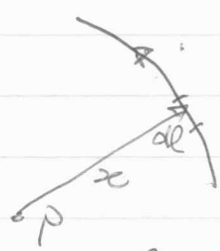
Richiami di Magnetismo

Nel 1819 Oersted osservò che fili percorsi da corrente inducevano deviazioni nei dipoli magnetici permanenti posti nelle loro vicinanze $\Rightarrow$ erano sorgenti di un campo magnetico. Ampère & Biot & Savart stabilirono le basi sperimentali e le leggi per legare il vettore induzione magnetica $\vec{B}$ alla corrente e le leggi di forza fra fili percorsi da corrente.

La legge di Ampère dice che se $d\vec{l}$ è un elemento di filo percorso da una corrente I e $\vec{x}$ è il vettore coordinata dell'elemento al punto di osservazione P $\Rightarrow$ il flusso di induzione magnetica nel punto P generato da dl è:



$$d\vec{B} = kI\frac{(d\vec{l}\times\vec{x})}{|x|^3}$$

che è una legge (come quella di Coulomb) che va col quadrato^{-1} della distanza..

Questa legge ha senso solo come elemento di una somma su un insieme continuo che rappresenta l'induzione magnetica di un circuito. ~~chiuso~~

Il vettore induzione magnetica per una carica in moto con $v \ll c$ è

$$B = kq\frac{\vec{v}\times\vec{x}}{|x|^3}$$

valida se si trascurano le accelerazioni e dipendente dal tempo. Se però integriamo la formula di Ampère su un circuito otteniamo risultati fisici.

Nel sistema internazionale (SI) $k = \mu_0/4\pi = 10^{-7}\,N\,A^{-2}$ (H/m)

$$\Rightarrow [B] = N A^{-1} m^{-1} = [m l^2 t^{-2} l^{-1} q t^{-1}] = [m l^0 t^{-3} q]$$

$$[E] = V m^{-1} = [m l^2 t^{-2} q^{-1} l^{-1}] = [m l t^{-2} q^{-1}]$$

$$\left[\frac{B}{E}\right] = \frac{N A^{-1} m^{-1}}{V m^{-1}} = \frac{N}{AV} = \frac{[m l^2 t^{-2}]}{[q t^{-1} m l^2 t^{-2} q^{-1}]} =$$

$$E = \frac{N}{C} \Rightarrow \frac{B}{E} = \frac{\cancel{N}}{Am}\frac{C}{\cancel{N}} = \frac{C}{Am} = \left[\frac{q}{q t^{-1} l}\right] = \left[\frac{1}{v}\right]$$

dunque cB ha le stesse dimensioni di E.

Integrando la legge di Ampére per un filo rettilineo:

$$|B| = \frac{\mu_0}{4\pi} I R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{|R^2+l^2|^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$$

$$\frac{dl \times x}{x^3} = \frac{dl\, x \sin\theta}{x^3} \qquad \sin\theta = \frac{R}{x} \Rightarrow R\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{x^3}$$

Legge di Biot - Savart

Siccome abbiamo visto che un elemento di corrente produce un'induzione magnetica $\Rightarrow$ possiamo parlare della forza che agisce su un elemento di corrente in un campo di induzione magnetica

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Se il campo di induzione è dovuto ad un circuito $\Rightarrow$ la forza ~~corrente~~ che il circuito 1 subisce per effetto della corrente nel circuito 2 sarà:

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12})}{|x_{12}|^3}$$

ricordando il prodotto vettore triplo $A \times B \times C = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$

$$\Rightarrow F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \left[-(dl_1 \cdot dl_2)\frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} + dl_2 \frac{(dl_1 \cdot x_{12})}{|x_{12}|^3} \right]$$

il II termine nell'integrale è un differenziale esatto integrato su dl_1 $\left(\frac{dx_{12}}{|x_{12}|^3} = \frac{d}{dx_{12}} \frac{1}{|x_{12}|} \right) \Rightarrow$ se l'integrazione è su una linea chiusa fa $\emptyset$ $\Rightarrow$

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|x|^3}$$

$\Rightarrow$ Per due fili paralleli separati da una distanza d la forza per unità di lunghezza è diretta perpendicolarmente ai fili

$$\frac{dF_{12}}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\vec{d}_{12}}{|d|^3} I_1 I_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$$

La forza è attrattiva se le correnti fluiscono nello stesso senso e viceversa...

Se una densità di corrente $\vec{J}(x)$ è in un campo di induzione $\vec{B}(x)$
$\Rightarrow$ la forza sulla distribuzione è:

$$F = \int \vec{J}(x) \times B(x) \, d^3x$$

La legge base dell'induzione magnetica si può scrivere in forma generale per una densità di corrente $J(x)$

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(x') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$$

Analogamente a quanto fatto per il campo elettrico possiamo scrivere

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{J(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

da cui segue che $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$ prima legge della magnetost.

Dalla stessa eq^ne integrale:

$$\vec{\nabla} \times B = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{J(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x$$

usando $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left(\nabla \cdot \int \frac{J(x')}{|x - x'|} d^3x' \right) - \int J(x') \nabla^2 \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right]$$

ma $\nabla \left(\frac{1}{|x - x'|} \right) = -\nabla' \frac{1}{|x - x'|}$ e $\nabla^2 \left(\frac{1}{|x - x'|} \right) = -4\pi \delta(x - x')$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int J \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d^3x' + \mu_0 J(x)$$

integrando per parti il primo addendo

$$\int \vec{J} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|x - x'|} \right) d^3x = \nabla \int \frac{\vec{J} \cdot \vec{n}}{|x - x'|} ds - \nabla \int \frac{\nabla' \cdot J(x')}{|x - x'|} d^3x$$

$\emptyset$

$\nabla' \cdot J = 0$ per correnti continue $\Rightarrow$

$$\boxed{\nabla \times B = \mu_0 J}$$

II eq^ne della magnetostatica

è la legge di Ampère

$$\int_S (\vec{\nabla} \times B) \cdot \vec{n} \, ds = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow \oint_\ell B \cdot dl \Rightarrow \mu_0 I$$

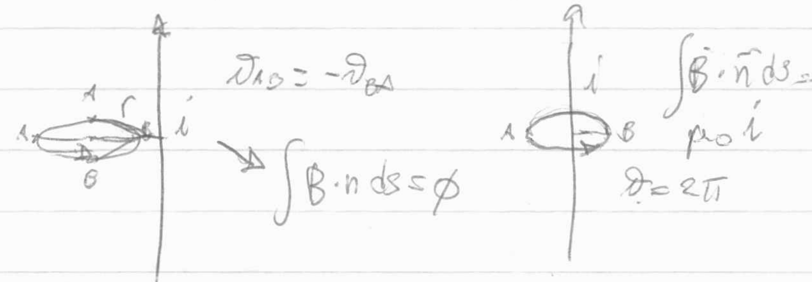
Possiamo ricavarla anche dalla legge di Biot-Savart per un filo indefinito.

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\, i \cdot d\vec{l} \qquad \text{ma} \qquad \frac{dl}{r} = d\vartheta$$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} d\vartheta \qquad \text{se lo facciamo su un percorso chiuso}$$

$\Rightarrow$ due casi



Ancora teoria di Drude:

Effetto Hall.

Supponiamo che un elettrone abbia impulso $\vec{p}(t)$ la sua velocità sarà $\frac{p(t)}{m}$ $\Rightarrow$ la densità di corrente è

$$J = -\frac{n e p(t)}{m}$$

calcoliamo l'impulso al tempo $t+dt$: se nell'intervallo dt c'è una collisione con probabilità $\frac{dt}{\tau}$, la probabilità che al tempo $t+dt$ non abbia subito collisioni è $1 - \frac{dt}{\tau}$, se invece subisce collisioni la sua velocità è determinata dalla forza che subisce: $f(t)$

$\Rightarrow$ acquisirà un impulso $f(t)dt$

$\Rightarrow$ il contributo degli elettroni che non collidono fra t e $t+dt$ sarà

$$= dp_1 = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \frac{p(t+dt)}{\cancel{m}} = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)\left(p(t) + \overset{f(t)}{\frac{dp}{dt}}dt\right)$$

$$\Rightarrow p(t) - \left(\frac{dt}{\tau}\right)p(t) + f(t)dt + O(dt^2)$$

Il contributo degli elettroni che hanno subito una collisione è $\frac{dt}{\tau}\frac{dp}{dt}dt = O(dt^2) \Rightarrow$ trascurabile

$$\Rightarrow p(t+dt) - p(t) = -\left(\frac{dt}{\tau}\right)p(t) + f(t)dt$$

$$\Rightarrow \frac{dp(t)}{dt} = -\frac{p(t)}{\tau} + f(t)$$

Se consideriamo un cavo che trasporta corrente in un campo di induzione $\vec{B}$ $\Rightarrow$ gli elettroni subiranno una forza che è data dal campo $\vec{E}$ applicato $F_E = -eE$ e dal campo di induzione

$$F_B = \cancel{\frac{\mu_0}{4\pi}} e\vec{v} \times \vec{B} = -\cancel{\frac{\mu_0}{4\pi}} e \frac{\vec{p}(t)}{m} \times \vec{B} \leftarrow \left(F = \int J(x) \times B \, d^3x = = \int d^3x \, ne\vec{v} \times B \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dp(t)}{dt} = -e\left(\vec{E} + \cancel{\frac{\mu_0}{4\pi}} \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{B}\right) - \frac{p(t)}{\tau}$$

dunque supponendo $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ e $B = (0, 0, B_z)$

possiamo scomporre nelle componenti x e y:

$$\frac{dp_x}{dt} = -eE_x + \cancel{\frac{\mu_0}{4\pi}} e p_y B_z - \frac{p_x}{\tau}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -eE_y + \cancel{\frac{\mu_0}{4\pi}} e p_x B_z - \frac{p_y}{\tau}$$

Per corrente continua $\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow$ dette $\omega_c = \frac{\cancel{\mu_0} Be}{\cancel{4\pi} m}$ (frequenza di ciclotrone)

$$\Rightarrow \begin{cases} eE_x = -\omega_c p_y - \frac{p_x}{\tau} \\ eE_y = \omega_c p_x - \frac{p_y}{\tau} \end{cases}$$

moltiplicando per $-\frac{ne\tau}{m} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_0 E_x = \omega_c\tau J_y + J_x \\ \sigma_0 E_y = -\omega_c\tau J_x + J_y \end{cases}$

dunque c'è una componente del campo in direzione y

$$E_y = -\frac{\omega_c\tau}{\sigma_0} j_x = -\frac{\mu_0 B}{4\pi ne} J_x$$

nell'ipotesi che non ci sia corrente in direzione trasversa al filo

— o —

Conducibilità vs frequenza

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p(t)}{\tau} + f(t) \qquad f(t) = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

$$-i\omega p_0 = -p_0/\tau - eE_0$$

$$p_0\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right) = -eE_0 \qquad j = -ne\frac{p}{m}$$

$$\Rightarrow j_0\left(\frac{1-i\tau\omega}{\tau}\right) = +\frac{ne^2}{m}E_0 \Rightarrow j = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{E_0}{1-i\omega\tau}$$

$$= \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}E_0$$

Questo produce una dipendenza della densità di carica da ω

Infatti se $\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ Equazione di continuità

$$\nabla \cdot j(\omega) = i\omega\rho(\omega) \qquad \nabla \cdot E = \rho/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow i\omega\rho(\omega) = \rho(\omega)\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 i\omega\, \rho(\omega) = \rho(\omega)\sigma(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega\varepsilon_0} = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\omega = -i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0}$$ è la condizione che deve verificare la frequenza

affinché si possa propagare una onda di densità di carica
La natura di queste onde, note come oscillazione di plasma, o plasmone si può capire con un modello semplice...

Effetto termoelettrico nella teoria di Drude.

La velocità elettronica media, dovuta ad un gradiente di temperatura si può calcolare dall'energia termica per elettrone $\mathcal{E}(T)$. Un elettrone che ha subito l'ultima collisione in x' avrà un energia termica $\mathcal{E}(T(x'))$; gli elettroni che arrivano ad x dal punto a temperatura maggiore avranno, in media, l'ultima collisione in $x - v\tau$ e dunque la loro energia sarà $\mathcal{E}(T(x-v\tau))$. Il loro contributo alla corrente sarà
$j^q(T>) = \frac{n}{2} v\, \mathcal{E}(T(x-v\tau))$ analogamente, quelli provenienti dall'altro lato: $j^q(T<) = \frac{n}{2}(-v)\,\mathcal{E}(T(x+v\tau))$

Dunque il flusso di energia dovuto allo spostamento di cariche è

$$j^{(q)} = \frac{1}{2} n v\left(\mathcal{E}(T(x-v\tau)) - \mathcal{E}(x+v\tau)\right) =$$

$$= n v^2 \tau \overbrace{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}}^{c_v}\left(-\frac{dT}{dx}\right) \qquad \langle v^2\rangle = \frac{1}{3}v^2 \Rightarrow \boxed{j^q = \frac{1}{3} v^2 \tau c_v(-\nabla T)}$$

la velocità dovuta al gradiente di temperatura, analogamente è

$$v_Q = \frac{1}{2}\left[v(x-v\tau) - v(x+v\tau)\right] = -\tau v\frac{dv}{dx} = -\tau\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle = \frac{1}{3}v \Rightarrow v_Q = -\frac{\tau}{6}\frac{d}{dx}v^2 = -\frac{\tau}{6}\frac{dv^2}{dT}\nabla T$$

Conduzione nei materiali semiconduttori:

I materiali semiconduttori sono tipicamente della classe degli isolanti covalenti. Tipici sono il silicio il germanio (gap 1,12 (300k), 0,67)
Il carbonio in forma di diamante è più un isolante (5.5 eV) mentre ~~il piombo~~ lo stagno nelle forme allotropiche (N) + $\overset{P}{B}$ $\frac{Se}{Te}$
In meccanica quantistica sono permesse solo energie multiple di una energia minima e vale l'espressione (funzione d'onda)
$\psi = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ ~~$E_n = \hbar\omega_n$~~ ove ω è la frequenza che la funzione d'onda delle particelle considerate può assumere. Se la nostra particella è confinata in un volume L^3 => in ogni direzione sarà $\omega_{min} = \frac{2\pi}{L}/n$.
L'equazione che dà l'energia è l'eqne di Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} = E_n\psi_n \quad \text{se non varia nel tempo}$$

sostituendo la nostra ψ => $\frac{\hbar^2}{2m}k^2\psi_n = E\psi_n$ => $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

ove $k_{min} = \frac{2\pi}{L}$ => Il numero di valori di k permessi per una determinata energia nel volume $V = L^3$ è dato dal rapporto fra la "sfera" di raggio k e il cubo di lato k_{min} => $N = \frac{4/3\,\pi k^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{6\pi^2}k^3$. In realtà se consideriamo gli elettroni, questi hanno due possibili orientazioni di spin per ciascun k => $N = \frac{V}{6\pi^2}k^3 \times 2 = \frac{V}{3\pi^2}k^3$
ma per l'eqne di Schrödinger

$$E = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) \Rightarrow k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}$$

=> $\frac{N}{V} = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2} = n$. La densità degli stati ad energia E sarà:

$$\boxed{\frac{dn}{dE} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2}E^{1/2} = D(E)}$$

Se in un semiconduttore alla temperatura T ipotizzo che il numero di portatori in banda di conduzione sia dato dalla statistica di Boltzmann $n_c(T) = \int_{E_c}^{\infty} D(E)\,e^{-\frac{E-\mu}{kT}}\,dE =$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\mu}{kT}} \int_{E_c}^{\infty} (E-E_c)\, e^{-\frac{E}{kT}} dE = 2\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\mu-E_c}{kT}} = n_c(T)$$

analogamente, per le lacune in banda di valenza

$$p_v = 2\left(\frac{m_h kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\frac{E_v-\mu}{kT}}$$

Il prodotto di $n_c p_v$ non dipende da μ ma solo dalla differenza $E_c - E_v = -E_g$ $\Rightarrow$ $np = 4\left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^3 (m_e m_h)^3 e^{-E_g/kT}$

Siccome in un s.c. intrinseco $n = p \Rightarrow n = 2\left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$

La mobilità intrinseca è la grandezza della velocità di drift per unità di campo $\mu = \frac{|v|}{E}$ ed è positiva sia per gli elettroni sia per le lacune.

La conducibilità è la somma

$$\sigma = (ne\mu_e + pe\mu_h)$$

Nella teoria di Drude si era trovato $v = \frac{e\tau E}{m} \Rightarrow \mu_e = \frac{e\tau_e}{m_e}$ $\mu_h = \frac{e\tau_h}{m_h}$. Le mobilità dipendono da T con una legge di potenza modesta $\Rightarrow$ σ è dominata dai termini esponenziali

$$\sigma = \left(\frac{2e^2\tau_e}{m_e}\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} + \frac{2e^2\tau_h}{m_h}\left(\frac{m_h kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right] e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

$$= \left[2e^2\left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\left(\tau_e m_e^{1/2} + \tau_h m_h^{1/2}\right)\right] e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

~~Compatte~~ Potenziale vettore

Abbiamo visto che $B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{J(x')}{|x-x'|}d^3x'$

da cui segue la $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$. In analogia con quanto fatto in elettrostatica per il potenziale E.S., possiamo definire un potenziale vettore $\vec{A}$ tale che $B(x) = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x + \vec{\nabla}\psi \qquad (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi=0)$$

Il gradiente aggiuntivo deriva dal fatto che possiamo liberamente scegliere un potenziale vettore $\vec{A}+\vec{\nabla}\psi$ senza che ciò cambi $\vec{B}$. Questa scelta ci permette di dare a $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ il valore che ci serve

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0 J \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

possiamo scegliere ψ tale che $\nabla\cdot A=0$ (gauge di Coulomb)

$\nabla\cdot(A+\nabla\psi)=0 \Leftrightarrow \nabla^2\psi=0$ $\qquad \boxed{\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}}$

$\Rightarrow \psi = cost.$

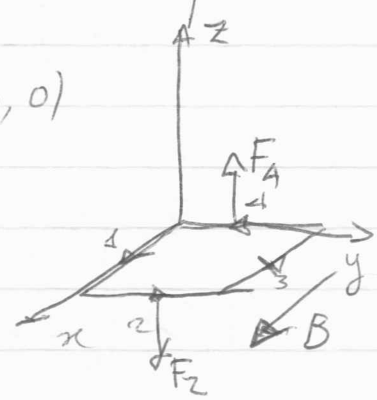
Forze agenti su una spira percorsa da corrente in un campo

$F_1 = I_x d\vec{l}_1\times\vec{B}$ $\qquad \vec{B}=(0,B,0)$

$F_2 = I_y dl_2\times\vec{B}$

$F_3 = -I_x dl_3\times\vec{B}$

$F_4 = I dl_4\times B$



$d\vec{l}_1\times\vec{B} = dl_3\times B = 0$

$F_2 = I\, d\vec{l}_2\times\vec{B}$

$F_4 = -I\, dl_4\times B$ $\qquad$ ci sono due forze uguali ed opposte applicate ad una distanza dl $\Rightarrow$ c'è un momento della forza $|\vec{M}|=|\vec{F}\times d\vec{l}| = I dl^2 B$ $dl^2 IB$ proporzionale all'area della spira $dl^2=A$ in direzione z

$\Rightarrow \vec{m} = I l^2\hat{k}$ $\Rightarrow$ possiamo definire un momento di dipolo magnetico $\vec{M}$ tale che il momento della forza sia $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{m} = I l^2\hat{k}$

$\Rightarrow$ la spira si comporta come un ago magnetico

Campo magnetico di una distribuzione localizzata di corrente

Studiamo le proprietà di una distribuzione di corrente in una regione di spazio piccola rispetto al raggio di osservazione $|\vec{x}| >> |\vec{x}'|$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots$$

$$\Rightarrow A_i(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|x|}\int J_i(x')\, d^3x' + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot\int J_i(\vec{x}')\vec{x}'\, d^3x' + \dots\right]$$

se $f(\vec{x}')$ e $g(\vec{x}')$ sono funzioni continue $\forall x$ e derivabili di x'

$\Rightarrow$ vale la: $\int [f(x') J(x')\cdot\nabla' g + g J\cdot\nabla' f + fg\nabla'\cdot j]\, d^3x' = 0$

se $j(x')$ è localizzato

Infatti, integrando per parti il II termine $fgj - \int f\cdot\nabla(gj) =$

$fgj - [\int fg\nabla'\cdot j + \int f j\cdot\nabla' g]$ si annulla con il primo termine e il III

Se $f=1$ $g=x'$ $\Rightarrow \int J(x')\, d^3x' + \int x'\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{j} = 0$

da cui se $\vec{\nabla}'\cdot\vec{j} = 0 \Rightarrow \int \vec{J}(x')\, d^3x' = \emptyset \Rightarrow$ il termine di monopolo è assente.

Se poniamo $f = x'_i$ $g = x'_j$, sempre per $\vec{\nabla}'\cdot\vec{j} = 0$

$$\int x'_i j_j + x_j j_i\, d^3x = 0 \Rightarrow$$

il II termine dello sviluppo si può scrivere come:

$$\vec{x}\cdot\int x' j_i\, d^3x = \Sigma_k x_k \int x'_k j_i\, d^3x$$

$$= -\frac{1}{2}\Sigma_k x_k \int (x'_i j_k - x'_k j_i) = -\frac{1}{2}\left[\vec{x}\times\int(\vec{x}'\times\vec{J})\, d^3x\right]_i$$

da cui possiamo definire la densità di momento magnetico o magnetizzazione $\vec{M}(x) = \frac{1}{2}[\vec{x}\times\vec{J}]$ e il suo integrale come il momento magnetico $\vec{m}$

$$m = \frac{1}{2}\int \vec{x}'\times\vec{j}(x')\, d^3x$$

$$\Rightarrow \vec{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

e $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right]$ ove $\vec{n}$ è il versore di $\vec{x}$

Se la corrente fluisce in un circuito chiuso $\Rightarrow$

$$m = \frac{1}{2}\oint_l \vec{x}\times d\vec{l}\,\underbrace{\int \vec{j}(x')\cdot\vec{n}\, dS'}_{I} = \frac{1}{2} I \oint \vec{x}\times d\vec{l}$$

Siccome $\frac{1}{2}|\vec{x}\times d\vec{l}| = dS \Rightarrow |m| = I \times S$ come mostrato per le spire
Se la distribuzione di corrente è data da molte cariche q_i con masse M_i in moto con velocità $v_i \Rightarrow$ la densità di corrente è data da $\vec{J} = \sum_i q_i \vec{v}_i \, \delta(x - x_i)$
$\Rightarrow m = \frac{1}{2}\sum_i q_i(\vec{x}_i \times \vec{v}_i)$ $\quad \vec{x}_i \times \vec{v}_i$ è proporzionale al momento

orbitale dell'i-ma particella $L_i = \vec{x}_i \times \vec{P}_i = M_i \vec{x}_i \times \vec{v}_i$
$\longrightarrow m = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{M_i}\vec{L}_i$
Se tutte le particelle hanno lo stesso rapporto $\frac{q_i}{M_i} \to \frac{e}{M_e}$
hanno $\Rightarrow m = \frac{e}{2M_e}\sum_i \vec{L}_i = \frac{e\vec{L}}{2M_e}$.

Per il momento angolare intrinseco (spin) bisogna moltiplicare per un fattore (rapporto giromagnetico) ≈ 2.
Si può mostrare che all'ordine più basso, la forza che agisce su una distribuzione localizzata di corrente è
$F = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$
La torsione totale (momento delle forze) di una corrente localizzata è
$$\vec{N} = \int x' \times [\vec{j}\times\vec{B}(0)]\, d^3x$$

$B_k(x) = B_k(0) + x \cdot \vec{\nabla} B_k(0) + \ldots$ $\quad \hookrightarrow \int (\vec{x}\cdot\vec{B})\vec{j} - (\vec{x}\cdot\vec{j})\vec{B}\, d^3x$
$\hookrightarrow m\times B \qquad \hookrightarrow = 0$

$\Rightarrow N = \vec{m}\times\vec{B}(0)$
L'energia potenziale la ricaviamo dalla forza:
~~$U = -\nabla F = -\nabla(\nabla(m\cdot B))$~~ $\quad F = -\nabla U = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$
$\Rightarrow U = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -mB\cos\theta \qquad N = mB\sin\theta$
~~Un momento~~. $N = -\frac{\partial U}{\partial\theta} \Rightarrow$ un dipolo di momento m in un campo tende ad orientarsi in direzione di B per minimizzare l'energia

Campo microscopico dovuto alla presenza di atomi vicini con un momento magnetico intrinseco $m \Rightarrow \nabla \cdot B_{mic} = 0$, se facciamo la media su un volume macroscopico viene $\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow$ possiamo usare il concetto di potenziale vettore $\vec{A}$ tale che $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Consideriamo la magnetizzazione media o densità di momento magnetico $M = \sum_i N_i \langle m_i \rangle$ ed una corrente macroscopica $\Rightarrow$ in un vol. ΔV al punto x' sarà:

$$\Delta A = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{J(x')}{|x-x'|}\Delta V + \frac{M(x') \times (x-x')}{|x-x'|^3}\Delta V\right]$$

o, al continuo $A = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{J(x')}{|x-x'|} + \frac{M(x') \times (x-x')}{|x-x'|^3}\right] d^3x'$

ma il II termine lo possiamo scrivere come:

$$+\int M(x') \times \nabla'\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) d^3x'$$

integrando per parti:

$$\emptyset \Leftarrow \int \frac{M(x')}{|x-x'|} dS' - \int \frac{1}{|x-x'|} \nabla' \times \vec{M}(x')\, d^3x'$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J(x') + \vec{\nabla}' \times \vec{M}(x')}{|x-x'|} d^3x'$$

che corrisponde al potenziale vettore generato da una corrente:

$$J(x') + \nabla \times M$$

Quindi è come se nel circuito circolasse una corrente efficace dovuta alla magnetizzazione media $J_M = \nabla \times M$

L'equazione macroscopica, corrispondente a quella microsc.

$\nabla \times B_{mic} = \mu_0 J_{mic}$ diventa:

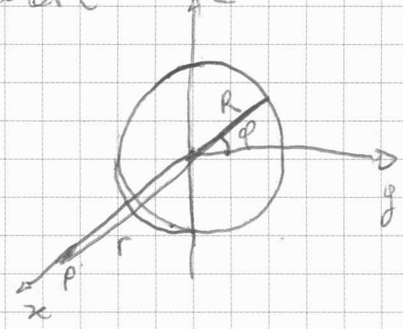
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[J + \nabla \times M\right] \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) = J$$

Questo ci porta a definire un campo $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ che prende il nome di camp. magnetico ed ha lo stesso ruolo del campo di induzione elettrica per i dielettrici

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = J \qquad \Leftrightarrow \quad \mu_0 (H + M) = B$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

Campo di una spira circolare



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \times \vec{R}}{|\vec{r}|^3}$$

Calcoliamo il campo sull'asse $\vec{x}$

$r = \{x, R\cos\varphi, R\sin\varphi\}$

$l = \{0, R\cos\varphi, R\sin\varphi\} \Rightarrow dl = \{0, -R\sin\varphi\, d\varphi, R\cos\varphi\, d\varphi\}$

$$dl \times r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -R\sin\varphi & R\cos\varphi \\ x & R\cos\varphi & R\sin\varphi \end{vmatrix} = \int \hat{i}\left[-R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\right] + \hat{j}(-R^2 x \cos^2\varphi) + \hat{k}(-R x \sin\varphi)\; d\varphi$$

$\Rightarrow$ ~~sull'asse~~ integrando in $d\varphi$ da 0 a 2π viene solo la componente x $\Rightarrow$ $B_x = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{|R^2+x^2|^{3/2}}$

Proprietà magnetiche della materia

In un ~~mezzo~~ solenoide inseriamo un materiale $\Rightarrow$ il valor del campo diventa $|B| = \mu I n$ con $\mu = \mu_0 \mu_r$.
μ_r è adimensionale è la permeabilità magnetica relativa del mezzo.
Possiamo pensare che la differenza rispetto al valore nel vuoto sia dovuto ad una corrente che circola nel solenoide.
Se B_0 è il campo che si avrebbe nel vuoto:

$$B_0 - B = \mu_0 I n - \mu_0 \mu_r I_n = \mu_0 (1 - \mu_r) I n$$

$$\Rightarrow I' n' = (\mu_r - 1) I n.$$

E' come se avessimo un avvolgimento percorso da n' spire per unità di lunghezza, percorso dalla corrente I' che si aggiunge a quella reale.
Possiamo definire la suscettività magnetica $\chi = \mu_r - 1$ che tiene conto della differente polarizzabilità magnetica del mezzo. In funzione di χ, le sostanze sono:
Diamagnetiche: per $\chi < 0 \Rightarrow \mu_r < 1$
Paramagnetiche: $\chi > 0 \Rightarrow \mu_r > 1$
Ferromagnetiche: sostanze per cui χ (μ_r) non è costante rispetto ad I

Precessione di Larmor

In assenza di campo, nel modello di Bohr dell'atomo, la forza centrifuga contrasta l'attrazione elettrostatica:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = m r_0 \omega_0^2 \qquad r_0 = \text{raggio atomico}$$

$\Rightarrow \omega_0 = \pm \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{m r_0^3} \right)^{1/2}$ il segno $\pm$ per indicare che l'orbita può essere anche retrograda. Se aggiungiamo un campo magnetico:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} + e v B_0 = \frac{m v_0^2}{r_0} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} + e r_0 \omega_0^2 B_0 = m \omega^2 r_0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m r_0^3} + \frac{e}{m}B_0\omega \Rightarrow \frac{e}{2m}B_0 = \omega_L \quad \text{pulsazione di Larmor}$$

$$\omega^2 - 2\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}$$

$$= \omega_L \pm \omega_0\sqrt{1+\frac{\omega_L}{\omega_0}} \simeq \pm\omega_0 + \omega_L$$

Per avere un'idea della validità dell'approssimazione, calcoliamo

$$\omega_0 \left[\frac{1}{4\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{(1.602\cdot 10^{-19}C)^2}{0.9\cdot 10^{-30}\,kg}\right)\frac{1}{(0.53\cdot 10^{-10}m)^3}\right]^{1/2}$$

$4\cdot 10^{16}$ giri/s $\Rightarrow$ la nostra approssi. è valida finché

$$\omega_L \ll 4\cdot 10^{16} \Rightarrow \frac{e}{2m}B_0 \ll 4\cdot 10^{16} \Rightarrow B_0 \ll \frac{2m}{e}4\cdot 10^{16} = 4.5\,10^5\frac{Wb}{m^2}$$

L'elettrone che si muove attorno al nucleo, corrisponde ad una corrente $I = \frac{e\omega_0}{2\pi} = \frac{1.6\cdot 10^{-19}C\cdot 4.10^{16}\,s^{-1}}{6.28} = 1.06\times 10^{-3}\,A$

$\Rightarrow$ l'atomo di idrogeno avrà un momento magnetico:

$$m = \mu_0 I S = \mu_0 I \pi r_0^2 = 12.56\cdot 10^{-7}\cdot 1.06\times 10^{-3}\cdot 3.14\cdot (0.53\times 10^{-10})^2$$

$= 1.165\,\frac{Wb}{m}\times 10^{-29}$

Polarizzazione delle molecole in un campo magnetico

Prendiamo il solito atomo di idrogeno col piano dell'orbita ortogonale al campo $\vec{B}^*$, dal punto di vista delle proprietà magnetiche, la presenza della precessione di Larmor si può schematizzare con una corrente in senso opposto a quella dell'elettrone:

$$i_L = \frac{e\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2B^*}{4\pi m}$$

a cui corrisponde un momento magnetico $m_L = \mu_0 S i_L = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^2}{m}S B^* = \frac{\mu_0}{4}\frac{e^2}{m}r_0^2 B^*$ opposto al campo B^*. $\Rightarrow$ Possiamo definire la polarizzabilità dovuta alla precessione di Larmor $\alpha = -\frac{\vec{m}_L}{\vec{B}_0}\left(= \frac{\mu_0}{4}\frac{e^2}{m_e}r_0 \text{ per l'idrogeno}\right)$

~~mentre~~ A questo si sovrappone la polarizzabilità per orientamento di molecole aventi un proprio momento magnetico, in cui si può fare la stessa trattazione di quella elettrica ed favorisce una disposizione parallela al campo

con $\alpha_0 = \vec{m}_0/\mu_0\vec{B}^*$

Abbiamo visto che in un materiale con una polarizzazione media $M \neq 0$, in ogni punto esiste una densità di corrente
$$J_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}.$$
Questo comporta che sulle superficie del materiale ci sia una corrente.
Consideriamo un cilindro di materiale magnetico uniformemente magnetizzato in direzione del suo asse $\Rightarrow M = M_x \quad M_y = M_z = 0$ all'interno, fuori anche $M_x = 0 \Rightarrow$
$$J_{Mx} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \; ; \; J_{yM} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \; ; \; J_{Mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}$$
$$\Rightarrow J_{Mx} = 0 \; ; \; J_{My} = \frac{\partial M_x}{\partial z} \; ; \; J_{Mz} = -\frac{\partial M_x}{\partial y}$$

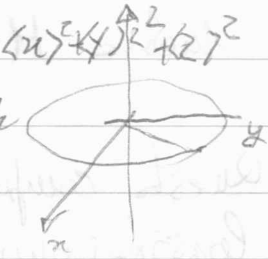
Nei punti interni al cilindro, siccome $M_x = \text{cost}$, la corrente è nulla. Non così sulla superficie dove c'è la discontinuità de M_x a $\emptyset$ $\Rightarrow$ c'è una densità di corrente che scorre lungo la superficie laterale del cilindro

Diamagnetismo:

Tutte le sostanze subiscono la precessione di Larmor che da luogo ad un momento magnetico molecolare medio m_L e dunque ad un'intensità media di magnetizzazione $M = n\, m_L$ con verso opposto a quello del campo. Come si è visto, però, questa intensità è molto piccola $\left(m_L = \frac{\mu_0}{4} \frac{e^2}{m} B^* r_0^2\right)$ e dunque è completamente mascherata dalla polarizzazione per orientamento di quelle molecole che abbiano un momento magnetico proprio che invece si orientano in direzione del campo.
Per le sostanze che abbiano ~~momento~~ intrinseco nullo $\Rightarrow$
$$M = -n \alpha_L B^*$$ ove B^* rappresenta il campo di induzione sulla molecola in esame generato da tutte le molecole che la circondano
~~$H = \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{B}{\mu_0} - n\alpha B^*$~~
$\Rightarrow$ Come per il campo elettrico interno $H^* = H + \frac{1}{3} M$

$m_L = \frac{\mu_0 Z e^2 B}{4m}\langle\rho\rangle^2$ $\langle\rho\rangle^2$ è il quadrato della distanza media perpendicolare dell'elettrone dall'asse del campo $\langle r\rangle^2 = \langle x\rangle^2+\langle y\rangle^2+\langle z\rangle^2$

$\langle\rho\rangle^2 = \langle x\rangle^2+\langle y\rangle^2$. Per una distribuzione di carica sfericamente simmetrica $\langle x\rangle^2=\langle y\rangle^2=\langle z\rangle^2 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \langle r\rangle^2 = \frac{3}{2}\langle\rho^2\rangle \Rightarrow m_L = \mu_0 Z e^2 B\,\frac{2}{3}\,\frac{\langle r^2\rangle}{4m}$$

$$= \frac{\mu_0 Z e^2 B^*}{6m} \Rightarrow \cancel{\alpha_L =}\ M = -n\alpha_L B^* \Rightarrow$$

Il problema di calcolare la suscettività magnetica si riduce a calcolare ~~la~~ $\langle r\rangle^2$ per la distribuzione degli elettroni.

$$\begin{cases} H = \frac{B}{\mu_0} - M \\ H^* = H + \frac{1}{3}M \end{cases} \Rightarrow H = H^* - \frac{1}{3}M \quad H^* - \frac{1}{3}M = \frac{B}{\mu_0} - M \Rightarrow B = \mu_0\left(H^* + \frac{2}{3}M\right)$$

$$\Rightarrow B = \underbrace{\mu_0 H^*}_{B^*} + \frac{2}{3}\mu_0 M \Rightarrow B^* = B - \frac{2\mu_0}{3}M$$

d'altra parte $M = -n\alpha_L B^* = -n\alpha_L\left(B - \frac{2\mu_0}{3}M\right)$

$$\Rightarrow M = -\frac{n\alpha_L B}{1 - \frac{2\mu_0}{3}n\alpha_L} = +\frac{\chi}{\mu_0}B \quad \text{avendo posto}$$

$$\chi = -\frac{n\alpha_L}{1 - \frac{2}{3}\mu_0 n\alpha_L} \qquad \chi = \frac{\mu_0 M}{B}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{B}{\mu_0} - \frac{\chi}{\mu_0}B = \frac{1}{\mu_0}(1-\chi)B$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 H(1+\chi) \Rightarrow \cancel{\alpha}$$

Paramagnetismo

Sono quelle sostanze che si polarizzano in direzione del campo
Vale anche qui l'espressione di Langevin

$$M = n m_0 L(a) \qquad a = \frac{m_0 H^*}{kT}$$

Il campo H^*, nel caso di molecole aventi momento magnetico proprio non si può esprimere come $H + \frac{1}{3}H$ ma può essere generalizzato come $\vec{H}^* = \vec{H} + N\vec{M}$ con N costante di Weiss dipendente dalla sostanza. Le sostanze paramagnetiche propriamente dette sono quelle per cui $NM \ll H \Rightarrow H^* \simeq H$

$$M = \cancel{nM_0}\ \underbrace{n m_0}_{M_s} L\left(\frac{m_0 H}{kT}\right) \simeq n m_0 \frac{m_0 H}{3kT} = \frac{n m_0^2 H}{3kT} = \cancel{\mu_0}\chi H$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{n m_0^2}{3\cancel{\mu_0}kT} \Rightarrow H = \frac{B}{\mu_0} - M \Rightarrow \mu_0 H = B - \mu_0 M$$

$$= B - \mu_0 \chi H \Rightarrow \mu_0 H(1+\chi) = B \Rightarrow \mu_0(1+\chi) = \mu_0 \mu_r$$

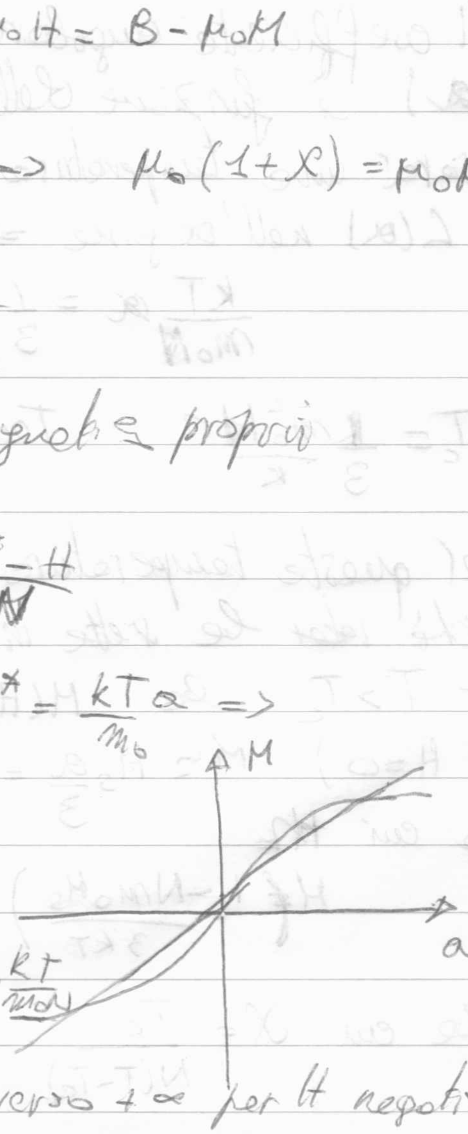
$\chi > 0 \Rightarrow$ sostanze diamagnetiche

Ferromagnetismo.

- Le molecole hanno un momento magnetico proprio
- NM è grande

$$\Rightarrow \vec{H}^* = \vec{H} + N\vec{M} \Rightarrow M = \frac{H^* - H}{N}$$

Secondo Langevin $a = \frac{m_0 H^*}{kT} \Rightarrow H^* = \frac{kTa}{m_0} \Rightarrow$



$$\Rightarrow M = \frac{kT}{m_0 N} a - \frac{H}{N}$$ è una retta

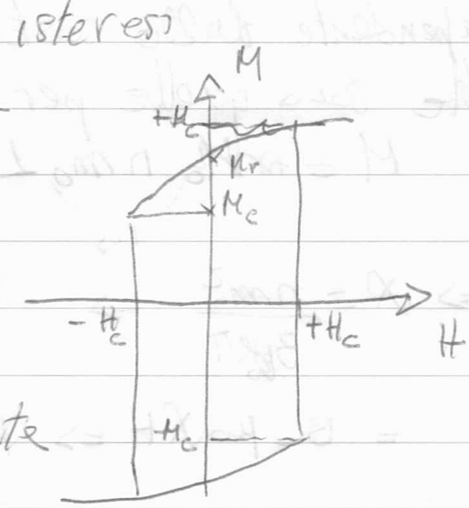
nel piano (M, a) di coeff angolare $\frac{kT}{m_0 N}$ e intercetta $-\frac{H}{N}$. Al crescere di H si sposta solo l'intercetta verso $-\infty$ (verso $+\infty$ per H negativi)

Per ogni H esisto una retta nel piano (M, a) che interseca $L(a)$ in un punto che rappresenta il valore di M per quell'H => si può costruire la curva $M = f(H)$. Si vede che per $H=0$

$M = \frac{kT}{m_0 N} a \neq 0$ => magnetizzazione residua.

Quando la retta è tangente a $L(a)$ l'intensità di magnetizzazione subisce una discontinuità e passa da positiva a negativa. Il valore del campo per cui avviene ciò si chiama forza coercitiva e si indica con $-H_c$. Per i punti intermedi alle due tangenti la funzione $f(H)$ non è univoca => isteresi

Il valore asintotico per $H \to \infty$ è la ~~M~~ intensità di magnetizzazione di saturazione M_s



Il coefficiente angolare della retta $M(a)$ è funzione della temperatura

Ci sarà una temperatura per cui è tangente a $L(a)$ nell'origine =>

$$\frac{kT}{m_0 N} a = \frac{1}{3} a n m_0$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{1}{3} \frac{m_0^2 N n}{k} \quad \text{Temperatura di Curie}$$

Per questa temperatura la sostanza perde le proprietà ferromagnetiche perché ~~retta~~ la retta interseca $L(a)$ solo nell'origine

Per $T > T_c$ la $M(H)$ è univoca e si può scrivere (nei pressi di $H=0$) $M = M_s \frac{a}{3} = \frac{M_s m_0 H^*}{3kT} = \frac{M_s m_0}{3kT}(H + NM)$

da cui

$$M\left(1 - \frac{N m_0 M_s}{3kT}\right) = \frac{M_s m_0}{3kT} H \Rightarrow M = \frac{\frac{M_s m_0}{3kT}}{1 - \frac{N m_0 M_s}{3kT}} H = \frac{T_c / N}{T - T_c} H$$

da cui $\chi = \frac{T_c}{N(T - T_c)}$.

Cenni di teoria quantistica del paramagnetismo

Il momento magnetico di un atomo nello spazio libero è dato da

$m = \gamma \hbar J$ ove $J = L + S$ è il momento angolare totale e g

$= -g\mu_B J$

il fattore di Landé μ_B il magnetone di Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$

Quando si considera l'interazione con il campo magnetico, l'energia è $\mathcal{E} = -\vec{m}\cdot\vec{B} = \mu_B(L - g_0 S)\cdot B$

I valori che la componente secondo la direzione di B che i momenti possono assumere sono quantizzati $\Rightarrow$ interi $\Rightarrow$ se per es.

$L = 1 \Rightarrow L_z = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$ in generale si hanno $(2L+1)$ valori per L_z e $2(S+1)$ valori per S_z

$\Rightarrow \mathcal{E}_B = \mu_B(L_z + 2S_z)B$

Lo spin dell'elettrone è $S = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ un solo elettrone in una shell contribuisce con due possibili stati di $S_z = \pm\frac{1}{2}$

Gli atomi che hanno tutte le shell complete hanno $S_z = S_{z1} + S_{z2} = 0$ e $J_z = 0$ $\Rightarrow$ non c'è contributo del momento angolare e conta solo la parte spaziale (Diamagnetica)

Se si ha 1 elettrone su una shell con momento angolare nullo (shell S, per es.) $\Rightarrow \mathcal{E}_B = \mu_B 2 S_z B$

$\Rightarrow$ ci sono 2 possibili energie: $\pm\mu_B B$.

In un tale sistema a 2 livelli, se si è in equilibrio con la temperatura $\Rightarrow \frac{N_1}{N} = \frac{e^{(\mu_B B/k_B T)}}{e^{(\mu_B B/kT)} + e^{-\mu_B B/kT}}$ e $\frac{N_2}{N} = \frac{e^{-\mu_B B/kT}}{(+) + (-)}$

$\Rightarrow$ la magnetizzazione media sarà data dalla differenza fra N_1 e N_2 moltiplicato per la magnetizzazione del singolo atomo

$\Rightarrow M = N\mu(th(x))$ $\quad x = \frac{\mu_B B}{k_B T}$

per $x \ll 1$ $\quad th(x) \simeq x \Rightarrow M \simeq N\mu\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)$

In un atomo con numero quantico ~~orbitale~~ totale J, abbiamo $2J+1$ livelli energetici equispaziati $\Rightarrow$ la magnetizzazione è data da $\quad M = N g J \mu_B B_J(x)$

con $x = gJ\mu_B B / k_B T$ $\quad$ e $\quad B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \operatorname{cth}\left(\frac{(2J+1)x}{2J}\right) - \frac{1}{2J} \operatorname{cth}\left(\frac{x}{2J}\right)$

di cui la precedente è il caso particolare per $J = \frac{1}{2}$

Di nuovo, per $x \ll 1 \Rightarrow \operatorname{cth}(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$

$\Rightarrow M \simeq \frac{N J(J+1)}{3 k_B T} g^2 \mu_B^2 = \frac{C}{T}$

C è noto come la costante di Curie.

Correnti indotte: legge di Faraday-Neumann

Se ad un circuito elettrico si avvicina un magnete, nel circuito si innesca un passaggio di corrente la cui intensità è $\neq 0$ solo finché il magnete è in moto rispetto al circuito: CORRENTE INDOTTA

Si deve a ~~Faraday~~ Neumann l'aver dedotto una legge generale che si esprime così: Per indurre una corrente in un circuito è necessario far variare il flusso del vettore B concatenato col circuito $\Phi(B)$.

L'intensità di corrente sarà:

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

e dunque la forza elettromotrice: $f = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$

Il segno $-$ indica che la f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera: quindi la corrente che circola nel circuito genera un campo magnetico che si sottrae a quello induttore.

La presenza di una corrente indotta indica la presenza di un campo elettrico indotto E_i, non conservativo che mette in moto le cariche anche in assenza di una ddp ai capi del circuito tale che $f = \int_{P_1}^{P_2} E_i \times dl$ in un tratto di circuito $P_1 P_2$

se $P_1 = P_2 \Rightarrow \oint E_i \cdot d\vec{l} = f = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$

Se definiamo il campo elettrico come la somma del campo statico E_s e di quello indotto E_i: $E = E_s + E_i$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{essendo } \oint E_s \cdot dl = 0$$

Legge di Faraday-Neumann

$$\Phi(B) = \int \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{n}\, dS = \oint E \cdot dl =$$

$$= -\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n}\, dS \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{dB}{dt}} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

Dobbiamo distinguere il caso del flusso "tagliato" dal circuito da quello "concatenato" con esso.

Flusso tagliato; quando il circuito o una sua parte si muove in un campo magnetico (o viceversa) $\Rightarrow$ la f.e.m. è quella dovuta alla forza di Lorentz $F = -e\vec{v}\times\vec{B} = -e\frac{d\vec{x}}{dt}\times\vec{B}$

$F = qE$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $E = \vec{v}\times\vec{B} = \frac{d\vec{x}}{dt}\times B$

~~Siccome~~ $\int E\cdot dl = -\int\frac{d\vec{x}}{dt}\times B\cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt}$

infatti $d\vec{x}\times B\cdot dl = \vec{B}\cdot dl\times d\vec{x} = d\Phi(B)$ flusso attraverso l'area $d\vec{l}\times d\vec{x}$ tagliata dal circuito nel tempo dt

Flusso concatenato: circuiti fissi e indeformabili percorsi da correnti variabili nel tempo

Autoinduzione

Un circuito percorso da una corrente variabile nel tempo produce un campo B variabile nel tempo che induce una f.e.m. indotta nel circuito stesso. Supponiamo di essere in un mezzo di permeabilità magnetica costante μ (e il vuoto lo è) e che la corrente sia costante lungo il circuito $\Rightarrow \nabla\cdot j = 0 \Rightarrow$ il flusso sarà proporzionale ad i tramite la:

$$\Phi(B) = L\,i$$

essendo L il coefficiente di autoinduzione

$$[L] = \left[\frac{V/m^{2}\,m^{2}\,s}{A}\right] = \Omega\, s = \text{Henry} \Leftarrow E\cdot dl = L\,di$$

$$\int_{P_1}^{P_2} E\cdot dl = V(P_2) - V(P_1) = L\frac{di}{dt} = \Delta V$$

Dunque se chiudiamo un circuito con una resistenza R, la ~~differenza di potenziale~~ corrente indotta varierà come $-L\frac{dI}{dt} = RI \Rightarrow$

$$-\frac{dI}{I} = \frac{R}{L}dt \Rightarrow -\ln\frac{I}{I_0} = \frac{R}{L}t \qquad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Energie del C.M.

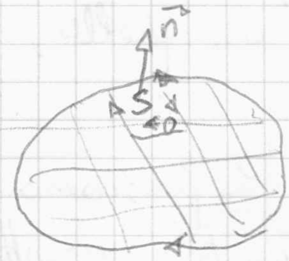
~~La~~ variazione di energia di una particella di velocità v sotto una forza $\vec{F}$ è $\frac{dE}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}$, con il campo elettrico indotto $\vec{E}'$

su ciascun elettrone di conduzione, la ~~forza~~ variazione di energia sarà $q\vec{v}\cdot\vec{E}'$ per unità di tempo per elettrone $\Rightarrow$ sommando sugli elettroni troviamo che le sorgenti compiono del lavoro per mantenere le correnti:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -I\mathcal{E} = I\frac{dF}{dt}$$

$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = I\,\delta F$.

Stabiliamo qual'è il lavoro compiuto per ottenere una corrente stazionaria. Supponiamo che $\nabla\cdot\vec{J} = 0$ sempre $\Rightarrow$ la distribuzione delle correnti si può schematizzare come una griglia di circuiti ciascuno dei quali racchiude una superficie ~~ΔS~~ S e con sezione del filo $\Delta\sigma$ $\Rightarrow$ l'incremento di lavoro fatto contro le ~~forze~~ f.e.m. indotte, in termini del cambio nell'induzione nel circuito è: $\Delta(\delta\mathcal{L}) = J\Delta\sigma\int_S \vec{n}\cdot\delta\vec{B}\,dS$



$= J\Delta\sigma\int_S (\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})\cdot\vec{n}\,dS =$

$= J\Delta\sigma\oint_C \delta\vec{A}\cdot d\vec{l}$ ma $\Delta\sigma\,dl = d^3x \Rightarrow$

$\delta\mathcal{L} = \int\delta\vec{A}\cdot J\,d^3x$,

Siccome $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \delta\mathcal{L} = \int\delta A\cdot(\nabla\times H)\,d^3x$

ma $\delta A\cdot\nabla\times H = \vec{\nabla}\cdot(\vec{H}\times\delta\vec{A}) + \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})$, se la distribuzione di J è localizzata $\Rightarrow$ il primo termine svanisce

$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = \int\vec{H}\cdot\delta\vec{B}\,d^3x$ che vale qualunque sia la sostanza. Se poi c'è relazione lineare fra B e H (Dia o Para-magnetiche) $\Rightarrow H\cdot\delta B = \frac{1}{2}\delta(H\cdot B) \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\int\vec{H}\cdot\vec{B}\,d^3x$

o, analogamente $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int \vec{J} \cdot \vec{A} \, d^3x$

Possiamo scrivere quest'ultimo, esplicitando l'espressione per $\vec{A}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3x \int d^3x' \frac{J(x) \cdot J(x')}{|x - x'|}$

Se abbiamo un insieme di N circuiti indipendenti, l'integrale di sopra si può spezzare nella somma degli integrali su ciascun circuito: $\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_1^N{}_i \int d^3x_i \sum_1^N{}_j d^3x'_j \frac{J(x_i) \cdot J(x'_j)}{|x_i - x'_j|}$

per $i = j$ ho: $\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \int_{C_i} d^3x_i \int_{C_i} d^3x'_i \frac{J(x_i) \cdot J(x'_i)}{|x_i - x'_i|} = L I^2$

che indica l'energia dovuta all'auto-induzione nel circuito i-simo

con $L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \int_{C_i} d^3x_i \int_{C_i} d^3x'_i \frac{J(x_i) \cdot J(x'_i)}{|x_i - x'_i|}$

per $i \neq j$ ho un termine che indica l'induzione del circuito i su quello j che posso scrivere come

$$\sum_1^N{}_i \sum_{j>i} M_{ij} I_i I_j$$

che definiscono i coefficienti di induzione mutua M_{ij} simmetrici rispetto agli indici. Questi possono essere espressi anche in funzione del flusso. Infatti

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \int d^3x_i \int d^3x'_j \frac{J(x_i) \cdot J(x'_j)}{|x_i - x'_j|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_i S_j} \frac{ds_i \cdot ds'_j}{|x_i - x'_j|}$$

ma l'integrale in d^3x' è $A(x_i)$ causato dalla corrente I_j che scorre nel j-mo circuito. Se trascuriamo le dimensioni trasversali dell'i-mo circuito $\Rightarrow$ $J(x'_i) d^3x \simeq \underbrace{J \cdot dl}_{\to J} \, ds$

dove ds è l'elemento di area e dl l'elemento longit.

$$\Rightarrow M_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} I_i \oint \vec{A}_{ij} \cdot d\vec{l}$$ dove A_{ij} è il potenziale vettore causato dal j-mo circuito sull'i-mo

$$\Rightarrow M_{ij} = \frac{1}{I_j} \underbrace{\int_{S_i} (\nabla \times A_{ij}) \cdot n \, dS}_{\Phi_{ij}(B)} = \frac{1}{I_j} \Phi_{ij}(B)$$

Esempio: ho due solenoidi concentrici uno con N_1 spire l'altro con N_2; se nel primo passa una corrente I_1, il campo all'interno è $B = \frac{\mu_0}{\cancel{d\pi}} N_1 I_1$. Il solenoide 2 ~~taglia~~ concatena il flusso $B \cdot S$ con N_2 spire $\Rightarrow$ la f.e.m. nel sol. 2 sarà $\mathcal{E}_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt} = -\mu_0 N_2 N_1 S \frac{dI_1}{dt}$

*

* Riassumendo:

1) Un circuito percorso da una corrente variabile I genera un campo magnetico B. Il flusso di B attraverso la superficie ~~del circu~~ sottesa dal circuito è:

$\Phi = L\overset{*}{I}$ con L coefficiente di auto-induzione

$$[L] = [\Phi(B)]\, A^{-1} = [B]\, m^{-2} A^{-1} = N A^{-1} m^{-1} m^{-2} A^{-1} = N A^{-2} m^{-3} = \text{Henry}$$

2) Un circuito (j) in presenza di un altro circuito (i) percorso da corrente variabile nel tempo I_i è percorso da una corrente

$$I_j = -\frac{1}{R}\dot{\Phi}_i(B) = M_{ij}\overset{*}{I}_i$$

con M_{ij} coefficiente di induzione mutua

- Nel caso di solenoidi $B = \mu I N \Rightarrow$

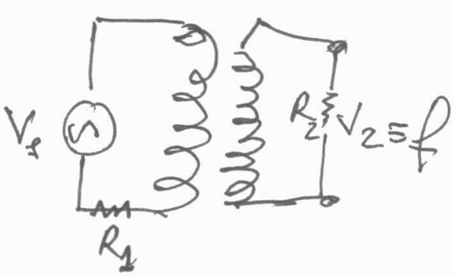
$\Phi(B) = \mu I N S \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \mu \dot{I} N S \Rightarrow L = \mu N S$ per la superficie di 1 spira $\Rightarrow$ per N spire $\Rightarrow L = \mu N^2 S$

ove N è per unità di lunghezza

- si è visto che $M_{12} = \mu N_1 N_2 S$

Per due solenoidi con flusso comune:
in 2 viene indotta una tensione:

$f \equiv V_2 = M_{12}\frac{dI_1}{dt}$



La ~~carica~~ corrente in (2) indurrà una corrente in (1) $\Rightarrow$ le equazioni saranno:

$$\begin{cases} R_1 i_1 = V_1 - L_1\frac{di_1}{dt} - M_{12}\frac{di_2}{dt} \\ R_2 i_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} - M_{21}\frac{di_1}{dt} = f_2 \end{cases}$$

$\Phi(B) = \Phi_1(B) + \Phi^*$

$\Phi^* = B_2 S_1 = \mu i_2 N_2 S_1 = \mu i_2 N_2 N_1 S$

se $\frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow$ e $i_2 = 0$

$\Rightarrow R_1 i_1 = V_1 - L_1\frac{di_1}{dt}$ $\qquad i_1 = i_1^0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, $\quad V_1 = V_0^1 e^{i\omega t}$

$R_1 i_1 e^{i\varphi} = V_1 - j L_1 i\omega i_1 e^{i\varphi} \Rightarrow V_1 = i_1(R_1 + j\omega L_1 \cancel{e^{i\varphi}})e^{i\varphi}$

La corrente di spostamento

Nelle eq^{ni} di Maxwell trovate fino ad ora:

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho & \text{coulomb} \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} & \text{Faraday} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times H = J & \text{Ampere} \\ \nabla \cdot B = 0 & \text{Monopolo} \end{cases}$$

c'è un'inconsistenza, dovuta al fatto che la legge di Ampere è stata ricavata per $\nabla \cdot J = 0$

In generale, invece $\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0$

$\Rightarrow$ nell'eq^{ne} che descrive la legge di Ampère possiamo sostituire a $J \to J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$

Il termine aggiunto, si chiama corrente di spostamento

Dunque l'insieme delle equazioni di Maxwell è:

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \end{cases}$$

che si può rendere uniforme rispetto a E, B

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times B = \mu J + \mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

dalla II $\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi$

$\Rightarrow E = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$

Dalla IV $\nabla \times B = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu J + \mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \mu j + \mu\varepsilon \left[-\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right]$

$\Rightarrow \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A + \nabla \left[\nabla \cdot A + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \mu \varepsilon \right] = \mu J$

Siccome il campo varia col tempo $\Rightarrow$ c'è un campo elettrico

$\Rightarrow$ ~~E_y~~ $\nabla \times H = \sigma E$

Supponiamo ci sia solo $H_x(z,t) = H_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}$

$$\Rightarrow \nabla \times H = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \underbrace{\sigma E_y}_{J_y} = -\frac{1+i}{\delta} H_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}$$

$\Rightarrow$ ~~E_y~~ che da luogo ad una corrente superficiale

$I_y = \int J_y \, dz$ che come si vede decade per $z \gg \delta$

La corrente di spostamento

Nelle eq^{ni} di Maxwell trovate fino ad ora:

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho & \text{Coulomb} \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} & \text{Faraday} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times H = J & \text{Ampere} \\ \nabla \cdot B = 0 & \text{Monopolo} \end{cases}$$

c'è un'inconsistenza, dovuta al fatto che la legge di Ampere è stata ricavata per $\nabla \cdot J = 0$

In generale, invece $\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0$

$\Rightarrow$ nell'eq^{ne} che descrive la legge di Ampère possiamo sostituire a $J \to J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

Il termine aggiunto, si chiama corrente di spostamento

Dunque l'insieme delle equazioni di Maxwell è:

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \end{cases}$$

che si può rendere uniforme rispetto a E, B

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times B = \mu J + \mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

dalla II: $\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi$

$$\Rightarrow E = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Dalla IV: $\nabla \times B = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu J + \mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \mu J + \mu\varepsilon \left[-\frac{\partial \nabla\Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right]$

$$\Rightarrow \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A + \nabla \left[\nabla \cdot A + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \mu\varepsilon \right] = \mu J$$

①

Posso sfruttare la possibilità di definire $\vec{A}$ a meno del gradiente di uno scalare $A' = A + \nabla u$ per imporre che

$\nabla\cdot A + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\mu\varepsilon = 0$. Però se cambio A in A' cambio anche E

↳ Gauge di Lorenz

Infatti da $E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow E' = -\nabla\Phi' - \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\frac{\partial u}{\partial t}$

perché E' sia $= E$ deve essere $\boxed{\Phi' = \Phi - \frac{\partial u}{\partial t}}$

$\Rightarrow$ con queste scelte di Gauge abbiamo

$$\nabla^2 A - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J$$

che è un equazione delle onde con un termine disomogeneo

Inoltre, posta la condizione di Lorenz

$$\nabla\cdot A + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\mu\varepsilon = 0$$

Se $A \to A' = A + \nabla u$ e $\Phi' = \Phi - \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \nabla\cdot A' + \frac{\partial\Phi'}{\partial t} =$

$\Rightarrow$ ~~$\nabla\cdot A\ \mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla^2 u$~~

$$= \nabla\cdot(A + \nabla u) + \mu\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) =$$

$$= \left[\nabla\cdot A + \mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] + \nabla^2 u - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ci dà una condizione sul potenziale scelto $\Rightarrow$

$$\nabla^2 u - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Dalle I eq^ne di Maxwell e dalla $E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$

$\Rightarrow \nabla\cdot E = +\rho/\varepsilon = \nabla\cdot\left(-\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = -\nabla^2\Phi - \nabla\cdot\frac{\partial A}{\partial t}$

ma $\nabla\cdot A = -\mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t} \Rightarrow$ ~~$\nabla^2\Phi + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \rho/\varepsilon$~~

$$\nabla^2\Phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu J + \mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B = -\left[\mu \frac{\partial J}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right]$$

ma $\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} - \nabla^2 E$

$$\Rightarrow \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0} - \nabla^2 E = -\mu \frac{\partial J}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = +\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\nabla \rho + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right]}$$

analogamente

$$\boxed{\nabla^2 B - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t} = -\mu \vec{\nabla} \times \vec{J}}$$

$$\mu\varepsilon = \frac{1}{c^2}$$

Caso dell'isolante isotropo e omogeneo ($J = 0$, $\rho = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \ddot{E} = 0 \\ \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \ddot{B} = 0 \end{cases}$$

Sviluppo in onde piane $B = (B_x\ B_y\ B_z)$ $E = (E_x, E_y, E_z)$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

da $\nabla \times B = \mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial E_z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

Possiamo ri-ricavare l'eq^{ne} di continuità dalla I e dalla IV

infatti $\nabla\cdot(\nabla\times B) = \mu(\nabla\cdot j) + \mu\varepsilon \frac{\partial(\nabla\cdot E)}{\partial t}$

ma $\nabla\cdot(\nabla\times B) = 0 \Rightarrow \forall v$ $\quad \nabla\cdot(\mu j + \mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}) = 0$

$\Rightarrow \nabla\cdot j = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot E \qquad \nabla\cdot E = \rho/\varepsilon \Rightarrow \nabla\cdot j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Le eq^{ni} delle onde con il termine disomogeneo: tipo

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} = f(x,t)$$

Si possono risolvere con le cosiddette funzioni di Green.

se Φ ammette la trasformata di Fourier, e pure f

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$\Rightarrow$ le trasformate soddisfano l'eq^{ne} disomogenea di Helmoltz

$$(\nabla^2 + k^2)\,\phi(x,\omega) = -4\pi f(x,\omega) \qquad \forall\omega$$

La funzione di Green associata a questa eq^{ne} è quella funzione $G_k(x,x')$ che soddisfa l'eq^{ne}

$$(\nabla^2 + k^2)\,G_k(x,x') = -4\pi\delta(x-x')$$

Se non ci sono superfici di contorno $\Rightarrow G$ è a simmetria sferica

$\Rightarrow$ può dipendere solo da R, usando il laplaciano in coordinate sferiche $\nabla_r^2 G = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(Gr)$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}(Gr) + k^2(Gr) = 0 \Rightarrow rG = Ae^{ik\cdot r} + Be^{-ik\cdot r}$, $\quad G(R) = A\frac{e^{ik\cdot r}}{R} + \frac{Be^{-ik\cdot R}}{R}$

$= AG^+(R) + BG^-(R)$

Se consideriamo anche la parte dipendente dal tempo $G^\pm(R,t)e^{i\omega t'}$ soddisfa la

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(x,t,x',t) = -4\pi\delta(x-x')\,\delta(t-t')$$

$\Rightarrow G^\pm(R,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{\pm ikR}}{R}e^{-i\omega\tau}\,d\omega$ con $\tau = t-t'$ per $\omega = ck$ $\Rightarrow \frac{1}{R}\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$

$$\Rightarrow \Phi(x,t) = \Phi_0(x,t) + \iint G^+(x,t,x',t')\, f(x',t')\, d^3x\, dt'$$

viste la forma di $G^+(x,t,x',t')$ e ponendo $\Phi_0(x,t)=0$

$$\Rightarrow \Phi(x,t) = \int \frac{f(x',t')}{|x-x'|}\Big|_{t'=t-\frac{|x-x'|}{c}} d^3x' = \int \frac{[f(x',t')]_{ret}}{|x-x'|}\, d^3x'$$

Dunque B ed E rispondono alle stesse equazioni delle onde

$\Rightarrow E = E_0 f(x-ct) + E_0 f(x+ct) = E_z$ prendiamo solo le parte

$B = B_0 f(x-ct) + B_0 f(x+ct) = B_z$ ritardate

Dalle soluzioni in onde piane si ha

$\frac{\partial E_z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x}$ ma $\frac{\partial E_z}{\partial t} = -cE_0 f'$ e $\frac{\partial B}{\partial x} = B_0 f'$

$$\Rightarrow -E_0 c f' = c^2 B_0 f' \Rightarrow \frac{E_0}{B_0} = c$$

$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t}$

teorema di Poynting

Per una singola carica il lavoro compiuto da un c.e.m. è

$$d\mathcal{L} = F\times s = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{s} = q(E + v\,dt + \cancel{v\times B\cdot v\,dt})$$

$= q\, v\cdot E$.

Per una distribuzione di cariche è

$$\int J\cdot E\, d^3x$$

ma $J = \vec\nabla\times\vec B - \mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow d\mathcal{L} = \int E\cdot(\nabla\times B) - \mu\varepsilon\, E\cdot\frac{\partial E}{\partial t}\, d^3x$

ma $\nabla\cdot(E\times B) = B\cdot(\nabla\times E) - E\cdot(\nabla\times B) \Rightarrow E\cdot(\nabla\times B) =$

$= -\nabla\cdot(E\times B) + B\cdot(\nabla\times E)$ $\Rightarrow d\mathcal{L} = -\int \nabla\cdot(E\times B) + \mu\varepsilon\, E\cdot\frac{\partial E}{\partial t} + B\cdot\frac{\partial B}{\partial t}$

$\hookrightarrow -B\cdot\frac{\partial B}{\partial t}$

Se il mezzo è lineare e l'energia dei campi E.S e Mag sono $w_E = \frac{\varepsilon}{2}\int E\cdot E\, d^3x$ e $w_B = \frac{\mu}{2}\int B\cdot B\, d^3x$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2}(E\cdot D + B\cdot H)$$

$$\Rightarrow -\frac{d\mathcal{L}}{} = -\int J\cdot E\, d^3x = \int \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\cdot S\, d^3x$$

avendo definito il vettore di Poynting $E\times H = S$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\cdot S = -\vec{J}\cdot\vec{E}$$

che è un eq^{ne} tipo eq^{ne} di continuità

In realtà nei mezzi difficilmente non si hanno dispersioni $\Rightarrow$ non possiamo più scrivere w come sopra.

La conservazione dell'impulso parte da

$$F = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{mech}}{\partial t} = \int \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}\, d^3x$$

ma da $\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ e $\nabla\times B = \mu_0 J + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow J = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times B - \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$

$$\frac{\partial P_{mec}}{\partial t} = \int \varepsilon_0 E(\nabla\cdot E) + \varepsilon_0 B\times\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times B)\times B\, d^3x$$

aggiungo

$$= \varepsilon_0\int E(\nabla\cdot E) + B\times\frac{\partial E}{\partial t} - c^2 B\times(\nabla\times B) + c^2 B\underbrace{(\nabla\cdot B)}_{=0}\, d^3x$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(E\times B) + E\times\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(E\times B) - E\times\nabla\times E$$

$$\Rightarrow \rho E + \vec{J}\times\vec{B} = \varepsilon_0\left[E(\nabla\cdot E) + c^2 B(\nabla\cdot B) - \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) + c^2 B\times(\nabla\times B)\right] - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(E\times B)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_{mec}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\int \varepsilon_0(E\times B) = \int \varepsilon_0[\quad]\, d^3x$$

Possiamo identificare il primo membro come la derivata dell'impulso totale $\Rightarrow P_{mec} + P_{field} \Rightarrow P_{field} = \int \varepsilon_0(E\times B)\, d^3x = \int \underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{c^{-2}}(E\times H)\, d^3x$

Scrivendo $E(\nabla\cdot E) + E\times(\nabla\times E)$ per componenti

$$E_i\,\partial_j E^j + \varepsilon_{ijk} E^j(\nabla\times E^k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[E_i E_j - \frac{1}{2}E_k E^k\delta_{ij}\right]$$

e analogamente per la parte in B, possiamo definire un tensore degli sforzi $T_{ij} = \varepsilon_0\left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E} + c^2\vec{B}\cdot\vec{B})\delta_{ij}\right]$

e quindi scrivere

$$\frac{d}{dt}(P_{Mec}+P_{field})_j = \int \frac{\partial_i}{\partial x_i} T_{ij}\, d^3x$$

e, applicando il teorema della divergenza

$$\frac{d}{dt}(P_{Mec}+P_{field})_j = \oint_S T_{ij} n^j\, ds$$

Teorema di Poynting nei
mezzi dispersivi

$$E(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{x},\vec{\omega})\, e^{-i\omega t} \qquad D(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x,\omega)\, e^{-i\omega t}$$

l'assunzione di linearità e isotropia implica che
$D(x,\omega)=\varepsilon(\omega)E(x,\omega)$, e, Analogamente $B(x,\omega)=\mu(\omega)H(x,\omega)$
Possiamo riscrivere il termine $E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}$ in termini delle trasformate

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \int d\omega \int E^*(\omega')\left[-i\omega\varepsilon(\omega)\right]E(\omega)\, e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega'$$

$$= \frac{1}{2}\int d\omega\int d\omega' \left[E^*(\omega)\left(-i\omega\varepsilon(\omega)+i\omega'\varepsilon^*(\omega')\right)\cdot E(\omega)\, e^{-i(\omega-\omega')t}\right.$$

Se $\omega'\simeq\omega \Rightarrow \omega'\varepsilon(\omega')\simeq\omega\varepsilon(\omega)+(\omega'-\omega)\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon(\omega))$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{4}\int d\omega\int d\omega'\left[E(\omega)\left(i\omega\varepsilon(\omega)\right.\right.} = \int d\omega\int d\omega'\, E^*(\omega)\cdot E(\omega)\,\omega\, i\,\varepsilon(\omega)\, e^{-i(\omega-\omega')t}$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int d\omega\int d\omega'\, E^*(\omega')E(\omega')\frac{d}{d\omega}\left(\omega\varepsilon^*(\omega)\right)\Big]\, e^{-i(\omega-\omega')t}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = 0 \\ \nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B = \mu\varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

Siano E & B solo funzione della variabile x $\Rightarrow$ fissato un piano $\perp x$ E e B hanno lo stesso valore sui punti di questo piano $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial B}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial z} = 0$ $\quad \dfrac{\partial E}{\partial y} = \dfrac{\partial E}{\partial z} = 0$

Le eq^{ni} di sopra, in termini delle coordinate sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial E_z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial E_y}{\partial t}\mu\varepsilon \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = -\mu\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\rightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad \rightarrow \dfrac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$-\dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \qquad 0 = \dfrac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$-\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \qquad -\dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu\varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$+\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \dfrac{\partial B_y}{\partial x} = -\mu\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t}$$

Le prime quattro ci dicono che E_x e B_x sono sempre costanti rispetto a x e t. Le seconde 4 determinano le 4 componenti E_y, E_z, B_y, B_z

Esaminiamo il caso di un onda polarizzata linearmente; cioè che vibri solo in una direzione: $|E| = E_z$; $E_y = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = \phi$$

$$\Rightarrow B_z = cost \xrightarrow{\text{poniamo}} B_z = \phi$$

dalle $\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$; $\frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t}$

si vede che le uniche componenti coinvolte sono $E_z \leftrightarrow B_y$

$\Rightarrow$ E e B sono ortogonali. Inoltre, derivando la I rispetto a t e la II rispetto a x

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = +\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$ sottraendo membro a membro

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad \text{e analogamente} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\varepsilon\mu = v^{-2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r = \varepsilon_0\mu_0 \varepsilon_r \mu_r = c^{-2} \varepsilon_r \mu_r$$

$$v^{-2} = c^{-2} \varepsilon_r \mu_r \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

Sia ora $E_z = E_z^0 e^{-i(\omega t - kx)}$ ove $\omega = vk$

$$\Rightarrow E_z = E_z^0 e^{-i(vkt - kx)} = E_z^0 e^{+ik(x - vt)}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \; . \; \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \cancel{iB_y^0 = -\varepsilon\mu i\omega v} \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = -\varepsilon\mu i\omega v E_z^0 e^{i()} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial t} = ik E_z^0 e^{i()}$$

Se $B = B_0 e^{ik(x-vt)} \Rightarrow \frac{\partial B^y}{\partial x} = ikB_0^y e^{i()}$ $\quad \frac{\partial B^y}{\partial t} = -ikv B_0^y$

$\Rightarrow$ dalla I: $B_0^y = -\varepsilon\mu v E_0^z \Rightarrow \frac{|E|}{|B|} = -\varepsilon\mu v$

dalla II $vB_0^y = E_0^z \Rightarrow \frac{|E|}{|B|} = -\frac{1}{v} \Rightarrow \varepsilon\mu v = \frac{1}{v} = v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$

$$\Rightarrow \frac{|E|}{|B|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}$$

$\Rightarrow \frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z =$ impedenza del mezzo e si misura in Ω

Nel vuoto $\sqrt{\mu_0} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}}\ (H/m)^{1/2}$

$\sqrt{\varepsilon_0} = \sqrt{8.85 \cdot 10^{-12}}\ (F/m)^{1/2}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = \left[\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8.85 \cdot 10^{-12}} \frac{V\,S}{A} \frac{V}{A\,S}\right]^{1/2} = 377\,\Omega$$

Impedenza del vuoto

$$E_I(r,t) = E_{0I}\, e^{i(k_I \cdot r - \omega t)}$$

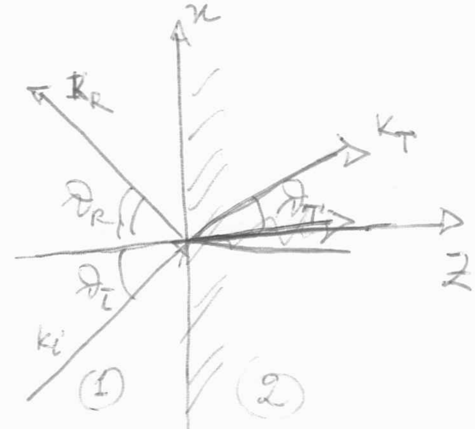
$$B_I(\vec{r},t) = \frac{1}{v_1}\, \hat{k}_I \times E_I(r,t)$$

$$E_R(r,t) = E_{0R}\, e^{i(k_R \cdot r - \omega t)}$$

$$B_R(r,t) = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_R \times E_R)$$

$$E_T(r,t) = E_{0T}\, e^{i(k_T \cdot r - \omega t)}$$

$$B_T(\quad) = \frac{1}{v_2}\, \hat{k}_T \times E_T$$



i tre numeri d'onda sono legati dalle rispettive relazioni di dispersione $k_I = \frac{\omega}{v_1}$ $\quad k_R = -\frac{\omega}{v_1}$ $\quad k_T = \frac{\omega}{v_2}$

ovvero $k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 \iff k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T$

Il campo combinato nel mezzo (1) deve essere collegato a quello nel mezzo (2) usando le ~~relazioni~~ condizioni al contorno sulla superficie:

$$\varepsilon_1 E_1^\perp = \varepsilon_2 E_2^\perp \qquad E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp \qquad \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel}$$

dunque per $z=0$ per E deve valere

$$E_{0I}^x\, e^{i(k_I \cdot \vec{r} - \omega t)} + E_{0R}^x\, e^{i(k_R \cdot r - \omega t)} = E_{0T}^x\, e^{i(k_T \cdot r - \omega t)}$$

la dipendenza dalle coordinate è confinata agli esponenziali e anche quella dal tempo $\Rightarrow$ gli esponenziali devono essere uguali perché le condizioni al contorno devono valere in tutti i punti del piano e $\forall t \Rightarrow \vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}$ per $z=0$

$$\iff \forall (x,y) \Rightarrow x k_x^I + y k_y^I = x k_x^R + y k_y^R = x k_x^T + y k_y^T$$

$$\Rightarrow k_x^I = k_x^R = k_x^T \quad \text{per } y=0 \quad \text{e } y \text{ e } y \text{ per } x=0$$

$$k_I \sin\vartheta_I = k_R \sin\vartheta_R = k_T \sin\vartheta_T \quad \text{da } k_I = k_R \Rightarrow \sin\vartheta_I = \sin\vartheta_R$$

$$\Rightarrow \vartheta_I = \vartheta_R \ (\pm\pi)$$

Da $k_I = \frac{v_2}{v_1} k_T \Rightarrow \cancel{\sin\vartheta_I = \frac{v_2}{v_1}}$

$k_I \sin\vartheta_I = k_T \sin\vartheta_T \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} \cancel{k_T} \sin\vartheta_I = \cancel{k_T} \sin\vartheta_{T'} \Rightarrow \frac{\sin\vartheta_{T'}}{\sin\vartheta_I} = \frac{v_2}{v_1}$

$= \frac{n_1}{n_2}$ Legge di Snell.

Stabilito che gli esponenziali si cancellano, applichiamo le cond^{ni} al contorno:

$\varepsilon_1 (E_{0I} + E_{0R})_z = \varepsilon_2 (E_{0T})_z$ $\qquad (E_{0I} + E_{0R})_{x,y} = (E_{0T})_{x,y}$

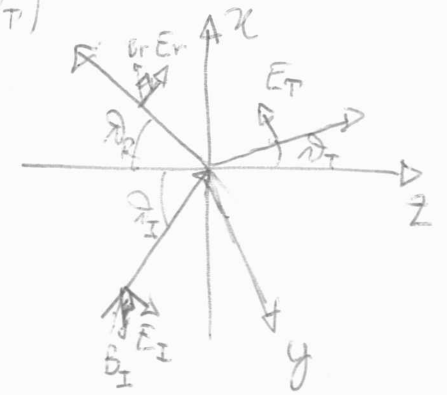
$(B_{0I} + B_{0R})_z = (B_{0T})_z$ $\qquad \frac{1}{\mu_1} (B_{0I} + B_{0R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} (B_{0T})_z$

con $B_0 = \frac{1}{v} \vec{k} \times \vec{E}_0$

Supponiamo che l'onda incidente sia polarizzata nel piano xz

$\Rightarrow$ le onde trasmesse e riflesse avranno la stessa polarizzazione

$\Rightarrow \varepsilon_1 (-E_{0I} \sin\vartheta_I + E_{0R} \sin\vartheta_R) = \varepsilon_2 (-E_{0T} \sin\vartheta_T)$



B non ha componenti lungo z

$E_{0I} \cos\vartheta_I + E_{0R} \cos\vartheta_R = E_{0T} \cos\vartheta_T$

$\frac{1}{\mu_1} \frac{1}{v_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0T}$

Sostituendo la legge di Snell:

$E_{0I} - E_{0R} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_T^0 = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} E_{0T} = \beta E_{0T}$ $\quad \beta$ coeff di

$E_{0I} + E_{0R} = \frac{\cos\vartheta_T}{\cos\vartheta_I} E_{0T} = \alpha E_{0T}$

$\Rightarrow E_{0R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) E_{0I}$ $\qquad E_{0T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) E_{0I}$

coeff di riflessione $\qquad$ coeff di trasmissione

Energia del campo in mezzi dispersivi

La variazione di energia nell'unità di volume di un corpo è

$$\nabla\cdot S = -E\cdot\frac{\partial D}{\partial t} + H\cdot\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (1)$$

che si può vedere come la variazione dell'energia

$U = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$ se il mezzo è un dielettrico senza dispersione e μ e ε sono costanti. U è la diff. tra l'energia interna con e senza il campo.

In presenza di dispersione, ciò non è più possibile perché la dispersione rappresenta una perdita di energia ⇒ il mezzo dispersivo assorbe.

Per determinare l'assorbimento consideriamo un campo monocromatico e facciamo la media nel tempo della (1) ⇒ troviamo il flusso di ingresso dell'energia nel sistema da sorgenti esterne, che mantiene il campo. Siccome l'ampiezza del campo è costante, tutta questa energia serve a compensare la dissipazione ⇒ la media di (1) rispetto a t è la quantità di calore media dissipata nell'unità di tempo e volume Q

[Siccome la (1) è quadratica nei campi tutte le quantità devono essere reali] ⇒ $E \to \frac{1}{2}(E+E^*)$ e

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2}(-i\omega\varepsilon E + i\omega\varepsilon^* E^*), \quad H = \frac{1}{2}(H+H^*) \quad B = \frac{1}{2}(-i\omega\mu H + i\omega\mu^* H^*)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{4}(E+E^*)(i\omega\varepsilon^* E^* - i\omega\varepsilon E) + \frac{1}{4}(H+H^*)(i\omega\mu^* H^* - i\omega\mu H)\, dt$$

avendo inteso $E(t) = E e^{i\omega t}$ ... nei termini E^*E e H^*H l'esponenziale sparisce mentre nei termini E^2 e H^2 $e^{\mp 2i\omega t}$ ⇒ media $\emptyset$

$$\Rightarrow Q = \frac{i\omega}{4}\left[(\varepsilon^* - \varepsilon) E \cdot E^* + (\mu^* - \mu) H \cdot H^*\right)$$

Se scriviamo $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ & $\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$

$\Rightarrow \varepsilon^* - \varepsilon = -2i\varepsilon''$ & $\mu^* - \mu = -2i\mu''$ $\qquad \varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$

$$\Rightarrow Q = \frac{\omega}{4}\left[\varepsilon''(\omega)|E|^2 + \mu''(\omega)|H|^2\right)$$

$\hookrightarrow \varepsilon'(-\omega) = \varepsilon(\omega)$

$\varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega)$

che si può anche scrivere come

$$Q = \frac{\omega}{2}\left(\varepsilon''(\omega)\langle E^2\rangle + \mu''(\omega)\langle H^2\rangle\right)$$

avendo indicato con $\langle\ \rangle$ la media temporale

Per un onda non monocromatica $\Rightarrow$

$$E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \qquad E^*(\omega) = E(-\omega)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{i}{2\pi}\int \omega\, \varepsilon(\omega) E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int \frac{d\omega'}{2\pi}\int \frac{d\omega}{2\pi}\left[\omega\, \varepsilon(\omega) E(\omega) E(\omega') e^{-i(\omega+\omega')t}\right]$$

considerato che: $\int e^{-i(\omega+\omega')t} dt = 2\pi\,\delta(\omega+\omega')$

$$\Rightarrow -\frac{i}{4\pi}\int \omega\, \varepsilon(\omega) E(\omega) E(\omega')\,\delta(\omega+\omega')\, d\omega\, d\omega' = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\, \varepsilon(\omega)|E(\omega)|^2 d\omega$$

sostituendo $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$, siccome ε' è pari rispetto a ω

$\int \omega\, \varepsilon'(\omega) |\,|\ldots d\omega = 0 \Rightarrow$ rimane solo la parte in ε''

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} Q\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\left[\varepsilon''(\omega)|E|^2 + \mu''(\omega)|H|^2\right] d\omega$$

$\Rightarrow$ la dissipazione è caratterizzata dalle parti immaginarie di ε & μ. Perdite elettriche e magnetiche

Se consideriamo un campo che ha frequenza attorno ad un valore medio ω_0 $\Rightarrow E = E_0(t) e^{-i\omega_0 t}$ $\quad H = \ldots$ $\quad E_0(t)$ varia lentamente rispetto a ω_0 $\Rightarrow$ $E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2}(E + E^*) \cdot \frac{1}{2}(\dot D + \dot D^*)$

i pezzi $E \cdot \dot D$ e $E^* \cdot \dot D^*$ svaniscono nella media

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(E \cdot \frac{\partial D^*}{\partial t} + E^* \cdot \frac{\partial D}{\partial t}\right)$$

Se consideriamo $E_0(t) = E_{0\alpha} e^{-i\alpha t}$ $\Rightarrow E = E_{0\alpha} e^{-i(\omega_0+\alpha)t} \simeq \left(E_{0\alpha} + \alpha \frac{\partial E_0}{\partial t}\right) e^{-i\omega t}$

e $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} E \simeq -i\omega\, \varepsilon(\omega) E \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega\, \varepsilon(\omega) E + \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial \omega}\frac{\partial E}{\partial t} e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow$ Sostituendo e trascurando la parte immaginaria di $\varepsilon(\omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} + E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t}\right)\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} = \frac{1}{4}\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}(E\cdot E^*)$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} E^*\cdot E + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} H\cdot H^*\right]$$

o, in termini dei campi reali E e H

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega}\overline{E^2} + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega}\overline{H^2}\right]$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$= \mu\sigma E + \mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times B = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot B}_{0}) - \nabla^2 B = \sigma\mu\,\nabla\times E + \mu\varepsilon\frac{\partial(\nabla\times E)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 B = \sigma\mu\frac{\partial B}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon c^2}\frac{\partial B}{\partial t} = 0} \qquad \frac{1}{\varepsilon c^2} = \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon} = \mu$$

$$\nabla\cdot E = \rho/\varepsilon \Rightarrow \nabla\cdot\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow$$

$$(\nabla\times B)c^2 - \frac{1}{\varepsilon_0}J = \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow c^2\nabla\cdot(\nabla\times B) - \nabla\cdot\frac{J}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot J = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times E = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times B = \nabla(\nabla\cdot E) - \nabla^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho - \nabla^2 E =$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu J + \mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}\right) = -\left(\mu\sigma\dot{E} + \mu\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho}$$

mezzi conduttori: $\sigma \neq 0$ $\nabla\rho = 0$

mezzi isolanti: $\sigma = 0$ $\nabla\rho \neq 0$?

Considerando $E = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ $\qquad \rho = \rho_0 e^{-i(\omega t - k\cdot x)}$

$$k^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2 - \frac{i\sigma\omega}{\varepsilon c^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}ik\rho_0 \Rightarrow \text{Cond: } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\sigma\omega}{\varepsilon c^2}$$

$$\cancel{\Rightarrow \omega^2 - c^2k^2 + \frac{i\sigma}{\varepsilon}\omega + \frac{ic^2}{\varepsilon_0}k\rho_0 = 0}$$

$$\Rightarrow k = k_r + ik_i \qquad k^2 = (k_r + ik_i)(k_r - ik_i)$$
$$= k_r^2 + k_i^2 \qquad k$$

$$k_R = \mathrm{Re}(k) = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}$$

$$k_i = \mathrm{Im}(k) = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^{1/2}} - 1 \right]^{1/2}$$

la parte immaginaria di $k \Rightarrow k_i$ risulta in una attenuazione dell'onda. Come sempre possiamo definire una skin depth $\delta = \frac{1}{k_i}$.

Se orientiamo gli assi in modo che E sia polarizzata lungo x

$$\Rightarrow E(z,t) = E_0 e^{-k_i z} e^{i(k_R z - \omega t)} \hat{x}$$

$E = E_x \quad 0 \quad 0$

$\nabla \times E = \partial_x \quad \partial_y \quad \partial_z$

$\qquad E_x \quad 0 \quad 0$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow -ik E_0 e^{-k_i z} e^{i(k_R z - \omega t)} \hat{y}$$

$$= -i\omega B(x,t) \Rightarrow B(x,t) = \frac{k}{\omega} E_0 e^{-k_i z} e^{i(k_R z - \omega t)}$$

$$k = |k| e^{i\Phi} \qquad |k| = \sqrt{k_i^2 + k_R^2} \qquad \mathrm{tg}\,\Phi = \frac{k_i}{k_R}$$

$$\Rightarrow B = \frac{|k|}{\omega} E e^{i\Phi}$$ $\Rightarrow$ il campo elettrico e quello magnetico non sono in fase e le ampiezze relative stanno fra loro come $\frac{B_0}{E_0} = \frac{|k|}{\omega} = \left[\varepsilon\mu \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \right]^{1/2}$

Per $\omega \ll \frac{\varepsilon}{\sigma} \Rightarrow \frac{B_0}{E_0} = \left(\varepsilon\mu \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{\mu\sigma}{\omega}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{E_0}{H_0} = \left(\frac{\omega \overset{\text{resist}}{\rho}}{\mu^2}\right)^{1/2} \mu$

$= (\omega^2 \mu \rho^2)^{1/2}$.

$$K^2 = (\alpha + i\beta)(\alpha + i\beta) = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \\ 2\alpha\beta = \sigma\omega\mu \end{cases} \rightarrow \alpha^2\beta^2 = \left(\frac{\sigma\omega\mu}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \omega^2\varepsilon\mu + \beta^2 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu + \beta^2} =$$

$$\beta^2(\omega^2\varepsilon\mu + \beta^2) = \left(\frac{\sigma\omega\mu}{2}\right)^2 \Rightarrow \beta^4 + \omega^2\varepsilon\mu\beta^2 - \left(\frac{\sigma\omega\mu}{2}\right)^2 = 0$$

$$\beta^2 = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega^2\varepsilon\mu)^2 + (\omega\mu\sigma)^2} =$$

$$= -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2} \pm \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} =$$

$$= \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]$$ scartiamo le sol < 0

$$\Rightarrow \beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right]^{1/2} \qquad \alpha^2\beta^2 = \left(\frac{\sigma\omega\mu}{2}\right)^2$$

$+ 1$

$\alpha =$ ((