}$  saranno funzioni omogenee di grado 0.

Se siamo in uno stato di equilibrio allora  $dG = 0$ . Come abbiamo visto nel precedente paragrafo, in una trasformazione in cui una quantità  $\delta m$  passa dalla fase  $i$  alla fase  $j$ , lasciando le altre inalterate, sarà:

$$\begin{aligned} m_{ik} &\rightarrow m_{ik} - \delta m \\ m_{jk} &\rightarrow m_{jk} + \delta m \end{aligned}$$

e dunque:

$$\delta G = \delta G_i + \delta G_j = \left[ \frac{\partial G_j}{\partial m_{jk}} - \frac{\partial G_i}{\partial m_{ik}} \right] \delta m = 0$$

da cui:

$$\frac{\partial G_j}{\partial m_{jk}} = \frac{\partial G_i}{\partial m_{ik}} \quad i, j = \{1 \dots f\} \quad k = \{1 \dots n\} \quad (7.24)$$

per qualunque coppia di fasi e per ciascuna componente. L'eq. (7.24) equivale a  $n(f-1)$  relazioni di equilibrio indipendenti, che dipendono solo dalla costituzione chimica e non dalla quantità di sostanze in ciascuna fase. Siccome le derivate di  $G_i$  sono omogenee di grado 0 in  $m_{ik}$ , queste dipenderanno solo dai rapporti delle  $m_{i1}, m_{i2} \dots m_{in}$ . Il numero di questi rapporti è  $f(n-1)$ . Oltre a questi, le altre variabili da cui dipendono le derivate di  $G_i$  sono P e T, per un totale di  $2 + f(n-1)$  variabili per  $n(f-1)$  equazioni. La differenza tra il numero di variabili e il numero di equazioni, dà il numero di variabili che si possono scegliere arbitrariamente, e prende il nome di grado di variabilità  $v$

$$v = (n-1)f + 2 - n(f-1) = n + 2 - f \quad (7.25)$$

Facciamo qualche esempio pratico:

1. **Un solo fluido omogeneo:**  $f = 1$  (la sola fase fluida),  $n = 1$ , per cui  $v = 2$ . Posso scegliere T e P arbitrariamente ma non posso variare la composizione, perché il nostro fluido è definito.
2. **Due gas chimicamente definiti:**  $f = 1$  (solo gas),  $n = 2 \Rightarrow v = 3$ . Possiamo variare T, P e il rapporto fra i due componenti.
3. **Acqua in equilibrio col suo vapore:**  $f = 2$  (liquido e gas),  $n = 1 \Rightarrow v = 1$ . Possiamo variare solo la temperatura, la pressione sarà la pressione di vapor saturo alla temperatura data.
4. **Acqua, ghiaccio e vapore in equilibrio:**  $f = 3$ ,  $n = 1 \Rightarrow v = 0$ . Non c'è libertà di scelta. Le tre fasi coesistono in un solo punto con pressione e temperatura definite.

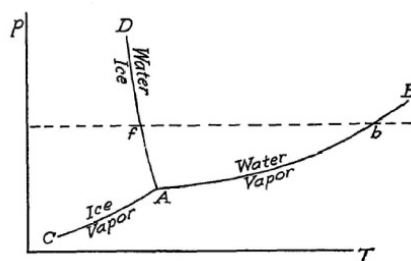


Figura 7.1: Diagramma delle fasi dell'acqua in funzione della pressione e della temperatura

Quest'ultima situazione è illustrata in Fig. 7.1. La curva AB rappresenta la pressione di vapor saturo in funzione della temperatura. Se ad una determinata temperatura, aumento la pressione, tutto il vapore condenserà nella fase liquida, e viceversa evaporerà. La curva AC corrisponde alla pressione di vapor saturo in contatto col ghiaccio. Il punto in cui coesistono acqua, ghiaccio e vapore dovrà appartenere ad entrambe le curve, e dunque sarà l'intersezione delle due. Nello stesso punto passerà anche la curva di equilibrio tra acqua e ghiaccio AD. Pertanto il punto A è detto *punto triplo* e per l'acqua è a  $T = 0.0075C$  e  $P = 0.00602$  atm. Siccome la pressione del punto triplo è minore di quella

atmosfera, la retta (tratteggiata) a  $P = 1 \text{ atm}$ , interseca tutte e tre le regioni. L'intersezione con la curva AD, rappresenta la temperatura di fusione del ghiaccio, quella con AB, la temperatura di ebollizione dell'acqua.

## 7.5 Trasformazioni di Legendre e relazioni di Maxwell

Prendiamo il differenziale totale della (7.15):

$$dH = dU + PdV + VdP$$

siccome  $dU = TdS - PdV$  allora:

$$dH = TdS + VdP \quad (7.26)$$

e da qui possiamo ricavare la temperatura ed il volume in funzione delle derivate dell'entalpia:

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S \quad (7.27)$$

Dunque l'eq. 7.26, mette in relazione l'entalpia con  $S$  e  $V$ . In generale, una funzione termodinamica  $L(x, y, z, \dots)$  con le sue variabili indipendenti  $x, y, z, \dots$  ha la forma differenziale:

$$dL = Xdx + Ydy + Zdz + \dots \quad (7.28)$$

dove  $X, Y, Z, \dots$  sono tutte funzioni delle variabili  $x, y, z, \dots$ . La trasformazione:

$$\begin{cases} L \rightarrow \bar{L} = L - Xx \\ x, y, z, \dots \rightarrow X, y, z, \dots \end{cases} \quad (7.29)$$

è nota come trasformazione di Legendre. La (7.29) implica: <sup>1</sup>

$$d\bar{L} = -xdX + Ydy + Zdz + \dots \quad (7.30)$$

L'eq. (7.26) è una delle trasformazioni di Legendre ricavata a partire da  $dU = TdS - PdV$ :

$$\begin{cases} U \rightarrow \bar{U} \equiv H = U - (-PV) \\ V, S \rightarrow -P, S \\ d(U + PV) = VdP + TdS \end{cases}$$

analogamente, possiamo ricavare le altre funzioni termodinamiche che ci mettono in relazione le diverse variabili, tramite trasformazioni di Legendre successive, a partire da  $U$  o  $S$ . Con questo metodo possiamo verificare la seguente tabella:

Funzione Termodinamica	Variabili naturali	Differenziale totale
$U$	$S, V, N_i$	$dU = TdS - PdV + \sum_i \mu_i dN_i$
$H = U + PV$	$S, P, N_i$	$dH = TdS + VdP + \sum_i \mu_i dN_i$
$F = U - TS$	$T, V, N_i$	$dF = -SdT - PdV + \sum_i \mu_i dN_i$
$G = F + PV$	$T, P, N_i$	$dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i dN_i$
$\Phi = F - G = -PV$ (gran potenziale)	$T, V, N_i$	$d\Phi = -SdT - PdV - \sum_i \mu_i dN_i$
$S$	$U, V, N_i$	$dS = \frac{1}{T}(dU + PdV - \sum_i \mu_i dN_i)$

<sup>1</sup>In generale, se  $dU = \sum_{i=1}^N f_i dx_i$ , possiamo scrivere:  $dU = f_1 dx_1 + \sum_{i>1} f_i dx_i$  e quindi, portando al primo addendo  $d(U - f_1 x_1) = -x_1 df_1 + \sum_{i>1} f_i dx_i$ , quindi la funzione  $\bar{U} = U - f_1 x_1$  risponde esattamente alla 7.30

Da questa tabella è facile ricavare le variabili naturali come derivate delle funzioni termodinamiche

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = T \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} = -P \quad \left(\frac{\partial U}{\partial N_j}\right)_{S,V,N_i} = \mu_j \quad (7.31)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -S \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -P \quad \left(\frac{\partial F}{\partial N_j}\right)_{T,V,N_i} = \mu_j \quad (7.32)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,N} = -S \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,N} = V \quad \left(\frac{\partial G}{\partial N_j}\right)_{T,P,N_i} = \mu_j \quad (7.33)$$

Se la (7.28) è un differenziale esatto, allora:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, etc \quad (7.34)$$

da cui si possono ricavare le relazioni (di Maxwell) fra le derivate, che possono anche essere verificate direttamente derivando le (7.31, 7.32, 7.33 ...) rispetto alle variabili incrociate e ricordando che le derivate seconde miste sono indipendenti dall'ordine di derivazione. Per es., dalla 7.32, derivando rispetto a S la seconda e rispetto a V la prima, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$$

## 7.6 Radiazione di corpo nero

Consideriamo una cavità a temperatura  $T$ , in equilibrio con la radiazione elettromagnetica al suo interno. La densità di energia  $u$  sarà l'energia interna della cavità  $U$  divisa per il volume e può essere pensata come l'integrale delle densità di energia alle varie frequenze:

$$u = \int_0^\infty \frac{du}{d\nu} d\nu \quad (7.35)$$

Per l'integrando vale la legge di Kirchhoff:  $\frac{du}{d\nu}$  è indipendente dal materiale. Infatti, consideriamo due cavità di materiale diverso a temperatura differente,  $T_2 < T_1$  e  $\left(\frac{du}{d\nu}\right)_2 > \left(\frac{du}{d\nu}\right)_1$ . Se mettiamo le cavità in contatto, l'energia, e dunque il calore, fluirà da 2 verso 1 anche se  $T_2 < T_1$ , violando il II principio della termodinamica.

### 7.6.1 legge di Stefan

La pressione che la radiazione esercita sulle pareti della cavità è data classicamente dal valor medio del prodotto vettore tra i campi elettrici e magnetici che compongono la radiazione:

$$P = \langle E \times B \rangle$$

D'altra parte, possiamo scrivere l'espressione della pressione in funzione della densità di energia, a partire dall'equazione del lavoro in una direzione:

$$dL_x = Fdx = PAdx = PdV_x \quad (7.36)$$

siccome questo sarà uguale nelle tre direzioni,  $dL = U = 3PdV$ . Dunque,

$$P = \frac{u}{3} \quad (7.37)$$

Siccome siamo a volume costante, possiamo scrivere la pressione in termini dell'energia libera F:

$$-P = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T - T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad (7.38)$$

Applicando la relazione di Maxwell

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

, otteniamo

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \quad (7.39)$$

Il primo membro, altro non è che la densità di energia  $u$ , pertanto, applicando la (7.37):

$$u = \frac{T}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V - \frac{1}{3}u \quad (7.40)$$

e riarrangiando:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V = \frac{4}{T}u \quad (7.41)$$

che si integra, ottenendo:

$$u(T) = AT^4 \quad (7.42)$$

Che esprime la legge di Stefan, ovvero che la densità di energia scala con la quarta potenza della temperatura.

### 7.6.2 Lo spettro di corpo nero

In generale la densità spettrale della densità di energia  $\frac{du}{d\nu}$  sarà una funzione della temperatura e della frequenza  $f(\nu, T)$  ed il suo integrale sulle frequenze è dato dalla legge di Stefan:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\nu} = f(\nu, T) \\ \int_0^\infty f(\nu, T) d\nu = AT^4 \end{cases} \quad (7.43)$$

Possiamo trovare una combinazione di  $\nu$  e  $T$  che abbia le dimensioni di:

$$\left[\frac{du}{d\nu}\right] = ml^{-1}t^{-1}$$

avendo a disposizione:

$$\begin{aligned} [kT] &= ml^2t^{-2} \\ [c] &= lt^{-1} \\ [\nu] &= t^{-1} \end{aligned}$$

ove  $k$  è la costante di Boltzman  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  e  $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$  è la velocità della luce nel vuoto.

La combinazione di questi elementi che riproduce le dimensioni volute è:

$$f(\nu, T) = CkT \frac{\nu^2}{c^3} \quad (7.44)$$

ove  $C$  è una costante che non può dipendere da  $kT$ ,  $\nu$  e  $c$  e, secondo Rayleigh e Jeans vale  $8\pi$ .

La funzione (7.44) diverge alle alte frequenze (catastrofe ultravioletta), e dunque andrà "regolarizzata", in modo da eliminare questa divergenza, con un termine che dipenda dalla frequenza e dalla temperatura in modo tale che l'integrale (7.43) dia il risultato atteso:

$$\int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} P(a\nu T^m) d\nu = AT^4 \quad (7.45)$$

in cui abbiamo supposto che la funzione regolarizzante dipenda da una potenza generica della temperatura. L'eq. (7.45) impone un valore all'esponente della temperatura  $m$  e alle dimensioni della costante  $a$ . Infatti, se effettuiamo il cambiamento di variabile  $a\nu T^m = x$ , risulta:

$$\frac{kT}{a^3 c^3} T^{-3m} \int_0^\infty x P(x) dx = AT^4 \quad (7.46)$$

da cui, uguagliando gli esponenti della temperatura ad ambo i membri:  $-3m + 1 = 4 \Rightarrow m = -1$ , e  $a\nu T^{-1}$  deve essere adimensionale. Siccome  $kT$  ha le dimensioni di un'energia possiamo usare la relazione di Planck  $E = h\nu$  per ricavare la forma funzionale  $a = h/k$  ove  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$  è la costante di Planck.

In definitiva,

$$G(\nu) = \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi kT \nu^2}{c^3} f\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (7.47)$$

e

$$\frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \sigma T^4$$

cambiando la variabile  $x = \frac{\nu}{T}$ :

$$\frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty (Tx)^2 f(x) T dx = \sigma T^4$$

quindi, l'integrale  $\int_0^\infty x^2 f(x) dx$  è una costante rispetto a  $T$ .

Il massimo della distribuzione spettrale di energia, si sposta in avanti all'aumentare della temperatura. Infatti, se chiamiamo  $G(\nu)$  la densità spettrale di energia, questa avrà un massimo quando  $\frac{dG(\nu)}{d\nu} = 0$ . Dunque, ricordando che  $G$  è funzione di  $\nu$  tramite  $x$ :

$$\frac{dG(x)}{d\nu} \propto \frac{d[x^2 f(x)]}{dx} \frac{dx}{d\nu} \Big|_{\nu=\nu_{max}} = 0$$

facendo le derivate:

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 0 \Rightarrow x_{max} = -2 \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right)_{x=x_{max}} \quad (7.48)$$

Il secondo membro è indipendente da  $\nu$  e  $T$  ma dipende solo dal loro rapporto. In pratica  $x_{max}$  è una funzione  $\xi(x)|_{x=x_{max}}$ , e dunque una costante. Quindi se  $x_{max} \equiv \nu_{max}/T = cost$ , deriva che

$$\boxed{\nu_{max} = cost \cdot T} \quad (7.49)$$

dunque la posizione del massimo è direttamente proporzionale alla temperatura. Questa equazione prende il nome di legge di spostamento di Wien.

### 7.6.3 Coefficienti di Einstein e spettro di corpo nero

Con argomenti termodinamici, non si può andare molto oltre quanto già mostrato, né c'è modo di ricavare la forma della densità di energia in funzione della frequenza. Per ricavare quest'andamento funzionale è necessario ricorrere alla meccanica quantistica, per cui i livelli di energia degli elettroni atomici sono discreti (quantizzati, per l'appunto). Gli elettroni atomici, stimolati dalla radiazione elettromagnetica possono saltare da un livello energetico ad un altro di energia superiore, e poi decadere nuovamente ad un livello inferiore, sia spontaneamente, sia tramite un'altra interazione con la radiazione. Quando un elettrone decade in un livello energetico inferiore, nel processo viene emesso un fotone (un quanto di radiazione elettromagnetica) la cui energia è pari alla differenza di energia tra il livello di partenza e quello di arrivo. Analogamente, per saltare ad un livello più alto, deve assorbire un fotone di energia pari alla differenza tra i livelli.

Esaminiamo in dettaglio due livelli energetici generici  $m$  ed  $n$  con  $E_m < E_n$ . Siano  $N_n$  gli elettroni presenti al livello  $n$  e sia  $A_{nm}$  la probabilità di transizione spontanea al livello  $m$ . La variazione del numero di elettroni nel livello  $n$ , dovuto all'emissione spontanea sarà:

$$\dot{N}_n = - \sum_m A_{nm} N_n \quad (7.50)$$

che esprime che il numero degli elettroni nel livello superiore decresce per decadimento in tutti i livelli inferiori. L'Eq. (7.50) si integra:

$$N_n(t) = N_n^0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{1}{\sum_m A_{nm}}$$

avendo definito la vita media del livello  $\tau$ .

La probabilità di transizione dal livello inferiore  $m$  a quello superiore  $n$  mediante l'assorbimento di un fotone dal campo elettromagnetico, sarà proporzionale alla densità di energia del campo  $u(\nu)$  mediante un coefficiente che chiameremo  $B_{mn}$ :

$$W_{mn} = B_{mn} u(\nu_{mn})$$

L'ultima possibilità, è che il campo elettromagnetico assuma energia dall'atomo, diseccitando l'elettrone da  $n$  ad  $m$  (emissione stimolata). Anche in questo caso, la probabilità sarà proporzionale alla densità di energia, tramite un coefficiente  $B_{nm}$  che in linea di principio è differente da  $B_{mn}$ .

In totale, la variazione del numero di elettroni nei livelli  $m$  ed  $n$ , sarà;

$$\dot{N}_m(t) = -N_m(0) B_{mn} u(\nu_{nm}) \quad (7.51)$$

$$\dot{N}_n(t) = -N_n(0) [A_{nm} + B_{nm} u(\nu_{nm})] \quad (7.52)$$

All'equilibrio, le variazioni si devono compensare:  $\dot{N}_n = \dot{N}_m$ . Raccogliendo i termini in  $u$  e dividendo tutto per  $N_n$ , otteniamo:

$$\left[ B_{mn} \frac{N_m}{N_n} - B_{nm} \right] u(\nu_{mn}) = A_{mn}$$

Il rapporto fra le popolazioni dei livelli, possiamo ricavarlo dalla statistica di Boltzman:

$$\frac{N_m}{N_n} = e^{-\frac{E_n - E_m}{kT}} = e^{\frac{h\nu_{mn}}{kT}}$$

e, se supponiamo che  $B_{mn} = B_{nm}$ , otteniamo:

$$u(\nu_{mn}) = \frac{A_{mn}}{B_{mn}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{mn}}{kT}} - 1} \quad (7.53)$$

Il rapporto tra  $A_{mn}$  e  $B_{mn}$ , è simile a quanto trovato con con argomenti termodinamici nell'eq. (7.47), in definitiva otteniamo la formula di Plank dello spettro della radiazione di corpo nero:

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (7.54)$$

#### 7.6.4 Spettro di corpo nero e oscillatori quantistici

La 7.45 ci dice che in condizioni di equilibrio termico c'è un rapporto ben preciso fra la densità di energia di radiazione in un corpo nero e l'energia media  $\langle E \rangle$  degli oscillatori che lo compongono:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle \quad (7.55)$$

Se l'energia è una variabile continua e la probabilità di un oscillatore di avere una certa energia segue la distribuzione di Maxwell, allora si ricava la legge di rayleigh-Jeans, che abbiamo già visto non funzionare, perché causa la catastrofe ultravioletta. Il problema fu risolto brillantemente da Plank con l'ipotesi che l'energia degli oscillatori fosse quantizzata secondo la regola:

$$E = nE_0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.56)$$

ove  $E_0$  è il quanto di energia fondamentale. L'energia media, allora non è più un integrale esteso da 0 a infinito, ma una somma:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nE_0 e^{-\frac{nE_0}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nE_0}{kT}}} \quad (7.57)$$

Detta  $\beta = 1/kT$ , la 7.57 è del tipo:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} \ln \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n E_0} \right) \quad (7.58)$$

La somma in 7.58 vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n E_0} = \frac{1}{1 - e^{-\beta E_0}} \quad (7.59)$$

dunque:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} \ln \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta E_0}} \right) = \frac{E_0}{e^{E_0/kT} - 1} \quad (7.60)$$



Parte II  
modulo II



## Capitolo 8

# Elettrostatica e conduzione

### 8.1 Richiami di elettrostatica nel vuoto

#### 8.1.1 Il Campo Elettrico

Definiamo il campo elettrico  $\mathbf{E}$  a partire dalla forza che subisce una carica elettrica nello spazio, in presenza di un'altra carica. Per una carica di prova unitaria, possiamo scrivere:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (8.1)$$

Analogamente, possiamo scrivere la legge (di Coulomb) per due cariche  $q_1$  e  $q_2$ . La forza esercitata dalla carica 1 sulla 2 sarà:

$$\mathbf{F}_{12} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \quad (8.2)$$

Dal confronto fra le (8.1) e (8.2) si ricava che il campo elettrico generato dalla carica  $q_1$  nel punto  $\mathbf{x}$  è:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \quad (8.3)$$

in cui la costante di proporzionalità  $k$  vale:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2 \text{ (SI)}$$

avendo introdotto la *permittività* o *costante dielettrica* del vuoto che vale  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ . Le dimensioni del campo elettrico saranno:  $[E] = \text{Vm}^{-1}$ .

Per avere un'idea della forza del campo elettrico rispetto a quello gravitazionale, consideriamo il rapporto tra la forza elettrica e gravitazionale esercitata da un elettrone su un'altro elettrone<sup>1</sup>:

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$
$$F_g = G \frac{m_e^2}{r^2}$$

---

<sup>1</sup>consideriamo le forze esercitate tra due particelle identiche per essere indipendenti dalle differenze di massa e/o carica. Avremmo potuto usare un elettrone ed un nucleo di tritio, per aumentare l'intensità della forza gravitazionale, ma non sarebbe stato significativo per un confronto fra le forze.

ove  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ ,  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $e/m_e = 1.759 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ .  
Dunque:

$$\frac{F_E}{F_g} = \frac{1}{4\pi G \epsilon_0} \frac{e^2}{m_e^2} = 4.17 \times 10^{42} \quad (8.4)$$

### 8.1.2 Teorema di Gauss

Consideriamo una superficie chiusa  $S$  ed una carica ad una distanza  $r$  da un punto della superficie. Il flusso del campo attraverso la superficie è:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r \cos(\theta)}{r^3} dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int r \frac{1}{r^3} r^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (8.5)$$

dunque, per una densità di carica  $\rho(x)$ :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x \quad (8.6)$$

da cui si ricava la formula differenziale del *Teorema di Gauss*:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.7)$$

### 8.1.3 Potenziale scalare

La legge di Coulomb (8.3), per una densità di carica  $\rho(\mathbf{x})$ , la possiamo scrivere:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (8.8)$$

La funzione integranda può essere scritta come il gradiente rispetto a  $x$  di  $-1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{x}} \left( \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}} \right) &= \\ &= -\frac{(2\mathbf{x}' - 2\mathbf{x})}{2(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^{3/2}} \\ &= -\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \end{aligned}$$

Dunque la (8.8) diventa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = -\nabla V \quad (8.9)$$

ove si è definito il potenziale elettrico:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (8.10)$$

Incidentalmente, dal teorema di Gauss (8.5) e dalle (8.8) e (8.10), ricaviamo che:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

possiamo portare il gradiente dentro l'integrale perché è rispetto a  $\mathbf{x}$  e poi cambiare segno e variabile grazie alla simmetria del modulo:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \nabla'^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

di conseguenza, deve essere:

$$\boxed{\nabla'^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (8.11)$$

Se il campo è il gradiente di un potenziale scalare  $V$ , allora il rotore del campo è nullo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (8.12)$$

e di conseguenza è nulla la circuitazione del campo lungo una linea chiusa:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (8.13)$$

#### 8.1.4 Distribuzione superficiale di carica e doppio strato

Il teorema di Gauss applicato ad una superficie carica con una densità superficiale  $\sigma$  si può scrivere come:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \sigma dS \quad (8.14)$$

Se consideriamo i campi dai due lati della superficie  $E_1$  ed  $E_2$ , risulta  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma/\epsilon_0$ , che ci dice solo che c'è una discontinuità nelle componenti normali del campo dai due lati della superficie. D'altra parte, la (8.13) applicata ad un circuito che attraversi la superficie e abbia due lati uguali e paralleli alla superficie  $\ell_1$  ed  $\ell_2$ , e gli altri due ortogonali, implica che:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{E}_1 \cdot \ell_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \ell_2 = 0 \quad (8.15)$$

essendo i due lati paralleli percorsi in senso opposto.

In definitiva, mentre la componente normale alla superficie subisce un salto  $\sigma/\epsilon_0$ , la componente tangenziale si conserva nel passaggio attraverso la superficie.

Consideriamo ora due superfici cariche con carica opposta, poste a distanza  $d(x)$  fra loro (Fig.8.1 - strato di dipolo). Il potenziale elettrico in un punto  $O(\mathbf{x})$  è dato dalla somma dei potenziali elettrici dei due strati calcolati in quel punto.

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS + \int_{S'} \frac{-\sigma(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + d\mathbf{n}|} dS' \right] \quad (8.16)$$

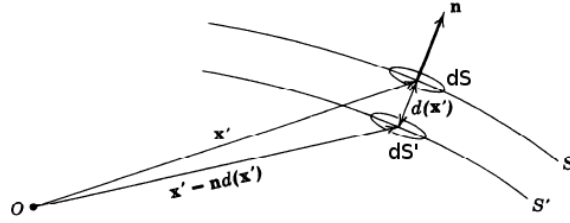


Figura 8.1: Definizione delle variabili per il calcolo del potenziale elettrico dello strato di dipolo

Siccome  $d \ll |\mathbf{x}'|$ , possiamo sviluppare il secondo termine in serie di Taylor:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + d\mathbf{n}|} \simeq \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + d\mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

Dunque, sostituendo in (8.16), otteniamo:

$$V(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\mathbf{x}') d\mathbf{n} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dS' \quad (8.17)$$

avendo tenuto conto che  $\nabla = -\nabla'$ . Definendo il *dipolo elettrico* come

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sigma(x) d \mathbf{n} dS = M(x) \mathbf{n} dS \quad (8.18)$$

dove  $M(x) = \sigma(x)d$  è la *distribuzione dello strato di dipolo*.

Siccome:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

e  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')| \cos\theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo tra la normale alla superficie e la linea di vista. Tenuto conto che

$$\cos\theta \frac{dS'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = d\Omega$$

è l'angolo solido sotteso da  $dS'$  al punto di osservazione, risulta che il potenziale di doppio strato, o strato di dipolo, è:

$$V(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int M(\mathbf{x}') d\Omega$$

mentre il potenziale in  $\mathbf{x}$ , generato da un dipolo  $\mathbf{p}(\mathbf{x}')$  posto in  $\mathbf{x}'$  è

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (8.19)$$

Se, per semplicità chiamiamo  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{r}$ , possiamo riscrivere la 8.19, in termini delle componenti di  $\mathbf{r}$ :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 r_i p_i$$

Possiamo trovare il campo  $E(\mathbf{r})$  dalla 8.9:

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r^3} r_i p_i \right) \quad (8.20)$$

ora:

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \frac{r_i}{(\sum_j r_j^2)^{3/2}} = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3}{2} r_i \left( \sum_j r_j^2 \right)^{-5/2} (2r_j)$$

Sostituendo in 8.20 e detto  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{r^3} \quad (8.21)$$

### 8.1.5 Equazione di Poisson ed energia del campo

Riassumendo i risultati dei paragrafi precedenti, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{E} = -\nabla V \end{cases} \quad (8.22)$$

Dalla prima e dalla terza, otteniamo:

$$\nabla \cdot \nabla V \equiv \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.23)$$

che è l'equazione di Poisson, caso disomogeneo dell'equazione di Laplace.

Consideriamo, ora, il potenziale generato da una distribuzione di  $n-1$  cariche  $q$ :

$$V(x_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|x_i - x_j|}$$

L'energia potenziale totale sarà:

$$\sum_{i=1}^n q_i V(x_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i=1}^{n-1} \frac{q_i q_j}{|x_i - x_j|}$$

In definitiva, passando dal discreto al continuo, l'energia di una distribuzione uniforme di cariche è:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \rho(x) \left[ \int \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \right] d^3 x = \frac{1}{2} \int \rho(x) V(x) d^3 x$$

Usando l'equazione di Poisson,  $\rho(x) = -\epsilon_0 \nabla^2 V(x)$ , dunque:

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int V \nabla \cdot (\nabla V) d^3 x$$

che, integrata per parti dà:

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[ V \nabla V - \int \nabla V \cdot \nabla V d^3 x \right]$$

Il primo addendo si annulla all'infinito, e dunque

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 d^3 x \quad (8.24)$$

## 8.2 Dielettrici

### 8.2.1 Costante dielettrica relativa

Consideriamo, ora, dei materiali in cui le cariche elettriche, localizzate negli atomi e nelle molecole, siano macroscopicamente statiche, ovvero non ci siano flussi di materia e di carica lungo di essi. Questi materiali, di conseguenza, non condurranno cariche elettriche e saranno dunque degli isolanti elettrici. Se pensiamo questi materiali come delle distribuzioni uniformi di cariche, potremo scrivere:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

Detta  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  la distanza fra due qualsiasi punti del materiale e sviluppando in serie di Taylor attorno a  $r^{-1}$ , otteniamo:

$$V(x) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_{ij} x_i x_j}{r^5} \right] \quad (8.25)$$

Dalla 8.25, notiamo che per questi materiali – i dielettrici – valgono le stesse leggi che per il vuoto, con una correzione che, macroscopicamente si può pensare come una diversa costante dielettrica. Detto, dunque,  $E_0$  il campo nel vuoto, per i dielettrici varrà:

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0$$

in cui  $\epsilon_r$  è la costante dielettrica relativa del mezzo (che è adimensionale).

Siccome per una superficie carica nel vuoto vale:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

allora, per una superficie in un dielettrico:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Si può pensare, che nel materiale esista un campo macroscopico dovuto alla struttura interna, che generi una densità di cariche (di polarizzazione)  $\sigma'$  tale che:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

dunque

$$\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma \quad (8.26)$$

che mostra che la densità di cariche di polarizzazione è proporzionale alla densità delle cariche che generano il campo.

### 8.2.2 Il vettore induzione elettrica

D'altra parte, possiamo costruire il potenziale macroscopico come la sovrapposizione dei potenziali generati da volumi piccoli (ma ancora non abbastanza

da dover considerare la struttura microscopica del materiale). Dai primi due termini della 8.25 il potenziale per unità di volume è:

$$\Delta V(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]$$

possiamo scrivere:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right] d^3x' \quad (8.27)$$

Integrando per parti il II addendo e considerando che  $r^{-1} \rightarrow 0$  all'infinito, otteniamo:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho(\mathbf{x}') - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')] d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (8.28)$$

Che è l'espressione del potenziale statico con una densità di carica  $\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$ . Usando questa densità nella prima equazione di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{eff}}{\epsilon_0} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (8.29)$$

posiamo scrivere:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (8.30)$$

che definisce il vettore induzione elettrica o spostamento elettrico  $D = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ .

Se consideriamo un mezzo isotropo, allora  $\mathbf{P}$  è parallelo al campo  $\mathbf{E}$ , si potrà dunque scrivere una relazione di proporzionalità fra i due vettori, mediante un coefficiente indipendente dalla direzione:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (8.31)$$

ove  $\chi$  è la *suscettività dielettrica*, del materiale. Dunque:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

che definisce la *permittività elettrica* del materiale:  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r$ . Se il mezzo non è uniforme, la densità di cariche di volume  $\bar{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  sarà diversa da 0, dunque:

$$\bar{\rho} = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \mathbf{D} = -\mathbf{D} \cdot \nabla \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}$$

Se, invece, il mezzo è isotropo e uniforme:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

e tutte le leggi sono uguali a quelle nel vuoto, salvo che i campi prodotti dalle cariche sono ridotti di un fattore  $\epsilon_0/\epsilon$ . Una immediata conseguenza di ciò è che la capacità di un condensatore riempito con una sostanza dielettrica fra gli elettrodi è maggiore di quella che avrebbe con gli elettrodi separati dal vuoto.

### 8.2.3 Energia del campo nei dielettrici

Abbiamo visto che l'energia del campo nel vuoto è data da:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x$$

In presenza di un dielettrico, non lo possiamo più dire perché c'è il campo microscopico, e parte dell'energia del campo è utilizzata per polarizzare il mezzo.

Consideriamo la variazione dell'energia  $\delta W$  dovuta ad una variazione  $\delta\rho$  della carica macroscopica:

$$\delta W = \int \delta\rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x$$

ma:

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \nabla \cdot \delta\mathbf{D} \\ E &= -\nabla V \end{aligned}$$

e dunque

$$\delta W = \int \nabla \cdot \delta\mathbf{D}(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x$$

che, integrato per parti dà:

$$V(x)\delta\mathbf{D}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) d^3x$$

Il primo termine si annulla perché il potenziale è nullo all'infinito, e, in definitiva, si ottiene:

$$\delta W = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x \quad (8.32)$$

Se il mezzo è lineare, allora possiamo scrivere:

$$\delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})$$

e dunque dire che l'energia del campo in presenza di un dielettrico sarà:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x \quad (8.33)$$

### 8.2.4 Polarizzazione per deformazione ed orientamento

Vediamo, ora quali sono i meccanismi che possono portare alla polarizzazione di un mezzo.

Se schematizziamo gli atomi con il modello "planetario" di Bohr, con un nucleo positivo al centro e gli elettroni, negativi all'esterno, l'applicazione di un campo elettrico, sposterà il nucleo in una direzione e gli elettroni in quella opposta, dando così luogo ad un dipolo elettrico. Questo meccanismo è la polarizzazione per deformazione.

A livello molecolare, è possibile che le molecole abbiano un momento elettrico proprio. Ad esempio, la molecola del cloruro di sodio, è formata da uno ione cloro, positivo, legato ad uno ione sodio, negativo. In presenza del campo, queste molecole tenderanno ad orientarsi in media nella direzione del campo, con delle fluttuazioni dovute all'agitazione termica. Questa è la polarizzazione per orientamento.

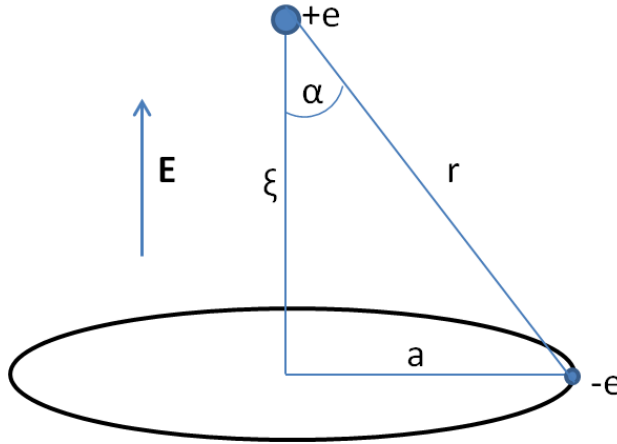


Figura 8.2: Effetto di un campo elettrico su un atomo di idrogeno nel modello di Bohr

### Deformazione dell'atomo di idrogeno

Come esempio quantitativo di polarizzazione per deformazione consideriamo l'atomo di idrogeno nel modello di Bohr, in un campo elettrico come mostrato in Fig.8.2.4. Per effetto del campo il nucleo ed il centro dell'orbita dell'elettrone si separeranno di una distanza  $\xi$ , di conseguenza, la distanza tra il nucleo di carica  $+e$  e l'elettrone di carica  $-e$  sarà:  $r = \sqrt{\xi^2 + a^2}$ , essendo  $a$  il raggio dell'orbita. All'equilibrio dovremo eguagliare la forza attrattiva fra elettrone e nucleo (proiettata nella direzione del campo), con quella del campo, che tende a separarli:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cos(\alpha) = e\mathbf{E}$$

Per  $\xi \ll a$  sarà:  $r \simeq a$ , inoltre  $\cos(\alpha) = \xi/r \simeq \xi/a$ , dunque:

$$eE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a^2} \frac{\xi}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{a^3} e\xi$$

dove abbiamo evidenziato il termine  $p = e\xi$  che rappresenta il dipolo elettrico indotto dal campo  $E$ :

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E} \quad (8.34)$$

### Polarizzazione media per orientamento

Come abbiamo detto, per molecole dotate di un proprio momento di dipolo elettrico, la tendenza ad orientarsi in direzione del campo è contrastata dall'agitazione termica che tenderebbe a disporle in maniera casuale. La polarizzazione media di un mezzo composto da molecole polari, si potrà calcolare come media statistica della polarizzazione usando la funzione di distribuzione di Boltzman, che descrive la distribuzione delle energie ad una determinata temperatura  $T$ .

L'energia di un dipolo elettrico  $\mathbf{p}$  nel campo  $\mathbf{E}$ , sarà:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = pE \cos \theta$$

essendo  $\theta$  l'angolo fra il campo e il dipolo. La distribuzione di Boltzman, a meno di costanti moltiplicative (ininfluenti nel calcolo della media) è:

$$f(\cos \theta) = e^{-\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}{kT}} \quad (8.35)$$

Di conseguenza, il valor medio della polarizzazione sarà:

$$\langle P \rangle = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta f(\cos \theta) d\Omega}{\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta) d\Omega} \quad (8.36)$$

essendo  $d\Omega = \sin \theta d\phi d\theta = d\phi d(\cos \theta)$  l'elemento di angolo solido. Sostituendo a  $f(\cos \theta)$  la sua espressione (8.35) ed eseguendo il cambio di variabile  $x = \cos \theta$ :

$$\langle P \rangle = \frac{\int_{-1}^1 x e^{ax} dx}{\int_{-1}^1 e^{ax} dx}$$

avendo chiamato  $a = \frac{Ep}{kT}$ . Integrando per parti il numeratore, otteniamo:

$$\frac{\frac{1}{a} [xe^{ax}]_{-1}^1 - \frac{1}{a^2} \int_{-1}^1 e^{ax} dx}{\frac{1}{a} \int_{-1}^1 e^{ax} dx}$$

Eseguendo il calcolo:

$$\langle P \rangle = \operatorname{ctgh}(a) - \frac{1}{a} = L(a) \quad (8.37)$$

La funzione  $L(a)$  è la funzione di *Langevin*. Per valori di  $KT \gg Ep$  (cioè quasi sempre nell'ambiente, essendo  $300K = 0.0025 \text{ eV}/c^2 = 4.14 \cdot 10^{-21} \text{ J}$  e, considerate distanze fra le cariche di  $r = 10^{-8} \text{ m}$ ,  $p \sim er = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{-8} \text{ m} \sim 10^{-27} \text{ m} \cdot \text{C}$ ), possiamo sviluppare  $L(a)$  in serie attorno ad  $a = Ep/KT$ , e risulta:  $L(a) \simeq a/3$ , e dunque:

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \mathbf{p}L(a) = \frac{p^2 E^*}{3KT}$$

Il dipolo totale sarà dato da  $\mathbf{P} = n\langle \mathbf{P} \rangle = n\alpha E^*$ , essendo  $\alpha$  la polarizzabilità elettrica,  $n$  il numero di dipoli per unità di volume ed  $E^*$  il campo interno. Dobbiamo adesso valutare il campo interno al materiale. Se consideriamo un volume sferico  $V$  e raggio  $R$  che contenga molte molecole, il campo interno alla sfera generato dalle cariche di polarizzazione si può ricavare dal teorema di Gauss. Infatti il flusso  $F_s(E)$  del campo attraverso la superficie è:  $F_s(E) = 4\pi r^2 E(r)$  e la carica contenuta nella sfera è  $q = 4/3\pi r^3 \rho$ . Dunque, per Gauss  $F_s(E) = q/\epsilon_0$  Sicché:  $4\pi r^2 E^*(R) = 4/3\pi r^3 \rho/\epsilon_0$  e, di conseguenza, possiamo scrivere:

$$E^* = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (8.38)$$

Dunque, il campo interno al materiale, dovuto alle cariche di polarizzazione ed al campo esterno sarà:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

ma, siccome  $\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}^*$ , con successivi passaggi, possiamo ricavare l'espressione della polarizzazione elettrica in funzione del solo campo esterno e della polarizzabilità:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= n\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right) \\ \mathbf{P} &= \frac{n\alpha\mathbf{E}}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} = \epsilon_0\chi\mathbf{E}\end{aligned}\quad (8.39)$$

e di conseguenza, l'espressione della suscettività elettrica in funzione della polarizzabilità:

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}} \quad (8.40)$$

La suscettività è adimensionale, di conseguenza, le dimensioni della polarizzabilità  $\alpha$ , si possono ricavare dall'espressione 8.40, in cui deve essere adimensionale il rapporto tra  $n\alpha$  e  $\epsilon_0$ . Dunque la polarizzabilità ha le dimensioni della costante dielettrica per un volume. Nei testi, spesso, si trova che la polarizzabilità è espressa in  $cm^3$ : ci si riferisce al suo valore in termini della costante dielettrica del vuoto  $\alpha' = \alpha/\epsilon_0$ .

### Relazione di Clausius-Mossotti

Ricaviamo, ora, un'espressione che lega la costante dielettrica relativa alla polarizzabilità, che, come vedremo in seguito, è molto utile quando si considerano gli effetti di un campo variabile nel tempo su di un materiale dielettrico.

Partendo dall'Eq. (8.39), e ricordando che  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) = \epsilon_0\epsilon_r$ , ricaviamo:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( \frac{3n\alpha}{3\epsilon_0 - n\alpha} + 1 \right) = \epsilon_0\epsilon_r$$

dunque

$$(\epsilon_r - 1)(3\epsilon_0 - n\alpha) = 3n\alpha$$

ed, infine, raccogliendo a primo membro tutti i termini in  $n\alpha$ , otteniamo la relazione di Clausius-Mossotti:

$$\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (8.41)$$

### 8.2.5 Passaggio fra due dielettrici

Consideriamo due dielettrici adiacenti con costanti dielettriche  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  come in Fig. 8.3. Siccome  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , la circuitazione lungo una qualsiasi linea chiusa che passi attraverso i due dielettrici è nulla. In particolare possiamo prendere la linea indicata in Fig. 8.3 e far tendere a zero la lunghezza dei tratti che attraversano la superficie di separazione. Al limite, perché sia rispettata la condizione sul rotore, sarà:

$$E_{t1} = E_{t2}$$

cioè, la componente trasversale del campo elettrico si conserva.

D'altra parte, considerando un cilindretto con le due basi  $dS$  nei due dielettrici, siccome questo non contiene cariche, sarà nullo il flusso del campo  $D$ , dunque,  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  e quindi:

$$\int D \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

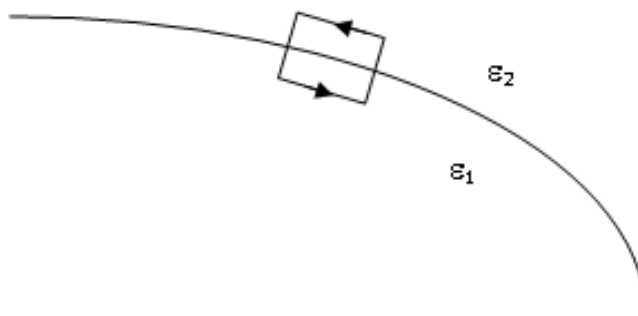


Figura 8.3: Superficie di separazione fra due dielettrici differenti

anche qui, facendo tendere a 0 la distanza fra le basi, conterà solo il flusso attraverso le basi, e di conseguenza:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (8.42)$$

Quindi si conserva la componente normale dell'induzione elettrica. Siccome  $D = \epsilon E$ , la (8.42) diventa  $\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$ . Dividendo per la componente trasversale del campo elettrico avremo:

$$\epsilon_1 \frac{E_{n1}}{E_{t1}} = \epsilon_2 \frac{E_{n2}}{E_{t2}} = \epsilon_1 E \operatorname{tg} \theta_1 = \epsilon_2 E \operatorname{tg} \theta_2$$

essendo  $\theta_i$  l'angolo che il campo elettrico ha rispetto alla normale alla superficie dal lato  $i$ . Di conseguenza:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (8.43)$$

### 8.2.6 Dielettrici in presenza di campi variabili nel tempo

Per capire il comportamento dei dielettrici sottoposti all'azione di campi variabili nel tempo, dobbiamo considerare dei modelli semplici che ne mimino il comportamento.

#### Polarizzazione per deformazione: modello "a molla"

Per quel che riguarda la polarizzabilità per deformazione dell'atomo, useremo un modello dell'atomo di idrogeno, in cui l'elettrone è legato al nucleo da una "molla" di costante elastica  $K$ . Sotto l'effetto di un campo locale  $E_{loc}$  l'elettrone si sposterà di  $x$ . All'equilibrio:

$$-eE_{loc} = K x = m\omega_0^2 x$$

avendo definito la "pulsazione"  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ . L'equazione del moto è:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = -eE$$

Per un campo variabile nel tempo  $E = E_0 e^{i\omega t}$  avremo:

$$m(-\omega^2 + \omega_0^2)x_0 = -eE_0$$

e dunque, per un atomo di numero atomico  $Z$ :

$$x_0 = -\frac{Ze}{m(-\omega^2 + \omega_0^2)}E$$

e dunque, essendo il dipolo  $p = -ex_0$ , possiamo ricavare la polarizzabilità per deformazione (atomica):

$$\alpha_{at} = \frac{Ze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (8.44)$$

Come si vede, la (8.44) diverge per  $\omega = \omega_0$ , e dunque  $\omega_0$  è la frequenza di risonanza dell'atomo considerato. Per  $\omega \ll \omega_0$  sarà:

$$\alpha_{at} = \frac{Ze^2}{m\omega_0^2} \quad (8.45)$$

La frequenza  $\omega_0$  può essere valutata a partire dalla relazione di Plank  $E_{mn} = \hbar\omega_{nm}$ , essendo  $E_{nm}$  dell'ordine della decina di  $eV/c^2$ . Per dare un limite superiore, l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno è  $13.595 eV/c^2$  e  $\hbar = 6.583 \cdot 10^{-16} eV s$ . Da questa stima verrebbe:  $\omega_0 = 2.06 \cdot 10^{16} Hz$ . D'altro canto, considerato che le polarizzabilità misurate sono dell'ordine di  $10^{-24} cm^3$ , possiamo scrivere:

$$\omega_0^2 = 10^{24} \frac{Ze^2}{m}$$

il rapporto tra la massa e la carica dell'elettrone è noto dagli esperimenti di Thompson (che confrontano la deflessione di un fascio di elettroni di energia nota da parte di un campo elettrico e magnetico) e la carica dell'elettrone dall'esperimento di Millikan:

$$\frac{e}{m} = 1.7 \cdot 10^{-11} C/kg = 5.272 e.s.u./g$$

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} C = 4.803 \cdot 10^{-10} e.s.u.$$

Dunque, risulta:

$$\omega_0 \simeq Z^{1/2} 1.15 \cdot 10^{16} cycl/s$$

pari a una frequenza di  $\nu = \omega_0/2\pi = 2.4 \cdot 10^{15} Hz$  e ad una lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu = 1.25 \cdot 10^{-7} m$ , nell'ultravioletto.

### Polarizzazione di una molecola biatomica in un reticolo

Consideriamo un cristallo ionico biatomico con due soli ioni di carica unitaria opposta per cella primitiva (per es.  $NaCl = Na^+ + Cl^-$ ) sottoposto all'azione di un campo elettrico variabile nel tempo. Per effetto del campo, gli ioni positivi e negativi, si sposteranno dalle rispettive posizioni di equilibrio in direzioni opposte. Il dipolo elettrico indotto dallo spostamento delle cariche è:

$$p = e(u^+ - u^-) = ew$$

essendo  $u^\pm$  lo spostamento delle cariche  $\pm$  rispetto alla loro posizione di equilibrio. L'equazione del moto sarà:

$$\begin{cases} M_+ \ddot{u}^+ = -K(u^+ - u^-) + eE \\ M_- \ddot{u}^- = -K(u^- - u^+) - eE \end{cases}$$

o anche:

$$\begin{cases} \ddot{u}^+ = -\frac{K}{M_+} w + \frac{eE}{M_+} \\ \ddot{u}^- = \frac{K}{M_-} w - \frac{eE}{M_-} \end{cases} \quad (8.46)$$

sottraendo membro a membro e detta  $\frac{1}{M} = \frac{1}{M_+} + \frac{1}{M_-}$ :

$$\ddot{w} = -\frac{K}{M} w + \frac{eE}{M}$$

se, come al solito, cerchiamo soluzioni periodiche per un campo periodico, detta  $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{K}{M}}$ , otteniamo:

$$-\omega^2 w_0 = -\bar{\omega}^2 w_0 + \frac{e}{M} E_0$$

da cui:

$$w_0 = \frac{eE_0}{M(\bar{\omega}^2 - \omega^2)}$$

e possiamo ricavare la polarizzabilità molecolare:

$$\alpha_{mol} = \frac{p}{E_0} = \frac{e^2}{M\bar{\omega}^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2}\right)} \quad (8.47)$$

L'espressione 8.47, è sostanzialmente analoga a quella per la polarizzabilità atomica 8.45, solo, che la frequenza di risonanza in gioco, adesso è determinata dalle energie di vibrazione reticolari. Possiamo stimare queste energie dal modello di Debye, essere dell'ordine di  $10^{-2} \div 10^{-1} eV$ , e quindi da  $\bar{\omega}$  sarà da 10 a 100 volte più piccola di quella atomica e quindi la polarizzabilità molecolare dipenderà significativamente dalla frequenza a frequenze tipiche della luce visibile e infrarossa. D'altro canto, siccome la massa a denominatore è quella del nucleo, che è  $10^4$  volte quella dell'elettrone a denominatore nella 8.45, le polarizzabilità "statiche" (cioè quelle per frequenze molto inferiori alla risonanza), sono comparabili. Questo significa che il modello di *ione rigido* che abbiamo considerato nel modello reticolare, non è giustificato e va considerata anche la polarizzabilità atomica dei singoli ioni. Il modo più semplice di fare ciò è semplicemente sommare le polarizzabilità degli ioni a quella reticolare:

$$\alpha = (\alpha^+ + \alpha^-) + \frac{e^2}{M(\bar{\omega}^2 - \omega^2)} \quad (8.48)$$

Anche se questo modello è molto naive e porta a risultati numericamente non molto realistici, qualitativamente mostra la struttura reale. Inserendo la 8.48 nella relazione di Clausius-Mossotti 8.41, otteniamo:

$$\frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2} = \frac{n}{3\epsilon_0} \left( \alpha^+ + \alpha^- + \frac{e^2}{M(\bar{\omega}^2 - \omega^2)} \right) \quad (8.49)$$

È conveniente scrivere  $\epsilon(\omega)$  in funzione dei suoi valori limite  $\epsilon(0)$  per  $\omega \ll \bar{\omega}$  e  $\epsilon(\infty)$  per  $\bar{\omega} \ll \omega \ll \omega_0$ . Infatti, la prima quantità è la polarizzabilità statica e la seconda è legata alla costante dielettrica a frequenze ottiche e dunque all'indice di rifrazione  $r$  del cristallo<sup>2</sup>:  $\epsilon(\infty) = r^2$ .

$$\frac{\epsilon(0) - 1}{\epsilon(0) + 2} = \frac{n}{3\epsilon_0} \left( \alpha^+ + \alpha^- + \frac{e^2}{M\bar{\omega}^2} \right) \quad (8.50)$$

$$\frac{\epsilon(\infty) - 1}{\epsilon(\infty) + 2} = \frac{n}{3\epsilon_0} (\alpha^+ + \alpha^-) \quad (8.51)$$

sostituendo in 8.49, troviamo:

$$\frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2} = \frac{\epsilon(\infty) - 1}{\epsilon(\infty) + 2} + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2}} \left( \frac{\epsilon(0) - 1}{\epsilon(0) + 2} - \frac{\epsilon(\infty) - 1}{\epsilon(\infty) + 2} \right)$$

da cui possiamo trovare  $\epsilon(\omega)$ :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + \frac{\epsilon(\infty) - \epsilon(0)}{\frac{\omega^2}{\omega_T^2} - 1} \quad (8.52)$$

ove

$$\omega_T^2 = \bar{\omega}^2 \left( \frac{\epsilon(\infty) + 2}{\epsilon(0) + 2} \right)$$

### Catastrofe di polarizzazione

Dalla relazione di Clausius-Mossotti 8.41, si ricava che la costante dielettrica relativa

$$\epsilon_r = \frac{1 + \frac{2n\alpha}{3\epsilon_0}}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} \quad (8.53)$$

tende ad infinito per  $n\alpha/\epsilon_0 = 3$  (catastrofe di polarizzazione). Siccome il valore di  $\epsilon_r$  è molto sensibile alle piccole variazioni di  $n\alpha/\epsilon_0$  attorno al suo valore critico, potremo sviluppare in serie:

$$\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = 1 - 3s$$

in cui  $s \ll 1$ . Sostituendo in 8.53, si ottiene:

$$\epsilon_r = \frac{1 + 2 - 6s}{1 - 1 + 3s} = \frac{1}{s} - 2 \sim \frac{1}{s}$$

La polarizzabilità  $\alpha$  dipenderà dalla temperatura (quanto meno perché le distanze molecolari ci dipendono), dunque anche  $s$ . Supponiamo che vicino ad una temperatura critica  $T_c$ , la variazione sia lineare. Potremo scrivere che  $s = \beta(T - T_c)$ , allora

$$\epsilon_r = \frac{1}{\beta(T - T_c)}$$

divergerà alla temperatura critica.

<sup>2</sup>Non si è usato il simbolo usuale  $n$  per l'indice di rifrazione per non confonderlo con la densità numerica dei dipoli

### 8.2.7 Teorie di campo medio

[Ashcroft Mermin Cap. 27] Su scala microscopica, la densità di carica in un dielettrico  $\rho^{mic}$  è una funzione rapidamente variabile della posizione, e così anche il potenziale e il campo elettrico. D'altra parte, quando si considera la descrizione macroscopica, la densità di carica efficace  $\rho_{eff} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$  che interviene nella prima equazione di Maxwell 8.29, varia molto lentamente con la posizione. Cerchiamo, ora, di mettere in relazione il campo di polarizzazione macroscopico con quello microscopico, attraverso l'uso di una procedura di media dei potenziali e dei campi microscopici.

Il campo macroscopico, sarà una media del potenziale microscopico eseguita mediante una funzione peso  $f(r)$ , che abbia le seguenti caratteristiche:

- $f(r) \geq 0$ ;  $f(r) = 0 \forall r > r_0$
- $f(-r) = f(r)$
- $\int_{r < r_0} f(r) = 1$

Allora il campo macroscopico nel punto  $\mathbf{r}$   $E(r)$  potrà essere scritto in termini del campo microscopico:

$$E(r) = \int E^{mic}(r - r')f(r')dr' \quad (8.54)$$

e l'equazione della divergenza di E, diventa:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ \int \nabla \cdot E^{mic}(r - r')f(r')dr' &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho^{mic}(r - r')f(r')dr' \end{aligned} \quad (8.55)$$

possiamo immaginare che la densità di carica microscopica sia la somma delle distribuzioni di carica nei punti  $r_j$ :

$$\rho^{mic}(r) = \sum_j \rho_j(r - r_j) \quad (8.56)$$

cosa lecita sicuramente nei cristalli ionico, molto meno in quelli molecolari, in cui la carica è distribuita negli orbitali molecolari. Se il campo deforma gli ioni, allora la distribuzione di carica sarà differente da quella di equilibrio

$$\rho_0^{mic}(r) = \sum_j \rho_{0j}(r - r_{0j})$$

Sostituendo la 8.56 nella 8.55 otteniamo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \sum_j \rho_j(r - r_j - r')f(r')dr' \end{aligned} \quad (8.57)$$

se ci riferiamo alla posizione di equilibrio degli ioni  $r_{0j}$ , allora  $r_j = r_{0j} + \Delta_j$ , quindi l'argomento di  $\rho$  è  $\bar{r} = r - (r_{0j} + \Delta_j) - r'$ . Esprimendo  $r'$  in termini di  $\bar{r}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \int \rho(\bar{r})f(r - r_{0j} - (\bar{r} + \Delta_j))d\bar{r} \end{aligned} \quad (8.58)$$

Siccome la funzione  $f$  è lentamente variabile su scale della distanza reticolare, possiamo sviluppare in serie intorno alla posizione di equilibrio  $r - r_{0j}$ :

$$\begin{aligned} f(r - r_{0j} - (\bar{r} + \Delta_j)) &\simeq \sum_k \frac{1}{k!} \nabla^k f(r - r_{0j}) [-(\bar{r} + \Delta_j)]^k = \\ &\simeq f(r - r_{0j}) - (\bar{r} + \Delta_j) \cdot \nabla f(r - r_{0j}) \end{aligned} \quad (8.59)$$

che, sostituita nel II membro della 8.58, dà:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum_j f(r - r_{0j}) \int \rho(\bar{r}) d\bar{r} + \right. \\ &\quad \left. - \sum_j \int (\bar{r} + \Delta_j) \cdot \nabla f(r - r_{0j}) d\bar{r} \right) \end{aligned} \quad (8.60)$$

L'integrale al primo termine è la carica  $q_j$  associata allo ione in posizione  $j$ . Per un reticolo monoatomico, visto che l'atomo è neutro, deve porsi pari a 0. Al II termine abbiamo  $\Delta_j$  che moltiplica, di nuovo la carica (dunque 0) più il dipolo dello ione in  $j$  moltiplicato per la divergenza di  $f$ :

$$p_j = \int \bar{r} \rho(\bar{r}) d\bar{r} \cdot f(r - r_{0j})$$

Siccome la divergenza non agisce su  $\bar{r}$ , la posso estendere a tutto l'integrale e ottengo ( $r - r_{0j}$  sono i vettori  $\mathbf{R}$  del reticolo di Bravais delle posizioni di equilibrio):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \sum_{\mathbf{R}} [p(\mathbf{R}) f(\mathbf{R})] = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (8.61)$$

dove abbiamo definito la polarizzazione totale  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{R}} [p(\mathbf{R}) f(\mathbf{R})]$$

Il risultato continua a valere per cristalli ionici con una base. Se  $\mathbf{d}$  è il vettore della base,  $\mathbf{u}(\mathbf{R}, \mathbf{d})$  lo spostamento (il  $\Delta_j$  di prima) e  $\mathbf{R}$  il vettore del reticolo di Bravais, contando che ora le cariche  $q(\mathbf{d})$  non sono più nulle:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{d}} [p(\mathbf{R}, \mathbf{d}) + q(\mathbf{d}) \mathbf{u}(\mathbf{R}, \mathbf{d})]$$

Per  $d \ll R \Rightarrow f(r - R - d) \approx f(r - R) - d \cdot \nabla f(r - R)$ , quindi:

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{d}} [p(\mathbf{R}, \mathbf{d}) + q(\mathbf{d}) \mathbf{u}(\mathbf{R}, \mathbf{d}) (f(r - R) - d \cdot \nabla f(r - R))]$$

che ci dà un risultato equivalente al precedente se  $\sum_{\mathbf{d}} q(\mathbf{d}) = 0$  e si trascura il dipolo della cella in condizioni di equilibrio  $\sum_{\mathbf{d}} d q(\mathbf{d})$ .

### 8.2.8 Cristalli Piroelettrici

Quest'ultima condizione non è sempre lecita. In un cristallo indefinito, il termine di dipolo della cella primitiva

$$p_0 = \sum_{\mathbf{d}} d q(\mathbf{d}) f(r - R)$$

si comporta come una costante additiva alla densità di polarizzazione e sparisce quando si fa la divergenza di  $\mathbf{P}$ . Se il cristallo non è infinito, al bordo del reticolo la costante additiva, non è più costante, ma va rapidamente a 0, quindi la sua divergenza sarà grande. Per di più, sulla superficie esterna, non è più possibile neanche annullare la somma delle cariche, perché le celle della superficie possono essere solo parzialmente riempite, e contribuiscono con una densità superficiale di carica  $\rho_s$  che si aggiunge a quella dovuta alla  $\nabla \cdot \mathbf{P} \simeq \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ . La scelta della cella primitiva cambia entrambi i termini, ma non la carica superficiale  $\rho_s + P_n$ . Possiamo scegliere la cella in maniera tale che valga la 8.61 senza i termini aggiuntivi anche sulla superficie. I cristalli per cui la cella

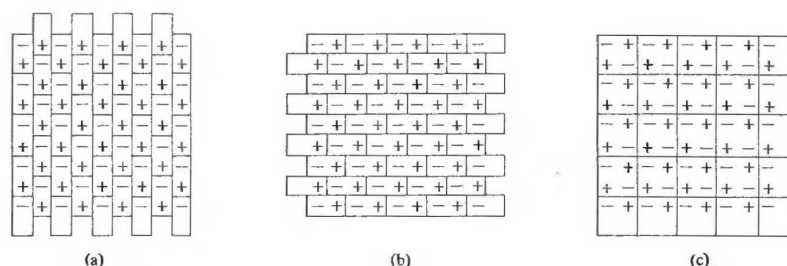


Figura 8.4: La scelta della cella primitiva in un cristallo ionico. In (a) e (b) le celle sul bordo non sono neutre, la cella (c) non è primitiva, ma assicura la neutralità

primitiva "naturale" ha un momento di dipolo  $p_0$ , all'equilibrio presentano una densità di polarizzazione non nulla anche in assenza di campo e sono detti **piezoelettrici**. Per questi cristalli, la presenza della polarizzazione all'equilibrio, impone delle restrizioni alle possibili simmetrie del reticolo cristallino. Infatti, i reticoli cristallini di questi cristalli, possono avere solo quelle simmetrie che lascino invariata la polarizzazione  $\mathbf{P}$  che, dunque, può essere l'unico asse di rotazione, né ci possono essere piani di riflessione ortogonali a questo asse.

### 8.2.9 Transizioni di fase strutturali

[Kittel Cap 16]

Non è raro che alcuni cristalli possano trasformare la propria struttura cristallina sotto l'effetto di pressione o temperatura. La struttura stabile  $A$  è quella che allo zero assoluto ha la minima energia interna rispetto a tutte le altre. A temperature maggiori di 0, nel computo dell'energia interna entrano in gioco le vibrazioni termiche reticolari. Se uno stato  $B$  ha una risposta alla temperatura più "ripida", il calore assorbito da  $B$ , ad una certa temperatura sarà maggiore di quello in  $A$ . Siccome l'entropia dipende dal calore assorbito  $S = Q_{ass}/T$  (in termini quantizzati dal numero di occupazione degli stati dei fononi), oltre quella temperatura  $S_B > S_A$  e lo stato più favorevole sarà  $B$ . La struttura più stabile alla temperatura  $T$  è determinata dall'energia libera  $F = U - TS$ . Ci sarà una transizione dalla struttura  $A$  a quella  $B$ , se c'è una temperatura  $T_c$ , al di sotto della temperatura di fusione, tale che  $F_A(T_c) = F_B(T_c)$ .

Una particolare classe di queste transizioni di stato strutturali, sono quelle **ferroelettriche**, caratterizzate dall'apparizione di una polarizzazione dielettri-

ca spontanea. I materiali ferroelettrici hanno una costante dielettrica particolarmente alta e molto dipendente dalla temperatura. Al di sopra di una  $T_c$ , la polarizzazione scompare e la costante dielettrica diminuisce molto rapidamente con la temperatura.

### 8.3 Conduzione elettrica

La conduzione elettrica si può vedere come un fenomeno di trasporto di cariche per effetto di un campo elettrico. Dal punto di vista macroscopico, se indichiamo con  $I$  l'intensità della corrente elettrica, ricordiamo che vale la legge di Ohm:  $V = RI$  che lega il potenziale elettrico ai capi di un conduttore all'intensità di corrente tramite la resistenza elettrica che è una quantità che dipende dalla geometria e dalle caratteristiche fisiche del materiale. In particolare possiamo scrivere che

$$R = \frac{\rho \ell}{S}$$

ove  $\rho$  è la resistività specifica del materiale,  $\ell$  la lunghezza del conduttore e  $S$  la sua sezione.

#### 8.3.1 Elementi della teoria di Drude

Consideriamo il conduttore dal punto di vista microscopico come un gas di portatori liberi di carica, con densità  $n$ . La forza subita da una carica  $-e$  immersa in un campo elettrico  $E$  sarà:

$$F = -eE = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.62)$$

ove  $m$  è la massa del portatore (per es. l'elettrone o uno ione) e  $\mathbf{v}$  la sua velocità. Dalla 8.62, ricaviamo la velocità al tempo  $t$  per effetto del campo:

$$\mathbf{v}(t) = -\frac{eE}{m}t \quad (8.63)$$

Supponiamo che i portatori di carica collidano con le imperfezioni e gli ioni con una probabilità pari all'inverso del tempo medio  $\tau$  fra le collisioni (tempo di rilassamento) e, dopo aver colliso ripartano da 0. Allora se  $v$  è la velocità media di deriva, per la quantità di moto degli elettroni che non subiscono urti possiamo scrivere:

$$p(t + dt) = p(t) + f(t)dt = p(t) - eEdt \quad (8.64)$$

gli elettroni che hanno subito un urto nel tempo  $dt$  sono  $dt/\tau$ , quindi il contributo degli elettroni che non collidano è  $1 - dt/\tau$ , mentre quelli che collidano contribuiscono con  $(dt/\tau)(-eEdt)$  che è di ordine  $O(dt^2)$ . Dunque:

$$p(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)(p(t) - eEdt) \quad (8.65)$$

eseguendo i prodotti e tenendo solo il primo ordine:

$$p(t + dt) = p(t) - \frac{dt}{\tau}p(t) - eEdt$$

Portando  $p(t)$  al primo membro e dividendo per  $dt$ , otteniamo:

$$\frac{dp}{dt} = -eE - \frac{p(t)}{\tau} \quad (8.66)$$

Allo stato stazionario  $dp/dt = 0$ , quindi  $v$  è costante e:

$$\begin{aligned} -eE &= \frac{mv}{\tau} \\ \Rightarrow v &= -\frac{eE\tau}{m} \end{aligned} \quad (8.67)$$

Se definiamo la densità di corrente  $J$  come la densità di carica  $-ne$  per la velocità media di deriva, otteniamo:

$$J = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} \quad (8.68)$$

Questa equazione lega la densità di corrente  $J$  ad una quantità caratteristica del materiale. Siccome  $I = \frac{de}{dt}$  e  $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \ell}$  sarà

$$-\frac{\partial V}{\partial \ell} = -R \frac{\partial I}{\partial \ell} = -RS \, d\ell \frac{\partial J}{\partial \ell} = \mathbf{E}$$

da cui:

$$\mathbf{E} = RJS$$

ovvero

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (8.69)$$

avendo definito la resistività del materiale con  $\sigma = \frac{1}{\rho}$ . Dal confronto con la 8.68, ricaviamo l'espressione della resistività:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (8.70)$$

### 8.3.2 Lavoro meccanico della corrente e legge di Joule

Il lavoro meccanico in presenza di un campo elettrico sarà

$$dL = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dV dt = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV dt$$

dalla 8.69 possiamo ricavare la potenza dissipata per unità di volume:

$$W = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial V} = \sigma \mathbf{E}^2 \quad (8.71)$$

che rappresenta la legge di Joule espressa per le densità.

### 8.3.3 Correnti di origine termica

La velocità media dei portatori di carica dovuta ad un gradiente di temperatura, si può calcolare dall'energia termica per portatore  $\mathcal{E}(t)$ . Un portatore che abbia subito l'ultima collisione in  $x'$  avrà un'energia termica  $\mathcal{E}(T(x'))$ ; i portatori che arrivano ad un punto  $x$  da un punto a temperatura maggiore avranno subito

l'ultima collisione in  $x - v\tau$  e dunque la loro energia sarà:  $\mathcal{E}(T(x - v\tau))$ . Il loro contributo alla corrente sarà:

$$J(T_>) = \frac{n}{2}v\mathcal{E}(T(x - v\tau))$$

analogamente, per i portatori provenienti dal punto a temperatura inferiore:

$$J(T_<) = \frac{n}{2}(-v)\mathcal{E}(T(x + v\tau))$$

dunque, il flusso di energia dovuto allo spostamento di cariche è (equiparato al flusso di cariche che trasportano l'energia) :

$$J(q) = \frac{1}{2}nv [\mathcal{E}(T(x - v\tau)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau))]$$

Esprimendo la differenza in termini delle derivate:

$$J(q) = nv^2\tau \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \left( -\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (8.72)$$

Il termine  $n\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} = c_v$  è il calore specifico a volume costante. Possiamo passare al caso tridimensionale sostituendo alla velocità  $v$  la sua componente in una direzione e mediando su tutte le direzioni. Siccome  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = 1/3v^2$ , avremo:

$$J(q) = \frac{1}{3}v^2\tau c_v(-\nabla T) \quad (8.73)$$

Dunque c'è una corrente elettrica proporzionale al gradiente del campo con una conduttività (termoelettrica)  $k = \frac{1}{3}\tau v^2 c_v$ . In condizioni di circuito aperto, questa porta all'accumulo di cariche sui bordi del conduttore e dunque ad un campo elettrico che si oppone al gradiente termico. L'esistenza di questo campo elettrico è nota come effetto Seebeck e si scrive convenzionalmente come:

$$\mathbf{E} = Q\nabla T \quad (8.74)$$

in cui la costante  $Q$  è nota come termopotenza. Per stimare  $Q$ , notiamo che, nel nostro modello monodimensionale, la velocità media in un punto  $x$  dovuta al gradiente termico è:

$$\mathbf{v}_Q = \frac{1}{2} [v(x - v\tau) - v(x + v\tau)] = -v\tau \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}\tau \frac{d}{dx}v^2$$

passando a tre dimensioni come prima:

$$v_Q = -\frac{\tau}{6} \frac{dv^2}{dT} \nabla T \quad (8.75)$$

La velocità media dovuta al campo elettrico è

$$\mathbf{v} = -\frac{eE\tau}{m}$$

In un circuito aperto come una barra sottile con gli estremi a temperatura differente, all'equilibrio, per avere  $v_Q + v_E = 0$ , sostituendo la 8.74 otteniamo:

$$\frac{\tau}{3} \frac{dv^2}{dT} \nabla T - \frac{eQ\nabla T\tau}{m} = 0$$

da cui

$$Q = -\frac{1}{3e} \frac{d}{dT} \frac{mv^2}{2} = -\frac{1}{3e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} = -\frac{1}{3e} \frac{c_v}{n}$$

dunque indipendente dal tempo di rilassamento  $\tau$ . Drude, applicando al gas di elettroni liberi le stesse leggi dei gas perfetti mono-atomici, pose  $c_v = 3/2nKT$ , ottenendo:

$$Q = -\frac{1}{3e} \frac{3nKT}{2n} = -\frac{k}{2e} = -0.43V/K$$

che è circa 100 volte minore di quanto osservato nei metalli.

### 8.3.4 Conduzione nei materiali semiconduttori

I materiali semiconduttori, sono tipicamente isolanti covalenti. Esempi classici sono il Silicio ed il Germanio (ampiamente utilizzati nell'industria elettronica) con una distanza tra la banda di valenza e la banda di conduzione – la cosiddetta *gap* – rispettivamente di 1.12 eV e 0.67 eV alla temperatura ambiente 300K.

Per descrivere il comportamento dei materiali semiconduttori avremo bisogno di introdurre alcuni semplici concetti di meccanica quantistica.

#### Funzione d'onda ed Equazione di Schrödinger

In Meccanica Quantistica ad ogni particella è associata una funzione d'onda il cui modulo quadro rappresenta la probabilità di trovare la particella in  $x$  al tempo  $t$ :

$$\psi(x, t) = \int \phi(k) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{k} \quad (8.76)$$

che si propaga con una *velocità di gruppo*  $v_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$  nella direzione di  $\mathbf{k}$ . Se  $E$  e  $p$  sono rispettivamente l'energia e l'impulso della particella ed  $m$  la sua massa, possiamo scrivere che

$$\mathbf{v}_g = \nabla_p E = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

Seguendo l'ipotesi di De Broglie del dualismo onda-particella e l'osservazione di Einstein che l'energia dei fotoni era proporzionale alla loro frequenza tramite la costante di Planck:

$$E = \hbar \omega \quad (8.77)$$

se vogliamo ricavare l'espressione classica che lega energia ed impulso, a partire dalla funzione d'onda:

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} = \hbar \omega \\ \Rightarrow \omega &= \frac{p^2}{2m\hbar} \Rightarrow d\omega = \frac{2p dp}{2m\hbar} = \frac{p}{m} \frac{dp}{\hbar} \\ \frac{\partial \omega}{\partial k} &= v_g = \frac{p}{m} \\ \Rightarrow \frac{p}{m} dp &= \frac{p}{m} \hbar dk \end{aligned}$$

sarà  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ . Dunque, sostituendo nell'energia:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (8.78)$$

Per trovare  $k$  e  $\omega$  per la particella libera possiamo procedere per derivazioni della funzione d'onda da cui è descritta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= i\omega\psi \\ \nabla\psi &= -ik\psi \Rightarrow \nabla^2\psi = -k^2\psi\end{aligned}\quad (8.79)$$

dalla prima, con l'aiuto della 8.77

$$E\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

e, siccome  $p = \hbar k$ , sarà:

$$p^2\psi = -\hbar^2\nabla^2\psi$$

e dunque, per riscrivere la (8.78):

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t)\quad (8.80)$$

Che è l'equazione di Schrödinger per particelle libere. In generale potremo scrivere:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t)\quad (8.81)$$

essendo  $V(\mathbf{x}, t)$  il potenziale a cui è soggetta la particella in questione.

### Potenziali periodici e massa efficace

In un potenziale periodico, quale può essere quello a cui è sottoposto un portatore di carica in un cristallo, e nel caso di portatori non interagenti e nello stato stazionario, l'equazione di Schrödinger la possiamo scrivere come:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})\quad (8.82)$$

con un potenziale tale che:

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r} + \mathbf{R})$$

le autofunzioni d'onda della 8.82 possono essere scritte come:

$$\psi_{n,\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})\quad (8.83)$$

in cui  $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  è una funzione che ha la stessa periodicità del reticolo:  $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ , quindi, per qualsiasi  $\mathbf{R}$  appartenente al reticolo di Bravais, sarà:

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{R})}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\quad (8.84)$$

Quindi la  $\psi(\mathbf{r})$  è un autostato dell'operatore di traslazione per traslazioni di  $\mathbf{R}$ . Siccome  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$  è periodica, la possiamo sviluppare in serie di Fourier:

$$\begin{aligned}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) &= \sum_G u_k^G e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \Rightarrow \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_G u_k^G e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} = \\ &= \sum_G u_k^G e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (8.85)$$

Quindi un potenziale periodico "mescola" fra loro onde analoghe a quelle libere, che differiscano fra loro per vettori d'onda  $G$ , che formeranno un reticolo nello spazio dei numeri d'onda che prende il nome di *reticolo reciproco*. Siccome  $E_{n,k} = E_{n,k+G}$ , per ciascun livello  $n$ , ci saranno tanti stati energetici di eguale energia (degeneri),  $E_n = \hbar^2 k_n^2 / 2m$ .

Siccome il potenziale  $U(r)$  è periodico, lo possiamo sviluppare in serie di Fourier:

$$U(R) = \sum_G U(G) e^{iG \cdot r}$$

Sostituendo l'autofunzione nella funzione d'onda

$$\left( \sum_G U(G) e^{iG \cdot r} \right) \psi = \sum_G \sum_k U(G) u_{n,k} e^{i(k+G) \cdot r}$$

detto  $k' = G + k$  allora

$$\sum_G \sum_k U(G) u_{n,k} e^{i(k+G) \cdot r} = \sum_G \sum_{k'} U(G) u_{n,k'-G} e^{ik' \cdot r}$$

e l'eq. 8.82, diventa:

$$\begin{aligned} \sum_k -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} u_{n,k} e^{ik \cdot r} + \sum_k \sum_G U(G) u_{n,k-G} e^{ik \cdot r} &= E \sum_k u_{n,k} e^{ik \cdot r} \Rightarrow \\ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E \right) u_{n,k} &= \sum_G U(G) u_{n,k-G} \end{aligned} \quad (8.86)$$

ovvero

$$(\lambda_k - E) u_{n,k} + \sum_G U(G) u_{n,k-G} = 0 \quad (8.87)$$

che rappresenta, fissato  $k$  nella prima zona di Brillouin, un sistema di equazioni che lega per ogni  $G$  solo quei coefficienti  $u_{n,k}; u_{n,k-G}$  il cui numero d'onda differisca da  $k$  di un vettore  $G$  del reticolo reciproco. Se, per esempio il potenziale ha una sola componente di Fourier (cioè è un seno o un coseno),  $G = \pm g$  e le equazioni 8.87 diventano:

$$\begin{cases} (\lambda_k - E) u_k + U[u_{k-g} + u_{k+g}] = 0 \\ (\lambda_{k-g} - E) u_{k-g} + U[u_{k-2g} + u_k] = 0 \\ (\lambda_{k+g} - E) u_{k+g} + U[u_k + u_{k+2g}] = 0 \\ (\lambda_{k-2g} - E) u_{k-2g} + U[u_{k-3g} + u_{k-g}] = 0 \\ (\lambda_{k+2g} - E) u_{k+g} + U[u_{k+g} + u_{k+3g}] = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (8.88)$$

Potenzialmente un sistema infinito; limitandosi alle prime 5 equazioni scritte, va eguagliato a 0 il determinante:

$$\begin{vmatrix} (\lambda_{k-2g} - E) & U & 0 & 0 & 0 \\ U & (\lambda_{k-g} - E) & U & 0 & 0 \\ 0 & U & (\lambda_k - E) & U & 0 \\ 0 & 0 & U & (\lambda_{k+g} - E) & U \\ 0 & 0 & 0 & U & (\lambda_{k+2g} - E) \end{vmatrix} = 0$$

Le radici di questa equazione danno  $n$  autovalori (livelli energetici) per ciascun  $k$   $E_{n,k}$ . Se scegliamo un  $k$  che differisca da quello scelto per un numero intero di vettori del reticolo reciproco, otteniamo lo stesso sistema di equazioni, e dunque lo stesso spettro di energie.

In un cristallo monodimensionale di passo  $a$  è  $k = n\pi/a$ , quindi si propagano solo gli elettroni che abbiano questo numero d'onda. Come già visto con le vibrazioni reticolari la nella zona tra  $k = \pm\pi/a$  (prima zona di Brillouin) la velocità di gruppo è diversa da 0 e il portatore di carica si propaga, al bordo viene riflesso. L'interferenza produce delle onde stazionarie  $\psi(\pm) = e^{i\pi x/a} \pm e^{-i\pi x/a}$  la cui

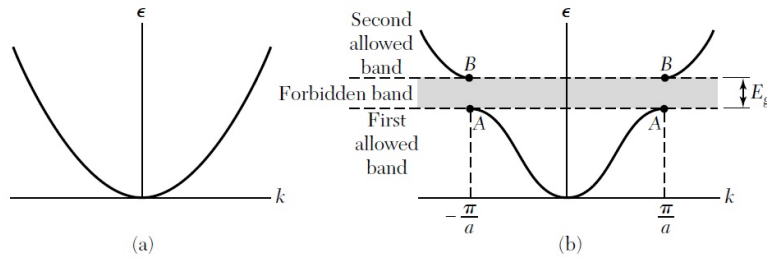


Figura 8.5: La relazione id dispersione per una particella libera (a) e in un reticolo monodimensionale di passo  $a$  (b)

energia puo essere calcolata per es. con  $U(x) = U \cos(2\pi x/a)$ . La differenza  $E(\psi(+)) - E(\psi(-))$  al bordo della zona di Brillouin è il Gap ed è pari ad  $U$  [vedi Kittel pag. 177-79].

Questi livelli energetici possono essere riempiti tenendo conto del principio di esclusione di Pauli per il quale non possono stare nello stesso livello due elettroni con tutti i numeri quantici uguali. Il livello più alto riempito nello stato fondamentale (cioè allo zero assoluto) definisce l'energia di Fermi  $E_f$

In una dimensione, per  $N$  particelle in una scatola di lato  $L$ , l'energia di Fermi è data da

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{N\pi}{2L} \right)^2$$

La velocità del pacchetto d'onda è, come abbiamo detto:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_k \omega = \frac{1}{\hbar} \nabla_k E$$

Sotto l'azione di una forza esterna  $\mathbf{F}$ , l'energia della particella, varierà come:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_g = \frac{1}{\hbar} \sum_i \frac{\partial E}{\partial k_i} F_i$$

D'altra parte, sviluppando la derivata temporale segue che:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{\partial E}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial t}$$

da cui, per confronto si ricava che  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{F}/\hbar$ , che non è un risultato banale, perché l'impulso cristallino  $\hbar\mathbf{k}$ , non è un impulso propriamente detto.

L'accelerazione subita è:

$$\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}} = \frac{1}{\hbar} \sum_i \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{\partial E}{\partial t} \mathbf{e}_i = \frac{1}{\hbar} \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial k_i} \sum_j \frac{\partial E}{\partial k_j} \frac{\partial k_j}{\partial t}$$

eseguendo le somme, si ottiene:

$$\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}} = \frac{1}{\hbar} \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j} \frac{\partial k_j}{\partial t} \right) \mathbf{e}_i = \frac{1}{\hbar} \sum_i \sum_j m_{ij}^{-1} \frac{\partial k_j}{\partial t} \mathbf{e}_i \quad (8.89)$$

Dunque la particella si muove sotto l'azione di una forza  $\mathbf{F} = \hbar \dot{\mathbf{k}} = \hbar \sum_i \dot{k}_i \mathbf{e}_i = m \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}}$  come se avesse una massa *efficace*:

$$m_{ij} = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j}} \quad (8.90)$$

### Densità degli stati e numero di portatori

[Kittel, Introduction to Solid State Physics]

Dalla 8.78, nel caso stazionario, si ricava:

$$E = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m}$$

Su di un segmento di lato  $L$ , i valori permessi di  $k$  sono solo i multipli del valore minimo  $k_{min} = \frac{2\pi}{L}$  e dunque in un volume  $L^3$  il numero di stati possibili sarà dato dal rapporto tra il volume della sfera di raggio  $k$  nello spazio degli impulsi ed il cubo di lato  $k_{min}$ :

$$N = \frac{\frac{4}{3} \pi k^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{6\pi^2} k^3 \quad (8.91)$$

Dalla 8.78 ricaviamo  $k = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$  e lo sostituiamo nella 8.91 per ricavare il numero degli stati per unità di volume in funzione dell'energia  $E$ , tenendo anche conto che per ogni stato ci sono 2 possibili orientazioni dello spin degli elettroni:

$$n \equiv \frac{N}{V} = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (8.92)$$

La densità energetica degli stati è definita come:

$$D(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \quad (8.93)$$

Il numero di elettroni in banda di conduzione ad una temperatura  $T$ , si ricava dalla densità di stati e dalla statistica di Fermi

$$f(E, T) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-\mu}{kT}}} \quad (8.94)$$

che, per  $kT \gg E_f$  tende alla distribuzione di Boltzmann:

$$n_c(T) = \int_{E_c}^{\infty} D(E) e^{\frac{E-\mu}{kT}} dE \quad (8.95)$$

essendo  $E_c$  il livello in energia della base della banda di conduzione e  $\mu$  il potenziale chimico. Sostituendo la 8.93 nella 8.95 otteniamo l'espressione del numero di elettroni in banda di conduzione alla temperatura T:

$$n_c(T) = e^{\frac{\mu}{k}} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-E}{kT}} dE$$

Cambiando la variabile in  $E - E_c = E'$  e  $E'/kT = s$ , l'integrale dà:

$$(kT)^{3/2} \int_0^{\infty} s^{1/2} e^{-s} ds = (kT)^{3/2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = (kT)^{3/2} \frac{1}{2} \pi^{1/2}$$

Dunque:

$$n_c(T) = 2 \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu - E_c}{kT}} \quad (8.96)$$

in cui  $m_e$  è la massa efficace degli elettroni in banda di conduzione e tutto è moltiplicato per i due stati di spin. Un'espressione analoga può essere scritta per le lacune in banda di valenza.

$$n_v(T) = 2 \left( \frac{m_h kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_v - \mu}{kT}} \quad (8.97)$$

Moltiplicando fra loro le 8.96 e 8.97, si nota che il prodotto non dipende dal potenziale chimico ma solo dalla differenza di energia tra la banda di valenza e quella di conduzione  $E_c - E_v = -E_g$ :

$$np = 4 \left( \frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^3 (m_e m_h)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-E_g}{kT}} \quad (8.98)$$

In un semiconduttore intrinseco, tutti gli elettroni che vanno in banda di conduzione lasciano una lacuna in banda di valenza e dunque, per loro,  $n = p$ . Per questi materiali, dunque, il numero totale di portatori di carica è:

$$n = 2 \left( \frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (m_e m_h)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{-E_g}{2kT}} \quad (8.99)$$

La mobilità intrinseca è la grandezza della velocità di drift per unità di campo:  $\mu_i = |v_i|/E$  ed è positiva, sia per le lacune sia per gli elettroni. La conducibilità è la somma:

$$\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h$$

### 8.3.5 Giunzione PN

I semiconduttori possono essere "drogati" con atomi che abbiano livelli energetici più vicini alla banda di valenza (accettori, come l'arsenico per il silicio, perché accettano elettroni dalla banda) o alla banda di conduzione (donori, perché donano elettroni in conduzione, per es. il Boro al posto di un silicio). L'eccesso di cariche positive o negative rispetto al caso intrinseco, dovuto al drogaggio, dà il nome al semiconduttore di tipo P o N, rispettivamente.

Quando un semiconduttore di tipo P viene messo a contatto con uno di tipo N, si crea una "giunzione" e il gradiente di densità di carica genera un potenziale

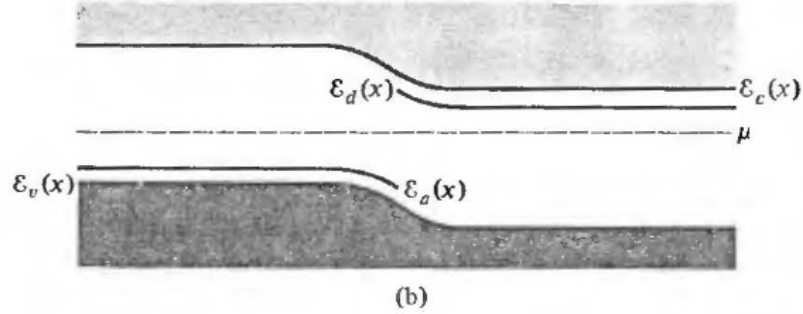


Figura 8.6: Andamento delle energie in una giunzione PN:  $E_c(x) = E_c - e\phi(x)$  è l'energia di un elettrone in banda di conduzione,  $E_d(x) = E_d - e\phi(x)$ , l'energia dei livelli dei donori e analogamente per le buche e gli accettori

$\phi(x)$  che varia nella zona della giunzione.

Lontano dalla zona della giunzione, se i donori sono completamente ionizzati, il numero di portatori nella banda di valenza, sarà sostanzialmente lo pari alla densità di donori e analogamente per le buche in banda di valenza con gli accettori:

$$\begin{aligned} N_d &= n_c(\infty) = N_c(T) e^{-\frac{(E_c - e\phi(\infty)) - \mu_e}{kT}} \\ N_a &= n_v(\infty) = P_v(T) e^{-\frac{\mu_h - (E_v - e\phi(-\infty))}{kT}} \end{aligned} \quad (8.100)$$

All'equilibrio termico, il potenziale chimico non varia con la posizione e  $\mu_e = \mu_h = \mu$ .

Allora possiamo trovare la differenza di potenziale ai due lati della giunzione:

$$\begin{aligned} \ln N_d &= \frac{(E_c - e\phi(\infty)) - \mu}{kT} \ln N_c \\ \ln N_a &= \frac{\mu - (E_v - e\phi(-\infty))}{kT} \ln P_v \end{aligned} \quad (8.101)$$

dunque:

$$e\phi(\infty) - e\phi(-\infty) = (E_c - E_v) + kT \ln \left( \frac{N_d N_a}{N_c P_v} \right)$$

da cui

$$e\Delta\phi = E_g + kT \ln \left( \frac{N_d N_a}{N_c P_v} \right) \quad (8.102)$$

Dall'equazione di Poisson  $\nabla^2\phi(x) = -\rho(x)/\epsilon$ , troviamo il legame tra il potenziale e la densità in funzione della distanza dalla giunzione. Se le impurezze sono completamente ionizzate, lo rimarranno indipendentemente da  $x$ , quindi la densità di carica sarà:

$$\begin{aligned} n_c(x) &= N_d e^{-e\frac{\phi(\infty) - \phi(x)}{kT}} \\ p_v(x) &= N_a e^{-e\frac{\phi(x) - \phi(-\infty)}{kT}} \end{aligned} \quad (8.103)$$

$$\rho(x) = [N_d(x) + p_v(x) - (N_a(x) + n_c(x))] \quad (8.104)$$

Sostituendo le densità  $N_d$  e  $N_a$  dalla 8.101, e la densità di carica ottenuta, nell'equazione di Poisson, e supponendo che la variazione di potenziale avvenga solo in una zona compresa tra  $-d_p$  e  $d_n$  (vedi fig. 8.6):

$$\nabla^2 \phi(x) = \begin{cases} 0 & x > d_n \\ -\frac{eN_d}{\epsilon} & 0 < x < d_n \\ \frac{eN_a}{\epsilon} & -d_p < x < 0 \\ 0 & x < -d_p \end{cases} \quad (8.105)$$

Integrando due volte:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi(\infty) & x > d_n \\ \phi(\infty) - \frac{eN_d}{2\epsilon}(x - d_n)^2 & 0 < x < d_n \\ \phi(-\infty) + \frac{eN_a}{2\epsilon}(x + d_p)^2 & -d_p < x < 0 \\ \phi(-\infty) & x < -d_p \end{cases} \quad (8.106)$$

Se imponiamo la continuità per  $x=0$ , dovrà essere:

$$\Delta\phi = \frac{e}{2\epsilon} [N_d d_n^2 + N_a d_p^2] \quad (8.107)$$

La continuità in 0 anche di  $d\phi/dx$ , dà  $N_d d_n = N_a d_p$ , cioè gli eccessi di carica positiva e negativa ai lati della giunzione di devono eguagliare. Sostituendo il bilancio di carica nella 8.107, otteniamo:

$$d_n = \left[ \frac{N_a}{N_d(N_a + N_d)} \frac{2\epsilon\Delta\phi}{e} \right]^{1/2} \quad (8.108)$$

$$d_p = \left[ \frac{N_d}{N_a(N_a + N_d)} \frac{2\epsilon\Delta\phi}{e} \right]^{1/2} \quad (8.109)$$

che sono i bordi della zona in cui il potenziale cambia, e in cui le cariche positive e negative si compensano, che, data l'assenza di carica, si chiama *zona di deplezione*.

Quando si applica una tensione  $V$  alla giunzione, diciamo che  $V$  è positiva quando il lato p è a potenziale maggiore di quello n. A causa della ridotta densità di portatori, la zona di deplezione avrà una resistenza maggiore delle zone distanti dalla giunzione, quindi applicando una d.d.p. agli estremi, la caduta  $\Delta V$  sarà praticamente tutta agli estremi della zona. In tal caso, alla differenza di potenziale  $(\Delta\phi)_0$  che abbiamo visto, si modifica in  $\Delta\phi = (\Delta\phi)_0 - V$ . In conseguenza del voltaggio applicato, anche la zona di deplezione cambia di dimensioni:

$$d_{n,p}(V) = \left( d_{n,p}(0) - \frac{V}{(\Delta\phi)_0} \right)^{1/2}$$

Contemporaneamente scorrerà una corrente  $j_e$  di elettroni e  $j_h$  di lacune, che si annulla per  $V=0$ .

La corrente di lacune attraverso la zona di deplezione è composta da due parti: una - di generazione - da n verso p di lacune create all'estremo della zona n da elettroni che saltano in banda di conduzione per effetto della temperatura, e l'altra da p a n di lacune che vanno a ricombinarsi in banda di conduzione

con gli elettroni: di ricombinazione. Il campo elettrico generato nella zona di deplezione si oppone a questa seconda corrente. Solo le lacune che abbiano una energia termica sufficiente a superare la barriera di potenziale, contribuiscono alla corrente di ricombinazione:

$$j_h^{rec} \propto e^{-e \frac{(\Delta\phi)_0 - V}{kT}} \quad (8.110)$$

Lo stesso accade per gli elettroni, in modo che la corrente totale è:

$$j = [j_h^{gen} + j_e^{gen}] \left( e^{\frac{eV}{kT}} - 1 \right) \quad (8.111)$$

Che è esponenziale in  $V$ , quindi, la resistenza  $R \propto V/j \approx V e^{-\frac{eV}{kT}}$  è grande per  $V < 0$  (polarizzazione inversa) e piccola per  $V > 0$  (polarizzazione diretta).

## Capitolo 9

# Magnetismo

### 9.1 Richiami di magnetismo nel vuoto

Nel 1819, Oersted osservò che fili percorsi da corrente inducevano deviazioni in dipoli magnetici permanenti posti nelle vicinanze. Da questo dedusse che questi fili fossero sorgenti di un campo magnetico. Ampère, Biot e Savart stabilirono le basi sperimentali e le leggi che legavano il vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$  alla corrente e le leggi di forza fra i fili percorsi da corrente.

La legge di Ampère, lega la corrente  $I$  che percorre un elemento di circuito  $d\ell$  al vettore induzione magnetica  $d\mathbf{B}$  da essa generato nel punto di coordinate  $\mathbf{x}$  dall'elemento considerato:

$$d\mathbf{B} = kI \frac{d\ell \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (9.1)$$

Come la legge di Coulomb per l'elettrostatica, anche questa va con il reciproco del quadrato della distanza. Ha senso solo come elemento di una zomma su un insieme continuo di elementi, che globalmente rappresenta l'induzione magnetica di un circuito macroscopico.

L'osservazione di Lorentz fu che una carica  $q$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$  in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è soggetta ad una forza:

$$F_q = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.2)$$

Il vettore induzione magnetica per una carica  $q$  in moto non relativistico ( $v \ll c$ ) è:

$$\mathbf{B} = kq \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (9.3)$$

valida se si trascurano le accelerazioni. Se integriamo la (9.1) otteniamo risultati fisici.

nel Sistema Internazionale (SI) la costante di proporzionalità  $k$  delle equazioni precedenti vale:

$$(9.4)$$

Le dimensioni del vettore induzione magnetica le possiamo ricavare dalla 9.1 e 9.4 o dalla 9.2, ricordando che  $[qt^{-1}] = [A]$ :

$$[B] = NA^{-1}m^{-1} = [mIt^{-2}l^{-1}tq^{-1}] = [mt^{-1}q^{-1}]$$

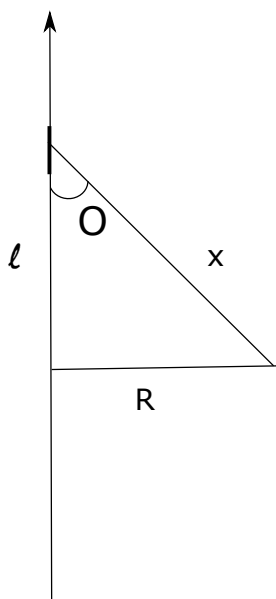


Figura 9.1: Filo percorso da corrente

ricordando che le dimensioni fisiche del campo elettrico sono  $[E] = [mlt^{-2}q^{-1}]$  otteniamo che il rapporto tra il campo di induzione magnetica ed il campo elettrico ha le dimensioni del reciproco di una velocità che, per le onde elettromagnetiche, vedremo essere la velocità della luce  $c$ .

Integrando la legge di Ampere 9.1 per un filo rettilineo indefinito (vedi Fig. 9.1):

$$|B| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl \sin \theta}{x^3} \quad (9.5)$$

Esprimiamo tutto con  $\theta$  e  $R$

$$\begin{cases} x \sin \theta = R \\ x \cos \theta = l \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{l}{R} = \cot \theta$  e dunque:

$$dl = -R \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

quindi la 9.5 diventa:

$$|B| = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{x \sin \theta}{x^3} R \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

ma  $x \sin \theta = R$ , sicché l'integrando è  $R^2/(xR^2) = 1/x = \sin \theta/R$  e dunque:

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (9.6)$$

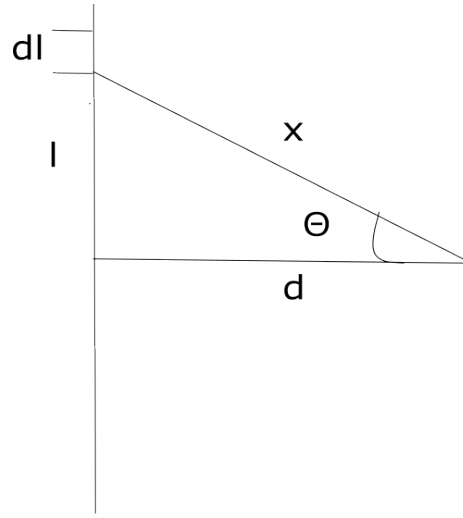


Figura 9.2: Schema per il calcolo della forza fra due fili paralleli infiniti percorsi da corrente

Abbiamo visto che un elemento di corrente produce un campo di induzione magnetica; per converso possiamo vedere qual è la forza che agisce su un elemento di corrente in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , a partire dalla forza di Lorentz:

$$F = I d\ell \times \mathbf{B} \quad (9.7)$$

Allora se abbiamo due circuiti, la forza che agisce sul circuito 1 per effetto della corrente che circola nel circuito 2 sarà:

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \int \frac{d\ell_1 \times d\ell_2 \times \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (9.8)$$

Per due fili rettilinei infiniti separati da una distanza  $d$ , la 9.8, si può calcolare con l'aiuto della figura 9.2. Tenendo conto del prodotto vettoriale,  $\mathbf{F}$  è diretta come  $d$ , perché è perpendicolare al prodotto  $d\ell_2 \times \mathbf{x}$ , quindi giace nel piano dei fili, ed anche ad  $\ell_1$ . Possiamo semplificare il problema considerando che il campo  $\mathbf{B}$  prodotto dal filo 2 alla distanza  $d$  è dato dalla 9.6 con  $R = d$ , quindi, sostituendo nella 9.7 abbiamo:

$$\frac{dF_{12}}{d\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad (9.9)$$

Se una densità di corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  è in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , allora la forza sulla distribuzione sarà:

$$F = \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x \quad (9.10)$$

La legge base dell'induzione magnetica 9.3 la possiamo scrivere in forma generale per una distribuzione di corrente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (9.11)$$

che si può trattare analogamente a quanto fatto per il campo elettrico e ottenere:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (9.12)$$

In cui si vede che il campo di induzione magnetica è il rotore di un *potenziale vettore*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \nabla \psi \quad (9.13)$$

che è definito, a meno di del gradiente di uno scalare  $\nabla \psi$  (che nella 9.12 sparisce). La conseguenza della 9.12 è che la divergenza di  $\mathbf{B}$  è nulla (prima equazione di Maxwell per il campo magnetico):

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (9.14)$$

Dalla medesima equazione, ricaviamo la II equazione di Maxwell per  $\mathbf{B}$  nel vuoto:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \nabla \left( \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \right) - \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \right] \end{aligned} \quad (9.15)$$

Integrando il primo addendo per parti dopo aver portato il gradiente dentro:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' &= \\ &= \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \end{aligned} \quad (9.16)$$

Il primo termine si annulla sulla superficie all'infinito, mentre il secondo per l'equazione di continuità che deriva dalla conservazione della carica eguaglia il flusso di corrente che attraversa la frontiera del volume alla variazione della carica nel volume:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (9.17)$$

e, applicando il teorema della divergenza:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (9.18)$$

Per correnti stazionarie, la variazione della densità di cariche è nulla, e quindi il primo addendo è nullo.

Il secondo addendo, grazie alla (8.11)

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' = -4\pi \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

e, in definitiva:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (9.19)$$

Di conseguenza:

$$\mu_0 \mathbf{i} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} \quad (9.20)$$

che è il teorema di Ampère.

Questa legge può essere ricavata anche dalla legge di Biot-Savart del campo indotto ad una distanza  $R$  da un filo percorso da corrente:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{2\pi R}$$

quindi:

$$\int \mathbf{B} \cdot dL = \frac{\mu_0}{2\pi} \int \mathbf{i} \cdot \frac{dL}{R}$$

ma  $dL/R = d\theta$ , quindi

$$\oint \mathbf{B} \cdot dL = \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 \mathbf{i}$$

Questo risultato si ottiene se il percorso  $dL$  concatena il filo (da cui  $dL = Rd\theta$ ), altrimenti l'integrale si annulla.

### 9.1.1 Il potenziale vettore

Si è visto che il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  è definito a meno del gradiente di un potenziale scalare, perché deriva da una condizione sulla divergenza di  $\mathbf{B}$  in cui questo gradiente si annulla. D'altra parte dalla 9.16, abbiamo mostrato che il primo termine è nullo, almeno per correnti stazionarie. Possiamo comunque sfruttare la libertà di scelta del potenziale vettore a per annullare il primo termine della 9.16 (Gauge di Coulomb)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (9.21)$$

che implica che  $\mathbf{A}$  soddisfa l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (9.22)$$

La gauge di Coulomb, pone un vincolo anche su  $\psi$ , ovvero  $\nabla^2 \psi = 0$  in tutto lo spazio. Questo implica che, se non ci sono sorgenti all'infinito,  $\psi$  è costante.

### 9.1.2 Effetto Hall

Possiamo vedere cosa succede ad un conduttore percorso da corrente in presenza di un campo magnetico nell'ambito della teoria di Drude del gas di cariche libere. La forza dovuta al campo di induzione magnetica  $B$  che agisce su una carica  $-e$  in movimento con velocità  $v$  è

$$F = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e \frac{\mathbf{p}}{m} \times \mathbf{B}$$

quindi la 8.65 diventa:

$$\mathbf{p}(t+dt) - \mathbf{p}(t) = \mathbf{f}(t)dt - \frac{\mathbf{p}(t)dt}{\tau} \quad (9.23)$$

Quindi, considerando anche la forza elettrica di trascinamento:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} - e \left( E + \frac{\mathbf{p}(t)}{m} \times \mathbf{B} \right) \quad (9.24)$$

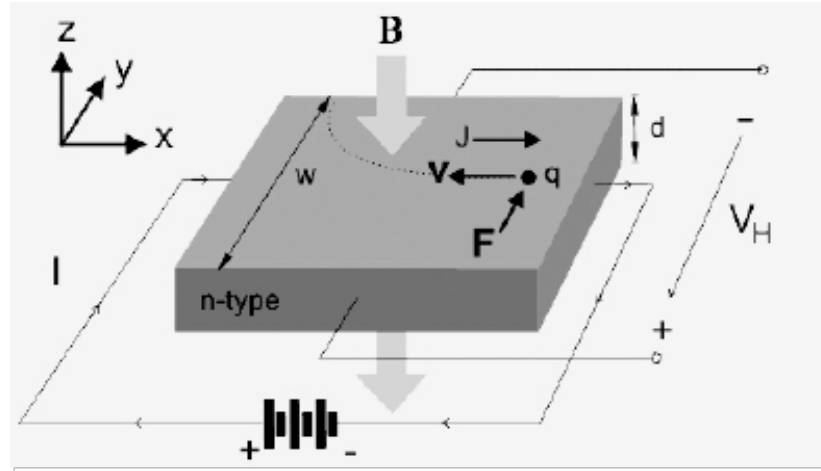


Figura 9.3: Schema del conduttore percorso da corrente immerso in un campo magnetico

Sia:  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  e  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ . Scomponendo la 9.24 nelle sue componenti:

$$\begin{cases} \frac{dp_x(t)}{dt} = -eE_x - \frac{ep_y(t)B_z}{m} - \frac{p_x(t)}{\tau} \\ \frac{dp_y(t)}{dt} = -eE_y + \frac{ep_x(t)B_z}{m} - \frac{p_y(t)}{\tau} \\ \frac{dp_z(t)}{dt} = -\frac{p_z(t)}{\tau} \end{cases} \quad (9.25)$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $ne\tau/m$ , riconosciamo che la densità di corrente è  $j = -nep/m$  e, ricordando l'espressione della conducibilità  $\sigma = ne^2\tau/m$ , otteniamo:

$$\begin{cases} \tau \frac{dj_x(t)}{dt} = -\sigma E_x - \frac{ej_y(t)B_z\tau}{m} + j_x(t) \\ \tau \frac{dj_y(t)}{dt} = -\sigma E_y + \frac{ej_x(t)B_z\tau}{m} + j_y(t) \end{cases} \quad (9.26)$$

e, di conseguenza, all'equilibrio quando  $j$  è costante, detta  $\omega_c = eB_z/m$ , la *frequenza di ciclotrone*:

$$\begin{cases} \sigma E_x = j_x(t) + j_y(t)\tau\omega_c \\ \sigma E_y = j_y(t) - j_x(t)\tau\omega_c \end{cases} \quad (9.27)$$

Quindi, anche in assenza di corrente trasversa  $j_y$ , c'è un campo elettrico trasverso, pari a  $-j_x(t)\tau\omega_c/\sigma = -(B_z/ne)j_x$ , proporzionale al campo magnetico e alla corrente lungo  $x$ .

### 9.1.3 Forza su una spira percorsa da corrente

Consideriamo una spira di conduttore percorsa da una corrente  $I$ , immersa in un campo magnetico, come schematizzato in Fig.9.4. La forza magnetica che agisce su una porzione di cavo  $dl$ , percorsa dalla corrente  $I$ , è data dalla 9.7, quindi è ortogonale a  $\mathbf{B}$  e a  $dl$ . Nei tratti  $L1$  e  $L3$  della spira in cui il cavo è parallelo al campo,  $F = 0$ , mentre negli altri due tratti, ortogonali a  $B$ , le forze saranno uguali in modulo  $|F| = IBL$  e di verso opposto, applicate ad una distanza  $L$  fra di loro. Si creerà, dunque, un momento meccanico  $M = L \times F = IBL^2$

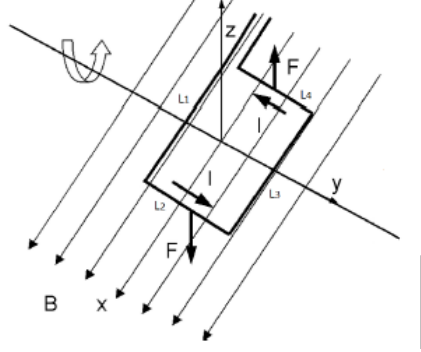


Figura 9.4: Spira percorsa da una corrente immersa in un campo magnetico

proporzionale all'area della spira e al campo magnetico. Possiamo definire il momento di dipolo magnetico  $\mathbf{m}$  in modo che il momento meccanico sia:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{m} \times \mathbf{B} \Rightarrow \\ \mathbf{m} &= IL^2 \hat{z} \propto \int L \times J d^3x \end{aligned} \quad (9.28)$$

diretto lungo l'asse  $z$ , ortogonale al piano della spira, la quale si comporta come un ago magnetico.

L'energia potenziale della spira, o dell'ago, è legata alla forza:  $F = -\nabla U$ . Il lavoro compiuto dal campo per ruotare la spira di un angolo  $d\theta$  è :

$$d\mathcal{L} = M d\theta = mB \sin \theta d\theta = -mB d \cos \theta$$

Quindi

$$U(\theta) = \mathcal{L} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (9.29)$$

ha un minimo per  $\theta = 0$ , quindi la spira magnetica tende a portarsi parallela al campo. Possiamo ricavare la 9.29 in maniera più generale dalla 9.10:

$$F_i = \epsilon_{ijk} \int J_j B_k d\tau, \quad (9.30)$$

Introduciamo il vettore posizione  $\mathbf{x}$  e riscriviamo l'integrale usando l'identità  $\partial_m(x_k J_j) = J_j \delta_{mk} + x_k \partial_m J_j$ . Possiamo quindi riscrivere  $F_i$  come:

$$F_i = -\epsilon_{ijk} \int x_k B_m \partial_m J_j d\tau.$$

Portiamo  $\epsilon_{ijk}$  all'interno della derivata e otteniamo:

$$F_i = \int \partial_m (\epsilon_{ijk} x_k B_m J_j) d\tau - \int \epsilon_{ijk} J_j \partial_m (x_k B_m) d\tau. \quad (9.31)$$

Ora analizziamo i due termini separatamente. Consideriamo il primo termine:

$$\int \partial_m (\epsilon_{ijk} x_k B_m J_j) d\tau.$$

Definendi il momento magnetico  $m$ :

$$m = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) dV \quad (9.32)$$

otteniamo:

$$\int \partial_m(\epsilon_{ijk} x_k B_m J_j) d\tau = -2 \int \partial_m(m_i B_m) d\tau.$$

Possiamo riscriverlo come:

$$-2 \partial_m(m_i B_m). \quad (9.33)$$

Consideriamo ora il secondo termine della 9.31:

$$- \int \epsilon_{ijk} J_j \partial_m(x_k B_m) d\tau.$$

Espandiamo  $\partial_m(x_k B_m)$ :

$$\partial_m(x_k B_m) = B_k + x_k \partial_m B_m.$$

Poiché il campo magnetico è solenoidale ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \partial_m B_m = 0$ ), otteniamo:

$$\partial_m(x_k B_m) = B_k.$$

Quindi il secondo termine diventa:

$$- \int \epsilon_{ijk} J_j B_k d\tau = -F_i.$$

e la 9.31 diventa:

$$F_i = -2 \partial_m(m_i B_m) - F_i.$$

quindi:

$$F_i = -\partial_m(m_i B_m). \quad (9.34)$$

ma  $\partial_m(m_i B_m) = B_m \partial_m m_i$  e  $\partial_m m_i = \partial_i m_m$ , quindi  $\partial_m(m_i B_m) = B_m \partial_i m_m$

$$F = -\nabla U = -\nabla(m \cdot B) \quad (9.35)$$

#### 9.1.4 Campo prodotto da una spira circolare

Per calcolare il campo generato dall'asse passante per il centro di una spira circolare di raggio  $R$  ad una distanza  $x$  dal piano della spira come illustrato in fig.9.5, partiamo dall'equazione del campo di induzione magnetica:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\ell \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

e scriviamo per esteso i vettori in gioco:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv (x, & R \cos \phi, & R \sin \phi) \\ \ell &\equiv (0, & R \cos \phi, & R \sin \phi) \\ \Rightarrow d\ell &\equiv (0, & -R \sin \phi d\phi, & R \cos \phi d\phi) \end{aligned}$$

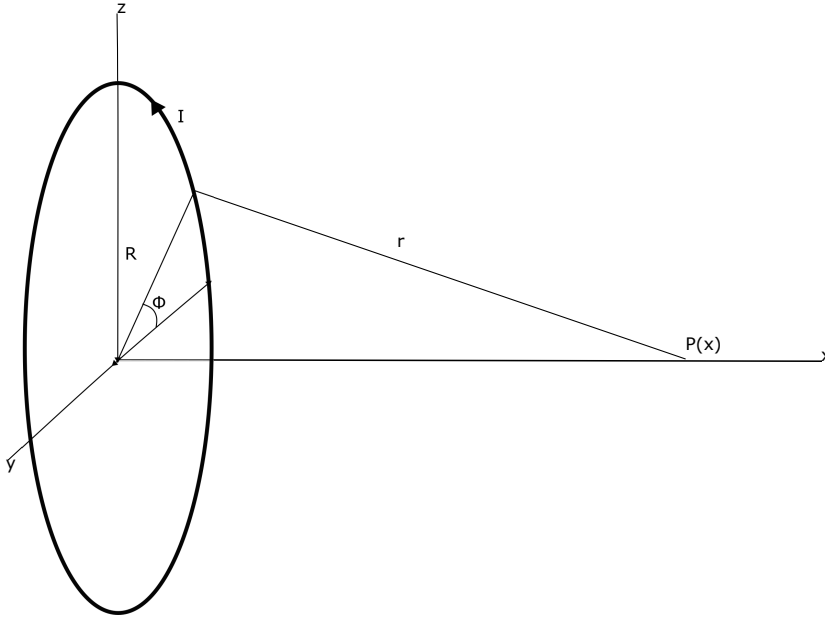


Figura 9.5: Campo generato sull'asse di una spira circolare percorsa da corrente

Quindi troviamo le componenti del vettore integrando, tramite il determinante:

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -R \sin \phi \, d\phi & R \cos \phi \, d\phi \\ x & R \cos \phi & R \sin \phi \end{vmatrix} \quad (9.36)$$

e il campo sull'asse è

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-R^2 \hat{i} + Rx \cos \phi \hat{j} + Rx \sin \phi \hat{k}}{(R^2 + x^2)^{3/2}} d\phi \quad (9.37)$$

I termini lungo y e z si integrano a 0 e rimane (come ci si aspetta dalla simmetria del problema) il campo solo lungo x:

$$B(x) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (9.38)$$

Che è proporzionale alla corrente ed all'area della spira, quindi al momento magnetico.

### 9.1.5 Campo generato da una distribuzione localizzata di correnti

Consideriamo ora una distribuzione di correnti localizzata in una zona di spazio piccola rispetto alla scala di interesse dell'osservatore, cioè, nelle espressioni in cui appare la distanza, sia  $|x| \gg |x'|$ . Allora, ponendoci in un'opportuna origine all'interno della distribuzione, possiamo sviluppare in serie:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots$$

quindi, il potenziale vettore:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' \quad (9.39)$$

Possiamo risolvere questi integrali per una corrente localizzata, non necessariamente a divergenza nulla, grazie alla relazione:

$$\int f(x') \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla' g(x') + g(x') \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla' f(x') + f(x') g(x') \nabla' \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x' = 0 \quad (9.40)$$

dove  $f(x)$  e  $g(x)$  sono due funzioni arbitrarie continue e derivabili. La 9.40 può essere verificata integrando per parti il secondo addendo e poi sviluppando  $f \nabla' (g \mathbf{J})$ , infine annullando gli integrali di superficie:

$$\int g(x') \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla' f(x') d^3 x' = \int g(x') f(x') \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} dS - \int f(x') \nabla' (g(x') \mathbf{J}(\mathbf{x}')) d^3 x'$$

L'espansione del II termine annulla il primo e il terzo della 9.40.

Per la componente  $i$ , presi:  $f = 1$  e  $g = x'_i$ , la 9.40 diventa:

$$\int \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') d^3 x' + \int \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x' = 0$$

che, per  $\nabla \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') = 0$ , dà  $\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x' = 0$ . Quindi il primo termine dello sviluppo 9.40 (monopolo) è nullo.

Se  $f = x'_i$ ,  $g = x'_j$  e  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

$$\int x'_i J_j + x'_j J_i d^3 x' = 0 \quad (9.41)$$

Quindi nel secondo termine dello sviluppo 9.40 si può scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_j x'_j \int x_j J_i d^3 x' &= \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j x_j \int (x'_i J_j - x'_j J_i) d^3 x' = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k d^3 x' \end{aligned} \quad (9.42)$$

che, con la definizione 9.32 del momento magnetico, dà:

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (9.43)$$

L'integrando della 9.42 (e della 9.32) è la densità di momento magnetico o *magnetizzazione*:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} [\mathbf{x} \times \mathbf{J}] \quad (9.44)$$

Se la corrente è confinata in un piano e in un circuito chiuso qualsiasi, il momento magnetico diventa:

$$m = \frac{I}{2} \oint \mathbf{x} \times d\ell$$

ma  $1/2(\mathbf{x} \times d\ell)$  è l'area del triangolo di base  $d\ell$  e lato  $\mathbf{x}$ , quindi, l'integrale è l'area  $S$  del circuito e ci si ritrova con  $m = IS$ , qualunque sia la forma del circuito.

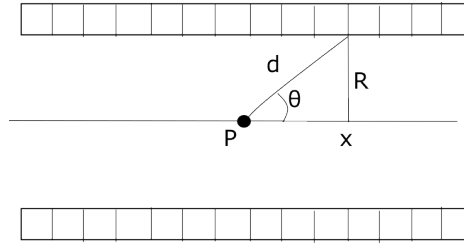


Figura 9.6: Schema per il calcolo del campo interno al solenoide mediante integrazione

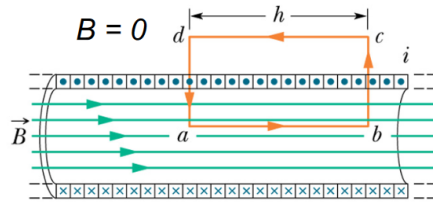


Figura 9.7: Schema per il calcolo del campo in un solenoide indefinito

### Campo di un solenoide indefinito

Un solenoide ideale è composto da un numero  $N \rightarrow \infty$  di spire con una densità per unità di lunghezza  $n$ , percorse da una corrente  $I$ . In pratica, quando la lunghezza del solenoide è molto maggiore del suo raggio, possiamo calcolare il campo al suo interno, integrando la 9.38 con l'aiuto della Fig. 9.6.

Il campo sull'asse del solenoide è parallelo all'asse ed è nullo al di fuori del solenoide. In un punto P qualsiasi interno al solenoide, il campo è generato dalle spire poste alla distanza  $x$  ed al raggio  $R$ . Quindi, detta  $d$  la distanza della generica spira dal punto P:  $d = R/\sin\theta$ ,  $x = d \cos\theta \Rightarrow dx = -Rd\theta/\sin^2\theta$ .

$$B = -\frac{\mu_0 I}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R^2}{d^3} n dx = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 \sin^3\theta}{R^3} \frac{R d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta d\theta = \mu I n$$

Il problema si può risolvere anche applicando la legge della circuitazione per  $N$  spire:

$$\oint B \cdot dL = \mu N I$$

Prendiamo un percorso rettangolare ABCD in cui BC e AD sono ortogonali al solenoide e AB e CD paralleli (fig.9.7). Sia CD interno al solenoide ed AB all'esterno.

Dunque:

$$\oint B \cdot dL = B_{ext}(AB) - B_{int}(CD)$$

Il campo all'esterno del solenoide indefinito è nullo, quindi, se  $n = N/CD$  è il numero di spire per unità di lunghezza:

$$\oint B \cdot dL = -B_{int}(CD) = \mu I \Rightarrow B_{int} = \frac{\mu I}{CD} = \mu I n$$

## 9.2 Magnetismo nella materia

### 9.2.1 Campo microscopico generato da atomi vicini

Consideriamo un volume  $\Delta V$  abbastanza piccolo da poter passare dalle somme agli integrali e abbastanza grande da contenere un gran numero di atomi. È noto che in un volume macroscopico  $\nabla \cdot B = 0$ , quindi possiamo scrivere  $B$ , che sarà la media del campo microscopico  $B_{mic}$ , in termini del potenziale vettore  $A$ . Consideriamo la magnetizzazione media:

$$\mathcal{M} = \sum_i N_i \langle m_i \rangle$$

dove  $N_i$  è la densità di molecole di tipo  $i$  con momento magnetico medio  $\langle m_i \rangle$ . Nel volume  $dV$ , possiamo scrivere:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int \frac{J(x')}{|x-x'|} + \frac{\mathcal{M} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|x-x'|^3} dV \right] \quad (9.45)$$

come nel caso elettrostatico, il II addendo è:

$$\frac{\mathcal{M} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|x-x'|^3} = -\mathcal{M} \times \nabla' \frac{1}{|x-x'|}$$

che integrato per parti dà:

$$\int \mathcal{M} \times \frac{\mathbf{n}}{|x-x'|} dS' - \int \frac{1}{|x-x'|} \nabla' \times \mathcal{M}$$

L'integrale sulla frontiera del volume si annulla a grandi distanze, e rimane:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x') + \nabla' \times \mathcal{M}(x')}{|x-x'|} dV \quad (9.46)$$

che si comporta come se ci fosse una densità di corrente efficace:  $J_{eff} = J(x') + \nabla' \times \mathcal{M}(x')$  che genera il potenziale, in cui la magnetizzazione della materia contribuisce con un termine  $J_M = \nabla \times \mathcal{M}$  che è la densità di corrente di magnetizzazione.

L'equazione macroscopica è:

$$\nabla \times B = \mu_0 (J + \nabla \times \mathcal{M}) \quad (9.47)$$

e, raggruppando i rotori:

$$\nabla \times \left( \frac{B}{\mu_0} - \mathcal{M} \right) = J \quad (9.48)$$

che ci permette di definire il campo magnetico:

$$H = \frac{B}{\mu_0} - \mathcal{M} \quad (9.49)$$

tale che la corrispondente equazione di Maxwell è

$$\nabla \times H = J \quad (9.50)$$

in modo totalmente analogo all'introduzione di  $D$  rispetto a  $E$ .

Quindi possiamo definire una permeabilità magnetica  $\mu = \mu_0\mu_r$ , tale che:  $B = \mu H$ .

Prendiamo un solenoide e inseriamo un materiale all'interno, il campo generato nel solenoide cambierà secondo per la magnetizzazione del materiale inserito:  $B = \mu In$ , rispetto a quello nel vuoto  $B_0 = \mu_0 In$ . Quindi, la differenza  $B - B_0 = (\mu_r - 1)\mu_0 In$  è equivalente al campo generato da un numero  $n'$  di spire per unità di lunghezza, percorse dalla corrente (di polarizzazione)  $I' = (\mu_r - 1)$  che si va ad aggiungere al campo nel vuoto.

Come nel caso elettrostatico, definiamo una suscettività magnetica:

$$\chi = \mu_r - 1 \quad (9.51)$$

che tiene conto della polarizzabilità magnetica del materiale. Sulla base della suscettività possiamo dividere le sostanze in:

- Diamagnetiche: per  $\chi < 0$  cioè  $\mu_r < 1$
- Paramagnetiche:  $\chi > 0$  ( $\mu_r > 1$ )
- Ferromagnetiche:  $\chi = f(B)$

### 9.2.2 Momento magnetico di atomi idrogenoidi

Se prendiamo in considerazione il modello dell'atomo di idrogeno del Cap 8.2.4, il bilancio tra la forza elettrica tra il nucleo e l'elettrone e la forza centrifuga, permette di calcolare la velocità angolare dell'elettrone:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e r \omega_0^2$$

da cui

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^3}} \quad (9.52)$$

indica che l'orbita può essere percorsa in ambo i sensi. Se aggiungiamo un campo dove il segno di induzione magnetica  $B$ , il bilancio delle forze diventa:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} - evB = m_e r \omega^2$$

scrivendo  $v = r\omega$ , e detta

$$eB/2m_e = \omega_L \quad [qmlt^{-2}l^{-1}q^{-1}t \cdot m^{-1}] = [t^{-1}] \quad (9.53)$$

la *precessione di Larmor*, risulta:

$$\omega^2 - 2\omega_L\omega + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^3} = 0$$

vista la 9.52, possiamo scrivere:

$$\omega = \omega_l \pm \sqrt{\omega_l^2 + \omega_0^2} \quad (9.54)$$

che, considerata  $\omega_0 \gg \omega_L$ , viene:

$$\omega = \omega_L \pm \omega_0 \quad (9.55)$$

Per vedere che la condizione che la frequenza di precessione sia molto minore di quella orbitale, calcoliamo il campo che sarebbe necessario per renderle confrontabili. I dati sono

$$\begin{aligned} e &= 1.602 \cdot 10^{-19} C \\ r_0 &= 0.5 \cdot 10^{-10} m \\ m_e &= 0.9 \cdot 10^{-30} kg \\ \epsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \\ \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^3}} = 4.14 \cdot 10^{16} \text{ giri/s} \end{aligned}$$

mentre

$$\omega_L = \frac{eB}{2m_e} \Rightarrow B = \frac{2m_e\omega_L}{e} = 10^{-21} kg s^{-1} C^{-1} \cdot \omega_L$$

Ponendo  $\omega_L = 4.1 \cdot 2\pi \cdot 10^{16} s$  viene:  $B = 4.5 \cdot 10^5 T$ .

D'altra parte la corrente corrispondente all'elettrone in orbita è  $I = e\omega/2\pi = 1.06 \cdot 10^{-3} A$  e, il momento magnetico della spira composta dall'elettrone in orbita è  $m = \mu_0 IS = 12.56 \cdot 10^{-7} 1.06 \cdot 10^{-3} \pi (0.91 \cdot 10^{-30})^2 = 1.17 \cdot 10^{-29} A \cdot m^2$ . Le sostanze diamagnetiche sono quelle per cui l'unica polarizzazione presente è quella di Larmor, per cui la magnetizzazione, come si è visto, è molto piccola. Detto  $B^*$  il campo generato sull'atomo in osservazione da tutti gli atomi adiacenti, allora, per una sostanza diamagnetica:

$$\mathcal{M} = -n\alpha_L B^*$$

dove  $\alpha_L$  è la polarizzabilità  $m_L/B^*$ . Come per i dielettrici, a meno di un segno, in assenza di campo esterno, per una sfera uniformemente magnetizzata:  $H^* = -M/3$  quindi, possiamo trovare che per il campo interno (vedi 8.38) è:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \frac{\mathcal{M}}{3}$$

D'altra parte, il momento magnetico per un atomo di numero atomico  $Z$ , lo possiamo scrivere come:

$$m = \pi \langle \rho^2 \rangle I_L = \frac{\mu_0 Z e^2 B^*}{4m_e} \langle \rho^2 \rangle$$

dove  $\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$  è la distanza quadratica media dall'asse di rotazione. Considerato che il raggio quadratico medio  $\langle r^2 \rangle$  è la somma delle tre coordinate q.m., risulta  $\langle \rho^2 \rangle = 2/2 \langle r^2 \rangle$ . Quindi:

$$m_L = \frac{\mu_0 Z e^2 B^*}{6m_e} \langle r_0^2 \rangle$$

e il calcolo della polarizzabilità magnetica  $\alpha_L = m_L/B^*$  si riduce al calcolo del raggio quadratico medio, che si può trovare in meccanica quantistica.

Ad ogni modo, possiamo trovare un'espressione per la suscettività a partire dalle equazioni microscopiche precedenti:

$$\begin{cases} \mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \frac{2\mathcal{M}}{3} \\ \mathcal{M} = -n\alpha_L \mathbf{B}^* \end{cases}$$

risolvo per trovare:

$$\mathcal{M} = -n\alpha_L \left( \mathbf{B} - \frac{2\mathcal{M}}{3} \right)$$

e , poertando tutte le magnetizzazioni nello stesso membro:

$$\left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{3} \right) \mathcal{M} = -n\alpha_L \mathbf{B}$$

infine:

$$\mathcal{M} = \frac{n\alpha_L}{1 - \frac{2\mathcal{M}}{3}} \mathbf{B} = \chi \mathbf{B} \quad (9.56)$$

Considerato che

$$\mu = \mu_0(1 + \chi)$$

la 9.56 diventa analoga all'equazione di Clausius-Mossotti:

$$\mu = \mu_0(\chi + 1) = \mu_0 \left( \frac{3n\alpha_L}{3 - 2n\alpha_L} + 1 \right) = \mu_0 \left( \frac{3n\alpha_L + 3 - 2n\alpha_L}{3 - 2n\alpha_L} \right) = \mu_0 \frac{n\alpha_L + 3}{3 - 2n\alpha_L} \quad (9.57)$$

quindi:

$$(3 - 2n\alpha_L) = \mu_0(n\alpha_L + 3)$$

e raccogliendo i termini:

$$\frac{n\alpha_L}{3} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 - 2\mu} \quad (9.58)$$

che è l'analogo della relazione di Clausius-Mossotti dell'elettrostatica dei dielettrici.

### 9.2.3 Paramagnetismo

Il momento di Larmor è completamente mascherato nel caso in cui le molecole possiedano un momento magnetico proprio, indipendentemente dal campo applicato, come nel caso delle sostanze paramagnetiche. In questo caso vale la magnetizzazione à la Langevin:

$$\mathcal{M} = nL(a)\mathbf{m} \quad a = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}^*}{kT}$$

dove  $L(a)$  è la funzione di Langevin (8.37). Possiamo scrivere (almeno al primo ordine):

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - N\mathcal{M}$$

dove  $N$  è la costante di Weiss. Dunque:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathbf{H}^* - \mathbf{H}}{N} \quad (9.59)$$

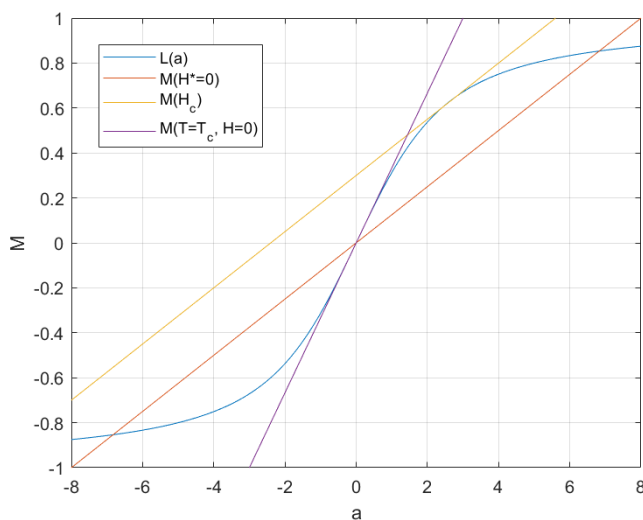


Figura 9.8: Curva di Langevin e retta di magnetizzazione a  $T=300\text{K}$  per  $H = 0$ ,  $H = H_c$  (Campo coercitivo) e per  $H = 0$  e  $T = T_c$

Per le sostanze paramagnetiche  $N \ll 1$ , quindi  $\mathbf{H}^* \approx \mathbf{H}$ , e siccome a temperature ordinarie  $a$  è piccolo, possiamo sviluppare la  $L(a) \simeq a/3$ , sicché:

$$\mathcal{M} = \frac{nm^2\mathbf{H}}{3kT} = \mu_0\chi\mathbf{H}$$

quindi

$$\chi = \frac{nm^2}{3\mu_0kT} \quad (9.60)$$

### 9.2.4 Ferromagnetismo

Le sostanze ferromagnetiche sono quelle per cui la costante di Weiss  $N$  non è più trascurabile rispetto ad 1 e le cui molecole presentano un momento magnetico proprio. Per queste sostanze,

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + N\mathcal{M}$$

Dunque:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathbf{H}^* - \mathbf{H}}{N} \simeq \frac{akT}{Nm} - \frac{\mathbf{H}}{N} \quad (9.61)$$

Questa espressione rappresenta una retta nel piano  $[a, M]$  che, messa a sistema con la curva di Langevin, la interseca in almeno un punto, identificando, per ogni valore di  $\mathbf{H}$  un valore della magnetizzazione (Fig. 9.8). Quando  $\mathbf{H} = 0$ , c'è una magnetizzazione *residua*  $\mathcal{M}_R = \frac{akT}{Nm}$ . La retta interseca la curva di Langevin in due punti a meno che non sia tangente nell'origine oppure oltre il punto di tangenza per  $\mathbf{H} \neq 0$ . Quando la retta è tangente nell'origine, al variare di  $\mathbf{H}$ , incontrerà la curva di Langevin sempre in un solo punto e non ci sarà una magnetizzazione residua. Questo identifica una temperatura (di Curie)

$T_c$  per cui le proprietà ferromagnetiche del materiale svaniscono. Per calcolare  $T_c$  basta porre  $\frac{KT_c a}{m_0 N} = \frac{m_0 a}{3}$ , da cui  $T_c = \frac{Nm_0^2}{3k}$ . Come si vede in Fig. 9.8, per  $-H_c \leq H \leq H_c$ , per ogni valore di  $H$ , si hanno due valori della magnetizzazione, quindi la curva della magnetizzazione in funzione del campo non è biunivoca (isteresi della magnetizzazione). La curva della magnetizzazione in funzione del campo, è mostrata in Fig. 9.9 Il valore asintotico per campo infinito è la magne-

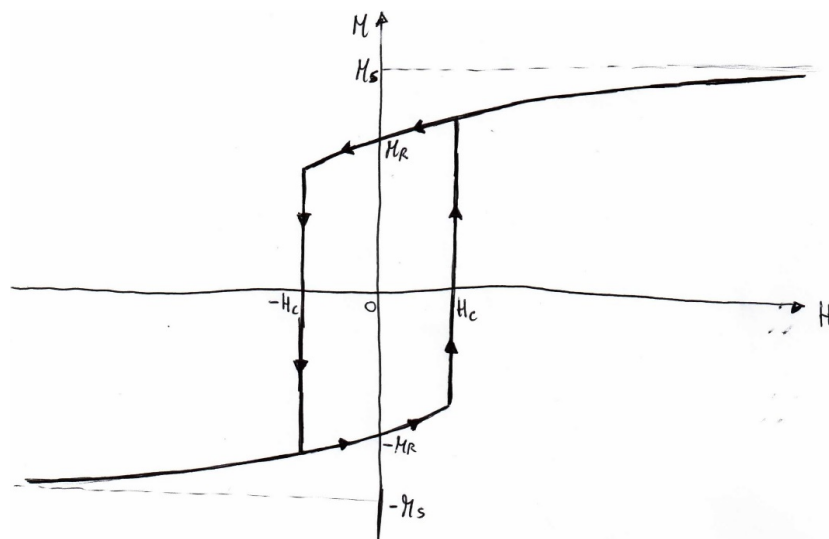


Figura 9.9: Curva di isteresi della magnetizzazione in funzione del campo

tizzazione di saturazione  $M_s$  e il campo per cui retta è tangente alla curva, e dove la magnetizzazione cambia segno, è il campo coercitivo (o forza coercitiva)  $H_c$ . Quest'ultimo valore, è positivo proveniendo da magnetizzazioni negative e negativo proveniendo da magnetizzazioni positive (grazie al II termine della 9.61).

Avvicinandosi alla temperatura di Curie, la curva di isteresi si stringe e, al di sopra, diventa una funzione univoca, ed il materiale si comporta come un se fosse paramagnetico. Quindi

$$\mathcal{M} = \frac{M_s m_0 H^*}{3kT} = \frac{M_s m_0}{3kT} (H + NM)$$

da cui possiamo calcolare la magnetizzazione ricordando che  $T_c = \frac{Nm_0^2}{3k}$ :

$$\mathcal{M} = \frac{M_s T_c / N}{T - T_c} H = \chi H$$

### 9.2.5 Paramagnetismo in un sistema quantizzato a due livelli

In meccanica quantistica il momento angolare può assumere solo valori interi. Come in meccanica classica, (Teorema di König), il momento angolare totale si separa nella somma del momento orbitale e lo spin:  $J = L + S$ , entrambi

quantizzati. Gli orbitali su cui possono essere posti gli elettroni sono caratterizzati da un numero intero  $n$ , e per ogni  $n$  sono possibili  $n - 1$  valori di  $L$ . Per esempio, per l'atomo di idrogeno, lo stato fondamentale ha  $n=1$ , quindi  $L$  può solo essere 0; per un atomo di elio, sono possibili  $L=0, 1$  (Orbitali S e P, rispettivamente). Gli stati con  $L$  più alto hanno energia maggiore di quelli ad  $L$  inferiore, quindi gli elettroni si pongono preferibilmente negli stati di energia inferiore. Per esempio, pur esistendo un possibile orbitale  $L=1$ , nell'atomo di He, entrambi gli elettroni si dispongono nell'orbitale  $L=0$ . Gli orbitali con un momento angolare  $L$  possono avere  $2L+1$  stati con la stessa energia, corrispondenti alle proiezioni del momento angolare rispetto all'asse "z" di rotazione, e così anche per lo spin  $S$ . Tuttavia, gli elettroni, rispondono al principio di esclusione di Pauli, secondo cui, i fermioni che occupano lo stesso stato energetico non possono avere tutti i numeri quantici uguali. Pertanto, Gli elettroni, che hanno spin  $s=1/2$  in un orbitale S ( $L=0$ ) possono essere al massimo 2, corrispondenti agli stati degeneri con  $s_z = \pm 1/2$ . Un orbitale P ( $L=1$ ) ha  $2L+1=3$  stati degeneri dovuti ad  $L_z = -1, 0, 1$ , ciascuno dei quali può ospitare fino a 2 elettroni, per un totale di 6. Le shell completamente riempite, non contribuiscono al momento totale dell'atomo perché ciascun orbitale ha una coppia di elettroni con spin contrapposti. Supponiamo di avere un sistema di atomi che abbiano tutte le shell interne piene e un solo elettrone in una shell S (alcalini). Come per l'atomo di idrogeno, l'elettrone può essere con  $s_z = -1/2; 1/2$ , e, in assenza di campo questi stati hanno la stessa energia. In presenza di un campo magnetico  $B$ , tuttavia, l'accoppiamento del momento con il campo, rimuove la degenerazione perché  $\mathcal{E} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$  e c'è una relazione che lega il momento meccanico  $J$  con quello magnetico:  $m = -g\mu_B J$ , dove  $\mu_B = e\hbar/2m_e c$  è il *magnetone di Bohr* e  $g$  il *rapporto giromagnetico* che per gli elettroni vale circa 2. Quindi avrò due stati ad energia differente:  $\mathcal{E} = -\mu_B(0 + 2(\pm 1/2))B = \pm\mu_B B$ .

In un tale sistema a due livelli, detti  $N_+$  il numero di atomi con spin parallelo ed  $N_-$  il numero di atomi con spin antiparallelo, all'equilibrio termico le popolazioni sono definite dalla statistica di Boltzmann, quindi:

$$\frac{N_{\pm}}{N} = \frac{e^{\pm \frac{\mu_B B}{kT}}}{e^{\frac{\mu_B B}{kT}} + e^{-\frac{\mu_B B}{kT}}}$$

La magnetizzazione media del materiale sarà la differenza tra  $N_+$  e  $N_-$  moltiplicata per la magnetizzazione del singolo atomo:

$$\mathcal{M} = N\mu_B \frac{e^{\frac{\mu_B B}{kT}} - e^{-\frac{\mu_B B}{kT}}}{e^{\frac{\mu_B B}{kT}} + e^{-\frac{\mu_B B}{kT}}} = N\mu_B \tanh \frac{\mu_B B}{kT} \quad (9.62)$$

A temperatura ambiente,  $kT \gg \mu_B B$  per campi anche forti, quindi possiamo sviluppare  $\tanh a = a$ , sicché:  $\mathcal{M} = N\mu_B \left( \frac{\mu_B B}{kT} \right)$ .

Per atomi con  $L \neq 0 \Rightarrow J = L + S$  si hanno  $2J + 1$  livelli energetici equispaziati. In questo caso il calcolo è molto più complesso e porta ad una magnetizzazione media :

$$\mathcal{M} = NJ\mu_B \beta_J \left( \frac{gJ\mu_B B}{kT} \right)$$

in cui  $\beta_J(x)$  è la funzione di Brillouin:

$$\beta_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth \frac{(2J+1)x}{2J} - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J}$$

di cui la 9.62 è il caso particolare per  $J=1/2$ . Anche in questo caso, sviluppando la  $\coth x = 1/x + x/3 \dots$  otteniamo una suscettività:

$$\mathcal{M}/B = \frac{(2J+1)g^2\mu_B^2}{3kT}$$

### 9.2.6 Correnti indotte e legge di Faraday-Neumann

Se ad un circuito elettrico si avvicina un magnete, nel circuito si innesca un passaggio di corrente la cui intensità è non nulla solo finché il magnete è in moto rispetto al circuito. Tale è detta corrente indotta dal magnete. Si deve a Neumann l'aver dedotto una legge generale. Per indurre una corrente in un circuito, è necessario far variare il flusso del vettore  $\mathbf{B}$  concatenato col circuito e, sperimentalmente, l'intensità di corrente è data da:

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dt} \quad (9.63)$$

in cui, la derivata al II membro è la **forza elettromotrice indotta**,  $f$  ed il segno indica che la questa è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera. Quindi la corrente che circola nel circuito genera un campo magnetico che si sottrae a quello inducente. La presenza di una corrente indotta indica la presenza di un campo elettrico indotto  $E_i$  non conservativo che mette in moto le cariche anche in assenza di una differenza di potenziale ai capi del circuito tale che in un tratto  $d\ell$  di circuito si scrive:

$$f = \int E_i d\ell$$

se il percorso è una linea chiusa, allora:

$$f = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = \oint E d\ell$$

dove  $E = E_i + E_e$  e la circuitazione del campo elettrico conservativo  $E_e$  si annulla.

Se vogliamo un'espressione integrale della legge di Faraday Neumann, partiamo dal flusso:

$$\Phi(B) = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

Quindi:

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} = \int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint \mathbf{E} d\ell = -\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

quindi, uguagliando gli integrali di superficie:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (9.64)$$

Ricordando, poi  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ :

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = 0 \quad (9.65)$$

quindi, il vettore  $\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}$  è, nullo a meno del gradiente di un potenziale scalare:

$$\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\nabla\phi \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \nabla\phi \quad (9.66)$$

### 9.2.7 Flusso tagliato e flusso concatenato

Per far variare il flusso abbiamo due alternative, o facciamo variare l'area contornata dal circuito (o l'area efficace rispetto alla direzione del campo), nel qual caso si parla di **flusso tagliato** dal circuito, oppure si fa variare l'intensità del campo, mantenendo fermo il circuito, e allora si parla di **flusso concatenato**.

#### Flusso tagliato

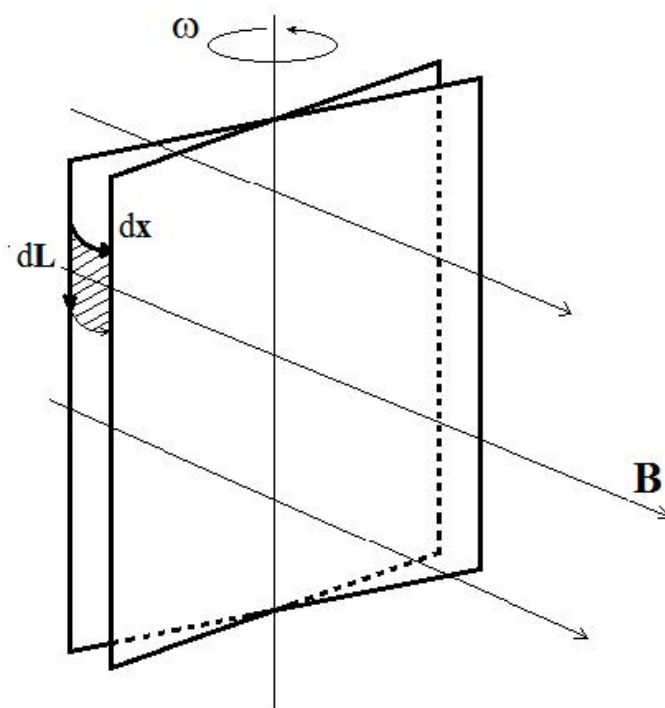


Figura 9.10: Flusso tagliato dalla superficie racchiusa dal circuito in movimento rispetto al campo

Quando è il circuito a muoversi in un campo statico, sulle cariche che circolano agisce la forza di Lorentz, che è la forza elettromotrice:

$$\mathbf{f} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{E}$$

quindi:

$$\int \mathbf{E} d\ell = \int \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \times \mathbf{x} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

essendo  $\mathbf{B} \times d\mathbf{x} \cdot d\ell = \mathbf{B} \cdot d\ell \times d\mathbf{x} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$ . In figura 9.10 il flusso tagliato dalla proiezione della superficie in direzione del campo  $x\ell \sin \theta(t)$  di una spira quadrata in rotazione.

**Flusso concatenato**

Si tratta del flusso prodotto da una corrente variabile in un circuito indeformato. In questo caso, la corrente variabile produce un campo magnetico variabile che, a sua volta, produce una corrente indotta che si oppone a quella generatrice. Supponiamo che in un mezzo di permeabilità  $\mu$  la corrente che circola sia variabile nel tempo e a divergenza nulla, siccome questa corrente ne genera una che si oppone ad essa (autoinduzione), proporzionale alla variazione del flusso, ci sarà una sorta di resistenza – il coefficiente di autoinduzione o induttanza  $L$  – che lega la differenza di potenziale e la variazione della corrente:

$$V = L \frac{dI}{dt} \Leftrightarrow \Phi(B) = LI \quad (9.67)$$

Le dimensioni dell'induttanza sono:

$$[L] = [\Phi(B)][I]^{-1} = (Vm^{-1}sm^{-1}m^2)A^{-1} = \Omega \cdot s = \text{Henry}$$

Se ad un circuito chiuso su una resistenza applichiamo una d.d.p. variabile nel tempo  $V = V_0 e^{i\omega t}$ , allora, avremo

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow V_0 = (R + i\omega L)I_0$$

Come si vede, l'induttanza si comporta come una resistenza che aumenta linearmente con la pulsazione della corrente e che si aggiunge alla resistenza statica, coerentemente con il fatto che la corrente indotta si oppone a quella che genera il campo.

**9.2.8 Energia del campo magnetico e induzione mutua**

La variazione di energia di una particella di velocità  $v$  sotto una forza  $F$  è

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

se la forza è quella elettrica allora  $\dot{\mathcal{E}} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ . Questo è il lavoro che deve essere fatto dalle sorgenti del campo elettrico per unità di tempo e per portatore di carica per mantenere le correnti; sommando su tutti i portatori, si ottiene:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -fI = I \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

quindi il lavoro  $\delta\mathcal{L}$  compiuto dalle sorgenti per ottenere una variazione di flusso  $\delta\Phi$  con una corrente  $I$  è  $\delta\mathcal{L} = I\delta\Phi$ .

Stabiliamo ora qual è il lavoro necessario a mantenere una distribuzione di correnti stazionaria e a divergenza nulla. Come mostrato in fig. 9.11, possiamo pensare la distribuzione di correnti, come generata da una rete di circuiti elementari, ciascuno contornante una superficie  $\Delta S$  con un filo di sezione  $\Delta\sigma$ . L'incremento del lavoro eseguito contro la forza elettromotrice indotta, in termini della variazione del flusso è:

$$\delta\mathcal{L} = (\mathbf{J}\Delta\sigma) \int \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} = (\mathbf{J}\Delta\sigma) \int (\nabla \times \delta\mathbf{A}) \cdot \mathbf{ndS}$$

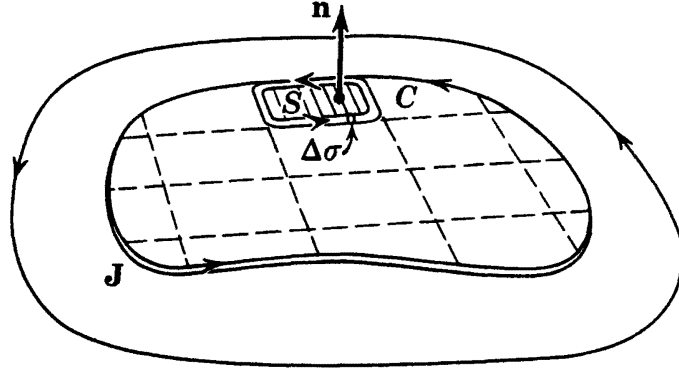


Figura 9.11: Distribuzione localizzata di correnti

ovvero

$$\delta\mathcal{L} = (\mathbf{J}\Delta\sigma) \oint \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

portando nell'integrale  $\mathbf{J}\Delta\sigma$ , e osservando che  $\Delta\sigma dL = d^3x$ , si ottiene:

$$\delta\mathcal{L} = \int \mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{A} d^3x = \int \delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d^3x \quad (9.68)$$

Applicando all'integrando la regola  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ , otteniamo:  $\delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})$ . Il primo addendo svanisce nell'integrazione se la distribuzione è localizzata, e il secondo termine è:  $\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} = 1/2\delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ . In definitiva:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d^3x \quad (9.69)$$

che è equivalente alla 9.68, che possiamo riscrivere esplicitando la forma del potenziale vettore:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{8\pi} \int d^3x \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - x'|} d^3x'$$

Per un insieme di  $N$  circuiti indipendenti, possiamo scrivere l'integrale come la somma su tutti i circuiti

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{8\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3x \int \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_j(x')}{|\mathbf{x} - x'|} d^3x' \quad (9.70)$$

Nel caso in cui  $i = j$ , otteniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3x \int \frac{\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_i(x')}{|\mathbf{x} - x'|} d^3x' = LI^2 \quad (9.71)$$

che definisce il coefficiente di autoinduzione come :

$$L = \frac{\mu}{4\pi I^2} \int d^3x \int \frac{\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_i(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (9.72)$$

Analogamente, nel caso  $i \neq j$ , definiamo il coefficiente di induzione mutua  $M_{ij}$  del circuito  $j$  su quello  $i$  (e viceversa):

$$M_{ij} = \frac{\mu}{4\pi I_i I_j} \int d^3x \int \frac{\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_j(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (9.73)$$

Tenendo conto dell'espressione del potenziale vettore, possiamo riscrivere la 9.73, come:

$$M_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \int \mathbf{J}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_{ij}(x) d^3x$$

dove  $\mathbf{A}_{ij}(x)$  è il potenziale vettore prodotto dal circuito  $i$  su quello  $j$ . Trascurando lo spessore del filo:  $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) d^3x \simeq \mathbf{J}_i(\mathbf{x}) \cdot dL dS = I_i dL$ , quindi, sostituendo:

$$M_{ij} = \frac{1}{I_j} \oint \mathbf{A}_{ij}(x) \cdot dL = \frac{1}{I_j} \int \nabla \times \mathbf{A}_{ij}(x) = \frac{\Phi_{ij}(x)}{I_j} \quad (9.74)$$

### Il trasformatore a bobine

Consideriamo due solenoidi, uno con  $n_1$  spire per unità di lunghezza e l'altro con  $n_2$ , che condividano lo stesso flusso del campo magnetico, o perché sono concentrici o perché sono avvolti sui due lati opposti di un traferro (9.12).

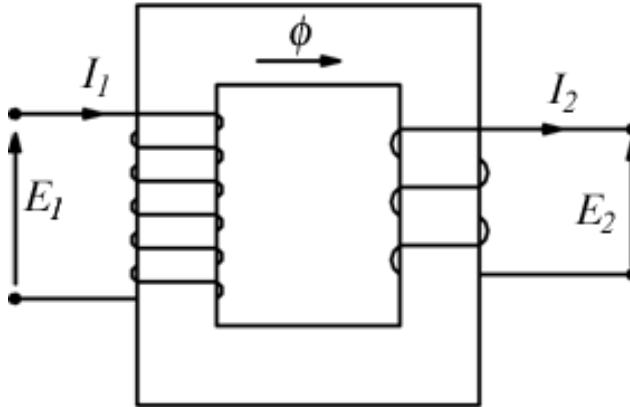


Figura 9.12: Schema di un trasformatore a bobine

Il primo è alimentato da una tensione variabile  $E_1(t)$  che genera un flusso di campo magnetico tale che  $E_1 = -\frac{d\Phi(B(t))}{dt} = -\mu n_1 \frac{dI_1}{dt} DS$ , dove  $n_1 D = N_1$  è il numero di spire totali dell'avvolgimento 1 e  $S$  la sezione del solenoide. Il flusso del campo è condiviso interamente dal secondo avvolgimento. Dunque, la forza elettromotrice ai capi del secondo avvolgimento sarà:

$$E_2 = N_2 \left( \mu N_1 \frac{dI_1}{dt} S \right) \quad (9.75)$$

quindi, in questo caso:  $M_{12} = \mu N_1 N_2 S$ . Considerato che il campo generato da un solenoide è (cfr. pag.119),  $B = \mu n_1 I$  e per una spira  $\dot{\Phi}(B) = -L\dot{I} = \dot{B}S = \mu n_1 \dot{I}S$ , per  $n_1$  spire per unità di lunghezza è:  $L \frac{dI_1}{dt} = \mu n_1^2 \frac{dI}{dt} S$ , quindi  $L = \mu n_1^2 S$ . Sostituendo nella 9.75

$$E_2 = M_{12} \frac{dI_1}{dt} = M_{12}/L_1 E_1$$

quindi, viste le espressioni per L e M,

$$\frac{E_2}{E_1} = n_1 n_2 / n_1^2 = n_2 / n_1 \quad (9.76)$$

che dice che, per un trasformatore ideale, il rapporto di trasformazione è pari al rapporto tra la densità di spire del secondario rispetto a quella del primario.

Un modello un po' più accurato, tiene conto anche della resistenza del conduttore (fig.9.13) Se  $V_1 = V e^{i\omega t}$ :

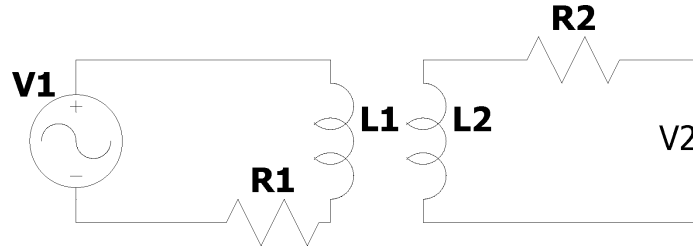


Figura 9.13: Schema del trasformatore con le resistenze dei conduttori

$$\begin{cases} V = R_1 I_1 + L_1 i\omega I_1 - i\omega M_{12} I_2 \\ V_2 = -i\omega M_{12} I_1 + (R_2 + i\omega L_2) I_2 \end{cases} \quad (9.77)$$

se il secondario è un circuito aperto,  $I_2 = 0$  e quindi:

$$\begin{cases} V = (R_1 + i\omega L_1) I_1 \\ V_2 = -i\omega M_{12} I_1 \end{cases}$$

e, sostituendo:

$$V_2 = \frac{-i\omega M_{12}}{(R_1 + i\omega L_1)} V$$

Quindi, perché si comporti come un trasformatore ideale, deve essere trascurabile  $\omega_0 = R/L$  rispetto alla frequenza del primario.

Per avere un'idea di che frequenze stiamo parlando, mettiamo qualche numero realistico. Diciamo che il traferro ha una sezione di  $S = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ , il filo uno spessore di 1 mm (quindi una sezione  $a = \pi \cdot (0.5 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2 \sim 7.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ , la resistività del rame è  $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ , la permeabilità magnetica del ferro è  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-4}$ . Allora, per un traferro di sezione quadrata:

- $R_1 = \rho \ell / a = 1.7 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2} N_1 / (7.8 \cdot 10^{-7}) \sim 8.7 \cdot 10^{-4} N_1 \Omega$

- $L = \mu N_1^2 S = 1.25 \cdot 10^{-7} N_1^2$

quindi:  $\omega_0 \approx 6.9 \cdot 10^4 / N_1 \text{ rad/s} = 1.1 / N_1 \text{ kHz}$ . Dunque, posta ad esempio la frequenza della tensione in ingresso a 50 Hz, a partire da circa 100 spire/m, quanto maggiore è il numero di spire, tanto più è trascurabile la frequenza (di taglio)  $\omega_0$  del trasformatore rispetto alla frequenza di ingresso.

### 9.2.9 Campi variabili lentamente

Date le equazioni del campo indotto e la definizione della densità di corrente:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (9.78)$$

e tenuto conto che  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , risulta che  $\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = 0$  ovvero:

$$\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \nabla \Phi$$

Ponendo  $\Phi = 0$ ,  $\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ .

Per mezzi in cui  $\mu$  è indipendente dalla frequenza ed uniforme, si ha anche:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Dalla terza e la prima delle 9.78,  $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \sigma \mathbf{E}$ , sviluppando il prodotto triplo e sfruttando l'espressione di  $\mathbf{E}$  in termini di  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

Dunque:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (9.79)$$

che è un'equazione di diffusione valida per  $\sigma$  variabile nello spazio ma indipendente dalla frequenza; un'espressione analoga la possiamo ricavare per il campo  $\mathbf{E}$ . Se la conducibilità è anche uniforme nello spazio, l'equazione è valida anche per  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{J}$ .

Come abbiamo visto per l'equazione del calore, l'equazione di diffusione può essere risolta per separazione delle variabili:  $A = X(x)T(t)$ , che immessa nell'equazione, ci dà un'equazione per la parte spaziale ed una per quella temporale:  $X''T = -\mu \sigma X \dot{T}$  quindi, dividendo per  $XT$ :  $X''/X = \mu \sigma \dot{T}/T = -K^2$

$$\begin{cases} X'' = -K^2 X \\ \dot{T} = -\mu \sigma k^2 T \end{cases}$$

Queste equazioni permettono di definire una lunghezza (skin depth) e un tempo di attenuazione. Per esempio, se  $A = A_0 e^{i(\omega t - k \cdot x)}$ , l'equazione per  $A$  dà:  $-K^2 = i\omega \mu \sigma$  ovvero  $\omega = iK^2 / \mu \sigma$  e/o  $K = \pm \sqrt{i\omega \mu \sigma}$ . Sostituendo all'esponente:  $A = A_0 e^{i\left(\frac{iK^2}{\mu \sigma} t - k \cdot x\right)} = A_0 e^{-ik \cdot x} e^{-\frac{iK^2}{\mu \sigma} t}$ , dove possiamo definire un tempo di penetrazione  $\tau = \frac{\mu \sigma}{K^2}$ . Oppure:

$$A = A_0 e^{i(\omega t - \sqrt{i\omega \mu \sigma} x)} = A_0 e^{i(\omega t) e^{-x \sqrt{\omega \mu \sigma} i^{3/2}}$$

Sviluppando  $i^{3/2} = (i-1)/\sqrt{2}$ ,  $A = A_0 e^{i(\omega t + x/\delta)} e^{-x/\delta}$ , dove abbiamo preso il segno - e

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \quad (9.80)$$

è la lunghezza di penetrazione o skin depth.

Più in concreto, in presenza di un campo variabile,  $\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{J}$ , supponendo che il campo  $\mathbf{H}$  sia  $(H_x, 0, 0)$ , allora,  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{e}_y = \sigma E_y \mathbf{e}_y$  è l'unica componente che sopravvive. Se  $H_x(z, t) = H_0 e^{i(\omega t - kz)} = H_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}$ , risulta:

$$-\frac{i+1}{\delta} H_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)} = J_y$$

definisce una corrente che scorre sulla superficie ortogonale al campo e decade con la profondità, tanto più velocemente quanto maggiore è la frequenza.

## 9.3 Elettromagnetismo

### 9.3.1 La corrente di spostamento

Nelle equazioni di Maxwell fin qui trovate, c'è un'inconsistenza: la IV equazione  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ , se ne prendiamo il gradiente, si annulla sempre al primo membro, mentre il secondo, si annulla solo per correnti stazionarie, per le quali vale l'equazione di continuità  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Nel caso generale, invece, l'equazione di continuità è  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$ . Questo ci dice che per campi variabili nel tempo, la legge di Ampere non è più valida nella forma con cui la abbiamo trovata per i campi statici.

Per renderci conto di questa inconsistenza, consideriamo la forma integrale della legge di Ampere:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$$

applicata ad un percorso chiuso attraversato da un filo, nelle vicinanze di un condensatore, come in fig. 9.14. Questo percorso racchiude oltre alla superfi-

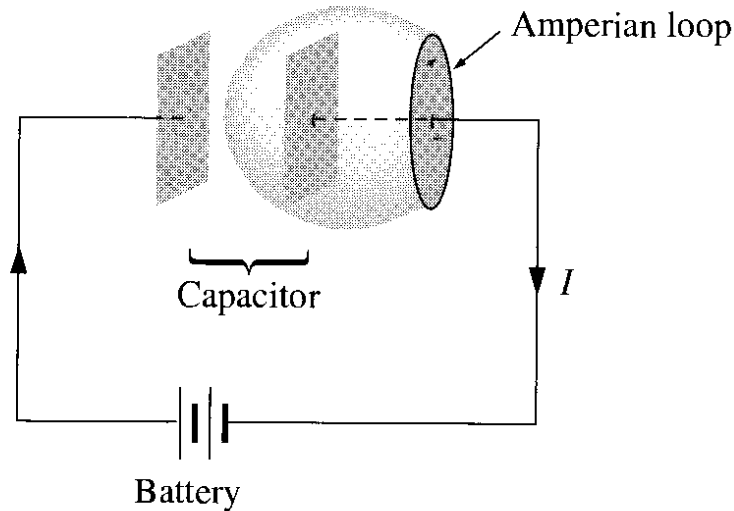


Figura 9.14: La linea chiusa attorno al filo della legge di Ampere, è il bordo di una superficie che passa attraverso le armature del condensatore

cie piana attraversata dal filo, da cui ricaviamo la legge, anche le superfici che passano attraverso le armature del condensatore senza essere attraversate dal filo, e lì non passa alcuna corrente! Il problema, dunque, è nell'equazione di continuità, che contiene il termine di variazione della densità di carica. Utilizzando l'equazione della divergenza del campo elettrico (i.e. teorema di Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ , risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.81)$$

che definisce una corrente *di spostamento*  $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  che si aggiunge alla corrente quando consideriamo campi variabili nel tempo.

Quindi la IV equazione di Maxwell diventa:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9.82)$$

### 9.3.2 Equazioni di Maxwell complete e onde elettromagnetiche

Riassumendo, le equazioni di Maxwell, rese omogenee rispetto a  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , sono:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} & I \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & II \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & III \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & IV \end{cases} \quad (9.83)$$

Nella II, sostituiamo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  e otteniamo che:

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad (9.84)$$

dove  $\Phi$  è un potenziale scalare.

Dalla IV equazione:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Sviluppando il prodotto vettore triplo e sostituendo la 9.84:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

L'equazione la possiamo riaggiustare come

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J} \quad (9.85)$$

Possiamo sfruttare l'arbitrarietà della scelta di un potenziale scalare nella definizione del potenziale vettore 9.13, per annullare il termine fra parentesi (gauge di Lorenz – Ludwig Lorenz):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\psi \Rightarrow \mathbf{E}' = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\Phi' = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi' - \nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Siccome il campo elettrico non deve cambiare per la scelta di gauge:

$$-\nabla\Phi' - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\left(\Phi + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

Dunque la scelta di gauge di Lorenz è legittima purché:

$$\nabla\left(\Phi - \Phi' + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0 \Leftrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

e con tale scelta, l'equazione per il potenziale vettore diventa:

$$\square\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} \quad (9.86)$$

con la condizione che  $\square\psi = 0$  (si può verificare annullando il termine fra parentesi nella 9.85)

Analogamente, per il potenziale  $\Phi$ , partendo dalla I equazione di Maxwell e da  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}$ , con successivi passaggi, abbiamo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}) = -\left(\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}\right)$$

ma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

quindi:

$$\nabla^2\Phi - \mu\epsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (9.87)$$

Dalla I e dalla IV possiamo ricavare l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu\nabla \cdot \mathbf{J} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

ma  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$  quindi  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E})$  e, visto che  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Per quel che riguarda la produzione e propagazione degli altri campi: Prendendo il rotore della III

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B}$$

ovvero, sfruttando la IV:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Raccogliendo le derivate da un lato e sfruttando l'equazione di continuità  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \rho / \epsilon$ :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \left( \nabla \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) \quad (9.88)$$

Analogamente, per il campo B:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \mathbf{J} \quad (9.89)$$

Nel caso di isolante isotropo ed omogeneo, sia il flusso di corrente, sia il gradiente di densità di carica sono nulli, per cui le equazioni si riconducono entrambe alla ben nota equazione delle onde.

### 9.3.3 Risoluzione delle equazioni disomogenee con le funzioni di Green

Le equazioni del tipo

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = f(x, t)$$

Si possono risolvere mediante l'uso delle funzioni di Green.

Se le  $\Phi$  e le  $f(x, t)$  ammettono la trasformata di Fourier:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Le funzioni trasformate, soddisfano l'equazione disomogenea di Helmholtz:

$$(\nabla^2 + K^2) \tilde{\Phi}(x, \omega) = -4\pi \tilde{f}(x, \omega)$$

La funzione di Green associata a questa equazione è la funzione  $G(x, x')$  che soddisfa l'equazione:

$$(\nabla^2 + K^2) G_K(x, x') = -4\pi \delta(x - x') \quad (9.90)$$

dove  $\delta(x - x')$  è la funzione di Dirac, che vale  $\infty$  quando  $x - x' = 0$  e 0 altrove e  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = 1$ .

La funzione di Green è, dunque, la funzione che definisce la "risposta all'impulso" dell'equazione differenziale, e dunque, il potenziale che soddisfa l'equazione disomogenea è la convoluzione di questa funzione con la funzione sorgente. In altri termini, se  $O_r$  è un operatore differenziale che agisce su una funzione  $\phi(r)$ , l'equazione di partenza è  $O_r \phi(r) = f(r)$ , la funzione di Green  $G(r, r')$  è quella per cui  $f(r) = \delta(r - r')$ . Se tale funzione esiste, allora la generica

$\phi(r) = \int f(r')G(r, r') dr'$ . Infatti, applicando  $O_r$  ad ambo i membri, e supposto che l'operatore sia lineare:

$$O_r\phi(r) = \int O_r[G(r, r')f(r')]dr' = \int [O_rG(r, r')]f(r')dr'$$

ma  $O_rG(r, r') = \delta(r - r')$  per ipotesi, allora

$$O_r\phi(r) = \int \delta(r - r')f(r')dr' = f(r) \quad c.v.d.$$

Quindi, posso scrivere che  $\tilde{f}(x) = \int \delta(x - x')\tilde{f}(x')dx'$ ; quindi

$$(\nabla^2 + K^2)\tilde{\Phi}(x, \omega) = -4\pi \int \tilde{f}(x')\delta(x - x')dx' = \int (\nabla^2 + K^2)f(x')G(x - x')dx'$$

ed, in fine:

$$\tilde{\Phi}(x', \omega) - \tilde{f}(x', \omega)G(x - x') = 0$$

Se non ci sono superfici di discontinuità,  $G(x - x')$  è a simmetria sferica, quindi possiamo usare il Laplaciano in coordinate sferiche nella 9.90:

$$\nabla_r^2 G_K = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial G_K}{\partial r} \quad (9.91)$$

Svolgendo la derivata del prodotto:

$$\nabla_r^2 G_K = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (G_K r)$$

Quindi la 9.90 diventa ( $r=x-x'$ ):

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (G_K r) + K^2 (G_K r) = 0 \quad \forall r \neq 0 \quad (9.92)$$

che è un'equazione differenziale del II ordine in  $G_K r$ , la cui soluzione generica è:

$$G_K r = A e^{iKr} + B e^{-iKr}$$

ovvero:

$$G_K = A \frac{e^{iKr}}{r} + B \frac{e^{-iKr}}{r} = AG^+(r) + BG^-(r) \quad (9.93)$$

per  $x' \ll x'$ ,  $r \sim R$ . Per calcolare la normalizzazione, ricordiamo che:  $\nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(R)$  dunque, nel limite per  $K^2 = 0$  l'equazione 9.90 diventa l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 G(R) = -4\pi\delta(R)$$

quindi:

$$\lim_{R \rightarrow 0} G_K(R) = \frac{1}{R}$$

Per  $R \rightarrow 0$ , vista la 9.93  $G(R) = (A + B)(K^2 - 1)$  e per  $K = 0$  è  $A + B = 1$ . Calcolando anche la parte dipendente dal tempo, la  $G(R, t)$  soddisfa l'equazione:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^\pm(x, t, x', t') = -4\pi\delta(x - x')\delta(t - t') \quad (9.94)$$

quindi, essendo:

$$G^\pm(R, \tau) = A^\pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm iKR}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

essendo  $\tau = t - t'$ , la 9.94, dà  $\omega = cK$ , che sostituita nell'espressione di  $G^\pm$ , dà:

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(\tau \mp R/c)}}{R} d\omega = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$$

Prendendo in considerazione solo la  $G^+$ , a questo punto  $\Phi$ , sarà dato dalla somma della funzione  $\Phi_0$  soluzione dell'equazione omogenea e di quella della disomogenea con  $G^+$  quando  $\tau, R \neq 0$ , con la condizione  $\tau = R/c$ .

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \Phi_0(x, t) + \iint G^+(x, t, x', t') f(x', t') dx' dt' = \\ &= \int \left( \frac{f(x', t')}{|x - x'|} \right)_{t'=t-|x-x'|/c} dx' = \\ &= \int \frac{[f(x', t')]_{ret}}{|x - x'|} dx' \quad (9.95) \end{aligned}$$

dove, nella seconda linea abbiamo trascurato la soluzione dell'omogenea. A rigore andrebbe considerata anche la soluzione anticipata, ma si trascura perché viola la causalità.

\*\*\*\*\*

### 9.3.4 Vettore e teorema di Poynting

Il campo elettromagnetico trasporta un campo elettrico ed un campo magnetico ortogonali fra loro. La forza che agisce su una carica  $e$  in moto con una velocità  $v$  che viene investita dall'onda è:

$$F = eE + ev \times \mathbf{B}$$

che, per una distribuzione di correnti diventa:

$$F = \int \rho(x)E + J(x) \times \mathbf{B} d^3x \quad (9.96)$$

Ricaviamo  $\rho$  dalla prima equazione di Maxwell e  $J$  dalla IV:

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases} \quad (9.97)$$

quindi

$$\rho = \epsilon \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

e

$$J = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

. Sostituendo nella 9.96 diventa:

$$F = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \int \left[ \epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \mathbf{B} \right] d^3x \quad (9.98)$$

dove  $P$  è l'impulso meccanico e si è cambiato segno al triplo prodotto vettoriale portando  $B$  alla sinistra.

Se vogliamo calcolare quale sia il lavoro prodotto dal campo per uno spostamento  $dx = \mathbf{v} dt$ , il secondo termine della 9.96 non contribuisce perché il prodotto  $J(x) \times \mathbf{B}$  è ortogonale a  $\mathbf{v}$ . Quindi rimane:

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int \mathbf{E} \cdot \left[ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] dV$$

Ma  $E \cdot (\nabla \times B)$  lo possiamo ricavare dalla regola del prodotto:

$$\nabla \cdot (E \times B) = B \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times B)$$

sicché, tenuto conto che  $\nabla \cdot E = -\dot{B}$ :

$$W = - \int \epsilon_0 \nabla \cdot (E \times B) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} (|E|^2 + |B|^2) dV$$

Se il mezzo è lineare, allora  $\epsilon E = D$  e  $\mu B = H$ , quindi:

$$W = -\frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV - \int \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \quad (9.99)$$

Il primo termine è la variazione dell'energia  $U$ , il secondo è il flusso del **vettore di Poynting**  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , attraverso la frontiera del volume.

Tornando alla 9.98, per il prodotto triplo, procediamo per coordinate:

$$\begin{aligned} [B \times (\nabla \times B)]_i &= \epsilon_{ijk} B_j (\nabla \times B)_k = \\ &= B_j (\nabla \times B)_k - B_k (\nabla \times B)_j = \\ &= B_j (\partial_i B_j - \partial_j B_i) - B_k (\partial_k B_i - \partial_i B_k) = \\ &= (B_j \partial_i B_j + B_k \partial_i B_k) - (B_j \partial_j B_i + B_k \partial_k B_i) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i |B|^2) - (B_j \partial_j + B_k \partial_k) B_i = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla |B|^2) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

o analogamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} B_j (\nabla \times B)_k &= \epsilon_{ijk} B_j (\epsilon_{klm} \partial_l B_m) = \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} (B_j \partial_l B_m) = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (B_j \partial_l B_m) = \\ &= B_m \partial_i B_m - (B_j \partial_j) B_i = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla |B|^2)_i - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_i \end{aligned}$$

quindi:

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla |B|^2 - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (9.100)$$

L'ultimo termine è:

$$\frac{\partial E}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} - (\mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{E})$$

avendo utilizzato la II equazione di Maxwell per la derivata di  $\mathbf{B}$ . Dunque:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{P} + \epsilon(\mathbf{E} \times \mathbf{B})] = \int \epsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{E}) - c^2(\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}))] dV \quad (9.101)$$

dove si è aggiunto un termine  $\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$  per simmetrizzare. Il primo membro, rappresenta la somma della variazione della quantità di moto meccanica e la forza esercitata del campo elettromagnetico. Al secondo membro troviamo una quantità che possiamo scrivere come la divergenza di un tensore con l'aiuto della 9.100:

$$\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla|E|^2$$

Il primo termine, lo possiamo scrivere, per componenti:

$$E_i \partial_j E_j + E_j \partial_i E_j \equiv \partial_i (E_i E_j)$$

in totale il secondo membro della 9.101 è:

$$\nabla_j (T_{ij}) = \nabla_j \epsilon \left[ E_i E_j - c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (|E|^2 + c^2 |B|^2) \right] \quad (9.102)$$

che definisce il tensore di (energia-impulso) Maxwell  $T_{ij}$ .

La forza dunque è:

$$\int \nabla_j T_{ij} n_i dV = \int T_{ij} n_j dS$$

cioè il flusso del tensore di Maxwell.

### 9.3.5 Radiazione di dipolo

Consideriamo un sistema di cariche (fig.9.15), in moto relativo, osservate da un punto esterno al sistema posto ad una distanza  $\mathbf{R}_0$  molto maggiore della dimensione caratteristica del sistema  $\mathbf{r}$ . La distanza  $\mathbf{R}$  di una carica generica, sarà:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r} \simeq \mathbf{R}_0$ , il potenziale vettore sarà:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{ret}(t)}{|\mathbf{R}|} dV \simeq \frac{\mu}{4\pi \mathbf{R}_0} \int \mathbf{J}_{ret}(t) dV \quad (9.103)$$

dove il  $\mathbf{J}_{ret}$  è la densità ritardata di corrente:  $\mathbf{J}(t - \frac{R}{c})$ . Visto che  $|\mathbf{R}_0| \gg |\mathbf{r}|$ , allora:  $R = \sqrt{R_0^2 + r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} \sim R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ , essendo  $\mathbf{n}$  il versore lungo la direzione di propagazione, quindi:  $\mathbf{J}(t - \frac{R}{c}) = \mathbf{J}(t - \frac{R_0}{c} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c})$ . Le ipotesi in cui ci poniamo, sono che, se  $t$  è il tempo caratteristico in cui la distribuzione di cariche cambia significativamente, allora, il tempo  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}$  è all'incirca uguale al tempo che la luce impiega per attraversare l'intero sistema. Affinché in questo tempo la distribuzione di cariche non cambi, deve essere:  $t \gg r/c$ . Ma  $ct = \lambda$ , cioè la lunghezza d'onda della radiazione emessa, dunque:  $\lambda \gg r$ , ovvero le dimensioni del sistema devono essere molto inferiori della lunghezza d'onda emessa. in altri termini,  $c \gg r/t = v$ , la velocità delle cariche deve essere non relativistica.

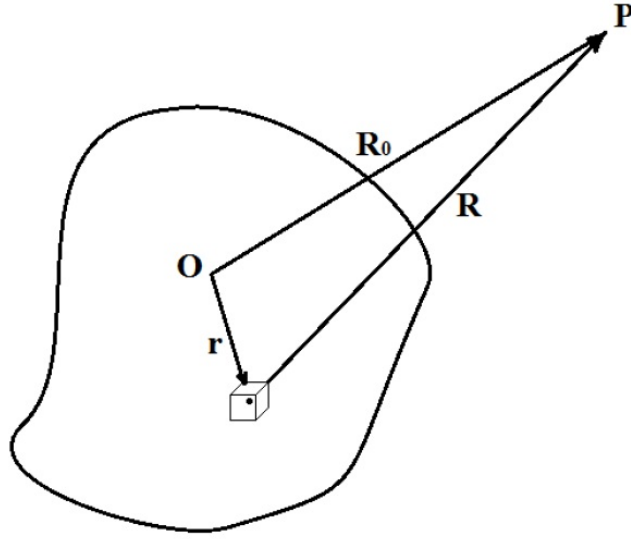


Figura 9.15: Sistema di cariche visto da un punto P a distanza  $R_0$  molto maggiore delle sue dimensioni  $r$

In un sistema di  $N$  cariche discrete:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi R_0} \sum_{i=1}^N q \mathbf{v}_i = \frac{\mu}{4\pi R_0} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N q \mathbf{r}_i = \frac{\mu}{4\pi R_0} \dot{\mathbf{d}}$$

dove  $\mathbf{d}$  è il dipolo elettrico totale.

Possiamo trovare dalle equazioni i campi emessi, tenendo conto che per il potenziale ritardato  $t' = t - R/c$ , quindi  $\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial R} = -\partial_{t'}/c$ :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi R_0} \ddot{\mathbf{d}} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{n}}{c} \times \dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi c} \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{R_0} \end{cases} \quad (9.104)$$

$B = -\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}/c = \mathbf{n}/c \times \mathbf{E}$ , quindi è anche:  $\mathbf{E} = \frac{\mu}{4\pi R_0} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$  (cfr Landau - Campi 67.6)

Comunque il campo emesso è proporzionale all'accelerazione delle cariche Il vettore di Poynting per un'onda piana è:

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \\ &= \frac{\mu}{16\pi^2 R_0^2 c} [(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \times (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) = \\ &= \frac{\mu}{16\pi^2 R_0^2 c} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \end{aligned}$$

avendo utilizzato lo sviluppo del triplo prodotto vettoriale con  $A = C = \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$  e  $B = \mathbf{n}$ ; l'intensità è il flusso del vettore di poynting attraverso la superficie sferica

che circonda il sistema:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, df = \frac{\mu}{16\pi^2 c R_0^2} \int (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 R^2 d\Omega = \\
 &= \frac{\mu}{16\pi^2 c R_0^2} \int (\ddot{d}^2 \sin^2(\theta)) R^2 \sin(\theta) d\theta \int_0^\pi d\phi = \\
 &= \frac{\mu}{16\pi^2 c} \pi \int \ddot{d}^2 \sin^3(\theta) d\theta = \\
 &= \frac{\mu}{16\pi c} \ddot{d}^2 \int_0^{2\pi} [1 - \cos^2(\theta)] d \cos(\theta) \quad (9.105)
 \end{aligned}$$

L'ultimo integrale vale:

$$2 \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = 2(x - x^3/3)|_{-1}^1 = 4/3$$

quindi l'intensità della radiazione emessa è:

$$I = \frac{\mu}{12\pi c} \ddot{d}^2$$

Se consideriamo una  $d = d_0 e^{i\omega t}$ , è:

$$I(\omega) = \frac{\mu d_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

### 9.3.6 Soluzione delle equazioni della propagazione dei campi

Vediamo come si arriva alla propagazione dei campi nel caso generico. Per  $\mathbf{B}$ , partiamo del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (9.106)$$

prendendo il rotore della I e sostituendo la III,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} \\
 &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

Il primo addendo dell'ultimo membro è nullo, e, sostituendo  $-\dot{\mathbf{B}}$  al rotore di  $\mathbf{E}$ , si ottiene

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.107)$$

Per il campo elettrico, partiamo da:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon \end{cases} \quad (9.108)$$

e facciamo il rotore della II,

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\left[ \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right] \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

Il primo termine dell'ultimo membro è  $\nabla \rho / \epsilon$ , e  $\mu \mathbf{J} = \mu \sigma \dot{\mathbf{E}}$ , quindi, riorganizzando i termini:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \rho} \quad (9.109)$$

Nel caso il mezzo in cui si propaga sia un conduttore,  $\sigma \neq 0$  e  $\nabla \rho = 0$ . Per mezzi isolanti, l'inverso.

Consideriamo il campo  $E = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot x)}$ , e  $\rho = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ , la 9.109 diventa

$$-k^2 + \omega^2/c^2 + \frac{i\sigma\omega}{\epsilon c^2} = -\frac{ik}{\epsilon} \rho_0/E_0$$

Per un conduttore, diventa una relazione di dispersione:

$$k^2 = \omega^2/c^2 + \frac{i\sigma\omega}{\epsilon c^2} \quad (9.110)$$

in cui, se  $k = \alpha + i\beta$ ,  $\Rightarrow k^2 = (\alpha + i\beta)(\alpha + i\beta) = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \neq |k|^2$ .

Dunque anche  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$  è una variabile complessa e:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \epsilon\mu\omega^2 \\ 2\alpha\beta = \frac{\sigma\omega}{\epsilon c^2} = \mu\sigma\omega \end{cases}$$

quindi:  $\alpha^2 = \omega^2\mu\epsilon + \beta^2$ , sostituendo in  $\alpha^2\beta^2 = (\mu\sigma\omega/2)^2$ ,

$$\beta^2(\mu\epsilon\omega^2 + \beta^2) = \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2}\right)^2$$

che è un'equazione di II grado in  $\beta^2$ , dunque:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= -\frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega^2\mu\epsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2} = \\ &= \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \pm \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\end{aligned}$$

ed in fine, scartando le soluzioni negative:

$$[\alpha, \beta] = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \pm 1 \right]^{1/2}$$

La parte immaginaria,  $\beta$ , risulta in un'attenuazione esponenziale dell'onda, che porta a definire una skin depth  $\delta \propto 1/\beta$ ,

Nel caso di un materiale conduttore,  $\sigma \gg \epsilon\omega$ , quindi

$$\beta \simeq \omega(\epsilon\mu/2)^{1/2}(\sigma/\epsilon\omega)^{1/2} = (\sigma\omega/2)^{1/2}(\mu/\epsilon)^{1/2}$$

quindi la skin depth è  $\delta = \sqrt{2/(\sigma\omega Z^2)}$ , dove  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$  è l'impedenza del mezzo. Sicché il campo penetra meno per alte frequenze e buone conducibilità.

Se  $E = (E(z, t), 0, 0)$ ,  $E(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

diventa:

$$\dot{B}_y = i\omega B_y e^{i(\omega t - kz)} = ikE_0 e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\beta z} \quad (9.111)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & 0 \end{pmatrix} = -ikB_y \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} i\omega E_x$$

da cui  $k|B|/(\omega/c^2)|E| \Rightarrow |B| = ck/kc^2|E|$ , quindi  $|B| = |E|/c$ , nel caso di mezzi non dispersivi per cui  $\omega = ck$ , nel caso generico,

$$\frac{|k|}{\omega} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega} = \left[ \epsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \right]^{1/2} = \frac{B_0}{E_0}$$

Per  $\sigma \gg \epsilon\omega \Rightarrow B/E = \sqrt{\mu\sigma/\omega}$  cioè il campo magnetico prevale sul campo elettrico quando  $\omega < \mu\sigma$ . Inoltre, se  $k = Ke^{i\phi}$ , la 9.111 ci dice che  $B_y = Ke^{i\phi}/\omega E_x$ , ovvero, che il campo elettrico e quello magnetico sono sfasati e la fase è  $\phi = \arctan \sqrt{\beta/\alpha}$ . Dunque:

$$\frac{B}{E} = \left[ \frac{1}{v^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \right]^{1/2} e^{i\phi} \Rightarrow \frac{H}{E} = \frac{e^{i\phi}}{v\mu} \left[ 1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \right]^{1/4}$$

dove  $v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z$ . Nel caso di un dielettrico, quindi,

$$\frac{H}{E} = \frac{1}{Z}$$

essendo  $\phi = 0$  perché  $\beta \rightarrow 0$ . Da notare che anche il vuoto ha un'impedenza caratteristica  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = [4\pi \cdot 10^{-7}/8.85 \cdot 10^{-12}]^{1/2} = 377\Omega$

Per un conduttore:  $\sigma/\epsilon\omega \gg 1$ , quindi  $\beta/\alpha \rightarrow 1$  e  $\phi = \pi/4$ ,

$$\frac{H}{E} = \frac{e^{i\pi/4}}{Z} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon\omega}} = \frac{e^{i\pi/4}}{Z\sqrt{2\epsilon}} \delta\sigma$$

### 9.3.7 Propagazione delle onde EM attraverso la superficie di separazione fra due mezzi

Consideriamo un'onda elettromagnetica che si propaga nel piano XZ ed in 0 incide sulla superficie di separazione fra mezzi differenti, che giace nel piano

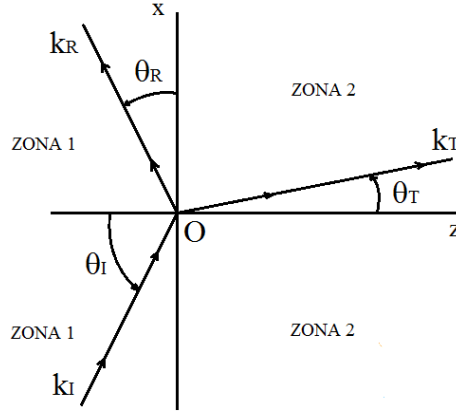


Figura 9.16: Coordinate ed angoli per la propagazione attraverso la separazione fra due mezzi: l'indice i sta per "incidente", r per "riflesso" e t per "trasmesso"

XY. L'onda è polarizzata nel piano XY. Se con l'indice I identifichiamo le quantità relative all'onda incidente, R quelle dell'onda riflessa e T quella trasmessa, avremo per I e T:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(\mathbf{r}, t) = E_{0I} s^{i(\omega t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{B}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = E_{0T} s^{i(\omega t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{B}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} \hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T \end{cases} \quad (9.112)$$

dove le velocità di propagazione  $v_{1,2} = (\epsilon\mu)^{-1/2}$  sono diverse nei due mezzi. L'equazione delle onde, applicata a questi campi, dà le relazioni di dispersione:  $\omega = v_x k$ , quindi  $k_I = k_R = \frac{\omega}{v_1}$  e  $k_T = \frac{\omega}{v_2}$ . Nel punto in cui incide,  $\omega$  è la stessa per le tre onde, quindi:  $v_1 k_I = v_1 k_R = v_2 k_T$ , per cui  $k_T = k_I v_1 / v_2$ . Nel medesimo punto dovrà essere:

$$E_{0I} s^{i(\omega t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r})} + E_{0R} s^{i(\omega t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r})} = E_{0T} s^{i(\omega t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r})}$$

La dipendenza dalle coordinate è confinata negli esponenti, quindi dovrà essere:

$$\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}$$

a  $z=0$ , questo equivale a:

$$k_I^x x + k_I^y y = k_R^x x + k_R^y y = k_T^x x + k_T^y y$$

E ciò può avvenire solo se le tre componenti x e le tre componenti y di  $\mathbf{k}$  sono uguali fra loro separatamente, per  $x=0$  e  $y=0$ , se come in figura ??,  $k_{It}$  è nel piano zx, allora anche  $k_R$  e  $k_T$  saranno nello stesso piano, inoltre, siccome  $k_*^x = k_* \sin \theta_*$  è:

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T \quad (9.113)$$

che, tenuto conto che  $k_I = k_R = \frac{\omega}{v_1}$  e  $k_T = \frac{\omega}{v_2}$ , ci porta a scrivere:

$$\sin \theta_I = \sin \theta_R = \frac{v_1}{v_2} \sin \theta_T \quad (9.114)$$

La prima uguaglianza esprime la legge della riflessione, ovvero che sono uguali gli angoli di incidenza e riflessione, la seconda può essere scritta come:

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2} \quad (9.115)$$

dove  $n_i = (\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$  sono gli indici di rifrazione nei due mezzi.

Applicando la continuità dei campi sulla superficie di separazione possiamo ricavare i coefficienti di riflessione e trasmissione. Ricordiamo che in tale caso il campo elettrico parallelo alla superficie di separazione si conserva.

### 9.3.8 Teorema di Poynting nei mezzi dispersivi

Se vogliamo calcolare di quanto cambia l'energia di un corpo in presenza di un campo elettromagnetico, nell'unità di tempo e di volume, questa è data dalla 9.99 nel caso in cui il sistema sia in equilibrio con la radiazione incidente, allora :

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (9.116)$$

In un mezzo non dispersivo, il secondo membro è la derivata di

$$U = 1/2(\epsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{B}|^2)$$

che è la differenza di energia interna con e senza campo. Se il mezzo è dispersivo, non si può più dare questa interpretazione perché parte dell'energia viene dissipata. Per stimare la , quantità di energia dissipata, prendiamo campi oscillanti, come:  $E = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot x)}$  e analogamente con  $B$ . La media su diversi periodi, della 9.116 è il flusso di energia che arriva sul sistema che mantiene l'equilibrio con il campo e compensa la dissipazione, ovvero la quantità di calore  $Q$  per unità di tempo e di volume. Siccome la 9.116 è quadratica nei campi, dobbiamo rendere tutte le quantità reali, quindi, ad  $E$  va sostituita  $1/2(E^* + E)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &\rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \\ &= [-i\omega\epsilon^* E^* + i\omega\epsilon E] \end{aligned}$$

e analogamente  $B$  e  $H$ ... Quando si fanno i prodotti  $(E + E^*)(\dot{D} + \dot{D}^*)$ , le componenti  $E\dot{D}$  e  $E^*\dot{D}^*$  conterranno un fattore  $e^{\pm 2i\omega t}$  che è a media nulla su un numero intero, o grande, di periodi. Quindi, rimangono solo i termini misti. Se scriviamo  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$  e  $\mu = \mu' + i\mu''$ , allora, possiamo scrivere

$$Q = \frac{1}{T} \frac{i\omega}{4} \int (\epsilon^* - \epsilon) E^* \cdot E + (\mu^* - \mu) H^* \cdot H dt$$

che, integrato su un periodo, e con  $\epsilon^* - \epsilon = 2i\epsilon''$ , dà:

$$Q = \frac{\omega}{2} (\epsilon''(\omega)\langle E^2 \rangle + \mu''(\omega)\langle H^2 \rangle)$$

Come si vede, la dissipazione dipende dalla parte immaginaria delle  $\epsilon$  e  $\mu$ . In questa espressione si è implicitamente fatta l'ipotesi che l'onda sia monocromatica, e quindi che  $\epsilon$  e  $\mu$  non cambino. Se consideriamo una radiazione la cui

intensità varii nel tempo lentamente, possiamo scriverla come una funzione in cui la frequenza è modulata attorno ad un valor medio  $\omega_0$

$$E = (E_{0\alpha} e^{i\alpha t}) e^{i\omega_0 t} = E_0 e^{i\omega t} \quad \alpha \ll \omega_0$$

e possiamo sviluppare  $D$  e la sua derivata in serie di Taylor

$$\begin{aligned} E &= E_{0\alpha} (1 + i\alpha) e^{(\omega+\alpha)t} = E_0 (1 + i\alpha) e^{i\omega t} \\ D &= \epsilon E = \epsilon(\omega) E_{0\alpha} e^{i\omega t} \\ \dot{D} &= \frac{d}{dt} (\epsilon E_{0\alpha} e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Seguendo [Landau - Elettrodinamica di mezzi continui §80], definiamo un operatore  $\hat{f}$ , tale che  $\partial_t(\epsilon \mathbf{E}) = \hat{f} \mathbf{E}$ . Se  $E_0$  è costante  $\hat{f} E = \partial_t(\epsilon E_0 e^{i\omega t}) = i\omega \epsilon E_0 e^{i\omega t} = f(\omega) E$ , avendo definito  $f(\omega) = i\omega \epsilon$ . Quando sviluppiamo  $E$  come sopra, siccome  $\alpha \ll \omega_0$ , allora:

$$\hat{f}(E_{0\alpha} e^{i(\omega+\alpha)t}) = f(\omega + \alpha) E_{0\alpha} e^{i(\omega+\alpha)t} \simeq \left[ f(\omega_0) + \alpha \frac{df(\omega)}{d\omega} \right] E_{0\alpha} e^{i(\omega+\alpha)t}$$

considerato che  $\alpha E_{0\alpha} e^{i\alpha t} = -i \frac{dE_0}{dt}$  e

$$\begin{aligned} \frac{df(\omega)}{d\omega} E &= \frac{d}{d\omega} \partial_t \epsilon E_0 e^{i\omega t} = \frac{d}{d\omega} i\omega \epsilon \frac{dE_0}{dt} e^{i\omega t} \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \hat{f} E_0 e^{i\omega t} = i\omega \epsilon E + \frac{d(\omega \epsilon)}{d\omega} \frac{dE_0}{dt} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Sostituendo nella 9.116 e, trascurando la parte immaginaria, che comunque andrebbe a 0 nella media:

$$\mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{d(\omega \epsilon)}{d\omega} \frac{dE^* \cdot E}{dt} \right)$$

e quindi

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \left( \frac{d(\omega \epsilon)}{d\omega} |E|^2 + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} |H|^2 \right)$$

Se non c'è dispersione,  $\epsilon$  e  $\mu$  non dipendono da  $\omega$  e le derivate li restituiscono intonsi, Se si interrompe il flusso di energia, la potenza non si annulla immediatamente e continua finché non converte tutta  $\bar{U}$  in calore.

Siccome la variazione di entropia è positiva,  $\delta Q/T > 0$ , che implica  $\bar{U} > 0$ , allora anche le derivate di  $\omega \mu$  e  $\omega \epsilon$  sono positive.

In modo sostanzialmente analogo si può ricavare il tensore degli sforzi elettromagnetici, nel caso di mezzi dispersivi (cfr. Landau - teoria dei campi §81).

## Capitolo 10

# Relatività Ristretta

La velocità della luce nel vuoto è determinata dalle equazioni di Maxwell, e, qualunque sia il sistema di riferimento, vale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Secondo il principio di relatività, è impossibile con esperimenti fisici evidenziare differenze tra sistemi di riferimento inerziali. Dunque, se la velocità della luce fosse diversa in un sistema in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro, allora cadrebbe tale principio. Si deduce che, non cambiando  $c$ , devono cambiare le coordinate.

Nel 1905 Albert Einstein stabilì due postulati.

- 1) Tutti i fenomeni fisici identici si manifestano allo stesso modo nei sistemi di riferimento inerziali, a parità di condizioni.
- 2) La velocità della luce nel vuoto è uguale in tutte le direzioni ed in ogni regione di un dato sistema di riferimento, ed è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

### 10.1 Sincronizzazione degli orologi

Per poter definire un “evento” in un sistema di riferimento è necessario avere a disposizione un orologio in quiete nel sistema di riferimento inerziale nel punto in cui accade. Se ci sono due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo, ciascuna avrà i propri orologi in ciascun punto.

Come sincronizzare gli orologi in punti diversi dello stesso sistema di riferimento inerziale? I passi sono i seguenti.

- 1) Le coordinate degli orologi sono note.
- 2) Ad un istante  $t_1$ , un segnale luminoso parte dall’orologio di riferimento verso quello da sincronizzare ed arriva al tempo  $t = t_1 + \frac{L}{c}$  (vedi figura 10.1).
- 3) Si mette il conteggio dell’orologio al tempo  $t$ .

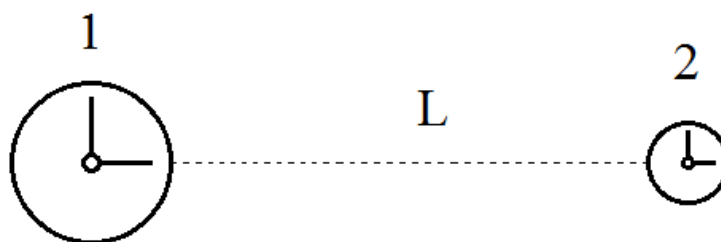


Figura 10.1: Sincronizzazione di due orologi

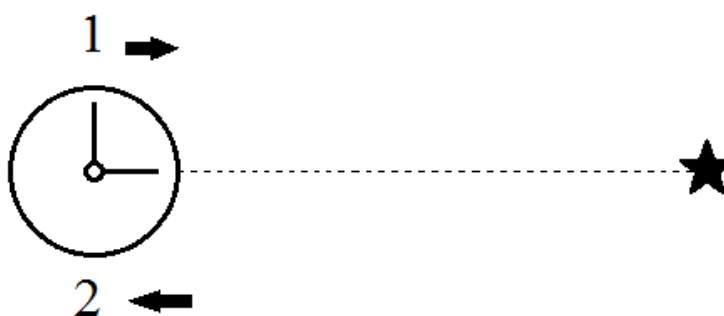


Figura 10.2: Sincronizzazione alternativa di due orologi.

Alternativamente è possibile riflettere il segnale dal punto verso il riferimento, dove tornerà al tempo  $t_2$ , come si vede in figura 10.2.

Quindi il tempo impiegato sarà  $2\Delta t = t_2 - t_1$  e il tempo segnato dall'orologio vicino allo specchio

$$t = t_2 - \Delta t = \frac{t_2 + t_1}{2}$$

## 10.2 Sistemi di riferimento in moto relativo

Confrontiamo due rigelli disposti perpendicolarmente alla direzione del moto. Chiamiamo  $K$  e  $K'$  rispettivamente un sistema di riferimento inerziale in moto ed uno fisso, ipotizzando che il vettore velocità relativa tra i due sistemi sia diretto lungo l'unica direzione comune  $x \equiv x'$ , come si evince dalla figura 10.3.

Quando gli assi  $y$  e  $y'$  coincidono, viene emesso un segnale luminoso da  $B'$  e  $C'$  verso  $A'$ . Nel sistema di riferimento fisso  $K'$ , i due segnali arrivano in  $A'$  contemporaneamente, per cui in tale riferimento i punti  $B'$  e  $C'$  attraversano l'asse  $y'$  contemporaneamente. Lo stesso accade per i punti  $B$  e  $C$  lungo l'asse  $y$ . Se, quindi, si trovasse che  $B'C' \neq BC$  in un istante  $t$ , allora sarebbe possibile trovare differenze tra i due sistemi di riferimento. Ciò porta a concludere che le lunghezze non cambiano in direzione ortogonale al moto.

Nella stessa configurazione, confrontiamo i ritmi tra i due orologi dei due sistemi, servendoci della figura 10.4.

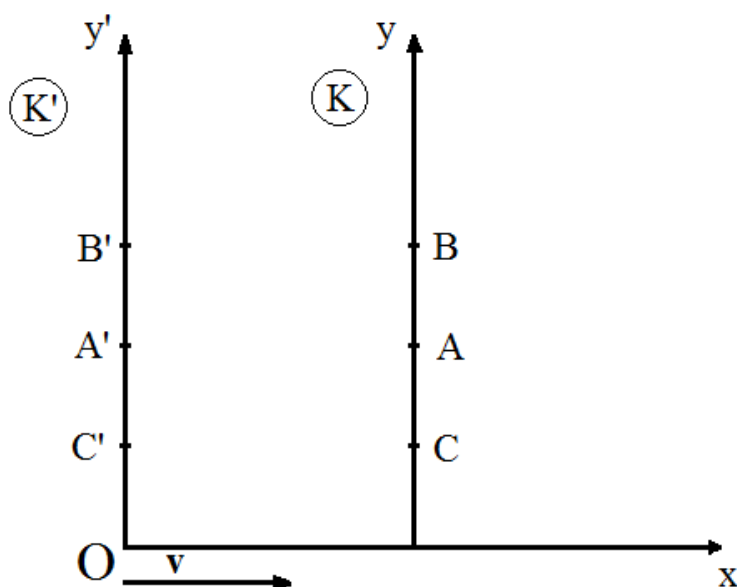


Figura 10.3: Confronto delle lunghezze in direzione parallela al moto relativo.

Ad un certo istante, viene mandato un segnale luminoso da  $O$  verso uno specchio distante  $z'_0$ . Tale segnale ritornerà all'origine dopo un tempo pari a

$$\Delta t' = \frac{2z'_0}{c}$$

Ciò accade in quanto sorgente e specchio sono in quiete nel riferimento  $K'$

Cosa succede, invece, nel sistema in moto  $K$ ? Il segnale in  $K$  viene ricevuto nel punto  $x_2$  in seguito alla riflessione avvenuta in corrispondenza dell'ascissa  $x_1$ . In particolare, si ha

$$\overline{Ox_2} = v\Delta t \Rightarrow \overline{Ox_1} = \frac{v\Delta t}{2}$$

Inoltre, per il postulato della relatività, si ha

$$\overline{Oz_0} = \frac{c\Delta t}{2}$$

Poiché, inoltre, si forma un triangolo rettangolo nella medesima figura 4, scriviamo

$$\overline{Oz_0}^2 = z_0^2 + \overline{Ox_1}^2 = z_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

Sostituendo nella relazione precedente, si ottiene

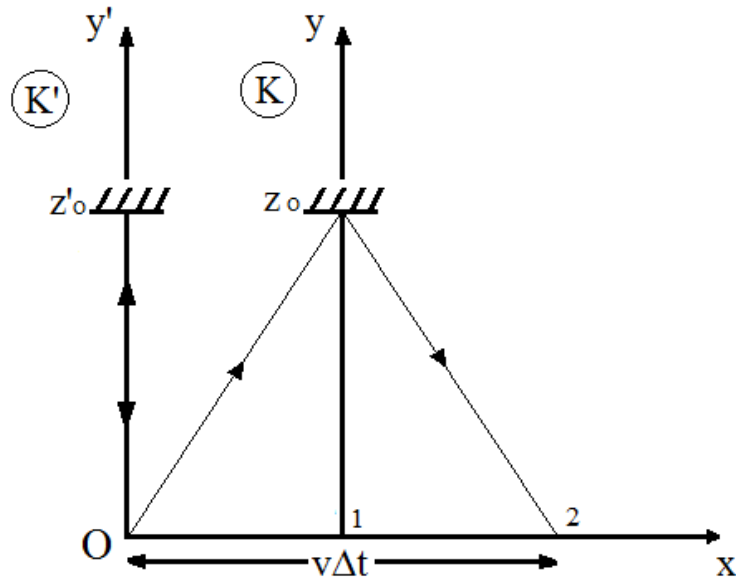


Figura 10.4: Confronto dei tempi in direzione parallela al moto relativo

$$z_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow z_0^2 = \frac{(\Delta t)^2}{4}(c^2 - v^2) \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{2z_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\frac{2z_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t' \quad (10.1)$$

È stato definito, quindi, il fattore per la dilatazione temporale  $\gamma$  come

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1 \quad (10.2)$$

Come ultima situazione, consideriamo due righelli posti parallelamente alla direzione del moto. Anche in questo caso usiamo uno specchio ad un'estremità del righello ed una sorgente dall'altra estremità. Nel sistema di riferimento  $K'$  in quiete, come si vede in 10.5, si pone, lungo la direzione del moto, uno specchio che riflette il segnale inviato dall'origine  $O'$ .

Detta  $L_0$  la distanza tra la sorgente del segnale e lo specchio, il segnale ritorna all'origine dopo un tempo

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$

Nel sistema di riferimento in moto  $K$ , invece, gli stessi eventi risultano differenti. In particolare, come si nota nella 10.6, chiamiamo I ed S rispettivamente le estremità inferiore e superiore del righello con specchio posizionato in S.

- All'istante di emissione, I è nell'origine ed S in  $S_1$ .

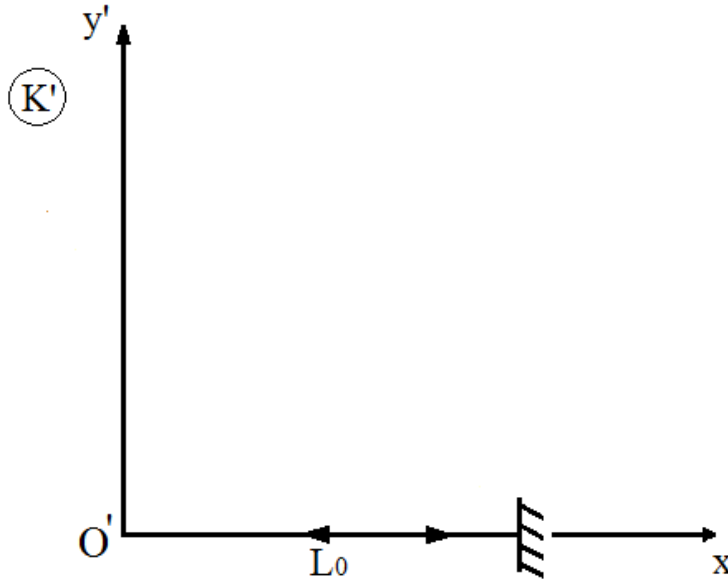


Figura 10.5: Il sistema di riferimento in quiete

- All'istante della riflessione, I si è spostato in  $I_1$  ed S in  $S_2$ .
- All'istante di ricezione, I si è spostato in  $I_2$ .

Si noti che l'emissione e la ricezione sono registrati in punti diversi nel sistema K.

Nel propagarsi verso destra, la luce rincorre lo specchio con velocità relativa  $c - v$ , mentre verso sinistra si allontana con velocità relativa  $c + v$ . Indicando con  $L$  la lunghezza incognita del righello in K, allora il tempo che impiega la luce nel tratto da I verso  $S_1$  vale

$$t_1 = \frac{L}{c - v}$$

Viceversa, il tempo che impiega la luce nel tratto da  $S_2$  verso  $I_1$  vale

$$t_2 = \frac{L}{c + v}$$

Il tempo complessivo, dunque, è la somma dei due tempi:

$$\Delta t = t_1 + t_2 = L \left( \frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{2L}{c} \gamma^2$$

Ricordando che  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ , dal confronto si ha

$$\begin{aligned} \gamma \Delta t_0 = \frac{2L}{c} \gamma^2 &\Rightarrow \gamma \frac{2L_0}{c} = \frac{2L}{c} \gamma^2 \Rightarrow \\ &L = \frac{L_0}{\gamma} \end{aligned} \quad (10.3)$$

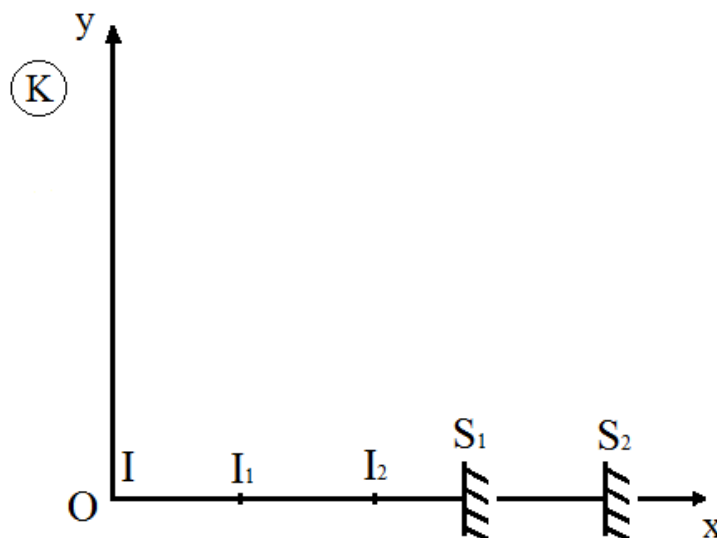


Figura 10.6: Il sistema in moto con le posizioni del righello.

### 10.3 Trasformazioni di Lorentz come conseguenza dei postulati di Einstein

Deriviamo le equazioni che definiscono le coordinate nel sistema  $K'$  partendo da quelle nel sistema  $K$  in modo che esse siano conformi ai postulati. In tale ottica, vanno fatte alcune osservazioni.

- 1) Spazio e tempo devono crescere uniformemente in tutti i sistemi di riferimento inerziali, per cui le equazioni di trasformazione devono essere lineari.
- 2) L'isotropia dello spazio impone che  $y = y'$  e  $z = z'$ .

Detto ciò, le equazioni della trasformazione di  $x$  e  $t$  sono del tipo

$$\begin{cases} x' = A_{11}x + A_{12}t + A_{10} \\ x = A_{21}x' + A_{22}t' + A_{20} \end{cases}$$

Ponendo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ e } t = 0 &\Rightarrow x' = 0 \\ x' = 0 \text{ e } t' = 0 &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Si ottiene

$$A_{10} = A_{20} = 0$$

Inoltre, all'istante  $t$ , la coordinata  $x$  dell'origine di  $K'$  è pari a  $vt$ , per cui la prima equazione si scrive:

$$x' = 0 = A_{11}vt + A_{12}t \Rightarrow \frac{A_{12}}{A_{11}} = -v$$

Analogamente la seconda equazione si scrive

$$x = 0 = -A_{21}vt' + A_{22}t' \Rightarrow \frac{A_{22}}{A_{21}} = v$$

Sostituendo nel sistema iniziale, si ha

$$\begin{cases} x' = A_{11}(x - vt) \\ x = A_{21}(x' + vt') \end{cases}$$

È necessario determinare i due coefficienti adimensionali  $A_{11}$  e  $A_{21}$ , che, per l'uniformità del tempo e l'isotropia dello spazio, dipenderanno solo dalla velocità  $v$ .

A tal proposito, è facile verificare che tali due coefficienti sono uguali. Infatti, se in  $K$  un righello ha lunghezza  $L_0$ , i suoi estremi avranno coordinate  $x_1 = 0$  e  $x_2 = L_0$ , per cui, dalla seconda equazione della trasformazione all'istante  $t' = 0$ , si ottiene

$$\begin{cases} x'_1 = 0 \\ x'_2 = \frac{L_0}{A_{21}} \end{cases} \Rightarrow L' = \frac{L_0}{A_{21}}$$

Viceversa, prendiamo lo stesso righello e poniamolo in quiete nel sistema  $K'$ . Le coordinate degli estremi saranno  $x'_1 = 0$  e  $x'_2 = L_0$ , per cui, dalla prima equazione della trasformazione all'istante  $t = 0$ , si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{L_0}{A_{11}} \end{cases} \Rightarrow L = \frac{L_0}{A_{11}}$$

Siccome i due sistemi sono equivalenti, la loro velocità relativa è la medesima, per cui, non dovendo cambiare le due lunghezze, risulta:

$$L = L' \Rightarrow A_{11} = A_{21}$$

Per trovare il valore esatto di tale costante comune alle due equazioni, sfruttiamo l'invarianza della velocità della luce  $c$ . All'istante  $t = 0$ , mandiamo un segnale dall'origine. L'evento consiste nella ricezione di tale segnale in un punto posizionato lungo l'asse  $x$ . Nel sistema di riferimento fermo  $K$ , tale coordinata vale

$$x = ct$$

Nel sistema  $K'$ , per l'invarianza appena citata, essa vale

$$x' = ct'$$

Sostituendo nel sistema delle trasformazioni, si ha

$$\begin{cases} x' = A_{11}(x - vt) \\ x = A_{11}(x' + vt') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = A_{11}(ct - vt) \\ ct = A_{11}(ct' + vt') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = A_{11}t(1 - \beta) \\ t = A_{11}t'(1 + \beta) \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro le ultime due equazioni, si ricava

$$t' t = A_{11}^2 t' t (1 - \beta^2) \Rightarrow A_{11}^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

In definitiva, le trasformazioni di Lorentz (Hendrik Lorentz) sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad (10.4)$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

## 10.4 Composizione delle velocità

Consideriamo le trasformazioni di Lorentz appena ricavate in forma differenziale:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx) \end{cases} \quad (10.5)$$

Facendo rapporto membro a membro, si ha

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx}$$

In tale caso,  $v'_x$  rappresenta la componente lungo x della velocità di una particella nel sistema di riferimento in moto  $K'$ , mentre  $v$  è la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento  $K$  e  $K'$ .

Dividendo numeratore e denominatore per l'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ , si ricava

$$v'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

In tale espressione,  $v_x$  rappresenta proprio la componente lungo x della velocità della medesima particella nel sistema di riferimento in quiete  $K$ . Si noti che per  $v \ll c$  si ottengono le trasformazioni di Galileo

$$v'_x = v_x - v$$

## 10.5 Intervalli

Un evento è descritto dalle coordinate del punto e dal tempo in cui è avvenuto. Consideriamo i due seguenti eventi nel sistema  $K$ . L'emissione di un segnale luminoso dal punto  $(x_1, y_1, z_1)$  al tempo  $t_1$ . La ricezione del segnale nel punto  $(x_2, y_2, z_2)$  al tempo  $t_2$ . Detta  $c$  la velocità di propagazione del segnale, allora il cammino percorso da quest'ultimo sarà pari a  $c(t_2 - t_1)$ . D'altra parte, tale

distanza percorsa è proprio pari alla distanza euclidea tra i due punti. Nel sistema K, dunque, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= c^2 (t_2 - t_1)^2 \\ c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

La stessa coppia di eventi può essere osservata nel sistema K'. Siccome la velocità della luce è la stessa nei due sistemi di riferimento, allora

$$c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0$$

In generale, dati due eventi, è possibile definire la quantità

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (10.6)$$

Tale quantità viene chiamata intervallo tra i due eventi. Segue dal principio di invarianza della velocità della luce che se un intervallo è nullo in un sistema di riferimento, esso è tale in tutti i sistemi di riferimento. Inoltre, scrivendo tale intervallo in termini infinitesimi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Come appena accennato, se  $ds=0$  in un sistema di riferimento inerziale, si ha  $ds'=0$  anche in un altro sistema. Essendo  $ds$  e  $ds'$  infinitesimi dello stesso ordine, allora, i due devono essere proporzionali:  $ds = a ds'$ . Il coefficiente deve essere adimensionale e, al massimo, può dipendere solo dal valore assoluto della velocità relativa dei due sistemi inerziali. L'isotropia dello spazio, consente di porre tale costante pari ad 1, per cui  $ds' = ds$ . Ciò dimostra che l'intervallo appena definito è un invariante. Per semplicità, scriviamo l'intervallo tra i due eventi 1 e 2 in maniera sintetica nel sistema K:  $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - L_{12}^2$ . Nel sistema K' tale intervallo è invariante, ovvero:  $s_{12}^{\prime 2} = c^2 t_{12}^{\prime 2} - L_{12}^{\prime 2}$

E' chiaro che, contrariamente alla distanza euclidea, il quadrato dell'intervallo può assumere anche valori negativi. A seconda del segno possiamo definire diversi tipi di intervallo:

- Nel caso in cui in un sistema K' per cui i due eventi abbiano luogo nello stesso punto, allora:  $L_{12}' = 0$ , quindi  $ds_{12}^{\prime 2} = c^2 t_{12}^{\prime 2} \geq 0$ . Quando è strettamente maggiore, l'intervallo si dice di tipo *tempo*, perché la componente temporale non si può annullare. Per questi eventi si può stabilire una relazione di causalità.
- Nel caso in cui nel sistema K' si possa annullare la parte temporale ma non quella spaziale, cioè per eventi che possono avvenire allo stesso tempo ma in luoghi diversi, si parla di intervalli di tipo *spazio*:  $ds_{12}^{\prime 2} = -L_{12}^{\prime 2} \leq 0$ .
- I casi in cui vale l'uguaglianza sono quelli in cui con una opportuna trasformazione, gli eventi, nel sistema K' possono avvenire nello stesso luogo e tempo. Ciò può avvenire solo se il sistema K' viaggia alla velocità della luce rispetto a K e l'intervallo si dice di tipo *luce*.

Nel sistema di coordinate  $(ct, \mathbf{x})$ , gli eventi di tipo luce identificano un cono con vertice nello zero, detto cono luce. All'interno del cono gli eventi sono di tipo tempo, perché lì,  $\mathbf{x}^2 > (ct)^2$ , fuori dal cono, sono di tipo spazio (al contrario se si prende il riferimento in cui  $ct$  è l'asse verticale).

## 10.6 Quadrivettori

L'insieme delle coordinate  $(ct, x, y, z)$  di un evento può essere considerato come la n-upla delle componenti di un raggio vettore quadridimensionale. Indichiamo con  $x^\mu$  le sue componenti in cui l'indice  $\mu$  assume i valori da 0 a 3:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

dove abbiamo chiamato  $x^0 = ct$ .

Il quadrato dell'intervallo è la somma  $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ . In generale, possiamo definire un vettore a 4 componenti (quadri-vettore)  $A^\mu$  le cui componenti si trasformano come le coordinate del 4-raggio vettore.

$$\begin{cases} A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A^2 = A'^2 \\ A^3 = A'^3 \end{cases} \quad (10.7)$$

Il modulo quadro del quadrivettore  $A^\mu$  è definito in analogia con l'intervallo:  $|A|^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$ .

Più formalmente, possiamo definire due tipi di quadrivettori a partire dalle trasformazioni di coordinate. Il quadrivettore controvariante  $A^\mu$ , quando effettuiamo il cambio di coordinate da un sistema  $K(x^\mu)$  a  $K'(x'^\mu)$ , può essere scritto come (si adotta la convenzione di Einstein, somma sugli indici ripetuti):

$$A'^\mu = A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (10.8)$$

in cui  $\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$  sono le trasformazioni di Lorentz delle coordinate da  $K$  a  $K'$ .

Possiamo vedere che, presa una grandezza scalare  $\phi$ , il suo quadri-gradiente  $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$  si trasforma come:  $\Lambda_\nu^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ , cioè come il duale di un vettore come 10.8, e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = A_\mu$$

che definisce il quadrivettore covariante. O meglio, un vettore covariante si trasforma come il quadrigradiente di uno scalare. Il prodotto  $A^\mu A_\mu$  si trasforma come

$$A'^\mu A'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu = \Lambda_\nu^\mu \Lambda_\mu^\nu A^\nu A_\nu$$

Le trasformazioni di coordinate sono l'una l'inverso dell'altra, quindi il prodotto è invariante di Lorentz, come l'intervallo.

Dunque abbiamo due tipi di quadrivettore – controvariante e covariante – il cui prodotto "scalare" è un invariante. Per analogia con il raggio vettore con cui costruiamo l'invariante intervallo, definiamo il modulo del quadrivettore questo prodotto:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (10.9)$$

$$\Rightarrow |A|^2 = A_\mu A^\mu = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2 \quad (10.10)$$

questo porta a dire che:  $A^0 = A_0$      $A^1 = -A_1$      $A^2 = -A_2$      $A^3 = -A_3$

La 10.9, ci porta a definire una "metrica dello spazio in cui sono definiti i quadrivettori  $\eta_{\mu\nu}$  – metrica di Minkowski– tale che si possa scrivere:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (10.11)$$

Si può facilmente verificare che:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

Le equazioni delle trasformazioni di Lorentz per un vettore controvariante, si possono scrivere in forma matriciale (per un boost lungo x):

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

Per i vettori covarianti cambia il segno dei  $\gamma\beta$ .

La componente  $A^0$  di un quadrivettore si chiama temporale, mentre le componenti  $A^1, A^2$  e  $A^3$  sono spaziali. Spesso, per indicare le componenti di un quadrivettore, si separa la componente temporale da quelle spaziali e, quindi, si utilizzano anche le seguenti notazioni

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) \quad (10.14)$$

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A}) \quad (10.15)$$

Infine, secondo tale notazione, il modulo quadro del quadrivettore si scrive

$$A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$$

### 10.6.1 Tensori

Abbiamo visto che il prodotto scalare di un quadrivettore con il suo duale è invariante; in generale il prodotto di due quadrivettori, sarà un oggetto a 16 componenti che si trasforma come il prodotto delle trasformazioni:

$$A'^{\mu\nu} \equiv V'^{\mu} V'^{\nu} = \Lambda_{\sigma}^{\mu} V^{\sigma} \Lambda_{\rho}^{\nu} V^{\rho} = \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} A^{\sigma\rho}$$

Queste grandezze, prendono il nome di tensori (in questo caso di rango 2). Possono esistere nelle forme:

- totalmente controvariante  $A^{\mu\nu}$ ;
- totalmente covariante  $A_{\mu\nu}$
- misto  $A_{\mu}^{\nu}$

La **traccia** del tensore è la somma degli elementi diagonali  $Tr(A) = A^\mu_\mu = \delta^\mu_\nu A^{\mu\nu}$  che, si vede facilmente, è invariante di Lorentz. La traccia del tensore identità è:  $Tr(\delta) = 4$ . Abbassando o alzando gli indici di  $\delta^\mu_\nu$  otteniamo il tensore metrico di Minkowski, anche esso invariante. La sua traccia è  $Tr(\eta) = 2$ , il suo determinante è  $det(\eta_{\mu\nu}) = -1$ , in qualsiasi sistema di riferimento. Nel seguito, indicheremo la metrica con la  $g^{\mu\nu}$  perché, quanto affermato vale per qualunque metrica in relatività, se non quando specificato.

L'ultimo tensore invariante è il tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , di rango 4. Tutte le componenti di tale tensore che presentano almeno due indici uguali sono nulle, mentre quelle non nulle sono uguali a  $\pm 1$  e cambiano di segno per permutazioni dispari tra due indici (es. 1234 = -2134 = -1324 = -1243 = -4123 = +1423...); in particolare,  $\epsilon^{0123} = 1$ . Il numero di componenti indipendenti è  $4! = 24$  e  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$ . Il tensore di Levi-Civita è uno pseudo-tensore perché le componenti cambiano segno se si cambia segno ad un numero dispari di coordinate.

Per un tensore antisimmetrico  $A^{\mu\nu}$ , si definisce uno pseudo-tensore duale  $A^{*\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\rho\sigma}$ , di modo che il prodotto  $A^{*\mu\nu} A_{\mu\nu}$  è uno pseudo-scalare.

### 10.6.2 Trasformazioni di Lorentz nello spazio 4-dimensionale

In forma matriciale, possiamo scrivere le 4 equazioni delle trasformazioni di Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Affinché la matrice di trasformazione  $\Lambda^\mu_\nu$  conservi il prodotto scalare, deve essere  $g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$ . Sostituendo nelle equazioni delle trasformazioni di Lorentz, si ha

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \Rightarrow (\Lambda^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$$

Dal confronto, si scrive l'equazione:

$$(\Lambda^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad (10.16)$$

Proviamo a verificarlo esplicitamente per un boost lungo x:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^T \quad (10.17)$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\tau\mu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} &= \\
\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta & -\gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.19)
\end{aligned}$$

che, visto che  $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ , dimostra la 10.16.

Visto che  $\det(g) = \det(\Lambda^T g \Lambda) = -1$  allora  $\det(\Lambda)^2 = 1$ , ergo,  $\det \Lambda = \pm 1$ . La trasformazione di Lorentz è detta propria nel caso positivo.

## 10.7 Operatori differenziali

Come si comporta l'operatore di derivazione rispetto alle trasformazioni di Lorentz? In generale, gli operatori di derivazione rispetto alle coordinate  $x^\alpha$  vanno considerati come componenti covarianti di un operatore quadrivettoriale:

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} = \partial'^\beta \partial^\alpha x'_\beta = \partial'^\beta \Lambda_\beta^\alpha$$

D'altra parte, si ha

$$\Lambda_\alpha^\tau x'^\alpha = \Lambda_\alpha^\tau \Lambda_\beta^\alpha x^\beta = x^\tau$$

Differenziando l'ultima uguaglianza, si ha

$$\Lambda_\alpha^\tau dx'^\alpha = dx^\tau \Rightarrow \Lambda_\alpha^\tau = \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha^\tau \frac{\partial}{\partial x^\tau} \Rightarrow \partial'_\alpha = \Lambda_\alpha^\tau \partial_\tau$$

Quindi anche l'operatore derivata si comporta come un quadrivettore. Inoltre, se  $V$  è un generico vettore, allora la quantità  $\partial_\mu V^\mu$  è uno scalare:

$$\partial_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu V^\nu = \frac{\partial V^0}{\partial ct} - \nabla \mathbf{V} \quad (10.20)$$

avendo definito:

$$\partial^\mu \equiv \left( \frac{\partial_t}{c}, -\nabla \right) \quad (10.21)$$

$$\partial_\mu \equiv \left( \frac{\partial_t}{c}, \nabla \right) \quad (10.22)$$

Allora, il 4-Laplaciano coincide con il D'alambertiano:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 = \square \quad (10.23)$$

## 10.8 Meccanica relativistica e principio di minima azione

Per studiare il moto delle particelle materiali, partiamo dal principio di minima azione. Secondo tale principio, per ogni sistema meccanico esiste un integrale  $S$ , detto azione, che è minimo per il moto effettivo, e la cui variazione  $\delta S$  è conseguentemente nulla. Definiamo l'integrale d'azione per una particella materiale libera, non soggetta, cioè, all'azione di forze esterne. È opportuno notare che tale integrale non deve dipendere dalla scelta del sistema di riferimento, ovvero deve essere invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Dunque, esso non può che essere che l'integrale di uno scalare, con funzione integranda differenziale del primo ordine. Il solo scalare di questo tipo che si può formare per una particella materiale libera è proporzionale all'intervallo  $ds$ , per cui l'azione per una particella libera è data da:

$$S = -\alpha \int_a^b ds \quad (10.24)$$

esteso ad una linea d'universo compresa tra  $a$  e  $b$ . L'integrale ha un massimo quando la linea d'universo è dritta, infatti deve valere 0 quando è lungo una linea chiusa, che è curva per definizione, mentre un orologio in quiete ha segnato un tempo  $t = 1/c \int ds$  sempre maggiore di uno in moto. Se non ci fosse il segno - davanti alla costante positiva  $\alpha$ , l'azione non potrebbe avere un minimo. Si ricordi, inoltre, che l'azione può esprimersi anche come integrale nel tempo della lagrangiana

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

Sostituendo nella 10.24  $ds = c dt' = c dt / \gamma$ ,

$$S = -\alpha \int_a^b ds = -\alpha c \sqrt{1 - \beta^2} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

da cui troviamo la lagrangiana per la particella libera  $\mathcal{L} = -\alpha c \sqrt{1 - \beta^2} = -\alpha \sqrt{c^2 - v^2}$ . Per determinare la costante  $\alpha$  calcoliamo il limite classico per  $\beta \rightarrow 0$  sviluppando in serie:

$$\mathcal{L} = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong -\alpha c \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = -\alpha c + \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c}$$

Il primo termine della lagrangiana non dipende dalla velocità della particella, per cui è una costante arbitraria. Uguagliando il termine dipendente dalla velocità con l'espressione della lagrangiana classica di particella libera  $p^2/2m$ , si ottiene  $\alpha = mc$  e:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (10.25)$$

L'impulso lo ricaviamo dall'azione derivandola rispetto alla velocità:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = -mc^2 \frac{-2\frac{\mathbf{v}}{c^2}}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma \mathbf{v} \quad (10.26)$$

La forza agente sulla particella si ottiene come derivata temporale dell'impulso:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt}$$

Per forze centrali, in cui  $F \perp v$ , il modulo di  $v$  è costante, quindi il II termine è nullo e

$$F = m\gamma \frac{dv}{dt}$$

Il caso generale è più complicato:

Nel caso di forza parallela alla velocità:

$$F = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt}$$

(da verificare) L'energia si ricava dalla relazione Hamiltoniana:

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} = m\gamma v \cdot v + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma m \left( v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} \right) = \gamma m (v^2 + c^2 - v^2) = m\gamma c^2 \quad (10.27)$$

Dalle 10.26 e 10.27, possiamo derivare una importante relazione:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} \\ \mathcal{E} = m\gamma c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{\beta}{c}$$

Inoltre, la 10.27 ci dice che anche per  $v = 0$ , la una particella dotata di massa ha un energia a riposo  $E_0 = mc^2$ .

Definiamo ora il quadrivettore:

$$p^\mu \equiv \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (10.28)$$

detto quadri-impulso; il modulo quadro di questo quadrivettore è:

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2 \gamma^2 v^2 = m^2 c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = m^2 c^2 \quad (10.29)$$

Per una particella o un sistema in moto, nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa, siccome il modulo del quadrivettore è invariante,  $(p^0)^2 = m^2 c^2$  e quindi  $p^0/c$  è la massa *invariante* del sistema.

Infine, dalla 10.29:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2$$

quindi, l'energia, o meglio l'Hamiltoniana è:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{m^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2} \quad (10.30)$$

## 10.9 Rappresentazione covariante delle equazioni di Maxwell

Scriviamo la prima e la quarta equazione di Maxwell in forma locale Ricordando che  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}$  e che  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  si ha:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

sostituendo le espressioni per E e B:

$$\begin{cases} -\nabla(\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \end{cases}$$

Nella prima equazione aggiungiamo e sottraiamo la quantità  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu\mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t} \end{cases}$$

Che possiamo scrivere come:

$$\begin{cases} \square\Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square\mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (10.31)$$

che, se definiamo un quadrivettore:

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (10.32)$$

possiamo scrivere in modo compatto, ricordando gli operatori di quadri-derivazione [10.22](#) e dividendo la prima equazione per  $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ :  $\square\Phi/c^2 - 1/c \partial_t/c(\dots) = \rho/(c^2 \epsilon) = \rho \mu_0$  che posso scrivere come:  $\partial_\mu \partial^\mu A^0/c - 1/c \partial^0(\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 J^0/c$  e dunque, sommando le due equazioni:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \mu_0 J^\mu \quad (10.33)$$

dove abbiamo definito la quadricorrente:

$$J^\mu \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad (10.34)$$

L'espressione fra parentesi [10.31](#), ovvero  $\partial_\nu A^\nu$ , è nulla se ci si mette nella gauge di Lorenz, sfruttando l'arbitrarietà della scelta di  $\mathbf{A}$  a meno di un potenziale (vedi sez. [9.3.2](#)). Con questa scelta, la [10.33](#) diventa:

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (10.35)$$

Ad ogni modo, se lasciamo nell'equazione [10.33](#), il termine nullo della condizione di Lorenz, possiamo raccogliere una derivazione e scrivere:

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \mu_0 J^\mu \Leftrightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \quad (10.36)$$

che definisce il tensore antisimmetrico *campo elettromagnetico*

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (10.37)$$

Possiamo verificare che:

$$F^{i0} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = 1/c \left( \frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = -\frac{E^i}{c}$$

e, analogamente:

$$F^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j = -(\nabla \times \mathbf{A})_k = -B_k$$

In definitiva:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (10.38)$$

Si può verificare che la II e la III equazioni di Maxwell (paragrafo 9.3.2), si possono raccogliere nell'espressione:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (10.39)$$

## 10.10 Particella carica in moto in un campo EM

L'azione di una particella in moto in un campo elettromagnetico è composta di due termini: l'azione della particella libera, descritta nel paragrafo 10.8, e un termine che descrive l'interazione della particella con il campo. Quest'ultimo deve contenere sia le grandezze che caratterizzano la particella, sia quelle che caratterizzano il campo. Le proprietà della particella sono definite, per quanto concerne la sua interazione con il campo elettromagnetico, da un solo parametro, ovvero dalla carica  $e$  della particella. Le proprietà del campo sono, invece, caratterizzate dal quadripotenziale  $A_\mu$ , le cui componenti sono funzioni delle coordinate e del tempo. Queste grandezze compaiono nell'azione tramite un termine di interazione che deve essere invariante. Classicamente:  $\mathcal{L}_{int} = T - e\Phi$ , quindi affinché  $\mathcal{L}_{int} dt$  sia invariante, visto che  $dt' = \gamma dt$ , dovrà essere invariante  $\mathcal{L}_{int} \gamma$ . Ora,  $\gamma = \mathcal{E}/(mc^2)$  quindi,  $-e\Phi\mathcal{E}/(mc^2) = -ep^0 A_0/m$  (usando la 10.28 e la 10.32); generalizzando, possiamo scrivere:  $\mathcal{L}_{int} \gamma = -\frac{e}{m} p^\mu A_\mu = \gamma u^\mu A_\mu$

$$S_{int} = -e \int_a^b A_\mu dx^\mu \quad (10.40)$$

quindi, l'azione complessiva per una particella in moto nel C.E.M. è:

$$S = \int_a^b (-mc ds - e A_\mu dx^\mu)$$

Tenuto conto che  $ds = \sqrt{(cdt)^2 - (dr)^2} = cdt \sqrt{1 - u^2/c^2} = mc/\gamma$  e  $A_\mu dx^\mu = A_0 dx^0 - A_i dx^i = \frac{\Phi}{c} cdt - A_i \frac{dx^i}{dt} dt$

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{mc^2}{\gamma} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \right) dt$$

quindi la Lagrangiana di una particella in moto in un campo elettromagnetico è:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (10.41)$$

L'impulso generalizzato  $\mathbf{P}$  si ottiene derivando la lagrangiana rispetto alla velocità.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + e\mathbf{A} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} \quad (10.42)$$

L'Hamiltoniana, dalla relazione  $\mathcal{H} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} - \mathcal{L}$ :

$$\mathcal{H} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u} - \left( -\frac{mc^2}{\gamma} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \right) = \mathcal{H}_L + e\Phi$$

dove  $\mathcal{H}_L$  è la lagrangiana di particella libera 10.27, quindi:

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + e\Phi \quad (10.43)$$

Allora, se la relazione tra  $\mathcal{H}$  e  $P$  deve essere la stessa che nel caso di particella libera lega  $\mathcal{H}$  e  $p$

$$\mathcal{H}_L = c\sqrt{p_L^2 + m^2c^2} \Rightarrow \mathcal{H} - e\Phi = c\sqrt{|\mathbf{P} - e\mathbf{A}|^2 + m^2c^2}$$

Per velocità piccole rispetto a  $c$ , la 10.41 si può scrivere

$$\mathcal{L} \simeq \frac{mv^2}{2} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (10.44)$$

e, con le medesime approssimazioni, l'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} \simeq e\Phi + \frac{1}{2m} |\mathbf{P} - e\mathbf{A}|^2$$

Inoltre, applicando l'equazione di Eulero – Lagrange, a partire dalla scrittura della funzione hamiltoniana, si può ricavare l'espressione della forza di Lorentz. Infatti l'equazione di Eulero – Lagrange, come noto, è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

tenuto conto della 10.44, e dell'identità:

$$\nabla(A \cdot B) = (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + B \times \nabla \times A + A \times \nabla \times B$$

calcoliamo le derivate della lagrangiana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = -e\nabla\Phi + e\nabla(A \cdot v) = -e\nabla\Phi + e[(A \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)A + v \times \nabla \times A + A \times \nabla \times v]$$

Se  $v$  è costante, le sue derivate sono nulle:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = -e\nabla\Phi + e[(v \cdot \nabla)A + v \times \nabla \times A] = -e\nabla\Phi + e(v \cdot \nabla)A + ev \times B$$

In cui riconosciamo la forza di Lorenz:  $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Il primo termine è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_L + e\mathbf{A})$$

Uguagliando i due membri:

$$\frac{d\mathbf{p}_L}{dt} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\Phi + e(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

e scrivendo la derivata totale temporale come:  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$  otteniamo:

$$\mathbf{F} = -e \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla\Phi \right) + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Che è la forza totale che agisce su una particella carica in moto con velocità costante in presenza di campi elettrici e magnetici.

Alla stessa conclusione si giunge dal principio di minima azione:

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mcds - eA_\mu dx^\mu) = - \int_a^b (mc \delta ds + eA_\mu \delta dx^\mu + e\delta A_\mu dx^\mu) = 0$$

visto che  $ds = (dx_\mu dx^\mu)^{1/2}$  allora  $\delta ds = 1/2 ds^{-1} \cdot 2x^\mu \delta dx^\mu$ :

$$\delta S = - \int_a^b \left( mc \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} + eA_\mu \delta dx^\mu + e\delta A_\mu dx^\mu \right) = 0$$

Definita la velocità  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ ,

$$\delta S = \int_a^b (mcu_\mu \delta dx^\mu + eA_\mu \delta dx^\mu + e\delta A_\mu dx^\mu) = 0$$

Ora possiamo integrare per parti i primi due termini, tenendo conto che  $\delta dx_\mu = d\delta x_\mu$ :

$$\delta S = -mccu_\mu \delta x^\mu + \int_a^b mcdx^\mu du_\mu - eA_\mu \delta x^\mu + \int_a^b e\delta x^\mu dA_\mu - \int_a^b e\delta A_\mu dx^\mu = 0$$

Raccogliendo i termini integrali e quelli integrati:

$$\delta S = \int_a^b (mcdx^\mu du_\mu + e\delta x^\mu dA_\mu - e\delta A_\mu dx^\mu) - (mccu_\mu + eA_\mu) \delta x^\mu \Big|_a^b = 0$$

Il secondo termine di quest'ultima espressione è nullo, perché la variazione è fatta con le coordinate fisse agli estremi, quindi  $\delta x^\mu \Big|_a^b = 0$ , quindi:

$$\delta S = \int_a^b (mcdx^\mu du_\mu + e\delta x^\mu dA_\mu - e\delta A_\mu dx^\mu)$$

Tenuto conto che:

$$\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \quad dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

$$\delta S = \int_a^b \left[ mc \, du_\mu + e \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\nu \right] \delta x^\mu = 0$$

dove, nella somma fra parentesi, abbiamo potuto scambiare gli indici  $\mu$  e  $\nu$ , perché sono saturati, e riconosciamo il tensore campo elettromagnetico:  $F_{\mu\nu}$ . Infine, espandendo  $du_\mu = \frac{du_\mu}{ds} ds$  e  $dx^\mu = u^\mu ds$  e tenendo conto dell'arbitrarietà degli estremi di integrazione:

$$mc \frac{du_\mu}{ds} - e \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu = 0$$

ovvero:

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = e F_{\mu\nu} u^\nu \quad (10.45)$$

che è l'equazione del moto di una particella di massa  $m$  e carica  $e$  in un campo E.M., in forma 4-dimensionale.

## 10.11 Trasformazioni di Lorentz del campo EM

Il tensore campo E.M., si trasforma con la regola generale per i tensori come:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Specializziamo la trasformazione per un esempio pratico, come un boost lungo  $x_3$ . Quindi, per esteso:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

Prendiamo gli indici 0 e 1, dalla 10.38:  $F^{01} = E_x/c$ , allora, la trasformazione è:

$$F'^{01} = E'_x/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Dobbiamo esplicitare la somma con  $\rho$  e  $\sigma$  che vanno da 0 a 3:

$$E'_x/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_3 \Lambda^1_1 F^{31} = \gamma (E_x/c - \beta B_y) \quad (10.47)$$

Analogamente per le altre due componenti, si ottiene:

$$E'_y/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^2_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^2_2 F^{02} + \Lambda^0_3 \Lambda^2_2 F^{32} = \gamma (E_y/c + \beta B_x) \quad (10.48)$$

$$E'_z/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^3_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} = \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} + \Lambda^0_3 \Lambda^3_0 F^{30} = E_z/c \quad (10.49)$$

In generale, si può dimostrare che, scomponendo i vettori dei due campi lungo la direzione parallela a quella della velocità  $\mathbf{v}$  ed ortogonale a quest'ultima, si ha

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (10.50)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{B}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}) \quad (10.51)$$

dove risulta chiaro che il campo magnetico trasverso può essere prodotto da una particella carica (che genera il campo) in moto anche in assenza di un campo magnetico iniziale.

## Capitolo 11

# Teoria della Relatività Generale

La Teoria della Relatività Generale fu formulata da Einstein nel 1916. Essa si basa sul principio di equivalenza della gravitazione e quello di inerzia (nella relazione tra campo gravitazionale e geometria dello spazio – tempo) e sul principio di covarianza generale.

Il linguaggio della Teoria della Relatività è quello dell'analisi tensoriale e della geometria differenziale.

I punti cardine di tale teoria sono i seguenti.

1. La teoria Newtoniana non è più adatta a descrivere il campo gravitazionale.
2. Abbiamo necessità dei tensori per descrivere il campo gravitazionale. Inoltre è necessario introdurre i concetti di varietà, metrica, connessioni affini e altri enti geometrici.
3. Definire il ruolo del principio di equivalenza in tale trattazione.

### 11.1 Campo gravitazionale in meccanica non relativistica

La teoria newtoniana della gravità venne pubblicata nel 1685. I capisaldi di tale teoria, come noto, sono:

1. La legge di Newton

$$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}$$

dove  $m_I$  rappresenta la massa inerziale.

2. La legge di gravità di Newton

$$\mathbf{F}_G = m_G \mathbf{g}$$

In tale relazione,  $m_G$  rappresenta la massa gravitazionale, mentre l'accelerazione gravitazionale è data dalla legge di gravitazione universale

$$\mathbf{g} = -\frac{G \sum_i M_{Gi} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (11.1)$$

Se la forza cui è soggetto il corpo è la stessa, allora possiamo scrivere

$$m_I \mathbf{a} = m_G \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \left( \frac{m_G}{m_I} \right) \mathbf{g}$$

I campi gravitazionali sono caratterizzati dal fatto che tutti i corpi, indipendentemente dalla massa, si muovono allo stesso modo, a parità di condizioni iniziali. La forza di gravità, dunque, si distingue da tutte le altre forze, ad esempio quella elettromagnetica, che può agire o meno su una particella in funzione del suo rapporto carica/massa. Tale proprietà esclusiva dei campi gravitazionali permette di stabilire un'analogia tra il moto dei corpi in un campo gravitazionale e il moto dei corpi che non si trovano in un campo esterno, ma che sono riferiti ad un sistema di riferimento non inerziale. In altri termini, un sistema di riferimento non inerziale è equivalente ad un campo gravitazionale. Tale affermazione porta al cosiddetto principio di equivalenza. Tale principio esiste in due forme:

- **forma forte** afferma che, in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento, nell'intorno di ogni punto, dove gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli;
- **forma debole** afferma solo l'equivalenza della massa inerziale e la massa gravitazionale, ovvero si riferisce solo ai corpi in moto libero

Di fatto, tutti gli esperimenti condotti sinora confermano tale principio di equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale.

Consideriamo, per esempio, il moto di una particella non relativistica che procede di moto rettilineo uniformemente accelerato, ad esempio in caduta libera. Per il principio di equivalenza, tale particella può essere immaginata in un sistema di riferimento uniformemente accelerato, per cui le equazioni del moto si scrivono

$$m_I \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{tot}} = m_G \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k$$

Lo stesso sistema, ora, lo guardiamo da un ascensore in caduta libera nello stesso campo gravitazionale, per cui il cambio di coordinate da effettuarsi è il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \\ t' = t \end{cases}$$

La nuova equazione del moto è la seguente:

$$m_I \left( \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} + \mathbf{g} \right) = m_G \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k$$

Nell'ipotesi in cui massa inerziale e gravitazionale coincidano, allora:

$$m_I = m_G \Rightarrow m_I \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = \sum_k \mathbf{F}_k$$

Come ci si aspettava, l'osservatore nell'ascensore in caduta libera nel campo non risente degli effetti del campo stesso.

Tuttavia, mentre il principio di equivalenza va bene localmente, nel caso di sistemi non inerziali vi è una sostanziale differenza per quanto riguarda il comportamento all'infinito. Infatti, ad una distanza infinita dai corpi che lo generano, il campo gravitazionale reale tende a zero, mentre i campi equivalenti ai sistemi non inerziali crescono illimitatamente all'infinito o, al più, tendono ad un valore asintotico finito non necessariamente nullo. Si pensi, ad esempio, al caso delle forze centrifughe che nascono da un sistema di riferimento rotante, e che tendono all'infinito al crescere della distanza dall'asse di rotazione.

## 11.2 Campo gravitazionale in meccanica relativistica

La proprietà fondamentale dei campi gravitazionali, e cioè che tutti i corpi si muovono in essi nello stesso modo, resta valida anche in meccanica relativistica. Rimane, di conseguenza, anche l'analogia tra i campi gravitazionali e i sistemi di riferimento non inerziali. In un sistema di riferimento inerziale di coordinate cartesiane, l'intervallo infinitesimo è determinato dalla solita relazione

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nel passaggio ad un sistema di riferimento non inerziale,  $ds^2$  non è più esprimibile tramite i quadrati dei differenziali delle coordinate. Per esempio, se si passa ad un sistema di coordinate in rotazione uniforme, detta  $\Omega$  la velocità angolare di rotazione diretta lungo l'asse  $z$ , si ha:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ 0 & \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

considerando i differenziali per  $dx$  e  $dy$ :

$$\begin{cases} dx = dx' \cos \Omega t - x' \Omega \sin \Omega t dt - dy' \sin \Omega t - \Omega y' \cos \Omega t dt \\ dy = dx' \sin \Omega t + x' \Omega \cos \Omega t dt + dy' \cos \Omega t - y' \Omega \sin \Omega t dt \end{cases}$$

per  $t$  piccoli,  $\sin \Omega t = \Omega t$ ,  $\cos \Omega t = 1$  quindi,

$$\begin{cases} dx = dx' - dy' \Omega t - \Omega y' dt \\ dy = dx' \Omega t + x' \Omega dt + dy' \end{cases}$$

sicché, detta  $\hat{\Omega}$  la matrice di rotazione differenziale e  $\eta$  la metrica di Minkowski:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{iklm=0}^3 \eta_{ik} \hat{\Omega}_l^k \hat{\Omega}_m^i dx^l dx^m = \\ &= [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)] dt^2 - dz'^2 + \Omega y' dx' dt - \Omega x' dy' dt \end{aligned}$$

che, come si vede, qualunque sia la trasformazione del tempo, contiene termini non diagonali, e dunque suggerisce una metrica generica  $g_{\mu\nu}$  che, in questo caso è  $\hat{\Omega}^T \eta \hat{\Omega}$ .

Dato il principio di equivalenza, risulta logico affermare che l'informazione sull'accelerazione, o sul campo gravitazionale è tutta contenuta nel tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ . Osserviamo, ancora, che un campo gravitazionale reale non può essere eliminato ovunque con alcuna trasformazione delle coordinate. In altri termini, non esiste alcuna trasformazione di coordinate che, in presenza del campo gravitazionale reale, possa rendere il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  di forma galileiana  $\eta_{\mu\nu}$  contemporaneamente in tutto lo spazio-tempo.

È attribuito ad Einstein un esperimento mentale (Gedankenexperiment): vogliamo misurare il rapporto tra la circonferenza  $C$  ed il raggio  $R$  di una giostra in rotazione molto veloce con un righello lungo  $\ell_0$ . Il raggio è sempre perpendicolare al moto, quindi non risente di effetti relativistici e la sua lunghezza risulta la stessa che in quiete. Per misurare la circonferenza, il righello è sempre parallelo alla velocità, quindi subirà una contrazione tale che  $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ . Dunque, la lunghezza della circonferenza misurata con il righello, sarà maggiore che nella giostra in quiete e dunque il rapporto  $C/R \neq 2\pi$ , sicché lo spazio è curvo (è iperbolico in questo caso).

### 11.3 Moto libero in un sistema di riferimento qualsiasi

Per una particella di massa  $m$  in moto libero:  $F = 0 = ma$ , quindi, in 4 dimensioni:

$$\frac{dx^\mu}{dt^2} = 0$$

trasformiamo le coordinate in un sistema  $x'^\mu$  dipendente da  $x^\mu$ :

$$\frac{dx^{2\mu}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t} \right] = \frac{d^2 x'^\alpha}{dt^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} + \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{d^2 x^\mu}{dx'^\alpha dx'^\beta} \frac{dx'^\beta}{dt} = 0$$

Moltiplicando tutto per  $\partial_\mu x'^\gamma$ :

$$\frac{d^2 x'^\alpha}{dt^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} + \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial t} = \frac{d^2 x'^\alpha}{dt^2} \delta_\alpha^\gamma + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{dx'^\beta}{dt}$$

essendo  $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\alpha} = \delta_\alpha^\gamma$ . Dunque, raccogliendo i termini con le derivate prime rispetto a  $t$ :

$$\frac{d^2 x'^\gamma}{dt^2} + \left[ \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right] \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{dx'^\beta}{dt} = 0 \quad (11.2)$$

che descrive il moto libero in uno spazio curvo, ovvero lungo una geodetica dello spazio considerato. L'espressione fra parentesi quadre, prende il nome di connessione affine e viene indicata con il simbolo di Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ . Va notato che, il ragionamento svolto fin qui con le derivate temporali, può essere effettuato minimizzando l'azione di particella libera  $S = \frac{1}{c} \int ds$  lungo una curva nello spazio-tempo caratterizzata da un parametro  $\sigma$ , dunque la generica geodetica

che è la curva che minimizza l'azione in uno spazio curvo è:

$$\frac{d^2 x'^\gamma}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx'^\alpha}{d\sigma} \frac{dx'^\beta}{d\sigma} = 0 \quad (11.3)$$

Le  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ , rappresentano il campo gravitazionale e la 11.2 è l'equivalente di  $a + GM/R^2 = 0$  di Newton.

## 11.4 Intervalli temporali e distanze

Vogliamo determinare, a partire da valori misurati delle grandezze in un sistema di riferimento  $x^0, x^1, x^2, x^3$ , le distanze e gli intervalli di tempo reali. Sia  $\tau$  il tempo reale e consideriamo due eventi infinitamente vicini, ma che avvengono nello stesso punto dello spazio. L'intervallo tra questi due eventi sicuramente può essere espresso come:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Ponendo nell'ultima espressione  $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ , allora si ricava il tempo proprio come:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2 \Rightarrow d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0$$

Questa è l'espressione del tempo reale (o proprio) in funzione della coordinata  $x^0$ . Si osservi che, dovendo essere sempre positivo e reale il tempo proprio, si ha:  $g_{00} > 0$ . Tale condizione è strettamente necessaria, quindi, per la corrispondenza tra un campo gravitazionale reale al tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  di uno spazio-tempo reale. A tale scopo, gioca un ruolo decisivo, inoltre, anche la scelta della giusta segnatura.

Per quanto riguarda, invece, l'elemento  $dL$  di distanza spaziale, ricordiamo che in relatività ristretta è possibile definire tale lunghezza come l'intervallo tra due eventi infinitamente vicini che si verificano nello stesso istante. In relatività generale, non è possibile porre banalmente  $dx^0 = 0$  nell'espressione del  $ds$ , in quanto, come visto, il tempo proprio in un campo è legato alla coordinata stessa da una relazione che cambia punto per punto. Allora, per determinare  $dL$ , si procede come segue. Supponiamo che un segnale luminoso venga emesso da un punto B dello spazio (di coordinate  $x^\alpha + dx^\alpha$ ) verso un punto infinitamente vicino A (di coordinate  $x^\alpha$ ) e riflesso immediatamente lungo lo stesso cammino, così come si vede nella Fig. 11.1

Il tempo (misurato nel punto B) necessario perché avvenga l'intero processo è evidentemente il doppio del rapporto tra la distanza tra i due punti e  $c$ , ovvero  $\frac{2L}{c}$ . Scriviamo, ora, l'intervallo mettendo in evidenza le coordinate spaziali e la coordinata temporale:

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n + 2g_{0m} dx^0 dx^m + g_{00} (dx^0)^2$$

In tale scrittura, gli indici assumono valori da 1, 2 e 3 (in tal modo è stata esplicitata la coordinata temporale  $x^0$ ). L'intervallo tra due eventi corrispondenti alla partenza e all'arrivo del segnale da un punto all'altro è nullo, per cui

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &\Rightarrow g_{mn} dx^m dx^n + 2g_{0m} dx^0 dx^m + g_{00} (dx^0)^2 = 0 \\ g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0m} dx^m dx^0 + g_{mn} dx^m dx^n &= 0 \end{aligned}$$

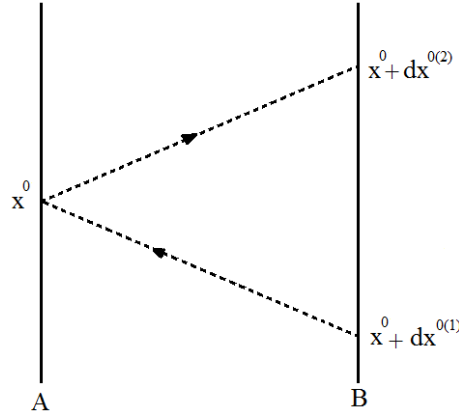


Figura 11.1: Schema della misura della distanza

quindi:

$$dx^{0(1;2)} = \frac{-g_{0m}dx^m \pm \sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00}) dx^m dx^n}}{g_{00}} \quad (11.4)$$

Le due soluzioni temporali corrispondono alla propagazione del segnale nelle due direzioni. Se  $x^0$  è l'istante d'arrivo del segnale in A, allora gli istanti della sua partenza in B e del suo ritorno in B saranno rispettivamente quelli col segno negativo e positivo. Quindi l'intervallo di tempo totale tra l'emissione ed il ritorno vale la differenza dei tempi, ovvero:

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00}) dx^m dx^n}}{g_{00}} \quad (11.5)$$

L'intervallo di tempo reale, ovvero il tempo proprio, si ottiene, come visto, moltiplicando per il fattore  $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$ :

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 &= \\ &= \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\frac{2\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})}}{g_{00}} = \\ &= \frac{2}{c}\frac{\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})}}{\sqrt{g_{00}}} \end{aligned} \quad (11.6)$$

Siccome  $L = cd\tau/2$ , sostituendo la 11.6, otteniamo:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{cd\tau}{2} = \frac{\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00}) dx^m dx^n}}{\sqrt{g_{00}}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} - g_{mn}\right) dx^m dx^n} \end{aligned}$$

e quindi:

$$dL^2 = \left(\frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} - g_{mn}\right) dx^m dx^n = \gamma_{mn}dx^m dx^n \quad (11.7)$$

in cui  $\gamma_{mn}$  è il tensore metrico tridimensionale che definisce la metrica, ovvero le proprietà geometriche dello spazio. Bisogna, però, tenere presente che, in

generale, le  $g_{mn}$  dipendono da  $x^0$ , per cui anche la metrica spaziale varia nel tempo. Per tale ragione, ha senso integrare l'espressione di  $dL$  solo in caso di indipendenza dei tensori dal tempo, ovvero per campi statici.

Passiamo, ora, alla definizione della nozione di simultaneità in relatività generale. Vediamo, quindi, se è possibile sincronizzare gli orologi che si trovano in punti differenti dello spazio. Una tale sincronizzazione deve evidentemente essere realizzata con uno scambio di segnali luminosi tra due punti. Consideriamo nuovamente la propagazione, come appena visto, di un segnale da un punto A ad un punto B infinitamente vicini. Consideriamo simultaneo con A l'indicazione dell'orologio in B tra l'istante di partenza e quello di ritorno del segnale, ovvero

$$x^0 + dx^0 = x^0 + \frac{dx^{0(2)} + dx^{0(1)}}{2} = x^0 - \frac{g_{0m}}{g_{00}} dx^m$$

Tale relazione permette di sincronizzare gli orologi in qualsiasi volume infinitesimo dello spazio. È possibile, dunque, sincronizzare gli orologi lungo una qualsiasi linea non chiusa. Lungo un contorno chiuso, invece, tale sincronizzazione è impossibile, in quanto, nel descrivere il contorno e ritornando al punto di partenza, si ottiene per  $\Delta x^0$  un valore diverso da zero. Si noti che, mentre in relatività ristretta lo scorrere del tempo è diverso per gli orologi in moto relativo tra loro, in relatività generale il tempo scorre diversamente anche nei punti dello spazio di uno stesso sistema di riferimento.

## 11.5 Moto di una particella in un campo gravitazionale

Nel caso limite di velocità piccole, le equazioni relativistiche del moto di una particella in un campo gravitazionale devono ridursi alle rispettive equazioni non relativistiche. Bisogna, inoltre, tener presente che, se le velocità si suppongono piccole, segue anche la condizione di campo gravitazionale debole. In caso contrario, infatti, la particella che in esso si trova acquisirebbe una grande velocità. Scriviamo, in tali ipotesi, la lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\varphi$$

Tale espressione assicura che la lagrangiana non relativistica in assenza di campo

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

sia esattamente quella alla quale si riduce la lagrangiana relativistica nel caso di piccole velocità:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

L'azione non relativistica  $S$  per una particella in un campo gravitazionale assume, dunque, la forma

$$S = \int \mathcal{L} dt = -mc \int \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt = -mc \int ds$$

Dal confronto si ricava:

$$ds = \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt \Rightarrow ds^2 = \left( c^2 + \frac{v^4}{4c^2} + \frac{\varphi^2}{c^2} - v^2 - \frac{v^2\varphi}{c^2} + 2\varphi \right) dt^2$$

e, trascurando i termini in  $1/c^2$ :

$$ds^2 \approx (c^2 - v^2 + 2\varphi) dt^2 = (c^2 + 2\varphi) dt^2 - dr^2$$

D'altra parte  $ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{mn} dx^m dx^n + 2g_{0m} dx^0 dx^m$ , che, con la stessa approssimazione possiamo scrivere come  $ds^2 g_{00} (dx^0)^2 - dr^2$ . Confrontato con quanto scritto sopra, dà:

$$g_{00} = \left( 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right)$$

Il potenziale Newtoniano è:

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

quindi, per campi deboli e velocità non relativistiche:

$$g_{00} = \left( 1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r^2} \right) \quad (11.8)$$

### 11.5.1 Campo gravitazionale costante: il problema del GPS

Un campo gravitazionale è detto costante se è possibile scegliere un sistema di riferimento tale che tutte le componenti del tensore metrico non dipendano dalla coordinata temporale  $x^0$ , che viene, quindi, chiamata tempo universale. La scelta del tempo universale non è univoca. Ad esempio, quando si aggiunge ad  $x^0$  una funzione arbitraria delle coordinate spaziali, anche in tal caso tutte le componenti del tensore metrico non contengono la coordinata  $x^0$ . Inoltre è anche evidente che il tempo universale può essere definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, rendendo altrettanto arbitraria la sua scelta dell'unità di misura. È necessaria, per generare un campo gravitazionale costante, la presenza di un solo corpo, in quanto la mutua attrazione gravitazionale tra più corpi genera un moto, incompatibile con l'ipotesi di campo costante. Se il corpo che crea il campo è immobile, tale campo è detto statico, poiché tutte le componenti  $g_{0\alpha}$  del tensore metrico sono nulle e le due direzioni del tempo sono equivalenti. La condizione di immobilità del corpo è sufficiente, ma non necessaria per la costanza del campo. Di fatto sono tali anche i campi generati da un corpo a simmetria assiale che ruoti uniformemente attorno al proprio asse di simmetria. In tal caso, però, i due sensi del tempo non sono più equivalenti, in quanto, invertendo il tempo, cambia anche il segno della velocità angolare di rotazione del corpo. Tale proprietà è caratteristica dei campi stazionari. Il significato del tempo universale in un campo gravitazionale costante è che l'intervallo di tale tempo tra due eventi in un punto coincide con quello tra qualsiasi altri due eventi in ogni altro punto dello spazio, rispettivamente simultanei con i primi due eventi. Detto ciò, è possibile integrare analiticamente l'espressione del tempo proprio in funzione del tempo universale:

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} x^0 \quad (11.9)$$

11.5. MOTO DI UNA PARTICELLA IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE 177

Per campi deboli e velocità non relativistiche, dove vale la 11.8, possiamo sviluppare la radice in termini di  $\varphi/c^2$ :

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) x^0$$

Quindi il tempo proprio trascorre più lentamente quanto più è piccolo il potenziale gravitazionale nel punto dello spazio, ovvero quanto più è grande il suo valore assoluto (il potenziale in questione è negativo). Per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle correzioni da applicare agli orologi sui satelliti GPS, che orbitano a 20000 km dalla superficie, a causa della diversa intensità del potenziale rispetto a terra La differenza di tempo proprio è

$$\Delta\tau = -G \frac{M}{rc^2}$$

quindi l'orologio a terra segnerà un tempo

$$t_1 = t \left(1 - G \frac{M}{r_1 c^2}\right)$$

mentre, quello su satellite:

$$t_2 = t \left(1 - G \frac{M}{(r_1 + R)c^2}\right)$$

In conclusione

$$\frac{t_2 - t_1}{t} = -G \frac{M}{c^2} \left( \frac{1}{(r_1 + R)} - \frac{1}{r_1} \right) = G \frac{M}{c^2 r_1} \frac{R}{(r_1 + R)}$$

I valori da usare sono:

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-2} \\ M &= 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} & c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ r_1 &= 6.3 \cdot 10^6 \text{ m}; & R &= 2 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Risulta  $t_2 - t_1 = 5.34 \cdot 10^{-10}$  s/s, che moltiplicati per 86400 s/giorno, porterebbero ad un errore di  $+46\mu\text{s}$  ogni giorno degli orologi sui satelliti rispetto a quelli, identici, a terra.

D'altra parte, il satellite viaggia a 11400 km/h rispetto al suolo. Dunque, se l'orologio sul satellite segna  $t_2 = t$ , l'orologio al suolo segna  $t_1 = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma t$  ove

$$\beta = \frac{v}{c} = (11400 \text{ km/h} / 3600 \text{ s/h}) / 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 1.33 \cdot 10^{-5}$$

Quindi:

$$\frac{t_2 - t_1}{t} = 1 - \gamma = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - (1.33 \cdot 10^{-5})^2}} = -8.9 \cdot 10^{-11} \text{ s/s}$$

Questi, moltiplicati per 86400 s/giorno, danno:  $-7\mu\text{s}$  al giorno. L'errore totale degli orologi si satellite rispetto a quelli a terra è:  $\Delta t = 46 - 7 = 39 \frac{\mu\text{s}}{\text{giorno}}$ , che corrisponderebbero ad un errore cumulato sulla misura della posizione di 11.7km

## 11.6 Derivata covariante

Se consideriamo un vettore  $\mathbf{V}$  espresso in termini di componenti  $V^\alpha$  per i rispettivi versori  $\hat{e}_{(\alpha)}$ :  $\mathbf{V}^\alpha \hat{e}_{(\alpha)}$ , la sua derivata rispetto ad una coordinata è ancora un vettore?

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \hat{e}_{(\alpha)} + V^\alpha \frac{\partial \hat{e}_{(\alpha)}}{\partial x^\beta}$$

Il primo pezzo è un vettore perché è una combinazione lineare di vettori della base; il secondo vediamo come si trasforma. Possiamo sempre trovare un sistema locale in cui le coordinate  $\hat{e}_{(\alpha')}$  siano costanti, dunque:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{(\alpha)} &= \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} \hat{e}_{(\alpha')} \Rightarrow \\ \frac{\partial \hat{e}_{(\alpha)}}{\partial x^\beta} &= \left( \frac{\partial \Lambda_{\alpha}^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \right) \hat{e}_{(\alpha')} \end{aligned}$$

Dunque anche il secondo membro è una combinazione lineare di versori della base, pertanto è un vettore. Se chiamiamo

$$\frac{\partial \hat{e}_{(\alpha)}}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \hat{e}_{(\mu)} \quad (11.10)$$

allora;

$$\frac{\partial V}{\partial x^\beta} = \left[ \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \hat{e}_{(\alpha)} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \hat{e}_{(\mu)} V^\alpha \right] \quad (11.11)$$

scambiando gli indici saturati al II addendo:

$$\frac{\partial V}{\partial x^\beta} = \left[ \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} V^\mu \right] \hat{e}_{(\alpha)}$$

definisce una derivazione *covariante*:

$$D_\beta V^\alpha = (\partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} V^\mu) \quad (11.12)$$

Un altro modo per arrivare alla derivazione covariante è il seguente.

Consideriamo lo scalare  $\phi$ ; la sua derivata rispetto ad un parametro  $s$  è anch'essa uno scalare:

$$\psi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$$

cioè un invariante per tutte le curve di parametro  $s$  passanti per un punto del continuo  $x^\mu$ . Il primo termine si trasforma come un tensore covariante  $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = V_\mu$ . Se  $\psi$  è uno scalare, anche la sua derivata rispetto al parametro lo sarà:

$$\chi = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \frac{\partial x^\nu}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s^2}$$

Se assumiamo che il trasporto sia lungo la geodetica, vale la 11.3 quindi:

$$\frac{d^2 x'^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx'^\alpha}{ds} \frac{dx'^\beta}{ds}$$

ed infine, sostituendo e rinominando gli indici saturati:

$$\begin{aligned} \chi &= \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} V_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} V_\mu \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \end{aligned} \quad (11.13)$$

### 11.6.1 Relazione tra simboli di Christoffel e tensore metrico

Mostriamo ora che la derivata covariante del tensore metrico è nulla. Infatti  $DA^\mu = g_{\mu\nu}(DA^\nu)$  ma anche  $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$  quindi  $DA^\mu = Dg_{\mu\nu}A^\nu = D(g_{\mu\nu})A^\nu + g_{\mu\nu}DA^\nu$  che è compatibile con la precedente solo se  $D(g_{\mu\nu}) = 0$  c.v.d. Sviluppriamo la derivata covariante di un tensore, ricordando che un tensore si comporta come il prodotto di due vettori:

$$D_\sigma A^{\mu\nu} \leftrightarrow D_\sigma A^\mu B^\nu = (D_\sigma A^\mu)B^\nu + A^\mu(D_\sigma B^\nu)$$

dunque per un tensore covariante in cui la  $\Gamma$  ha un segno  $-$  (vedi 11.13)::

$$D_\sigma A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\tau A_{\tau\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau A_{\mu\tau}$$

Se  $A_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ , la derivata covariante è nulla. Quindi, permutando gli indici, possiamo scrivere

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = \Gamma_{\mu\sigma}^\tau g_{\tau\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau} \quad (11.14)$$

$$\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^\tau g_{\tau\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^\tau g_{\nu\tau} \quad (11.15)$$

$$\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\tau\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau g_{\sigma\tau} \quad (11.16)$$

Facendo (11.14) - (11.15) + (11.16), otteniamo:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau}$$

Ed, infine:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2}g^{\mu\tau} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right) \quad (11.17)$$

Come ci si aspettava, le connessioni affini sono funzioni delle derivate prime del tensore metrico.

## 11.7 Curvatura e tensore di Riemann

Ricordiamo che, se  $x^\mu = x^\mu(s)$  è l'equazione parametrica di una curva ( $s$  è la lunghezza dell'arco misurata a partire da un punto dato), allora  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$  è il vettore tangente alla curva. Se la curva considerata è una geodetica, allora lungo tale curva si ha  $Du^\mu = 0$ . È fondamentale intuire che, in uno spazio curvo, il trasporto parallelo da un punto ad un altro porta a risultati differenti se viene effettuato lungo percorsi differenti. In particolare, trasportando il vettore parallelamente a sé stesso lungo un contorno chiuso, il vettore finale non coincide con quello iniziale. Per spiegare tale circostanza, consideriamo la figura 11.2. In essa è rappresentato uno spazio curvo bidimensionale, ovvero una qualsiasi superficie curva. Tale superficie è delimitata dalle 3 linee geodetiche. Trasportiamo parallelamente il vettore 1 lungo il contorno formato da queste curve. Dopo il trasporto lungo la curva AB, il vettore 1, mantenendo sempre costante l'angolo rispetto alla curva stessa, diventa 2 in B. Allo stesso modo

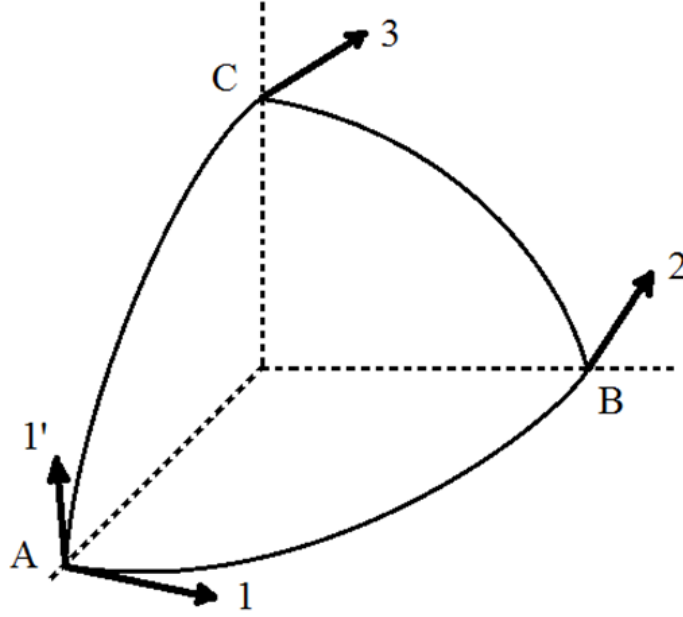


Figura 11.2: Trasporto parallelo lungo un percorso chiuso

trasportiamo il vettore 2 da B a C, trasformandosi in 3. Infine lo stesso da C ritornando al punto di partenza A, diventando il vettore 1', non coincidente col vettore 1. Stabiliamo, ora, la formula che determini la variazione di un vettore nel suo trasporto parallelo lungo una curva infinitesima chiusa. Tale variazione può esprimersi come:

$$\Delta A_\mu = \oint \delta A_\mu$$

dove, seguendo [Landau teoria dei campi]  $DA_\mu = dA_\mu - \delta A_\mu \Rightarrow \delta A^\mu = (\partial_\nu - D_\nu)A_\mu dx^\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu$  prendendolo lungo la linea chiusa formata dai tre segmenti.

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu \Rightarrow \Delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu$$

Tenendo presente che la superficie delimitata dalla linea chiusa  $\Delta f$  è considerata una grandezza infinitesima, applicando il teorema di Stokes generalizzato, secondo cui (visto che la superficie racchiusa dalla curva  $df^{\mu\nu}$  è antisimmetrica, come si può vedere percorrendola in senso inverso)

$$\oint A_\mu dx^\mu = \int \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} df^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) df^{\mu\nu} \quad (11.18)$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta A_\mu &= \oint \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial (\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma A_\sigma)}{\partial x^\nu} \right] \Delta f^{\lambda\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\lambda} A_\sigma - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma}{\partial x^\nu} A_\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} \right] \Delta f^{\lambda\nu} \end{aligned}$$

Per semplificare tale scrittura, si può fare un'approssimazione. In particolare, si può considerare che le componenti del vettore  $A_\sigma$  nei punti interni al contorno infinitesimo siano determinate unicamente dai loro valori sul contorno infinitesimo. Ciò vuol dire considerare solo termini del primo ordine (ipotesi di linearità), per cui vale la relazione:

$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha A_\alpha$$

Sostituendo nelle relazioni precedenti, si ottiene

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\lambda} A_\sigma - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma}{\partial x^\nu} A_\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha A_\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha A_\alpha \right] \Delta f^{\lambda\nu} = \quad (11.19)$$

La quantità fra parentesi  $-R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$  prende il nome di **Tensore di Riemann** o tensore di curvatura, perché, si può mostrare che in 3 dimensioni è proporzionale alla curvatura della superficie.

Se passiamo dal tensore misto  $R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$  al tensore covariante  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda} R_{\nu\rho\sigma}^\lambda$ , è possibile scrivere un'espressione per quest'ultimo in funzione delle connessioni e delle loro espressioni in termini del tensore metrico:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma}) + g_{\xi\eta} (\Gamma_{\nu\rho}^\xi \Gamma_{\mu\sigma}^\eta - \Gamma_{\nu\sigma}^\xi \Gamma_{\mu\rho}^\eta) \quad (11.20)$$

Poniamoci in un sistema di riferimento localmente inerziale; lì le vale l'equazione geodetica 11.3 e l'accelerazione è nulla, il che implica che sono nulle le connessioni affini. Dunque la 11.20 diventa:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma}) \quad (11.21)$$

### 11.7.1 Proprietà del tensore di Riemann

Evidentemente, è un tensore antisimmetrico per lo scambio di indici dispari:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = \quad (11.22)$$

$$= -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (11.23)$$

da cui si ricava la proprietà ciclica per lo scambio di tre posti:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0 \quad (11.24)$$

Dalla proprietà di antisimmetria rispetto allo scambio di indici attigui, deriva che la contrazione di indici attigui dà risultato nullo. Infatti

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\nu\mu\rho\sigma}) = 0$$

quindi ha senso contrarre indici alternati.

Infine, si possono dimostrare le identità di Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu} = 0 \quad (11.25)$$

Infatti, in un sistema localmente inerziale, derivando la 11.21, otteniamo:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho,\sigma} = \partial_\sigma R_{\lambda\mu\nu\rho} = (\partial_\sigma \partial_\nu \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\rho})$$

Lo schema degli indici è  $R_{1234,5} = g[(14, 235) - (13, 245) + (23, 145) - (24, 135)]$  dunque, per i tre termini della 11.25:

$$\begin{aligned} [\lambda\mu\nu\rho, \sigma =] & \quad (\lambda\rho, \mu\nu\sigma) - (\lambda\nu, \mu\rho\sigma) + (\mu\nu, \lambda\rho\sigma) - (\mu\rho, \lambda\nu\sigma) + \\ [\lambda\mu\sigma\nu, \rho =] & \quad (\lambda\nu, \mu\sigma\rho) - (\lambda\sigma, \mu\nu\rho) + (\mu\sigma, \lambda\nu\rho) - (\mu\nu, \lambda\sigma\rho) + \\ [\lambda\mu\rho\sigma, \nu =] & \quad (\lambda\sigma, \mu\rho\nu) - (\lambda\rho, \mu\sigma\nu) + (\mu\rho, \lambda\sigma\nu) - (\mu\sigma, \lambda\rho\nu) = 0 \end{aligned}$$

Per contrazione, possiamo costruire un tensore di rango 2 – il tensore di Ricci – ma solo contraendo gli indici pari o dispari, perché il tensore di Riemann è antisimmetrico per lo scambio di indici adiacenti:

$$R_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} R_{\rho\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \quad (11.26)$$

Con la definizione 11.20:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \quad (11.27)$$

simmetrico per lo scambio di indici. Lo scalare di Ricci corrispondente si ottiene effettuando una nuova contrazione.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (11.28)$$

## 11.8 Il tensore Energia-impulso

### 11.8.1 Variazioni dell'azione ed equazioni di Eulero-Lagrange

L'azione del campo è definita dall'integrale sul 4-volume di una funzione  $\mathcal{L}$ , tale che

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^4x$$

La funzione  $\mathcal{L}$  è la densità di Lagrangiana. Il principio di minima azione impone che la variazione di S sia nulla. Dunque, nell'ipotesi realistica in cui la variazione commuti con l'integrale:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \delta \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^4x = \\ &= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) \delta q + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) \delta \partial_\mu q d^4x \end{aligned}$$

Il secondo termine dell'integrando può essere scritto come:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \delta q \right) - \delta q \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right)$$

sostituendo:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) \right) \delta q + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \delta q \right) d^4x = 0$$

Il secondo termine dell'integrando, è la divergenza di un quadri-vettore, che, dopo l'applicazione del teorema di Gauss, svanisce nell'integrazione su tutto lo spazio. Il termine rimanente, ci fornisce le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (11.29)$$

### 11.8.2 Il tensore energia-impulso dal teorema di Noether

Consideriamo la variazione indotta da un cambiamento di coordinate:  $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ , dunque:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \partial_\mu q)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \frac{\partial \partial_\nu q}{\partial x_\mu} \right] \delta x_\mu \quad (11.30)$$

Sostituiamo nel primo termine la 11.29

$$\delta \mathcal{L} = \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \frac{\partial^2 q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right] \delta x_\mu = \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \partial_\mu q \right) \delta x_\mu$$

d'altra parte

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu = (\delta_\nu^\mu \partial_\nu \mathcal{L}) \delta x_\mu$$

sottraendo membro a membro le ultime due equazioni:

$$\partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \partial_\mu q - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \right) = 0 \quad (11.31)$$

Quindi c'è una quantità conservata

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \partial_\mu q - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \quad (11.32)$$

che, vedremo, è il tensore energia-impulso. Infatti, consideriamo l'integrale sull'ipersuperficie a  $x^0$  costante di  $T_\mu^\nu$  (quindi fissato uno degli indici a 0)

$$\int T_\mu^0 dS^\mu$$

Dalla conservazione del tensore deriva che, separando la parte spaziale e temporale:

$$\partial_0 \int T_0^0 dV = \int \partial_m T_0^m dV = \int T_0^m dS_m \quad (11.33)$$

Ora,

$$T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 q} \partial_0 q - \delta_0^0 \mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \mathcal{E}$$

Quindi, la 11.33 ci dice che la variazione dell'energia nel volume è pari al flusso di  $T_0^m$  attraverso la superficie che racchiude il volume. Analogamente all'equazione di continuità  $\partial_t q = -\partial_i J^i$ , possiamo associare a  $q$ ,  $T_0^0$  e a  $J \leftrightarrow T_0^i$  e dunque

$$P^i = \int T_0^i dV \quad (11.34)$$

Le altre combinazioni, possono essere scritte, sempre a partire da  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , che può essere (anti-)simmetrizzata come

$$\partial_\rho (x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}) \quad (11.35)$$

infatti:  $\partial_\rho (x^\mu T^{\nu\rho}) = \delta_\rho^\mu T^{\nu\rho} + x^\mu \partial_\rho T^{\nu\rho}$ , il secondo termine (e il IV) è 0 per la conservazione del tensore energia-impulso, il primo si annulla con il terzo. La 11.35, definisce un'altra quantità conservata, che è il momento generalizzato:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \int (x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}) dS_\rho = \int (x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu) dV = \\ &= \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} x_\rho P_\sigma dV \end{aligned} \quad (11.36)$$

## 11.9 Le equazioni del campo gravitazionale

Consideriamo una particella in moto non relativistico ( $\frac{dx}{dt} \ll c \Rightarrow x^i \ll x^0$ ) in un campo debole e stazionario (i.e.  $\partial_t x^i = 0$ ). Le equazioni geodetiche

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau}$$

si riducono a

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = -\Gamma_{00}^\mu \left( \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2$$

Dall'espressione che definisce le  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  come funzione delle derivate del tensore metrico:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left( \frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\nu} \right)$$

troviamo che

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left( \frac{\partial g_{\tau 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{0\tau}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left( 2 \frac{\partial g_{\tau 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau} \right)$$

e, vista la stazionarietà del campo,  $\partial_0 g_{\tau 0} = 0$ , dunque:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\tau} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau} \quad (11.37)$$

L'approssimazione di campo debole si ottiene ponendo  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ;  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Per trovare il duale di  $h_{\mu\nu}$  ricordiamo che  $g_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} = \delta_\nu^\sigma$ , e che gli indici di  $h_{\mu\nu}$  si muovono con le  $\eta_{\mu\nu}$  dunque:  $(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma}) = \delta_\nu^\sigma + O(h^2)$ , sicché:  $g^{\mu\sigma} = (\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma})$ . In quest'approssimazione:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\tau} \quad (11.38)$$

e quindi l'equazione geodetica diventa:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\tau} \left( \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2 \quad (11.39)$$

La geodetica può essere scomposta nella parte spaziale e temporale:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00} \left( \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 x^0}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2} \partial_0 h_{00} \left( \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2 \end{cases} \quad (11.40)$$

Assumendo che il campo sia stazionario,  $\partial_0 h_{00} = 0$ , quindi la seconda equazione è nulla (e può essere scritta come  $v/c = 0$ , che è una delle ipotesi). Nella prima possiamo assumere:  $\frac{\partial x^0}{\partial \tau} = 1$  quindi

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (11.41)$$

Ricordando che per un potenziale Newtoniano  $\Phi$  vale l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

e che  $F = -\nabla U \Rightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = -\nabla \Phi$ , assieme alla 11.41:

$$-\frac{1}{2} \nabla h_{00} = \frac{\partial^2 x^i}{c^2 \partial t^2} \Rightarrow h_{00} = 2 \frac{\Phi}{c^2}$$

e quindi

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

sicché:

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

e, considerato che  $T_{00} = \rho c^2$ , assieme all'equazione di Poisson, troviamo:

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (11.42)$$

Quindi, per le equazioni di campo ci si aspetta qualcosa del tipo

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Dobbiamo fare qualche ipotesi sul tensore  $G_{\mu\nu}$ :

1. Deve trasformarsi come un tensore
2. deve essere lineare nelle derivate seconde e nei prodotti di due derivate prime della metrica
3. deve essere simmetrico come  $T_{\mu\nu}$
4. Deve conservare  $T_{\mu\nu}$  *i.e.*  $T_{\mu\nu;\nu} = 0$
5. Si deve ridurre a  $G_{00} = \nabla^2 g_{00}$  in approssimazione di campo debole

Dobbiamo dunque costruire un tensore di rango 2, che legghi il tensore energia-impulso alla curvatura e la cui divergenza covariante sia nulla. Per fare ciò, abbiamo a disposizione due tensori: il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  e lo scalare di Ricci

moltiplicato per la metrica  $g_{\mu\nu}R$ . In generale potremo scrivere una combinazione lineare dei due:

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R$$

in cui le costanti possono essere determinate dalle 5 ipotesi di cui sopra. Appliciamo la conservazione dell'energia (ipotesi 4)  $D_\nu G_{\mu\nu} = 0$  tenendo conto dell'identità di Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu} = 0 \quad (11.43)$$

Contraiamo la 11.43 sul primo e III indice del primo termine, ricordando le simmetrie del tensore di Riemann:

$$\begin{aligned} & g^{\lambda\nu} (R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu}) = \\ & = g^{\lambda\nu} (R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} - R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu}) = \\ & = R_{\mu\rho;\sigma} - R_{\mu\sigma;\rho} + R_{\mu\rho\sigma;\nu}^\nu = 0 \end{aligned}$$

contraendo anche gli altri due indici:

$$g^{\mu\rho} (R_{\mu\rho;\sigma} - R_{\mu\sigma;\rho} + R_{\mu\rho\sigma;\nu}^\nu) = R_{;\sigma} - R_{\sigma;\rho}^\rho - R_{\sigma;\nu}^\nu = 0$$

dove il segno - all'ultimo termine viene dall'aver scambiato  $\rho$  con  $\sigma$  per non contrarre indici attigui del tensore di Riemann (che fa 0). In definitiva, siccome  $R_{\sigma}^\nu = g_{\mu\sigma} R^{\mu\nu}$  e  $R_{;\sigma} = R_{;\nu} g_{\sigma}^\nu = g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} R_{;\sigma}$  , :

$$R_{;\sigma} = 2R_{\sigma;\nu}^\nu \Leftrightarrow \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0 \quad (11.44)$$

che ci dice che  $c_2 = 1/2 c_1$  e dunque:

$$G^{\mu\nu} = c_1 \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \quad (11.45)$$

Rimane da determinare la costante  $c_1$  che possiamo determinare imponendo la condizione 5 in campo debole, ovvero quando  $|T_{ij}| \ll |T_{00}| \Rightarrow |G_{ij}| \ll |G_{00}|$ . Se poniamo quindi  $|G_{ij}| \approx 0$  , ciò implica  $R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R$ . Siccome

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = g_{00} R^{00} + g_{ij} R^{ij} \quad (11.46)$$

essendo in regime di campo debole  $g_{ij} = \eta_{ij} \Rightarrow R_{ij} = \frac{1}{2} \eta_{ij} R$ . D'altra parte dalla 11.46:

$$R = \eta_{00} R^{00} + \eta_{ij} \left( \frac{1}{2} \eta^{ij} R \right)$$

ora:  $\eta_{ij} \eta^{ij} = 3$ , quindi:  $R(1 - 3/2) = R^{00}$  ed in fine:

$$R = -2R^{00} \quad (11.47)$$

e l'equazione di campo per la componente 00 diventa:

$$G^{00} = 2c_1 R^{00} \quad (11.48)$$

Cominciamo con lo scrivere  $R_{00} = g^{\mu\nu} R_{\mu 0 \nu 0}$  e riscriviamo la 11.21:

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = \partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu}$$

In un campo stazionario, in cui le derivate temporali si annullano, ponendo  $\mu = \sigma = 0$ , rimane:

$$R_{\lambda 0 \nu 0} = -\partial_\lambda \partial_\nu g_{00}$$

e quindi:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu 0 \nu 0} = R_{00} = -\partial^\nu \partial_\nu g_{00}$$

o, anche, al primo ordine:

$$R_{00} = \left( \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda \right)$$

di nuovo, siccome  $\partial_0 = 0$  nel caso stazionario, rimane:

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda$$

Nel limite di campo debole:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau}$$

quindi:

$$R_{00} = -\partial_\lambda \frac{1}{2} \eta^{\lambda\tau} \partial_\tau g_{00} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda \partial^\lambda g_{00}$$

espandendo la quadridivergenza:  $\partial_\lambda \partial^\lambda = \partial_0^2 - \nabla^2$ , risulta:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$$

Quindi, dalla 11.45 per  $\mu = \nu = 0$  si ha:

$$G^{00} = c_1 \left( R^{00} - \frac{1}{2} g^{00} R \right) = 2c_1 R^{00} = 2c_1 \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$$

avendo tenuto conto della 11.48. Quindi perché la condizione 5 sia soddisfatta deve essere  $c_1 = 1$  ed in definitiva, l'equazione del campo gravitazionale (equazioni di Einstein) è:

$$\boxed{\left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (11.49)$$

La forma alternativa, può essere scritta moltiplicando a sinistra per  $g^{\mu\nu}$ :

$$R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

Ma  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$  dunque:  $-R = \frac{8\pi G}{c^4} T$  e, sostituendo nelle equazioni di Einstein,

$$\frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = R_{\mu\nu} \quad (11.50)$$

Le equazioni di Einstein NON sono lineari, quindi non vale il principio di sovrapposizione per i campi gravitazionali, che può essere invocato solo per campi deboli in una teoria linearizzata. Nel vuoto  $T_{\mu\nu} = 0$  quindi  $R_{\mu\nu} = 0$ . Questo non vuol dire in alcun modo che lo spazio-tempo nel vuoto sia piatto, perché sia piatto c'è bisogno della condizione più forte:  $R_{\mu\nu\rho}^\lambda = 0$ .

### 11.10 Equazioni linearizzate

Consideriamo il caso in cui il tensore metrico differisca poco dal tensore piatto:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (11.51)$$

con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Il tensore metrico è invariante per trasformazioni generiche del tipo  $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$  e la sua trasformazione è

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}$$

Se specializziamo la trasformazione in  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ , i.e.  $x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu(x)$ , allora:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= (\delta_\mu^\rho - \partial_\mu \xi^\rho)(\delta_\nu^\sigma - \partial_\nu \xi^\sigma) g_{\rho\sigma} = \\ &= (\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\sigma \partial_\mu \xi^\rho + \delta_\mu^\rho \partial_\nu \xi^\sigma)(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) = (\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Quindi,

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) \quad (11.52)$$

Possiamo calcolare il tensore di Ricci al primo ordine in  $h$  date le relazioni:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^\sigma &= (\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma) + (\Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha) \\ R_{\mu\rho} &= R_{\mu\rho\sigma}^\sigma \end{aligned}$$

e la 11.17

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right)$$

che al primo ordine diventa:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \left( \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right)$$

É evidente che i termini prodotti delle  $\Gamma$ , sono all'ordine  $O(h^2)$ , quindi rimane solo:

$$R_{\mu\nu} = (\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \quad (11.53)$$

Sviluppriamo le derivate:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \partial_\lambda \left[ \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda + \partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda - \square h_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

similmente:  $\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\lambda\rho} + \partial_\lambda h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\lambda})$

$$\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda + \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\lambda - \partial_\nu \partial_\rho h_\mu^\rho).$$

e, sostituendo: il tensore di Ricci al primo ordine è

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda + \partial_\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h] \quad (11.54)$$

Possiamo usare la libertà di scegliere un sistema di coordinate per semplificare l'ultima espressione. La scelta più conveniente, è la cosiddetta gauge di Lorentz che realizza la condizione:

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \quad (11.55)$$

che è l'analogo della condizione di Lorentz per il potenziale vettore nel campo elettromagnetico ( $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ ) La 11.55, al primo ordine diventa:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}(\partial_{\mu}h_{\rho\nu} - \partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu})\eta^{\lambda\rho} \right] &= \\ &= \frac{1}{2}(\partial^{\nu}h_{\nu}^{\lambda} + \partial^{\mu}h_{\mu}^{\lambda} - \partial^{\lambda}h_{\mu}^{\mu}) \end{aligned}$$

I primi due termini sono uguali, dunque, la condizione di Lorentz è equivalente all'espressione:

$$\partial^{\mu}h_{\mu}^{\lambda} - \frac{1}{2}\partial^{\lambda}h_{\mu}^{\mu} = \partial^{\mu} \left( h_{\mu}^{\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\mu}^{\lambda}h \right) = 0 \quad (11.56)$$

che annulla i termini oltre il d'Alambertiano nella 11.54. Dunque, la 11.50, diventa:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \bar{T}_{\mu\nu} \quad (11.57)$$

dove  $\bar{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$  e  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}h$  è la perturbazione alla metrica che realizza la condizione di Lorentz. L'eq 11.57, è l'analogo della 9.86 per il campo elettromagnetico e si può risolvere con la tecnica della funzione di Green (cap. 9); il risultato è un potenziale ritardato:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\bar{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x \quad (11.58)$$

La conservazione dell'energia, ovvero del tensore energia-impulso,  $\partial_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = 0$  implica  $\partial_{\mu}\bar{T}_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}\partial_{\nu}\bar{T}$ , conseguentemente, per una sorgente contenuta in un volume finito, l'integrale 11.58 soddisfa le condizioni armoniche di Lorentz. Alla 11.58, si può aggiungere una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

che rappresenta la propagazione del campo prodotto dalla sorgente nello spazio con velocità pari a quella della luce.

### 11.10.1 Onde gravitazionali - approssimazione di onda piana

Se consideriamo la trasformata di Fourier di  $h_{\mu\nu}$ :

$$h_{\mu\nu}(x) = \int A_{\mu\nu} e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} dx$$

in cui  $A_{\mu\nu}$  è un tensore di polarizzazione simmetrico; l'equazione delle onde diventa:

$$\eta_{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial^{\nu}A_{\mu\nu}e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} = -\eta_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}A_{\mu\nu}e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} = 0$$

che ci dice che  $k_{\mu}k^{\mu} = 0$  (che è la nota relazione di dispersione  $\omega = ck$ ).

La condizione di Lorentz  $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ , si traduce in:

$$k_\alpha \delta_\mu^\alpha h^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow k_\mu A^{\mu\nu} = 0$$

Ci dice che il vettore numero d'onda è ortogonale al piano di polarizzazione (trasverso) corrisponde a 4 condizioni (quindi, il numero di paramtri indipendenti, da 10 passa a 6). Per un'onda progressiva che si propaga lungo x,  $h_\mu^\nu(t - x/c)$ . Per esteso possiamo scrivere:

$$\partial_\mu h_\nu^\mu = \partial_0 h_0^\nu + \partial_x h_\nu^x = 0$$

, ma per un potenziale ritardato  $\partial_x/c = -\partial_t$ , quindi:  $\partial_t(\bar{h}_\nu^t - \bar{h}_\nu^x) = 0$ , che può essere integrata e si possono porre a 0 le costanti di integrazione.

$$\begin{aligned} \bar{h}_t^t &= \bar{h}_t^x & \bar{h}_x^t &= h_x^x \\ \bar{h}_y^t &= \bar{h}_y^x & \bar{h}_z^t &= \bar{h}_z^x \end{aligned} \quad (11.59)$$

Possiamo ancora sfruttare la possibilità di cambiare il riferimento:  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$  purché  $\eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu x'^\lambda = \square x^\lambda = 0$  per imporre un'altra condizione. Sfruttiamo le 4  $\xi^\mu$  per porre:  $h_x^t = h_y^t = h_z^t = \bar{h}_y^y + \bar{h}_z^z = 0$  che, insieme alle 11.59 danno:

$$\bar{h}_x^t = h_x^x = 0 \quad \bar{h}_t^t = \bar{h}_t^x = \bar{h}_x^T = 0$$

ed infine:  $h_t^t + h_x^x + h_y^y + h_z^z = 0$ . Queste condizioni implicano che in questa gauge (Traceless-Transverse - TT)  $\bar{h}_\mu^\mu = \eta_\nu^\mu (h_\mu^\nu - 1/2 \eta_\mu^\nu h) = h - 4/2 h = -h$  Quindi  $\bar{h}_\nu^\mu = h_\nu^\mu$  nella gauge TT.

Alla fine, gli unici due parametri che rimangono liberi sono  $\bar{h}_y^y$  e  $\bar{h}_z^z$  che, con la condizione di traccia nulla, forniscono l'espressione di

$$\bar{h}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_y^y & h_z^y \\ 0 & 0 & h_z^y & -h_y^y \end{pmatrix} \quad (11.60)$$

### 11.10.2 Effetto delle onde gravitazionali

Consideriamo un onda incidente su un anello circolare di masse nel piano yz (Fig.11.3):

$$\begin{cases} h_{yy} = -h_{zz} = A_+ e^{i\omega(t-x/c)} \\ h_{yz} = -h_{zy} = A_\times e^{i\omega(t-x/c)} \end{cases} \quad (11.61)$$

la distanza fra due punti posti a  $y=0$  e  $y = \ell$  sull'asse y è:

$$\ell' = \int_0^\ell |g_{\mu\nu}|^{1/2} dy = \int_0^\ell |1 + h_{yy}|^{1/2} dy \sim \ell + 1/2 h_{yy} \ell$$

cioé  $\Delta\ell/\ell = h_{yy}/2$  o  $\ell' = \ell(1 + h_{yy}/2)$

Se consideriamo le particelle sugli assi y e z, e  $A_\times = 0$   $A_+ \in \mathfrak{R}$ , then, if at  $t=0$   $\omega(t - x/c) = \pi/2 \Rightarrow h_{yy} = 0$ , dopo un tempo  $t>0$ , con l'aiuto della 11.60:

$$\begin{cases} y(t) = y(0)(1 + \frac{1}{2} A_+ e^{i\omega(t-x/c)}) \\ z(T) = z(0)(1 - \frac{1}{2} A_+ e^{i\omega(t-x/c)}) \end{cases}$$







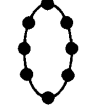

$\omega t$	$h_+$	$h_\times$
0		
$\pi/2$		
$\pi$		
$3\pi/2$		

Figura 11.3: Effetto di un'onda gravitazionale trasversa su un anello di particelle poste nel piano ortogonale alla direzione di propagazione

quindi l'anello si espande lungo  $y$  e si contrae lungo  $z$ .

Nel caso in cui la polarizzazione è  $A_+ = 0; A_\times \neq 0$ :

$$\begin{cases} y(t) = y(0) + 1/2 h_{yz} z(0) = y(0) + 1/2 A_\times e^{i\omega(t-x/c)} z(0) \\ z(t) = y(0) - 1/2 h_{yz} z(0) \end{cases}$$

cioè, quando l'esponente è  $\pi/2$ :

$$\begin{cases} y(T/4) = y(0) + \frac{1}{2} A_\times z(0) \\ z(T/4) = y(0) - \frac{1}{2} A_\times z(0) \end{cases}$$

che è equivalente al caso precedente ruotato di  $\pi/4$ .

## 11.11 Cenni sulla produzione di onde gravitazionali

Partiamo dall'equazione di campo linearizzata:

$$(\partial_\mu \partial^\mu) h^{\nu\sigma} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\nu\sigma} \quad (11.62)$$

e la conservazione dell'energia-impulso:

$$\partial_\nu T^{\nu\sigma} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{0\sigma} + \partial_i T^{\sigma i} = 0$$

In primis,

$$\int \partial_0 T^{0\nu} d^3x = - \int \partial_i T^{i\nu} d^3x = \int_S T^{i\nu} dS_i$$

L'integrale sulla superficie va a 0 e quindi:

$$\partial_0 \int T^{0\nu} d^3x = 0 \Rightarrow \int T^{0\nu} d^3x = \text{const.} \quad (11.63)$$

Che rappresenta la conservazione del 4-impulso:  $\dot{P}^\nu = 0$  e corrisponde alla conservazione della massa/energia (componente 0) e della quantità di moto. Poiché ci interessa solo la variazione temporale, possiamo porre la costante a 0 e ottenere:

$$\int T^{0\nu} d^3x = 0$$

d'altra parte, per la 11.58.:

$$\bar{h}^{0\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \bar{T}^{0\nu} d^3x \quad (11.64)$$

quindi:

$$\bar{h}^{0\nu} = 0; \quad (11.65)$$

Ora prendiamo la parte spaziale della legge di conservazione, moltiplicata per  $x^k$

$$\partial_t \int T^{0j} x^k d^3x = - \int \partial_i T^{ij} x^k d^3x$$

Riscriviamo il II membro come:

$$- \left( \int \partial_i (T^{ij} x^k) d^3x - \int T^{ij} \partial_i x^k d^3x \right)$$

Il primo addendo va a 0 nell'integrazione, quindi:

$$\partial_t \int T^{0j} x^k d^3x = - \int T^{ij} \partial_i x^k d^3x$$

Ovvero, per la componente 0:

$$\dot{d}^k = \int T^{0k} d^3x = 0 \quad (11.66)$$

dove

$$d^k = \int T^{00} x^k d^3x$$

è il momento di dipolo. Prendendo la componente 0 della conservazione di T, moltiplicata per  $x^j x^k$ :

$$\frac{1}{c} \partial_t \int T^{00} x^j x^k d^3x = - \int \partial_i T^{i0} x^j x^k d^3x = - \left[ \int \partial_i (T^{i0} x^j x^k) d^3x - \int T^{i0} \partial_i (x^j x^k) d^3x \right]$$

Ancora, il termine di divergenza svanisce e rimane:

$$\int T^{i0} \frac{1}{2} (\delta_i^j x^k + \delta_i^k x^j) d^3x = \int T^{j0} x^k d^3x$$

dove si è simmetrizzato sulla derivata di  $x^j x^k$ . Infine, derivando ancora ambo i membri rispetto al tempo:

$$\frac{1}{c} \partial_t \partial^t \int T^{00} x^j x^k d^3x = 2 \partial_t \int T^{0j} x^k d^3x = 2 \int T^{kj} d^3x \quad (11.67)$$

Quindi, definendo il momento di quadrupolo:

$$q^{jk} = \frac{1}{c} \int T^{00} x^j x^k d^3x \quad (11.68)$$

possiamo riscrivere dall'equazione 11.67

$$\int T^{jk} d^3x = \frac{1}{2} \ddot{q}^{jk}$$

E l'equazione d'onda diventa:

$$\square h^{\tau\sigma} = \frac{4\pi G}{c^4} \ddot{q}^{\tau\sigma} \quad (11.69)$$

La soluzione è la stessa trovata per le onde elettromagnetiche con le funzioni di Green:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(t - (x - x')/c)}{|x - x'|} d^3x' \quad (11.70)$$

Se guardiamo la radiazione da lontano rispetto alle dimensioni del radiatore ( $|x - x'| \ll x$ ), allora:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x, t) = \frac{4G}{c^4 x} \int T^{\mu\nu}(t - x/c) d^3x'$$

e, quindi per la parte spaziale:

$$\bar{h}^{ij}(x, t) = \frac{2G}{c^4 x} \ddot{q}^{ij} \quad (11.71)$$

Dunque, il dipolo non entra nella produzione di onde gravitazionali, che, invece sono causate dall'accelerazione del quadrupolo di massa, con un fattore di accoppiamento che vale:

$$\frac{2G}{c^4} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}}{(3 \cdot 10^8)^4} = 1.64 \cdot 10^{-44}$$

Dunque, la produzione è altamente inefficiente per oggetti poco massicci e/o poco accelerati.

### 11.11.1 Esempi di produzione di GW

In generale, nella 11.71 dobbiamo tener conto che per la gauge TT, la variazione della metrica è a traccia nulla, quindi possiamo scrivere

$$\bar{q}^{ik} = \int \rho(x - t/c) [x^i x^k - \alpha \delta^{ik} q] d^3x$$

affinché la traccia sia nulla

$$\delta_{ik} \bar{h}^{ik} \propto \bar{q}_i^i = \delta_{ik} [x^i x^k - \alpha \delta^{ik} q] = 0$$

$\delta_{ik} \delta^{ik} = 3$  quindi  $0 = \bar{q}_i^i = q_i^i - 3\alpha q_i^i$  ovvero  $\alpha = 1/3$  Quindi possiamo scrivere:

$$\bar{q}^{ik} = \int \rho(x - t/c) \left[ x^i x^k - \frac{1}{3} \delta^{ik} q \right] d^3x \quad (11.72)$$

Consideriamo due sfere compatte di ugual massa che ruotano attorno al comune centro di massa con velocità angolare  $\omega_{orb}$  attorno all'asse  $x_3$ , le coordinate di una sfera a distanza  $r_0$  dal c.d.m.  $x_1$  e  $x_2$  sono:

$$\begin{cases} x_1 = r_0 \cos(\omega_{orb}t) \\ x_2 = r_0 \sin(\omega_{orb}t) \end{cases}$$

Dunque, considerato che le sfere sono identiche, per l'emissione di GW possiamo scrivere:

$$\begin{cases} Q^{11} = 2Mr_0^2 \left( \cos^2(2\omega_{orb}t) - \frac{1}{3} \right) \\ Q^{22} = 2Mr_0^2 \left( \sin^2(2\omega_{orb}t) - \frac{1}{3} \right) \\ Q^{21} = Q^{12} = Mr_0 \cos(2\omega_{orb}t) \sin(2\omega_{orb}t) \\ Q^{33} = -\frac{1}{3}Mr_0^2(x^3)^2 \end{cases}$$

L'ultimo termine non varia nel tempo, quindi scompare con la derivata e non c'è emissione di onde gravitazionali. L'ampiezza dell'onda in un punto a distanza  $R$  dall'osservatore sull'asse  $z$  è:

$$\begin{cases} \bar{h}^{xx} = -\bar{h}^{yy} = \frac{8G}{Rc^4} Mr_0^2 \omega_{orb}^2 \cos(2\omega_{orb}t) \\ \bar{h}^{xy} = -\bar{h}^{yx} = -\frac{8G}{Rc^4} Mr_0^2 \omega_{orb}^2 \sin(2\omega_{orb}t) \end{cases}$$

Se troviamo la frequenza di orbitale con la gravità Newtoniana e usiamo i dati di una tipica stella di neutroni:

$$GM^2/r_0^2 = M\omega_{orb}^2 r_0$$

con  $r_0 = 20km$ ,  $M = 1.4M_\odot = 3 \cdot 10^{30}kg$ , introducendo il raggio di Schwarzschild della sfera  $r_s = 2GM/c^2 = 4.5km$  otteniamo una frequenza orbitale  $f_{orb} = 317Hz$  e, a meno di qualche fattore 4, ad una distanza di  $R = 15Mpc = 15 \cdot 3.26 \cdot 10^6 ly = 15 \cdot 3.26 \cdot 10^6 \cdot 3.15 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^8 = 4.5 \cdot 10^{23}m$ :

$$|h| = \frac{r_{s1}r_{s2}}{Rr_0} \simeq 10^{-21}m/m$$

Prendiamo come riferimento il raggio classico del protone  $\sim 1fm = 10^{-15}m$ , lo spostamento indotto su una distanza di 1 km è  $10^{-3}$  volte il raggio del protone!