

Cap. IV. - Richiami di magnetostatica

IV.1. Premessa sullo sviluppo storico della magnetologia

IV.1.1. L'approccio 'statico'

La parte della fisica dedicata ai fenomeni magnetici, cioè quella che si può chiamare **fisica del magnetismo**, o **magnetologia**, presenta varie difficoltà di “lettura storica”. Innanzi tutto, conviene **separare dal resto la parte puramente fenomenologica** e in particolare relativa al magnetismo terrestre, basata sugli esperimenti con le bussole, con le Terrelle e, in genere, con i magneti, che prima suscitarono la curiosità e la fantasia degli antichi filosofi della Natura e poi anche deliziarono fino al 18° sec. e oltre i convegni mondani di cavalieri e dame curiosi di questi fatti; a qualcosa di ciò abbiamo accennato nel Cap. I. Qui ci riferiamo alla **trattazione fisica**, a cominciare dalla **descrizione analitica dei fenomeni**.

Questa parte della fisica ha avuto uno sviluppo storico parallelo a quello dell'**elettrologia**, cioè della parte della fisica che s'occupa dei fenomeni elettrici.

Ambedue queste parti della fisica ebbero una lunghissima fase iniziale di appartenenza alla **filosofia naturale** in senso stretto, in cui erano volte a descrivere i fenomeni e ad inquadrarli in concezioni generali della Natura. Com'è stato accennato nel precedente Cap. I, soltanto con l'introduzione nel 17° sec., a opera di Galileo Galilei, di quello che oggi chiamiamo “**metodo sperimentale**” nella descrizione di questi fenomeni (nel linguaggio galileiano, la **coordinata integrazione tra “l'esperimento” e “le necessarie matematiche”**) esse cominciano a prendere un carattere “fisico” nel significato attuale del termine. Un preciso punto di partenza per la formulazione nella forma attuale dei loro termini e delle loro leggi è costituito dall'enunciazione della **legge delle azioni elettrostatiche (1785)** per certi fenomeni elettrici e della **legge delle azioni magnetostatiche (1786)** per certi fenomeni magnetici a opera di **Charles-Augustin de Coulomb** <kulòm> (1736-1806, membro dell'Accademia delle scienze di Parigi), due leggi tratte dall'esperienza diretta.

La qualifica di “**statico**” che compare nella denominazione di queste due leggi sta a significare che queste, e con esse molte delle conseguenze che se ne possono trarre, riguardano azioni scambiate tra corpi elettrizzati oppure magnetizzati che si trovino in **condizioni statiche**, o **stazionarie**, vale a dire in condizioni nelle quali i **corpi** interessati siano **in quiete** e le varie **grandezze** in gioco siano, o almeno possano essere considerate, con caratteristiche **costanti nel tempo**: così, il primo sviluppo delle conoscenze con carattere schiettamente fisico sull'elettricità e sul magnetismo costituisce ciò che va propriamente chiamato, rispettivamente, **elettrostatica** e **magnetostatica**.

È soltanto in condizioni di stazionarietà che i fenomeni elettrici e magnetici possono essere studiati, per così dire, separatamente, cioè senza portare in conto le **interrelazioni** che si hanno in **condizioni non stazionarie**: in queste ultime condizioni si deve parlare di **elettromagnetismo**, la parte della fisica che studia i fenomeni elettrici e magnetici che, appunto per non essere stazionari, presentano una complessa reciproca dipendenza di causa-effetto.

In questa sede, in un primo momento ci si occuperà del magnetismo, e specificamente del **magnetismo riguardante la Terra, in condizioni stazionarie**: quello che potremmo chiamare la **magnetostatica del campo terrestre medio**. Questioni di

elettromagnetismo compariranno esplicitamente soltanto nell'ultima parte, riguardante l'originarsi e i fenomeni di variabilità del campo geomagnetico.

Tornando all'evoluzione della magnetostatica fisica a partire dalla legge di Coulomb, essa si sviluppò basandosi sul concetto che (usando termini moderni) il **campo magnetico** fosse un **campo vettoriale** generato da sorgenti scalari, dette **poli magnetici**, secondo linee evolutive quasi coincidenti con quelle seguite parallelamente dall'elettrostatica sulla base di un'espressa **analogia tra poli magnetici e cariche elettriche**.

A partire all'incirca dall'enunciazione (1821) della **legge delle azioni elettromagnetiche** a opera di **Pierre-Simon de Laplace** <laplès> (1749-1827, prof. di matematica nell'Accademia di Francia a Parigi) (v. oltre: relaz. [IV.1.2*.3]), a questa **magnetostatica dei poli** s'affiancò la **magnetostatica delle correnti elettriche** (propriamente: **stazionarie**, cioè scorrenti con intensità costante in circuiti in quiete), basata sull'assunzione che il campo magnetico, sempre di natura vettoriale, fosse generato da correnti elettriche, quali sorgenti non più scalari come i poli ma vettoriali o tensoriali (momenti magnetici dipolari, quadrupolari, ecc.: v. par. III.1.6.3). Questa ultima concezione risultò presto quella vincente e oggi è l'**unica accettata**, ma per un lunghissimo periodo di tempo, spintosi, specialmente per alcuni particolari, quasi fino ai nostri giorni, il magnetismo dei poli e quello delle correnti convissero, con le complicazioni e gli equivoci che si possono ben immaginare, in particolare nell'ambito didattico e delle unità di misura.

Ripetiamo che la **magnetologia attuale** è quella "**delle correnti**" e aggiungeremo che essa si serve di **unità di misura** facenti parte del **Sistema Internazionale** di unità di misura (**unità SI**). Si dà peraltro la circostanza che la vecchia trattazione in termini di poli magnetici, con le relative unità di misura, è stata usata, specialmente nell'ambito didattico della scuola secondaria, sino a non moltissimi anni fa ed è presente in vari importanti testi di consultazione, anche relativamente recenti. Per tal motivo è apparso opportuno ricordare sinteticamente i **fondamenti dei due tipi di trattazione** dei fenomeni magnetici, nonché premettere qualcosa sui **sistemi di unità di misura dell'elettromagnetismo**, di cui le unità magnetostatiche fanno ovviamente parte.

IV.1.2. Le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

Le **leggi dell'elettromagnetismo** aventi **carattere fondamentale**, anche dal punto di vista metrologico, sono le seguenti.

1) **Legge elettrostatica di Coulomb (1785)**, che definisce fisicamente le **interazioni fra poli elettrici stazionari**, cioè fra **cariche elettriche puntiformi** (come dire **portate da corpi di dimensioni molto piccole rispetto alla mutua distanza**) **in quiete e di valore costante nel tempo** (dove la qualifica di "elettrostatica"); essa afferma che la forza f_{12} esercitata da un polo elettrico q_1 su un altro polo elettrico q_2 a distanza r_{12} da esso nelle dette **condizioni stazionarie** vale:

$$[IV.1.2*1] \quad f_{12} = C_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \text{ vers } r_{12} ,$$

dove r_{12} è la distanza orientata da q_1 a q_2 (tra poli elettrici di uguale segno si ha dunque un'azione repulsiva), della quale **vers** r_{12} è il versore, e C_e , il cui valore e le cui dimensioni fisiche dipendono sia dalle unità di misura adottate per le grandezze in gioco sia dalla

natura del mezzo in cui si opera, si chiama **costante elettrostatica di Coulomb**; la **costante elettrostatica di Coulomb del vuoto** (cioè in uno spazio privo di materia in senso lato), C_{e0} , è **una delle costanti fondamentali dell'elettromagnetismo**.

V'è da dire qualcosa sul significato da attribuire al termine **vuoto** che ricorre in varie situazioni fisiche e in varie definizioni metrologiche per indicare il **mezzo di riferimento per eccellenza**. In **termini assoluti**, tale termine indica uno **spazio assolutamente privo di materia**, ma si tratta di un'astrazione, dato che nella Natura spazi del genere non esistono. Ciò è ben evidente nell'ambito macroscopico, dove i "vuoti" ottenuti artificialmente, anche quelli cosiddetti "spinti", sono popolati da moltissime particelle (molecole, atomi, ioni, ecc.) di gas atmosferici e di altra natura con una concentrazione, al minimo ('ultra-alto vuoto'), di centinaia di migliaia a centimetro cubo, e quelli supposti nell'ambito cosmico, per es. tra gli astri, sono popolati dalle particelle della cosiddetta "materia oscura" dell'Universo (stimata pari al 90 % della materia totale), con una concentrazione stimata al minimo di qualche decina di particelle a centimetro cubo. Né il vuoto perfetto è realizzato su scala microscopica negli interstizi tra una particella e l'altra tra quelle che costituiscono gli edifici molecolari e atomici, in quanto ivi sono presenti energie di interazione tra le dette particelle e, alla luce del principio di equivalenza tra materia ed energia enunciato nel 1905 da **Albert Einstein** <àinstain> (1879-1955, prof. di fisica in varie università europee e poi, dal 1933, a Princeton, negli SUA; premio Nobel per la fisica nel 1921), secondo il quale dire energia è come dire materia, e viceversa.

Il significato "vuoto" ha però un importante **significato fisico di tipo operativo relativamente a ogni determinata questione fisica**, nel senso che **una certa regione di spazio è considerata "vuota" relativamente a un dato fenomeno fisico se la materia (o materia-energia) inevitabilmente presente non altera sensibilmente l'evolversi in essa del particolare fenomeno che si sta studiando**.

Su questa legge fu costruita l'intera elettrostatica, cominciando con il definire il concetto di **campo elettrico** (la regione dove sono sensibili azioni su corpi elettricamente carichi e puntiformi in condizioni stazionarie, poi esteso anche a cariche non puntiformi (cariche estese) e anche in condizioni non stazionarie, entrando così nell'elettromagnetismo), e il **vettore di tale campo (intensità del campo elettrico)**, quale rapporto tra la forza che il campo esercita su una carica puntiforme "di esplorazione" infinitesima, cioè di valore molto minore di quello di ogni altra carica presente, e, in successione, le altre grandezze interessanti (cariche indotte sulla superficie di corpi conduttori dell'elettricità e loro densità areica, rappresentata da un apposito vettore detto induzione elettrica, ecc.); anche per queste grandezze si usa la specificazione **elettrostatico** in relazione a condizioni stazionarie.

(2) Legge magnetostatica di Coulomb (1786):

$$[IV.1.2*2] \quad f_{12} = C_m \frac{p_1 p_2}{r_{12}^2} \text{ vers } r_{12},$$

che fu il fondamento della **magnetostatica**, vale a dire, come già è stato accennato, della **magnetologia riguardante poli magnetici stazionari**, cioè corpi dotati di proprietà magnetiche in quiete e di valore costante nel tempo. Tale legge è formalmente identica alla precedente legge dell'elettrostatica, salvo a sostituire "polo elettrico" (q) con "polo magnetico" (p). Identico allo sviluppo subito dall'elettrostatica fu quello subito all'inizio dalla magnetostatica, alla quale riaccenneremo in un prossimo paragrafo (v. oltre: par. 4); C_m si chiama **costante magnetostatica di Coulomb** e il suo valore **dipende sia dalle unità di misura adottate per le grandezze in gioco sia dalla natura del mezzo in cui si opera**; la **costante magnetostatica di Coulomb del vuoto**, C_{m0} , è un'altra delle **costanti fondamentali dell'elettromagnetismo**.

(3) **Legge di Laplace delle azioni elettromagnetiche stazionarie (1821)**, detta anche **II legge di Laplace**, che fu il fondamento della **magnetologia delle correnti elettriche stazionarie**, cioè, come già detto, scorrenti con intensità costante in circuiti

indeformabili e in quiete (v. oltre: par. 3.2), nonché **filiformi**, cioè formati da **conduttori con dimensioni trasversali molto minori della lunghezza**; essa può essere espressa in varie forme, tra le quali sceglieremo qui la **forma elementare** (o **forma differenziale**):

$$[IV.1.2*3] \quad d\mathbf{f} = C_{em} \, i \, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} ,$$

essendo i l'intensità della corrente elettrica stazionaria che scorre nell'**elemento di circuito filiforme** $d\mathbf{l}$ (vettorializzato come $d\mathbf{l}$ attribuendo ad esso la direzione e il verso della corrente; $i \, d\mathbf{l}$ si chiama **elemento filiforme di corrente**), $\mathbf{B}$ una grandezza vettoriale del campo magnetico, detta *induzione magnetica*, che definiremo nel paragrafo seguente, e C_{em} una costante scalare detta **costante elettromagnetica (di Laplace)**, che, come le precedenti costanti elettrostatica e magnetostatica, **dipende dalle unità di misura** adottate e **dalla natura del mezzo**; la **costante elettromagnetica del vuoto**, C_{em0} , è la terza delle costanti fondamentali dell'elettromagnetismo.

A proposito della [IV.1.2*3], come di ogni altra **legge espressa da grandezze differenziali** (qui la forza elementare $d\mathbf{f}$ e l'elemento di circuito filiforme $d\mathbf{l}$, oppure l'elemento filiforme di corrente $i \, d\mathbf{l}$), va tenuto presente il suo **carattere formale**, nel senso che la forza elementare $d\mathbf{f}$ non è direttamente misurabile; quella che ha un effettivo significato fisico di misurabilità è l'**azione finita** (forza o momento di una forza o coppia di forze) la cui espressione è **ottenuta integrando la detta relazione al circuito che interessa**.

Fra le **tre costanti fondamentali dell'elettromagnetismo** testè ricordate corre **nel vuoto** la relazione:

$$[IV.1.2*4] \quad c^2 \, C_{em0}^2 = C_{e0} \, C_{m0} ,$$

dove c è la velocità di propagazione della luce nel vuoto.

Ricordiamo che a partire dal **1983** la **velocità di propagazione della luce nel vuoto** è stata assunta come una **nuova costante fondamentale fisica** con il **valore esatto** $c = 2,997 \, 924 \, 580 \, 10^8 \, \text{m/s}$, mentre precedentemente era considerata una grandezza puramente sperimentale, quindi di valore variabile a seconda dell'accuratezza delle misurazioni. Ciò ha portato ad alcune **modificazioni metrologiche** (per es., il **metro**, unità di lunghezza, è passato da unità fondamentale a **unità derivata** dalla detta velocità e dal secondo di tempo, come la **distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/c secondi**), ma qui non ci si tratterà su queste pur interessanti questioni.

Si farà invece ora cenno ad alcune altre **questioni di natura prettamente metrologica interessanti la magnetostatica**.

IV.1.3. Premessa sulle unità di misura elettromagnetiche

All'enunciazione della legge elettrostatica di Coulomb seguì la 'costruzione' di un **sistema di unità di misura per l'elettrostatica** derivate da quelle meccaniche del **Sistema Centimetro** (unità di lunghezza)-**Grammomassa** (unità di massa)-**Secondo** (unità di tempo), o **Sistema CGS meccanico**, proposto all'inizio del 19° sec., già di largo uso alla metà del secolo e introdotto ufficialmente, in versione definitiva, nel 1875); da questo Sistema di unità e dall'assunzione come carica elettrica unitaria (polo elettrico unitario) di quella carica puntiforme che, posta nel vuoto a distanza unitaria (cioè 1 cm) da una carica identica, la respinge con la forza unitaria (cioè 1 dina) fu elaborato il **Sistema CGS elettrostatico** (CGSes), capace di soddisfare tutte le necessità metrologiche dell'elettrostatica e anche dell'elettromagnetismo in genere; la detta **carica**

elettrica unitaria fu denominata **franklin** <frènklin>, in onore del grande cultore statunitense di elettromagnetismo **Benjamin Franklin** (1706-1790).

Analogamente fu ‘costruito’ per la **magnetostatica** il **Sistema CGS magnetostatico** (**CGSms**; è usata anche, ma non qui, la sigla **CGSem**) a partire dalla legge magnetostatica di Coulomb e derivando dalla legge elettromagnetica di Laplace le definizioni operative dell’intensità di corrente elettrica e dell’induzione magnetica.

Come terza e più generale via fu possibile stabilire un **Sistema di unità CGS che incorporava i due precedenti** eliminando il grave inconveniente costituito dal fatto che se si usavano unità CGSes le misure di grandezze elettriche risultavano appropriate mentre quelle di grandezze magnetiche risultavano, a seconda dei casi, troppo grandi oppure troppo piccole, e il contrario avveniva se si usavano unità CGSms; si ebbe così il **Sistema CGS elettromagnetico simmetrico** (**CGSsim**) o, più comunemente, **Sistema di Gauss**, che è ancora **in uso nella fisica microscopica** (cioè molecolare, atomica, nucleare e subnucleare), peraltro rompendo senza giustificati motivi l’attuale unitarietà della metrologia scientifica e tecnica in unità SI. In breve, in tale Sistema si usano **unità CGSes per le grandezze elettriche e unità CGSms per le grandezze magnetiche**, avendo però l’accortezza di esplicitare la costante elettromagnetica del vuoto C_{em0} (nella forma $1/c$) nelle relazioni (quale, per es., la citata legge di Laplace) in cui comparissero insieme grandezze elettriche e grandezze magnetiche.

Per esprimere certe proprietà di **comportamento di corpi materiali immersi in campi elettrici e magnetici** furono introdotte per ogni mezzo fisico altre due apposite grandezze, dette rispettivamente **costante dielettrica assoluta**, con simbolo ϵ_0 (lettera greca “èpsilon” minuscola), e **permeabilità magnetica assoluta**, con simbolo μ_0 (lettera greca “mu” minuscola); i simboli di queste costanti **per il vuoto** sono, rispettivamente, ϵ_0 e μ_0 , e vale la seguente identità:

$$[IV.1.3*1] \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

La seguente **tabella IV.1.3-1** dà i valori delle predette **costanti elettromagnetiche del vuoto nei tre Sistemi di unità di misura CGS dell’elettromagnetismo** e in quello ora di uso generale nelle scienze e nella tecnica, **il Sistema Internazionale (SI)**; l’asterisco indica che si tratta di un **valore adimensionato** (cioè puramente numerico, privo di dimensioni fisiche); i valori numerici sono arrotondati a 4 cifre significative.

Tab. IV.1.3-1 - COSTANTI ELETTROMAGNETICHE DEL VUOTO IN VARI SISTEMI DI UNITÀ

Sistema	C_{em0}	C_{e0}	C_{m0}	ϵ_0	μ_0
CGS elettrostatico (CGSes)	1*	$1^* = 1/\epsilon_0$	c^2 a $8,988 \cdot 10^{20}$ cm/s	1*	$1/c^2$ a $1,113 \cdot 10^{-21}$ s ² /cm ²
CGS magnetost. (CGSms)	1*	c^2 a $8,988 \cdot 10^{20}$ cm/s	$1^* = 1/\mu_0$	$1/c^2$ a $1,113 \cdot 10^{-21}$ s ² /cm ²	1*
CGSsim, di Gauss	$1/c$	$1^* = 1/\epsilon_0$	$1^* = 1/\mu_0$	1*	1*
SI	1*	$1/(4\pi\epsilon_0)$ $= 10^{-7} c^2$ F/m a $8,988 \cdot 10^9$ F/m	$\mu_0/(4\pi)$ $= 10^{-7}$ H/m	$10^7/(4\pi c^2)$ a $8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m a $1,257 \cdot 10^{-6}$ H/m

IV.2. Il Sistema Internazionale (SI) di unità di misura

Com'è stato accennato in precedenza, nelle scienze, a partire dalla fisica, e nelle tecniche, a partire dall'elettrotecnica, si usano attualmente (teoricamente, in via unica) le unità di misura del **Sistema Internazionale** (sigla: SI, dal fr. "Système International").

Tale Sistema fu proposto internazionalmente nel 1935 da un ingegnere elettrotecnico italiano, **Giovanni Giorgi** (1871-1950, prof. di fisica nell'univ. di Cagliari dal 1926 e dal 1934 prof. di comunicazioni elettriche nell'univ. di Roma) come Sistema di unità di misura unico e definitivo per tutte le necessità tecnico-scientifiche; la proposta di Giorgi

fu accolta subito con grande entusiasmo, specialmente nell'ambito tecnico, in quanto a quell'epoca la **situazione della metrologia** era quanto mai **ingarbugliata**. Infatti **i fisici** si avvalevano dei tre Sistemi CGS di cui s'è parlato in precedenza, con una netta prevalenza per il **Sistema di Gauss**, mentre **i tecnici**, che trovavano le unità CGS troppo grandi oppure troppo piccole, si erano dati delle **unità diverse ed empiriche**, in quanto basate su **campioni materiali**; purtroppo di queste unità campione ne erano in uso più d'una per la medesima grandezza, con gli inconvenienti che si possono immaginare.

La proposta di Giorgi era volta a **dare le caratteristiche di univocità, astrattezza e coerenza delle unità fisiche alle unità tecniche che erano state via via introdotte dai tecnici** (ampere, volt, ohm, ecc.) ma **abbandonando le definizioni empiriche su campioni**, e ciò fu realizzato abbastanza bene. Tuttavia, è un peccato che tale importante impresa fu per molto tempo trascurata dai fisici, che non ne colsero a pieno l'opportunità, e da ciò derivarono **alcuni inconvenienti** facilmente evitabili (per es., l'attuale presenza in certe formule di **incongrui fattori 2_ o 4_**, la mancanza del **radiante** e dello **steradiano** tra le **unità fondamentali**, e altro). Si tratta comunque di difetti tutto sommato piccoli rispetto alla semplicità e all'universalità di impianto del SI.

Quest'ultimo, dopo essere stato lungamente discusso in molte riunioni delle Associazioni internazionali di elettrotecnica e poi anche di fisica (1935-48), ebbe una **prima larga approvazione internazionale nel 1960**, ribadita nel **1972** da un ancora più vasto consenso, con l'adesione degli organi metrologici di 30 nazioni; attualmente queste ultime sono aumentate di molto, comprendendo **tutti i paesi scientificamente e industrialmente sviluppati**. È un vanto dell'Istituto di fisica dell'attuale Università I di Roma "La Sapienza" di essere stata la prima sede al mondo, nel **1938**, in cui l'insegnamento dell'elettromagnetismo nei corsi di fisica generale cominciò a essere impartito in unità SI, a opera di **Edoardo Amaldi** (1908-1989), prof. di fisica in quella università; l'anno seguente la stessa innovazione fu fatta da un altro grande fisico, **Erwin Schrödinger** <sc(e)ré'dingh(e)> (1887-1961), nell'università di Vienna.

In questa sede **saranno usate soltanto unità SI**; nel finale par. 6 di questo stesso capitolo sarà tracciato un **sintetico confronto tabellare** tra queste unità e le corrispondenti **unità CGS elettromagnetiche simmetriche o di Gauss** (v. oltre: par. 4), e ciò non soltanto per validissime ragioni storiche, ma anche perché queste unità sono **tuttora largamente**, e spesso esclusivamente, **usate in importanti settori della fisica**.

IV.3. I fondamenti della magnetostatica moderna in unità SI

IV.3.1. Il campo magnetico

Si definisce **campo magnetico** ogni regione di spazio nei punti della quale siano misurabili **azioni magnetiche**, vale a dire **azioni** (precisamente, forze e coppie di forze) **su magneti** (o, astrattamente e genericamente, su entità vettoriali o tensoriali dette **momenti magnetici**; i quali ultimi sono posseduti da certi circuiti elettrici, da magneti e, microscopicamente, da molte specie di particelle elementari) oppure **azioni elettromagnetiche**, vale a dire **azioni su circuiti percorsi da corrente elettrica**; come

“azione magnetica” può essere vista anche la **magnetizzazione**, intesa sia come la trasformazione in campo magnetico di una regione dello spazio, anche vuoto (**azioni magnetiche di campo**), sia la trasformazione di un corpo materiale (per es., un pezzo di ferro) in un magnete facendo nascere in esso un momento magnetico di cui era privo (**azioni di magnetizzazione materiale**).

Tutto ciò è formalizzato identificando nella detta regione **tre campi vettoriali** responsabili ognuno di alcune delle azioni anzidette e legati tra loro da **relazioni di composizione** e **relazioni di dipendenza funzionale**; due di tali campi, e precisamente quelli dell'**intensità H per le azioni magnetiche** e dell'**induzione B per le azioni elettrodinamiche ed elettromagnetiche**, sono presenti in tutta la regione, mentre il terzo, e cioè quello della **magnetizzazione M per il magnetismo indotto in corpi materiali dal campo di intensità**, è presente nelle sole parti della regione occupata da mezzi materiali.

Se i fenomeni magnetici si svolgono **nel vuoto**, come tale intendendo una regione in cui la materia non si magnetizzi per sua natura oppure perché presente in quantità insufficiente per dar luogo a fenomeni osservabili, il vettore magnetizzazione dunque manca e, per di più, **l'intensità e l'induzione differiscono fra loro**, come presto si vedrà, **per una costante moltiplicativa**, cosicchè per descrivere completamente il campo magnetico **nel vuoto basta un unico vettore del campo magnetico**. Come **vettore del campo nel vuoto** e come **vettore principale del campo in mezzi materiali** fu scelto **inizialmente**, nel cosiddetto “magnetismo dei poli” (v. oltre: par. 4), il **vettore intensità H** , mentre **attualmente** tale ruolo è attribuito piuttosto al **vettore induzione B** (ma v. oltre: par. 5), salvo a precisare, nel caso di situazioni equivocate, se con “campo magnetico” in un certo contesto s'intenda il campo d'induzione oppure quello d'intensità.

IV.3.2. Correnti elettriche

Al richiamare brevemente i concetti e le leggi formali relativi alle dette azioni del campo magnetico è bene premettere la fondamentale osservazione che tra l'elettrologia e la magnetologia esiste una relazione strettissima di causa ed effetto: infatti, la più generale **definizione astratta di campo magnetico** è quella di **particolare condizione fisica dello spazio in cui sono presenti correnti elettriche** (condizione fisicizzata dalla possibilità di rilevare le “azioni magnetiche” descritte dianzi); inversamente, la più generale **definizione astratta di corrente elettrica** è quella di **causa generatrice del campo magnetico**, cioè **sorgente** (a seconda dei casi **macroscopica oppure microscopica**) di un campo magnetico.

Le **correnti elettriche** possono essere classificate fenomenologicamente nelle seguenti quattro categorie, che presentano rilevanti differenze di natura ma sono accomunate dal loro comune ruolo di generatrici dei campi magnetici:

a) **correnti libere**, costituite da **correnti (nel senso fluidodinamico) di cariche elettriche elementari (elettroni, protoni, ioni, ecc.) in un mezzo generalmente tenue**, come si ha, per es., per il cosiddetto **vento solare**, costituito da getti di elettroni e protoni lanciati ad alta velocità dal Sole nella sua atmosfera esterna, in cui si trovano la Terra e gli altri astri solari (pianeti e loro satelliti); un altro esempio è la corrente costituita dall'insieme di elettroni che sono emessi dal catodo di un tubo termoelettronico a vuoto e procedono verso l'anodo;

b) **correnti di conduzione elettrica**, costituite dal **moto d'insieme di elettroni e ioni mobili in un mezzo conduttore dell'elettricità** (elettroni e ioni di conduzione) suscitato nel mezzo (solido, liquido o aeriforme) da un campo elettrico in esso presente; in generale, possono essere costituite dal moto d'insieme di ioni positivi nel verso del campo elettrico e da elettroni e ioni negativi nel verso opposto; sono le correnti più diffuse e utilizzate, in genere costituite dal moto dei soli elettroni liberi che conferiscono a un mezzo (tipicamente un metallo) la sua capacità di condurre la corrente (in questo caso il moto d'insieme di tali “elettroni di conduzione” è nel verso opposto al campo elettrico che lo determina);

c) **correnti di convezione**, costituite dal **moto di trascinamento di cariche elettriche immobilizzate in un dielettrico in movimento** (per es., un disco di vetro elettrizzato, dunque portatore di cariche elettriche positive fisse in esso, posto che sia in rotazione costituisce un sistema di correnti elettriche circolari con il centro nel centro del disco);

d) **correnti di induzione elettrica** (inizialmente, e pure tuttora, chiamate anche **correnti di spostamento**, traduzione della locuzione inglese *displacement current* che deriva da una prima, errata interpretazione, alla fine dell'800, della propagazione di azioni elettriche), costituite non, come le precedenti, dalla propagazione di cariche elettriche libere (a) oppure suscitate in un conduttore da un campo elettrico (b) oppure portate da un dielettrico elettrizzato in moto (c), ma dalla **propagazione di azioni elettriche tra due conduttori (induzione elettrica)**, che determina variazioni della carica elettrica di ciascuno di essi, quasi che carica si trasferisse opportunamente dall'uno all'altro; un esempio tipico si ha tra le armature di un condensatore elettrico nel vuoto cui sia applicata una tensione variabile nel tempo.

A parte le notevoli differenze fenomenologiche, queste quattro categorie di corrente elettrica hanno **in comune** il fatto di **generare campi magnetici** e di essere caratterizzate dalle medesime grandezze, che sono:

il **verso della corrente**, che è **quello del moto d'insieme delle cariche positive** (opposto a quello delle cariche negative);

la **velocità della corrente in un punto**, che è **la velocità media dei vari tipi di particelle cariche costituenti la corrente**;

il **circuito della corrente**, definibile come la **regione di spazio in cui avviene il detto movimento di cariche elettriche**, come dire lo **spazio occupato dalle linee della velocità d'insieme delle cariche** (correnti di tipo a, b e c), **oppure occupato dalle linee del campo d'induzione elettrica** (correnti di tipo d). Quando si parla di **"circuito" senza ulteriori precisazioni** si tratta generalmente di un **circuito filiforme**, cioè, come già detto in precedenza, la cui **dimensioni trasversali sono molto piccole rispetto alla lunghezza**, **schematizzabile sempre con una linea a connessione semplice** (cioè senza nodi); questo è il significato nella matematica e sarà sempre seguito in questa sede, ma nella tecnica (e tale **uso scorretto** ha contaminato anche la fisica) il termine è usato anche per indicare **strutture lineari con nodi**, che vanno **chiamate propriamente reti elettriche**, nelle quali è presente non una sola corrente ma un insieme di più correnti con intensità differenti;

la **densità della corrente**, che è indicata abitualmente con la lettera **j** ed è, in un punto **P** della corrente, la **grandezza vettoriale il cui scalare è il rapporto tra la carica elettrica netta che nell'unità di tempo attraversa una superficie infinitesima intorno a P ortogonale al verso della corrente e l'area di tale superficie**, e il cui verso e direzione sono quelli della **velocità della corrente in P**; **unità di misura SI della densità di corrente elettrica è l'ampere a metro quadrato** (A/m^2); il campo del vettore densità di corrente è il **campo della corrente e**; nel caso particolare di una corrente costituita da cariche identiche, in ragione di **n** a unità di volume, di valore **q** e con la medesima velocità media **v**, è **j=nqv**;

l'**intensità della corrente in una data sezione ortogonale di un circuito**, che è indicata abitualmente con la lettera **i** ed è la **carica elettrica netta attraversante la sezione considerata nell'unità di tempo**; **unità di misura SI dell'intensità di corrente elettrica è l'ampere (A)**, equivalente al passaggio nella sezione considerata di **un coulomb di elettricità al secondo**;

l'**intensità della corrente i_s attraverso una qualunque superficie S** è data dal **flusso della densità attraverso S** , cioè

$$[IV.3.2*1] \quad i_s = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

essendo **n** il versore della normale al generico elemento **dS** di **S** (di solito orientato nel verso coespiciente con quello di **j**).

Ecco, qui di seguito in ordine alfabetico, alcune importanti qualificazioni della corrente elettrica:

corrente alternata, in generale, lo stesso che **corrente bidirezionale** (v. oltre); con significato specifico (ma propriamente dovrebbe parlarsi di **corrente alternata periodica simmetrica** (**fig. IV.3.2/1, n. 4**), una corrente bidirezionale la dipendenza della cui intensità **i** dal tempo **t** è espressa da una legge sinusoidale (dove l'altra denominazione di **corrente sinusoidale**),

$$[IV.3.2*2] \quad i = A \sin(\omega t + \phi),$$

essendo **A** l'**ampiezza** (valore massimo di **i**), la quantità tra parentesi (argomento della funzione seno e quindi da esprimersi in radianti, rad) la **fase istantanea** (cioè relativa al generico istante **t**), **φ** (lettera greca "phi" <φ> minuscola) la **fase iniziale** (cioè all'istante **t=0**), e **ω** (lettera greca "omèga" minuscola), in rad/s, la **variazione della fase nell'unità di tempo**, detta più brevemente, **pulsazione**; si chiama poi **periodo**, **T**, l'**intervallo di tempo in cui la fase varia di 2π rad**, cioè durante il quale l'**intensità compie una sua variazione completa**, legato alla pulsazione dalla relazione **ω=2π/T**; l'**inverso del periodo** è detto **frequenza** in quanto esprime il numero di cicli di variazione di **i** nell'unità di tempo, avendosi **f=1/T** e anche **ω=2πf**; l'**unità di misura SI della frequenza è l'hertz**, corrispondente a un ciclo al secondo e così denominata per ricordare **Heinrich Rudolf Hertz** <'èrz> (1857-1894), grande fisico dell'elettromagnetismo, anche applicato (primi esperimenti fisici sulle radioonde); le correnti alternate hanno una straordinaria importanza pratica, in quanto sono di questo tipo gran parte delle correnti elettriche di uso industriale (in particolare, quelle usate nei sistemi di telecomunicazione);

corrente bidirezionale, tipo di corrente variabile (v. oltre) che **scorre ora in un verso lungo il suo circuito, ora nell'altro verso**;

corrente continua, o **corrente costante**, se è **unidirezionale, solenoidale e di intensità costante**, cioè se l'intensità non varia nel tempo e da sezione a sezione lungo il circuito;

corrente periodica, corrente variabile la cui intensità varia nel tempo con legge periodica, com'è, per es., una corrente alternata (v. sopra);

corrente solenoidale, quando la densità è solenoidale (cioè $\text{div} \mathbf{j}$ è identicamente nulla), da cui segue che l'intensità è la stessa a in ogni sezione del circuito;

corrente stazionaria; se nessuna delle sue caratteristiche varia nel tempo (in genere è intesa come equivalente a *corrente continua*);

corrente unidirezionale, se scorre sempre nello stesso verso;

corrente uniforme, se il campo della densità è un campo uniforme, cioè la densità non varia da punto a punto del suo campo;

corrente variabile nel tempo, quando una o più delle sue caratteristiche (valore, direzione e verso della densità, valore dell'intensità) variano nel tempo; la fig. IV. 3.2/1 mostra vari tipi di correnti variabili, che sono spesso denominate in base alla forma del diagramma dell'intensità in funzione del tempo (corrente a denti di sega, rettangolare, ecc.); la **corrente alternata simmetrica**, detta brevemente **corrente alternata** (v. sopra).

Fig. IV.3.2/1 - DIAGRAMMI DELL'INTENSITÀ i IN FUNZIONE DEL TEMPO t DI ALCUNI TIPI DI CORRENTE ELETTRICA. CORRENTI UNIDIREZIONALI: (1) continua; (2) variabile, a impulso rettangolare; (3) variabile periodica, a denti di sega. CORRENTI BIDIREZIONALI: (4) periodica simmetrica sinusoidale (corrente alternata); (5) periodica simmetrica a impulsi rettangola-

ri; (6) periodica asimmetrica a impulsi asimmetrici.

IV.3.3. Azioni elettrodinamiche e forza di Lorentz. Il vettore induzione $\mathbf{B}$. Azioni elettromagnetiche

Per la forza (**forza elettrodinamica**) $\mathbf{f}$ che una **carica elettrica q in moto con velocità $\mathbf{v}$** risente **in un campo magnetico** si ha la **legge di Lorentz delle azioni elettrodinamiche** (enunciata nel 1899 dal fisico olandese **Hendrik Antoon Lorentz** <Lòorents>, 1853-1928, prof. di fisica matematica nell'univ. di Leida):

[IV.3.3*1] $\mathbf{f} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, dove $\mathbf{B}$ è un vettore detto **induzione magnetica** (tale denominazione aveva senso soltanto nella formulazione originale del magnetismo in termini di poli magnetici di cui parleremo nel successivo par. 4); gli elementi di direzione e verso di $\mathbf{B}$ sono definiti dal prodotto vettore nella formula data (fig. IV.3.3/1).

La forza definita dalla [IV.4.3.3*1] ha una notevolissima importanza in molte questioni di fisica moderna ed è correntemente chiamata **forza di Lorentz**. Dalla sua espressione può trarsi la definizione operativa di **forza puramente deviatrice** ($\mathbf{f}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$), cioè

di **forza che non ha contenuto energetico** (il lavoro di essa è

sistematicamente nullo); se ne può trarre anche la definizione operativa del vettore induzione magnetica e della sua unità di misura, secondo la quale **induzione magnetica unitaria** è quella in un punto di un campo magnetico uniforme nel quale un corpo puntiforme portatore di **una carica elettrica unitaria** (1 coulomb) **in moto uniforme ortogonale alle linee del campo con velocità unitaria** (1 m/s) **risente di una forza unitaria** (1 newton) ortogonale sia alle linee del campo sia alla velocità (**il moto libero di una particella elettricamente carica in un campo di induzione B uniforme e ortogonale è circolare uniforme**). L'**unità di misura SI di B** così definita si chiama **tesla**, con simbolo T (dal cognome di **Nikola Tesla**, 1856-1943, elettrotecnico statunitense).

Fino al 1961 (data dell'introduzione ufficiale del tesla nel SI) si usava per l'induzione magnetica l'unità areica **weber a metro quadrato** (Wb/m^2), che si rifaceva alla **definizione originaria dell'induzione magnetica nel Sistema CGSms** (e poi nel Sistema CGSsim) come la **densità areica dei poli magnetici** (dell'intensità dei quali, ove li si ammettesse, sarebbe unità di misura SI il weber, Wb) **indotti sulla superficie di un corpo esposto a un campo magnetico** (v. oltre: par. 4). Il weber a metro quadrato è un'unità incongrua nella trattazione moderna del magnetismo, che ha rifiutato il concetto di polo magnetico come sorgente del campo magnetico d'induzione, e quindi è un'**unità che non deve essere usata**.

La forza di Lorentz è la protagonista intima dell'azione che un campo magnetico di induzione B esercita su un circuito percorso da corrente elettrica (**azione elettromagnetica**) se quest'ultima azione è vista come l'**insieme delle forze di Lorentz esercitate dal campo sulle cariche il cui moto costituisce la corrente**, com'è descritta dalla seguente **legge elementare delle azioni elettromagnetiche**:

[IV.3.3*2]

$$d\mathbf{f} = (i \, d\mathbf{l}) \times \mathbf{B},$$

riguardante la forza elementare $d\mathbf{f}$ che un campo di induzione magnetica B esercita sull'**elemento filiforme infinitesimo di circuito $d\mathbf{l}$** , percorso da corrente elettrica continua di intensità i , orientato nel verso della corrente (**fig. IV.3.3/2.1**) e che a seconda della natura della corrente può essere materiale (per es., un elemento di conduttore per una corrente elettrica di conduzione) oppure immateriale (per es., l'elemento di spazio in cui è definibile una corrente elettrica di induzione).

Se si considera un circuito non filiforme o, in termini generali astratti, un elemento di densità di corrente elettrica (**fig. IV.3.3/2.2**), per la **forza elementare locale**

$d\mathbf{f}$ d'interazione tra il campo di densità di corrente $\mathbf{j}$ e un campo d'induzione magnetica B nel generico elemento di volume du si ha:

[IV.3.3*3]

$$d\mathbf{f} = (\mathbf{j} \, du) \times \mathbf{B}.$$

L'**azione elettromagnetica complessiva su un circuito filiforme finito** (che potrebbe essere più complicata di una semplice forza, per es. una coppia di forze) è determinabile calcolandone le **componenti come integrali delle componenti di $d\mathbf{f}$** data dalla [IV.3.3*2] lungo il circuito; se quest'ultimo non è filiforme oppure si vuole

considerare un qualunque campo di corrente $\mathbf{j}$, sarà da effettuare un calcolo analogo con integrali relativi al volume u occupato dalla corrente, a partire dalla [IV.3.3*3].

Ricordiamo che è usuale chiamare **elemento di corrente** la **quantità vettoriale infinitesima** $i d\mathbf{l}$ (oppure $i v dt$, con v velocità della corrente e dt elemento di tempo impiegato per percorrere $d\mathbf{l}$) **per correnti filiformi** e $\mathbf{j} du$ **per correnti qualunque**; in ogni caso, **unità di misura SI** di un **elemento di corrente** è l'**ampere per metro** (A·m).

IV.3.4. Azioni magnetiche di momento magnetico

Come è stato detto dianzi, **azioni magnetiche** sono le **azioni che un campo magnetico esercita su un magnete** (in generale, **su un corpo magnetizzato oppure magnetizzabile**). Per comodità, si farà talora ricorso a un **magnete lineare**, che sarà qui schematizzato come un corpo lineare allungato, per es. cilindrico o parallelepipedo con asse di lunghezza molto maggiore delle dimensioni trasversali, magnetizzato in modo che una delle sue due estremità sia schematizzabile come un polo nord e l'altra come un polo sud: risulta ben evidente l'analogia di esso con un **dipolo magnetico** e la possibilità d'introdurre per esso un **momento magnetico dipolare**, come per la sorgente polare puntiforme a due poli che fu denominata "dipolo" (par. III.1.6.2).

È da osservare che generalmente si usa parlare semplicemente di "momento magnetico" per intendere quello dipolare appena nominato; non v'è luogo ad equivoci con momenti di rango superiore, cioè tensoriali, in quanto per questi si precisa sempre la qualifica o il rango (momento magnetico quadrupolare o di rango 3, ottupolare o di rango 4, ecc.: v. par. III.1.6.3).

Seguendo l'attuale ordinamento della metrologia magnetica, dettato dall'organo internazionale di coordinamento e normazione della fisica, la International Union of Pure and Applied Physics ("Unione internazionale di fisica pura e applicata", sigla internazionale IUPAP), l'**azione** che il suddetto dipolo magnetico, di momento magnetico $\mathbf{m}$, subisce da parte di un campo magnetico d'induzione $\mathbf{B}$ è una **coppia di forze** il cui momento } vale (ma v. oltre: par. 5):

$$[\text{IV.3.4*1}] \quad \quad \quad \} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Si dice **dotato di un momento magnetico (dipolare) $\mathbf{m}$** ogni oggetto per il quale l'azione subita da parte di un campo magnetico di induzione $\mathbf{B}$ sia una coppia di forze il cui momento $\mathbf{M}$ sia esprimibile mediante la [IV.3.4*1].

La **misurazione** (nei 3 elementi vettoriali) **del momento meccanico $\mathbf{M}$** dato dalla relazione ora scritta costituisce la base della **definizione operativa del momento magnetico $\mathbf{m}$** (indipendentemente dalla natura dell'ente che lo porta) se si pone l'oggetto di momento dipolo ignoto in un campo di induzione magnetica nota (perché misurabile oppure perché calcolabile con l'appropriata formula di campo fra quelle di cui si dirà nel seguito; v. oltre: par. 3.8).

Un **momento magnetico con misura SI unitaria** è quello che posto **in un campo magnetico di induzione unitaria** (cioè di 1 tesla) **risente di una coppia di forze di momento unitario** (cioè di 1 newton per metro); la [IV.3.4*1] mostra che l'**unità di misura SI dei momenti magnetici (dipolari)** è l'**ampere per metro quadrato** (A m²).

L'unità di misura ora nominata offre il destro a un'**osservazione metrologica** piuttosto importante, e cioè che nelle **unità composte per moltiplicazione e per divisione di altre due unità**, se si vogliono evitare ambiguità di significato la preposizione di connessione tra queste le due unità deve essere "**per**" con la moltiplicazione e "**a**" con la divisione: così, "ampere per metro quadrato" per l'unità SI di

momento magnetico $A\ m^2$ e, come detto poco sopra, “ampere *a* metro quadrato per l’unità SI di densità di corrente A/m^2 ”. Analogamente, è scorretto l’uso (dall’inglese) di “per” anziché “a” con uso partitivo: per

es., si deve dire “watt a metro quadrato” e non “watt per metro quadrato” nel caso di una potenza areica in W/m^2 .

Un caso particolarmente interessante è quello di **momenti magnetici attribuibili a determinati circuiti filiformi** percorsi da corrente elettrica.

Il più semplice di tali circuiti è una **spira piana di corrente**, cioè una **spira piana conduttrice percorsa da corrente elettrica, di forma qualunque ma di dimensioni linea**

ri piccole rispetto alla distanza da essa a cui si sta operando, in modo da assicurarne la puntiformità; il suo **momento magnetico (dipolare)** vale:

$$[\text{IV.3.4*2}] \quad m = i S n ,$$

essendo i l'intensità della corrente, S l'area della spira, n il versore della normale al piano della spira orientato in modo da vedere la corrente nel verso antiorario (**fig.**

IV.3.4/1). Tale formula conferma che, come già detto sopra ma con un differente ragionamento, l'**unità di misura SI del momento magnetico (dipolare)** è l'**ampere per metro quadrato** (A m^2).

IV.3.5. Azioni magnetiche di magnetizzazione. Il vettore magnetizzazione M . Il vettore intensità magnetica H . Suscettività magnetica di un mezzo

Tutti i corpi materiali che siano **esposti a un campo magnetico si magnetizzano**, cioè acquistano le proprietà di un magnete: tale **magnetizzazione** per alcuni materiali è **intensa e permanente**, mentre per altri è **assai debole e scompare** al venir meno del campo magnetizzante.

Ai processi fisici per cui i corpi si magnetizzano è dedicata la prima parte del successivo Cap. X, che si riferisce alla magnetizzazione delle rocce terrestri. Per il momento basterà dire che **la magnetizzazione di un corpo consiste nell'acquisto di un momento magnetico macroscopico, cioè d'insieme**, che prima non aveva; tale momento è il **risultato delle azioni** (coppie di forze) **che il campo (campo magnetizzante) esercita sul momento magnetico di cui sono dotate le singole molecole** di vari corpi (**paramagnetismo**), e, nel caso di alcuni corpi (**ferromagnetismo**: come si vedrà a suo tempo, è il caso più interessante) **sui forti momenti magnetici di gruppi di momenti molecolari** che si sono autonomamente organizzati in cosiddetti **“domini magnetici”**, tendendo in ogni caso ad allineare con sé medesimo tali momenti elementari; **per certi materiali, le cui molecole sono prive di un momento magnetico intrinseco**, è lo stesso campo magnetizzante che fa **nascere deboli momenti magnetici molecolari** antiparallelamente rispetto a sé medesimo (**diamagnetismo**).

Lo stato di un corpo magnetizzato è rappresentato per i vari corpi materiali dal **vettore (intensità di) magnetizzazione M** , definito, nel generico elemento di volume infinitesimo du del corpo, come **rapporto tra il momento magnetico dm_{du} acquistato nel processi di magnetizzazione dal generico volume infinitesimo dell'elemento e la misura du dell'elemento di volume**:

$$[\text{IV.3.5*1}] \quad M = dm_{du}/du .$$

Come ben si vede da questa relazione di definizione, **unità di misura SI** della magnetizzazione è, quale rapporto tra un momento magnetico dipolare ($A \cdot m^2$) e un volume (m^3), l'**ampere a metro** (A/m).

Nel generico punto P di un mezzo in cui esista un campo magnetico, **il vettore magnetizzazione M è legato all'induzione magnetica B non direttamente ma per il tramite di un terzo vettore, l'intensità magnetica H** , secondo la relazione:

$$[IV.3.5*2] \quad M = (B/\mu_0) - H,$$

dove μ_0 è la **permeabilità magnetica assoluta del vuoto**, una grandezza con valore numerico pari a $4 \cdot 10^{-10}$, per la quale ci si riferisce per il momento al par. 2.

Il significato fisico di tale nuovo vettore si coglie meglio se si scrive la [IV.3.5*2] nel seguente modo relativo al generico punto P , che è definitorio per esso:

$$[IV.3.5*3] \quad H(P) = [B(P)/\mu_0] - M(P).$$

Infatti, tale relazione può esser letta dicendo che l'intensità H rappresenta la “risposta” che uno spazio generico dà **all'applicazione ad esso di un campo magnetico d'induzione B** , la quale è da pensarsi risultante della **risposta del vuoto B/μ_0** , cioè di quella che si avrebbe se nello spazio considerato privo di corpi materiali, e della **risposta della materia** eventualmente presente, espressa da M .

Come si vede, H è **equidimensionato** con M e quindi la sua **unità di misura SI** è l'**ampere a metro** (A/m). **Nello spazio vuoto**, in cui M è identicamente nullo, essendo $H(P) = (B/\mu_0)$, **l'intensità coincide vettorialmente, misure a parte, con l'induzione**.

Sempre nell'attuale magnetologia IUPAP, **la magnetizzazione M è fatta dipendere dal vettore intensità magnetica H** , con una **coerenza** che appare **difettosa** per più versi (v. successivo par. 5), mediante una **relazione simbolica di causa ed effetto $M=f(H)$** , da interpretarsi scrivendo che **nel generico punto P del corpo magnetizzato la generica componente**, poniamo cartesiana, $M_i(P)$ di M è **una funzione f_i , da precisare, delle 3 componenti cartesiane di H in P** :

$$[IV.3.5*4] \quad M_i(P) = [f_i(H_x, H_y, H_z)]_P, \text{ con } i=x, y, z.$$

Nell'ipotesi, piuttosto generale, che **le funzioni f_i siano derivabili indefinitamente**, raggruppando in apposite sommatorie i termini di primo grado (cioè in H_x, H_y, H_z), di secondo grado (quadrati e prodotti misti a due: H_x^2 , ecc., $H_x H_y$, ecc.), di terzo grado (cubi e prodotti misti cubici: H_x^3 , ecc., $H_x^2 H_y$, ecc.), ecc., la relazione simbolica [IV.3.5*4] assume la forma esplicita:

$$[IV.3.5*5] \quad M_i(P) = [\chi_{ik} H_k + \chi_{ikl} H_k H_l + \chi_{iklm} H_k H_l H_m + \dots]_P,$$

con $i, k, l, m, \dots = x, y, z$, dove le varie grandezze indicate col simbolo χ (lettera greca “chi” minus.) dipendono dalla natura e dalle condizioni fisiche del corpo magnetizzato e sono chiamate **tensori di suscettività magnetica** di esso, e precisamente, nell'ordine: **tensore di suscettività magnetica del primo ordine** (o brevemente **suscettività magnetica lineare**), χ_{ik} , che è un tensore di rango 2, a 2 indici (i e k , per totali 9 componenti scalari); **tensore di suscettività magnetica del secondo ordine** (o **suscettività magnetica quadratica**), χ_{ikl} , di rango 3, a 3 indici (i, k, l , per 27 componenti scalari); ecc.

Si chiamano **mezzi magneticamente lineari** i mezzi materiali per i quali **le suscettività magnetiche da quella quadratica in poi sono nulle**, o possono essere considerate lecitamente trascurabili; in particolare, si hanno **mezzi lineari simmetrici** se, ulteriormente, si ha **simmetria delle componenti** della suscettività lineare, cioè $\chi_{ik} = \chi_{ki}$, per cui le componenti essenziali da 9 si riducono a 6.

Per un mezzo magneticamente lineare la relazione fra M e H nel generico punto di esso si esprime quindi simbolicamente mediante la relazione

[IV.3.5*6]

$$\mathbf{M} = \underline{\underline{\mu}}_{ij} \mathbf{H},$$

oppure, in forma esplicita, mediante il sistema di relazioni:

[IV.3.5*7]

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mu}}_{xx} M_x &= \underline{\underline{\mu}}_{xx} H_x + \underline{\underline{\mu}}_{xy} H_y + \underline{\underline{\mu}}_{xz} H_z, \\ \underline{\underline{\mu}}_{yx} M_y &= \underline{\underline{\mu}}_{yx} H_x + \underline{\underline{\mu}}_{yy} H_y + \underline{\underline{\mu}}_{yz} H_z, \\ \underline{\underline{\mu}}_{zx} M_z &= \underline{\underline{\mu}}_{zx} H_x + \underline{\underline{\mu}}_{zy} H_y + \underline{\underline{\mu}}_{zz} H_z. \end{aligned}$$

Per mezzi magneticamente lineari, si vede che, essendo le componenti M_i e H_i equidimensionate (loro comune **unità di misura SI** è l'**ampere a metro**), **la suscettività magnetica lineare è un tensore a due indici adimensionato** (non è così per le suscettività quadratica, cubica, ecc., che sono grandezze tensoriali di rango superiore a 2 e quindi con più di 2 indici). Nelle questioni che saranno esaminate **nel seguito saranno considerati**, salvo esplicita precisazione contraria, soltanto **mezzi magneticamente lineari simmetrici**.

Uno dei significati della [IV.3.5*6] è che **la magnetizzazione** nel generico punto di un corpo **dipende**, oltre che dal valore, anche **dall'orientamento** (direzione e verso) **dell'intensità H del campo magnetizzante**. Per certi mezzi, detti **magneticamente isotropi**, accade anche che la magnetizzazione in un punto dipenda soltanto dal valore e **non dall'orientamento di H** ; segue che nel generico punto P di un mezzo **magneticamente lineare e isotropo** la suscettività perda il suo intrinseco carattere tensoriale e la [IV.3.5*4] assuma allora la forma

$$[IV.3.5*8] \quad M(P) = \underline{\quad}(P) H(P),$$

la suscettività $\underline{\quad}(P)$ essendo allora una **funzione scalare del punto P considerato**.

Se poi il mezzo, oltre ad essere lineare e isotropo, è anche **magneticamente omogeneo**, ossia si magnetizza ovunque nello stesso modo in dipendenza della sola intensità del campo magnetizzante, **la sua suscettività $\underline{\quad}$ è una costante adimensionata** in tutti i punti di esso (e di tutti i mezzi che siano fatti della stessa sua materia):

$$[IV.3.5*9] \quad M(P) = \underline{\quad} H(P).$$

IV.3.6. Relazione tra induzione B e intensità H del campo. Permeabilità magnetica assoluta e relativa di un mezzo

Se si considera la situazione esistente nel generico punto dello spazio in cui esiste un campo magnetico, la precedente relazione [IV.5*2] può essere scritta anche nella forma:

$$[IV.3.6*1] \quad B = \underline{\quad}_0 (H + M),$$

con $\underline{\quad}_0$ la **costante permeabilità magnetica del vuoto**, sulla quale si tornerà tra poco.

Se, per semplicità – ma con buona aderenza a molte situazioni reali –, si considerano **mezzi magneticamente lineari**, tra H e M corre la relazione [IV.3.5*6], per cui la [IV.3.6*1] assume la forma:

$$[IV.3.6*2] \quad B = \underline{\quad}_0 (1 + \underline{\quad}_{ij}) H.$$

Ponendo

$$[IV.3.6*3] \quad (1 + \underline{\quad}_{ij}) = \underline{\quad}_{rij}, \quad \underline{\quad}_0 \underline{\quad}_{rij} = \underline{\quad}_{ij}$$

e chiamando $\underline{\quad}_{rij}$ **permeabilità magnetica (lineare) relativa (al vuoto)** e $\underline{\quad}_{ij}$ **permeabilità magnetica (lineare) assoluta** del mezzo nel punto considerato, si perviene alla relazione diretta:

$$[IV.3.6*4] \quad B = \underline{\quad}_{ij} H.$$

Come si vede dalla relazione ora scritta, l'**unità di misura SI della permeabilità magnetica (lineare) assoluta** deriva dal rapporto tra quella di B , cioè il tesla (T), e quella di H , cioè l'ampere a metro (A/m), e, a conti fatti, risulta equidimensionata con il rapporto tra l'unità di misura dei coefficienti di auto- e mutua induzione, cioè l'henry (H) e il metro, come dire che essa è l'**henry a metro** (H/m).

Ripetendo le considerazioni fatte a proposito della suscettività per i mezzi magneticamente isotropi e omogenei, nella relazione ora scritta il tensore di permeabilità (lineare) $\underline{\quad}_{ij}$ si muta nella permeabilità magnetica (lineare) assoluta $\underline{\quad}$, che è una costante

del mezzo (di norma, se non vi si è costretti, si prescinde dal precisare che si sta considerando un mezzo magneticamente lineare, oppure anche isotropo oppure anche omogeneo, limitandosi a fare capo alle relazioni adatte all'un caso o all'altro.

Per il vuoto (grandezze con deponente zero) si parla di “permeabilità magnetica” senza ulteriore qualificazione (per esso si assume, implicitamente, suscettività $\mu_0 = 1$, permeabilità relativa $\mu_r = 1$), e risulta per la permeabilità assoluta $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

È interessante fare due osservazioni sul significato operativo di due delle relazioni che sono state appena scritte.

La prima osservazione riguarda la [IV.3.6*1] e consiste nel leggere questa come una sorta di **definizione operativa del vettore induzione magnetica $\mathbf{B}$** ; infatti, rifacendosi a quanto detto in precedenza, il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ può essere visto come risultante, a meno della costante μ_0 , del campo di intensità $\mathbf{H}$ (risposta del vuoto) e di quello di magnetizzazione $\mathbf{M}$ (risposta della materia, a sua volta derivato di $\mathbf{H}$), con una logica che risulta invertita rispetto a quella seguita nel commentare la [IV.3.5*3]: in questa il ruolo “primario” era da attribuire a $\mathbf{B}$, mentre ora tale ruolo sembra da attribuire piuttosto a $\mathbf{H}$. Tale questione di “priorità” sarà ripresa nel successivo par. 5.

La seconda osservazione riguarda la [IV.3.6*4] e consiste nel poterla considerare come una **definizione operativa per l'intensità magnetica $\mathbf{H}$** nei casi in cui la **permeabilità assoluta μ** in gioco sia una **funzione scalare** (mezzo lineare isotropo), **oppure una costante scalare** (mezzo anche omogeneo) **nota oppure misurabile**.

Va tenuto ben presente a tale riguardo che, come precisato poco sopra, μ_0 è una costante nota soltanto nel vuoto ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$) e una costante misurabile senza gravi difficoltà soltanto per mezzi che possono essere considerati magneticamente lineari, isotropi e omogenei, mentre per mezzi lineari non isotropi μ è un tensore di rango 2 (a due indici) e per mezzi lineari isotropi ma non omogenei è una funzione scalare di punto; particolarmente complesso è poi il caso di mezzi non lineari, per i quali μ (come la suscettività da cui essa deriva) è espressa da una successione di tensori di rango crescente (cfr. [IV.3.5*5]).

IV.3.7. Proprietà intrinseche e non intrinseche dei vettori magnetici $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$

Come accennato in precedenza, quale vettore principale del campo magnetico è ora assunto l'induzione $\mathbf{B}$ (nel passato era preferita per questo ruolo l'intensità $\mathbf{H}$), e tanto basta se si opera nel vuoto, bastando allora un solo vettore per descrivere completamente un campo magnetico; in corpi materiali si considera la coppia vettoriale $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$, dei vettori della quale ci si propone di chiarire le proprietà.

Come **proprietà intrinseca** di una grandezza s'intende qui qualunque proprietà che sia indipendente dalle caratteristiche (natura, forma, dimensioni, stato fisico) del mezzo in cui si opera; ovviamente, **proprietà non intrinseca** è quella che invece dipende dalle caratteristiche del mezzo. Com'è stato detto a suo tempo (par. III.1.5 e III.1.7), le proprietà di vettori sono sinteticamente espresse mediante gli operatori differenziali *divergenza* e *rotore* e mediante gli operatori integrali *flusso attraverso una superficie chiusa* e *circuitazione*.

IV.3.7.1. Solenoidalità intrinseca dell'induzione magnetica $\mathbf{B}$. Sorgenti vettoriali e tensoriali, e non conservatività intrinseca di $\mathbf{B}$

La **proprietà intrinseca** dell'induzione magnetica $\mathbf{B}$ è di essere un **vettore a divergenza nulla** o, equivalentemente, un **vettore solenoidale**; come dire che **non ha sorgenti scalari** (poli) e che **le sue linee non hanno inizio né fine**, risultando **assai spesso**, in particolare, **linee chiuse orientate**:

$$[\text{IV.3.7.1*1}] \quad \text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Effettivamente, così risulta sia **dal punto di vista teorico**, in quanto il **calcolo della divergenza di $\mathbf{B}$** a partire dalla formula di campo appropriata (che, per un mezzo magneticamente lineare, si ottiene moltiplicando per la permeabilità magnetica assoluta μ del mezzo interessato l'espressione di $\mathbf{H}$ competente al caso in esame: v. oltre: par. 3.8) **dà sempre un risultato nullo** sia **dal punto di vista sperimentale**, in quanto il **rilevamento sperimentale delle linee di induzione** fornisce sempre linee chiuse oppure **aperte** ma senza inizio né fine (ma tale argomento sperimentale è intrinsecamente più debole del precedente risultato teorico).

A proposito della precedente argomentazione teorica sulla nullità identica di $\text{div } \mathbf{B}$, consideriamo la formula più generale che esprime l'induzione $\mathbf{B}$ generata nel vuoto da un circuito filiforme percorso da corrente continua con intensità i , cioè: $\mathbf{B} = k \mathbf{e}_C \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{r^3}$, essendo C la linea chiusa rappresentante il circuito e avendo posto, per comodità $k = \mu_0 i / (4\pi)$; segue: $\text{div } \mathbf{B} = k \mathbf{e}_C \oint_C \text{div} \left(\frac{d\mathbf{l}}{r^3} \right) = k \mathbf{e}_C \oint_C \left(\frac{d\mathbf{l}}{r^3} \cdot \nabla \right) = k \mathbf{e}_C \oint_C \left(\frac{1}{r^3} \nabla \cdot d\mathbf{l} - \frac{3}{r^5} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} \right)$ e quest'ultimo integrale è identicamente nullo in quanto è $\nabla \cdot d\mathbf{l} = 0$ e $\oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} = 0$. Quanto poi alla natura delle linee di un campo d'induzione magnetica $\mathbf{B}$, la **fig. IV.3.7.1/1** mostra schematicamente la struttura delle linee del campo di induzione magnetica risultante dalla composizione di quello, $\mathbf{B}_1$, generato da una spira filiforme piana circolare percorsa da corrente elettrica continua (le linee sono circonferenze con il centro in un punto della spira e giacenti su un piano ortogonale a quello della spira medesima; fa eccezione la linea per il centro della spira, che è una retta - quindi senza inizio né fine - ortogonale al piano della spira) e di quello, $\mathbf{B}_2$, generato da un filo rettilineo percorso da corrente passante per il centro della spira ortogonalmente al piano di essa (le linee sono circonferenze con il centro sul filo e ortogonali ad esso); la linea del campo risultante nel generico punto P dello spazio circostante è un'elica che si avvolge intorno alla spira: orbene, se, essendo i_s , i_f e r_s , r_f le intensità di corrente rispettiva-

mente nella spira e nel filo, e le distanze di P dalla spira e dal filo, il rapporto $i_s r_s / (i_f r_f)$ è irrazionale, il passo della detta elica ha valore tale che l'elica medesima s'avvolge infinite volte intorno alla spira passando però una e una sola volta per il generico punto P , non potendosi quindi parlare per essa né di un punto di inizio né di un punto di fine.

In virtù del teorema della divergenza [III.1.5*3], alla relazione differenziale [IV.3.7.1*1] di identica nullità della divergenza corrisponde, in uno spazio a connessione semplice, un'analoga **relazione integrale di identica nullità del flusso** di induzione attraverso una **qualunque superficie chiusa Σ tracciata nel campo** di induzione:

$$[\text{IV.3.7.1*2}] \quad \oint_{\Sigma} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}) = 0.$$

Non esistono dunque poli di induzione magnetica, e le **sorgenti di $\mathbf{B}$** sono quindi non sorgenti scalari (rango 0), ma **sorgenti vettoriali** (rango 1) e **tensoriali** (rango 2).

Una **sorgente vettoriale di B** è, concretamente, un corpo dotato di **momento magnetico dipolare** o, astrattamente, **il momento magnetico medesimo**, che la rappresenta completamente e che, se per qualche motivo riuscisse utile, potrebbe essere **modellizzato** mediante una **coppia di poli virtuali costituenti un opportuno dipolo**. Nel successivo par. 3.8.2 sarà data la formula per calcolare l'intensità (e da questa l'induzione) di un campo di momento magnetico.

Per quanto riguarda le **sorgenti tensoriali**, a causa della complessità della loro trattazione analitica non è frequente che se ne considerino nel magnetismo della fisica generale, nel quale ci si muove prevalentemente in questa sede. In sorgenti magnetiche tensoriali di rango crescente ci s'imbatterà qui soltanto quando si verrà a parlare (par. VI.5) del **modello globale delle sorgenti del campo magnetico terrestre** costituito da uno speciale sviluppo armonico i cui termini rappresentano, nell'ordine, un adatto **campo di dipolo** (modellizzante, come detto poco fa, una sorgente vettoriale, di rango 1), **di quadrupolo** (modellizzante una sorgente tensoriale di rango 2), **di ottupolo** (per una sorgente tensoriale di rango 3), e via dicendo (cfr. par. III.1.6.3).

Relativamente poi alla **conservatività**, **il campo di induzione magnetica non è conservativo**, nel senso che **la circuitazione di esso non è identicamente nulla** o che, equivalentemente ma soltanto in uno spazio a connessione semplice, **il suo rotore non è identicamente nullo**.

E' possibile verificare tale affermazione in vari modi, operando, con le opportune precauzioni, sulla relazione del paragrafo successivo che afferma la non conservatività dell'intensità H ([IV.3.7.2*2]). Qui, a titolo di esempio, ci si limiterà al caso di un **mezzo magneticamente lineare e isotropo ma non omogeneo**, per il quale si può assumere la semplice relazione $B = \mu H$, essendo la sua **permeabilità magnetica assoluta** μ una **funzione scalare del posto**; dall'espressione testé ricordata si ricava allora:

$$[IV.3.7.1*3] \quad \oint B \cdot dl = \mu \sum_k n_k i_k ,$$

essendo n_k il grado di concatenamento fra la linea chiusa l d'integrazione e il generico k -esimo circuito elettrico tra quelli che generano il campo, percorso da una corrente elettrica continua di intensità i_k .

Si ricorda che due **linee chiuse** (altrimenti dette **circuiti** nella geometria) sono **concatenate fra loro** (o che **esiste un concatenamento fra loro**) se i movimenti di uno dei circuiti sono necessariamente limitati dall'altro circuito, nel senso che **non è possibile trovare alcun movimento relativo che porti alla completa indipendenza reciproca**, tal quale come capita per due anelli consecutivi di una catena. Lasciando alla topologia la definizione esatta di **concatenamento** e di **grado di concatenamento n** tra due circuiti, ci si accontenterà qui del seguente criterio operativo: se s'immagina di tracciare una qualunque superficie che abbia per bordo uno dei due circuiti, questi sono concatenati fra loro se l'altro circuito attraversa **necessariamente** tale superficie una volta ($n=1$) o un numero dispari di volte ($n=3, 5, 7, \dots$).

A causa della presenza della permeabilità magnetica assoluta del mezzo, la **non conservatività di B** espressa dalla [IV.3.7.1*3] si presenta come una **proprietà non intrinseca** del campo d'induzione.

Analogamente, dall'espressione del rotore di H che daremo nel paragrafo successivo (v. [IV.3.7.2*3]) segue $\text{rot} B = \text{rot}(\mu H) = \mu \text{rot} H + \text{grad} \mu \wedge H$ e quindi:

$$[IV.3.7.1*4] \quad \text{rot} B = \mu j + \frac{1}{\mu} (\text{grad} \mu \wedge B) ,$$

essendo $\mathbf{j}$ la densità della corrente che genera il campo. Come si vede, **il campo d'induzione magnetica è rotazionale** (cioè con $\text{rot}\mathbf{B}$ non identicamente nullo). Com'è stato detto poco sopra, in uno spazio a connessione semplice questa è una condizione necessaria e sufficiente per affermare che **$\mathbf{B}$ non è conservativo**.

Va osservato che la struttura della [IV.3.7.1*3] è tale che se il campo $\mathbf{B}$ fosse generato non da una corrente elettrica ma da un magnete ($\mathbf{j}=0$) e inoltre il suo spazio fosse magneticamente omogeneo ($\mu =0$), seguirebbe $\text{rot}\mathbf{B}=0$, cioè il campo sarebbe irrotazionale; comunque, per la conservatività, che sap-

piamo essere assicurata unicamente dall'annullarsi identico della circuitazione di $\mathbf{B}$, occorrerebbe, ulteriormente, che lo spazio del campo fosse a connessione semplice (par. III.1.7). Un esempio di campo magnetico a rotore identicamente nullo ma non conservativo in quanto il suo spazio non è connesso semplicemente è mostrato nella fig. IV.3.7.1/2. Si tratta del campo d'induzione $\mathbf{B}$ generato da un magnete toroidale con nucleo ferromagnetico provvisto di traferro; questo campo ha linee chiuse quasi completamente coassiali (v'è una leggera deformazione nel traferro) ed è chiaramente irrotazionale (non vi sono correnti elettriche generatrici), ma la sua circuitazione lungo la generica linea l distanza r dall'asse non è identicamente nulla, valendo, con ottima approssimazione, $2_\pi rB$.

IV.3.7.2. Non solenoidalità e non conservatività dell'intensità magnetica $\mathbf{H}$

Relativamente alla solenoidalità di $\mathbf{H}$ si può seguire il procedimento appena seguito per la non conservatività di $\mathbf{B}$, cioè partire dalla solenoidalità di quest'ultimo vettore; ponendosi in un mezzo magneticamente lineare e isotropo, dalla relazione fra i due vettori si può scrivere dunque $\text{div}\mathbf{H} = \text{div}(\mathbf{B}/\mu) = (1/\mu)\text{div}\mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \text{grad}(1/\mu)$ e, dato che $\text{div}\mathbf{B}=0$, si ha:

$$[\text{IV.3.7.2*1}] \quad \text{div}\mathbf{H} = \mathbf{B} \cdot \text{grad} \frac{1}{\mu}.$$

Dunque, **in generale il campo di intensità $\mathbf{H}$ non è solenoidale**, in quanto può avere poli nei punti dove esiste un gradiente di permeabilità magnetica (quindi se si svolge in un mezzo magneticamente non omogeneo) non ortogonale all'induzione $\mathbf{B}$; in tal caso le sue linee sono aperte, andando dai poli positivi (a divergenza positiva, tra-

dizionalmente detti *poli nord*) ai poli negativi (*poli sud*). Il campo $\mathbf{H}$ è solenoidale soltanto se esso è prodotto da correnti elettriche e il mezzo è magneticamente omogeneo.

È molto importante osservare che, contrariamente a quello cui si potrebbe essere indotti da una lettura non attenta della relazione $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, se il campo si svolge in un mezzo non omogeneo, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ possono differire in direzione e anche in

verso, come dire che hanno linee differenti.

Un caso particolarmente istruttivo a tale riguardo è quello di un magnete a forma di parallelepipedo allungato (cosiddetto **magnete lineare**), per il quale la **fig. IV.3.7.2/1** mostra l'andamento delle linee dei tre campi di magnetizzazione **M**, di intensità **H** e di induzione **B**. Il campo **M** esiste soltanto nell'interno

del magnete ed è ivi uniforme, con linee parallele dalla faccia polare nord verso quella sud; **H** ha come poli tutti i punti delle facce polari del magnete, dove esiste un gradiente dell'inverso della permeabilità diretto verso l'esterno ortogonalmente alla superficie medesima e quindi parallelamente a **B** (i punti della superficie laterale non sono poli in quanto il detto gradiente è ortogonale all'induzione magnetica); in definitiva, le linee di intensità vanno, sia dentro sia fuori del magnete, dalla faccia polare nord a quella sud; infine, **B** risulta dalla composizione degli altri due vettori, secondo la relazione generale [IV.3.6*1], mostrando linee chiuse orientate, nell'esterno del magnete, dalla faccia nord a quella sud. È importante la circostanza che **nell'interno del magnete B e H hanno versi opposti**, mentre all'esterno hanno versi coespicienti. Fino a un recente passato il campo di intensità nell'interno di un magnete si chiamava, molto opportunamente, *campo smagnetizzante* in quanto, per essere il suo verso opposto a quello del campo che inizialmente aveva magnetizzato il magnete, finiva con lo smagnetizzare progressivamente quest'ultimo. Questa circostanza, quasi ignorata nell'attuale didattica del magnetismo, sarà ripresa nel successivo par. 5.

Relativamente alla **conservatività**, risulta che in generale **il campo magnetico d'intensità H non è un campo conservativo**; per la sua **circuitazione** si ha infatti la seguente **proprietà intrinseca**, nota anche come **teorema della circuitazione dell'intensità magnetica**, o **teorema di Ampère del magnetismo**:

$$[IV.3.7.2*2] \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k n_k i_k,$$

dove, come già detto prima a proposito dell'analogia formula per **B**, n_k è il grado di concatenamento fra il circuito (linea chiusa) d'integrazione l e il generico k -esimo circuito elettrico tra quelli che generano il campo, percorso da una corrente elettrica continua di intensità i_k .

Risulta così che **il campo di intensità H è a circuitazione nulla, cioè è conservativo, se è generato da magneti** (il secondo membro della [IV.3.7.2*2] è allora identicamente nullo: le correnti elettriche ivi rappresentate sono **correnti macroscopiche**, da non confondersi con le **correnti di ambito atomico cui è dovuto il magnetismo dei magneti**).

È da ricordare peraltro che la **non conservatività di un campo**, e qui in particolare dei campi magnetici, è una **caratteristica positiva ai fini di possibili applicazioni energetiche**: basta pensare ai vari tipi di macchine elettriche in cui si sfrutta il lavoro fatto dalle forze (non conservative) agenti su circuiti elettrici i cui elementi si spostano ciclicamente, cioè descrivendo un cammino chiuso ripetuto più volte, entro il campo magnetico generato da altri circuiti elettrici.

Tenendo presenti sia la relazione tra l'operatore integrale circuitazione e l'operatore differenziale rotore espressa dal teorema di Stokes della circuitazione (cfr. [III.1.6*3]), sia il fatto che l'intensità della corrente elettrica in un circuito è calcolabile come flusso della densità di corrente attraverso una sezione del circuito (cfr. [IV.4.2*2]), alla relazione integrale [IV.3.7.2*2] può affiancarsi la **relazione differenziale**

$$[IV.3.7.2*3] \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

con **j** densità della **corrente che genera il campo**. A causa della mancanza, nelle [IV.7.2*2 e *3], di grandezze riferentisi al mezzo, la **rotazionalità si presenta come proprietà intrinseca del campo d'intensità magnetica H**.

Ricordiamo che in uno spazio a connessione semplice l'annullarsi identico della divergenza e del rotore assicura, rispettivamente, la solenoidalità e la conservatività del campo medesimo; **in uno spazio a connessione non semplice la conservatività è assicurata soltanto dall'annullarsi identico della circuitazione e non del rotore** (cfr. par. III.1.7).

A mò di sintesi delle considerazioni precedenti, la seguente tab. IV.3.7.3 riporta le relazioni vettoriali che esprimono in forma differenziale le proprietà vettoriali dei vettori **$\mathbf{B}$** e **$\mathbf{H}$** in condizioni stazionarie in mezzi magneticamente lineari e isotropi (l'apposizione di un asterisco indica una proprietà intrinseca).

TAB. IV.3.7.3 – FORMA DIFFERENZIALE DELLE PROPRIETÀ VETTORIALI DEI VETTORI MAGNETICI
INDUZIONE $\mathbf{B}$ E INTENSITÀ $\mathbf{H}$ STAZIONARI IN MEZZI MAGNETICAMENTE LINEARI E ISOTROPI

Proprietà	Induzione magnetica	Intensità magnetica
Solenoidalità (sorgenti non polari)	$\text{div } \mathbf{B} = 0$	$\text{div } \mathbf{H} = \mathbf{B} \cdot \text{grad}(1/\mu)$
Irrotazionalità (non conservatività)	$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + (\text{grad } \mu) \times \mathbf{H}$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$

IV.3.7.3. Condizioni ai limiti per i vettori $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ nel passare da un mezzo a un altro

Se un campo magnetico è presente in più mezzi magneticamente differenti, come dire che si considera un mezzo “**discontinuamente non omogeneo**”, si verifica un interessante fenomeno, detto *rifrazione magnetica*: analogamente a quello che capita a raggi di luce nel passare da un mezzo a un altro, **le linee di induzione e quelle di intensità deviano nell’attraversare la superficie di separazione S tra due mezzi 1 e 2**, formando angoli differenti, α_1 e α_2 con la normale $\mathbf{n}$ a S nel punto d’incidenza (**fig. IV.3.7.3/1**). Oltre che geometricamente, tale deviazione è caratterizzabile anche mediante i valori che nell’uno e nell’altro mezzo hanno le componenti dei due vettori magnetici $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ parallele a S (**componenti tangenziali**, pedice ‘t’) e perpendicolari ad essa (**componenti normali**, pedice ‘n’).

A tal fine consideriamo (**fig. IV.3.7.3/1**) una piccola superficie piana A_1 vicinissima a S nel mezzo 1, sufficientemente poco estesa perché possa considerarsi parallela al piano tangente alla porzione di S immediatamente sottostante, e dunque ortogonale alla normale locale $\mathbf{n}$ a S ; mandiamo dai punti del contorno di A_1 linee perpendicolari a S e prolunghiamole al di là di S , nel mezzo 2, simmetricamente a questa, chiudendo poi il cilindroide così costruito con una superficie A_2 del tutto simmetrica di A_1 rispetto a S ; in virtù del teorema [IV.3.7.1*2], il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la superficie del precedente cilindro retto è nullo, come dire che, essendo trascurabile il contributo della superficie laterale e considerando i versi opposti dei versori della normale sulle superficie di base, la nullità del flusso totale conduce all’**uguaglianza delle componenti normali di $\mathbf{B}$ nell’uno e nell’altro mezzo**:

$$[IV.3.7.3*1] \quad A_1 B_1 \cos \alpha_1 = A_2 B_2 \cos \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{n1} = B_{n2}.$$

Consideriamo ora, con procedimento analogo, un cammino di circuitazione ottenuto (**fig. IV.3.7.3/2**) mediante due segmenti, l_1 e l_2 , uguali e simmetricamente nell’uno e nell’altro mezzo parallelamente a S e vicinissimi ad essa, raccordati poi con due segmenti ortogonali a S e di lunghezza piccolissima rispetto a quella di l_1, l_2 ; se, com’è il caso della fig., non v’è da considerare alcuna corrente concatenata con la linea chiusa così costruita, a norma del teorema della circuitazione dell’intensità magnetica [IV.3.7.2*2], tale circuitazione è qui nulla, per cui, trascurando lecitamente i contributi dei segmentini ortogonali a S e tenendo conto del segno opposto dei contributi dei due lati in virtù della direzione opposta del differenziale $d\mathbf{l}$ lungo i due segmenti, risulta:

$$[IV.3.7.3*2] \quad l_1 H_1 \sin \alpha_1 = l_2 H_2 \sin \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{t1} = H_{t2}.$$

Le due relazioni così ottenute possono esprimersi con la seguente affermazione:

nell’attraversare la superficie di separazione tra due mezzi magneticamente differenti si conservano le componenti normali delle induzioni $\mathbf{B}$ e le componenti tangenziali delle intensità $\mathbf{H}$.

Da queste **condizioni di continuità dei vettori magnetici**, si ricava che per **mezzi lineari isotropi** (per i quali è $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, con la permeabilità assoluta μ espressa da una funzione scalare di punto) è $\mu_1 H_1 \cos \theta_1 = \mu_2 H_2 \cos \theta_2$ e $H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2$, da cui segue, dividendo membro a membro, la seguente **legge della rifrazione magnetica**:

$$[\text{IV.3.7.3}^*4] \quad \mu_2 \tan \theta_1 = \mu_1 \tan \theta_2.$$

Si riconosce così, in particolare, che, essendo $\tan \theta_2 = (\mu_2 / \mu_1) \tan \theta_1$, **le linee magnetiche s'accostano alla normale** ($\mu_2 < \mu_1$) **se** $\mu_2 < \mu_1$ (per es., caso ferro-aria) e **invece si discostano dalla normale** ($\mu_2 > \mu_1$) **se** $\mu_2 > \mu_1$ (per es., caso aria-ferro).

IV.3.8. Formule di campo

Per un campo magnetico hanno tale nome le **relazioni che consentono di calcolare l'induzione $\mathbf{B}$ oppure l'intensità $\mathbf{H}$ del campo magnetico generato da correnti elettriche continue oppure da momenti magnetici costanti e in quiete**. Per quanto la didattica attuale dia una netta prevalenza al vettore induzione, in quel che segue **si è preferito** tuttavia **dare le relazioni che riguardano l'intensità $\mathbf{H}$** del campo (come del resto si usava nelle trattazioni SI iniziali, diciamo fino agli anni Sessanta del 20° sec.), e ciò per ragioni di semplicità. Ove occorresse, il passaggio dalla formula per $\mathbf{H}$ alla corrispondente formula per $\mathbf{B}$ si effettua **moltiplicando per la permeabilità magnetica del vuoto μ_0** se si opera nel vuoto **oppure** mettendo in gioco nel modo opportuno **la permeabilità magnetica del mezzo** materiale in cui si opera; se quest'ultimo può essere considerato **lineare e isotropo**, di permeabilità magnetica assoluta μ , si ha $\mathbf{B}$ semplicemente **moltiplicando $\mathbf{H}$ per μ** .

Inoltre, per facilitare la consultazione di testi, specialmente del passato, con trattazioni CGS dell'elettromagnetismo, delle formule di campo nelle usuali unità SI è data anche la **corrispondente versione in unità CGSsim (di Gauss)**.

IV.3.8.1. Campi magnetici stazionari generati da correnti elettriche

Il riferimento a **campi stazionari** significa che **il campo s'intende generato da circuiti in quiete percorsi da correnti elettriche continue oppure da magneti in quiete e di momento magnetico costante**.

Le formule generali, espresse in forma differenziale, sono quella relativa a un **campo $\mathbf{j}$ di densità di corrente**,

$$[\text{IV.3.8.1}^*1] \quad d\mathbf{H}(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} (\mathbf{j} \, du \, \mathbf{r}), \quad (\text{SI})$$

$$d\mathbf{H}(P) = \frac{1}{c} \frac{1}{r^3} (\mathbf{j} \, du \, \mathbf{r}), \quad (\text{CGSsim})$$

e quella per un **elemento filiforme di corrente idl** ,

$$[\text{IV.3.8.1}^*2] \quad d\mathbf{H}(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{r^3} (dl \, \mathbf{r}), \quad (\text{SI})$$

$$d\mathbf{H}(P) = \frac{1}{c} \frac{i}{r^3} (dl \, \mathbf{r}), \quad (\text{CGSsim})$$

essendo $\mathbf{j}$ e i rispettivamente la densità e l'intensità della corrente, $\mathbf{r}$ la distanza orientata dal generico elemento di volume du del campo di densità di corrente o dal generico elemento filiforme dl di corrente al punto P di interesse, c la velocità della luce nel vuoto.

Il **valore finito locale** $H(P)$ si ottiene **per integrazione nel volume** u del campo di densità di corrente **oppure nella linea** l con cui si schematizza il circuito filiforme.

La [IV.3.8.1*2] assume forme finite particolari per varie conformazioni dei circuiti filiformi generatori; ricordiamo le tre seguenti, di notevole importanza pratica.

Filo rettilineo di estremi 1 e 2

Consideriamo un punto P che disti R dall'asse del filo, che è visto sotto gli angoli α_1, α_2 (**fig. IV.3.8.1/1**); si ha:

$$[IV.3.8.1.*3] \quad H(P) = \frac{i}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (\text{SI})$$

$$H(P) = \frac{i}{cR} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \quad (\text{CGSsim})$$

se il filo rettilineo può essere considerato **infinitamente lungo** ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$ rad), il che accade se ci si mette in punti prospicienti all'incirca la **metà del filo** e a **distanza** **suffi-**

cientemente piccola rispetto alla lunghezza del filo (**necessariamente finita!**), le linee del campo sono circolari centrate sul filo (**fig. IV.3.8.1/2**) e per il **modulo dell'intensità** vale la seguente **formula approssimata di J.-B. Biot** (<bió>, 1774-1862, prof. di fisica matematica nel Collegio di Francia a Parigi) **e F. Savart** (<savàr>, 1791-1841, medico e scienziato):

$$[IV.3.8.1*4] \quad H(P) = \frac{i}{2\pi R}, \quad (\text{SI})$$

$$H(P) = \frac{2i}{cR}. \quad (\text{CGSsim})$$

Spira circolare

In generale, è un caso piuttosto complicato, tanto che in questa sede converrà usare le seguenti **formule approssimate** per le componenti e gli elementi geometrici indicati nella **fig. IV.3.8.1/3**, che mostra anche l'andamento delle linee del campo $H(P)$:

$$[IV.3.8.1*5] \quad H_z(P) = k \frac{iR^2}{r^3} \left(2 - \frac{3r'z}{r^3}\right),$$

$$H_{r'}(P) = k \frac{iR^2}{r^3} \frac{3r'z}{r^3},$$

con $k=1/4$ con unità SI e $k=c$ con unità CGSsim. **Sull'asse z della spira** s il campo è diretto com'è indicato nella **fig. IV.3.8.1/4** (cioè lungo l'asse e nel verso in cui la cor-

rente appare antioraria) e si ha la **formula esatta**:

$$[IV.3.8.1*6] \quad H(P) = K \left(\frac{iR^2}{R^2 + z^2} \right)^{3/2} ;$$

essendo $K = \frac{\mu_0}{4\pi}$ con unità SI e $K = \frac{2}{c}$ con unità CGSsim.

Nel centro O della spira è, ancora con **formula esatta**:

$$[IV.3.8.1*7] \quad H(O) = K \frac{i}{2R},$$

con i detti valori di K per unità SI e CGSsim.

Solenoido rettilineo

Un **solenoido rettilineo** è ottenuto avvolgendo un filo conduttore, che poi sarà percorso da corrente elettrica continua di intensità i , su un cilindro rettilineo di raggio R secondo un'elica regolare di passo p , cioè con $n=1/p$ numero di spire a unità di lunghezza (un'altra denominazione abbastanza corrente è **bobina cilindrica**); in generale; con gli elementi geometrici indicati nella **fig. IV.3.8.1/5**, per un punto P_i nell'interno del solenoide si ha (v. anche l'esercizio proposto alla fine del capitolo):

$$[IV.3.8.1*8] \quad H(P_i) = K n i \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{2\pi R}\right)^2}},$$

essendo $K = \frac{\mu_0}{4\pi}$ con unità SI e $K = \frac{2}{c}$ con unità CGSsim; per un punto P_e all'esterno del solenoide a distanza x dall'asse si ha:

$$[IV.3.8.1*9] \quad H(P_e) = K n i \frac{\frac{p}{2\pi R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{2\pi R}\right)^2}} \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{2x}.$$

Complessivamente, si tratta di un **campo non uniforme, anche nell'interno dell'avvolgimento**. Se il **passo p dell'elica di avvolgimento** è o si può considerare **molto minore del raggio R dell'elica** si parla di **solenoido a spire serrate**, che è uno schema al quale si possono ricondurre molti tipi di bobine della pratica; in tal caso si ha:

$$[IV.3.8.1*10] \quad H(P_i) = K n i \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{2}, \quad [IV.3.8.1*11] \quad H(P_e) = 0,$$

cioè **il campo esiste in pratica soltanto nell'interno del solenoide**; se, ulteriormente, è $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \pi$, per modo che **dal punto di interesse** (che ha da essere **sufficientemente distante dalle estremità**, il solenoide appare **come se fosse infinitamente lungo (solenoido rettilineo indefinito a spire serrate)**, il campo **esiste soltanto nell'interno** ed è ivi **uniforme**, con linee parallele all'asse dell'elica (orientate secondo la stessa regola data sopra per la spira circolare) e intensità data dalla semplice **formula del solenoide rettilineo (indefinito a spire serrate)**:

$$[IV.3.8.1*12] \quad H(P_i) = n i \quad (\text{SI}), \quad H(P_i) = \left(\frac{4\pi}{c}\right) n i \quad (\text{CGSsim}).$$

Un caso di una certa importanza è quello del **toroide**, o **solenoidale toroidale**, che è un solenoide avente per asse una circonferenza c (**fig. IV.3.8.1/6**); ha interesse il caso a spire serrate, per il quale si ha una situazione simile a quella del solenoide rettilineo inde-

finito a spire serrate, in quanto **il campo esiste soltanto nell'interno dell'avvolgimento**, le sue linee sono circolari concentriche a c , parallele a questa e fra loro, orientate in modo da vedere scorrere la corrente nel verso antiorario, e si ha:

$$[\text{IV.3.8.1*13}] \quad H(P) = \frac{N i}{2\pi r} \quad (\text{SI}), \quad H(P) = \frac{2}{c} \frac{N i}{2\pi r} \quad (\text{CGSsim}),$$

dove N è il **numero totale delle spire** (da pensarsi uniformemente distribuite sulla circonferenza c) e r è il **raggio corrispondente al generico punto P** nell'interno del toroide (è R_i – r – R_e , rispetto ai raggi interno ed esterno dell'avvolgimento (**H varia dunque tra un valore massimo, per r – R_i , e un valore minimo, per r – R_e**).

IV. 3.8.2. Campo magnetico stazionario generato da un momento magnetico (dipolare)

Com'è stato precisato dianzi, perché si possa parlare di campo stazionario occorre che il momento magnetico (dipolare) $\mathbf{M}$ generatore sia in quiete e di valore costante. Riferendosi agli elementi geometrici indicati nella **fig. IV.3. 8.2/1** si ha:

$$[\text{IV.3.8.2*1}] \quad H(P) = \frac{1}{4\pi r^3} [3(\mathbf{M} \cdot \text{vers} \mathbf{r}) - \mathbf{M}],$$

con l'avvertenza che la **distanza r** dal punto in cui è applicato il momento $\mathbf{M}$ al punto P che si considera sia **molto grande** rispetto alle dimensioni lineari del sistema cui si attribuisce il momento $\mathbf{M}$, per modo che il sistema in questione possa essere considerato una **sorgente puntiforme** per il punto P . L'andamento delle linee del campo è quello stesso che si avrebbe pensando di sostituire $\mathbf{M}$ con una spira circolare infinitesima percorsa da corrente (cfr. fig. IV.3.4/3).

IV.4. Richiami di magnetologia in unità CGS

Si ritiene utile richiamare i punti principali della magnetologia originaria in unità di misura del **Sistema CGS magnetostatico** (CGSms) e ciò sia per ragioni di completezza storica, sia perché, com'è stato accennato altrove (par. IV.2), tali unità, nella versione del **Sistema CGS simmetrico** (CGSsim), o **Sistema di Gauss**, sono tuttora in uso nella fisica microscopica (molecolare, atomica, nucleare, delle particelle); inoltre, la conoscenza di essa è fondamentale per **consultare utilmente vari ottimi testi** dedicati al magnetismo, non soltanto del passato ma anche contemporanei, che usano appunto unità CGSsim.

Per **denominare le unità dei Sistemi CGS**, a pochissime delle quali fu dato in origine un nome particolare, si usano oggi **la denominazione e il simbolo della corrispondente unità SI** con il **prefisso ab-**(dall'ingl. *ab[solute]* “assoluto”) per le **unità magnetiche CGSms** (per es., *abtesla*, abT, per l'unità d'induzione magnetica corrispondente al tesla; ecc.) e il **prefisso stat-**(dall'ingl. *[electro]stat[ic]* “elettrostatico” per le unità elettriche CGSes (per es., *statampere*, statA, per l'unità di intensità di corrente elettrica corrispondente all'ampere; ecc.).

Il punto di partenza per elaborare la **magnetologia** (propriamente **magnetostatica**) **CGSms** fu l'assunzione che a produrre i **fenomeni magnetici** fossero **poli magnetici**, enti definiti soltanto operativamente appunto come causa dei fenomeni, sul calco del concetto di cariche elettriche quali causa dei fenomeni elettrici. In un primo tempo l'evoluzione della magnetostatica fu identica a quella dell'elettrostatica, cominciando dalla **legge magnetostatica di Coulomb**, enunciata nel 1786 in perfetta analogia con la legge elettrostatica di Coulomb dell'anno precedente e che qui richiamiamo dal par. IV.2 nella **forma valida per il vuoto**, ricordando che in tal caso la **costante magnetostatica di Coulomb** C_m , **adimensionata**, della forma generale è assunta **pari a 1**:

$$[IV.4*1] \quad f_{12} = \frac{p_1 p_2}{r_{12}^2} \text{ vers } \mathbf{r}_{12},$$

essendo f_{12} la forza che il polo di valore p_1 esercita sul polo di valore p_2 e r_{12} la distanza orientata da p_1 a p_2 ; se questi sono omonimi, per es. due poli nord, o positivi, la forza è orientata secondo r_{12} , cioè **repulsiva** (si tratta di un **campo coulombiano**, e non newtoniano). A **unità di misura per il valore dei poli magnetici** fu assunto il **polo che, nel vuoto, esercita su un polo identico a distanza unitaria (1 cm) la forza unitaria (1 dina)**; tale *polo unitario* fu denominato **maxwell**, in onore di **James Clark Maxwell** <mèksuël> (1831-1879, prof. di fisica nell'univ. scozzese di Aberdeen), con simbolo Mx (ora, secondo l'uso richiamato poco sopra, **abweber**).

Come **vettore principale** di un campo magnetico fu assunto, in parallelismo con l'elettrostatica, l'**intensità magnetica**, H , come **rapporto tra la forza df che il campo esercita su un polo infinitesimo** (cioè di valore dp sufficientemente piccolo da non perturbare apprezzabilmente il campo sotto misurazione) **e il valore df di tale "polo di prova"**, secondo la **relazione di definizione simbolica** (da non leggere assolutamente come una derivata!):

$$[IV.4*2] \quad H = df/dp.$$

Alla relativa unità di misura, cioè la dina a maxwell, fu dato il nome di **oersted** <örsted> (Oe), in onore del fisico danese **Hans Christian Oersted** (1777-1851, prof. di chimica e fisica nel politecnico di Copenhagen).

A tale vettore H furono attribuite le **azioni magnetiche**, consistenti in momenti di coppia M che il campo esercita **su oggetti dotati di momento magnetico (dipolare) m** (tipicamente, dipoli magnetici), secondo la relazione:

$$[IV.4*3] \quad M = m \times H.$$

Con perfetta analogia rispetto al vettore induzione elettrica (che dà la densità areica delle cariche indotte sulla superficie di un conduttore esposto a un campo elettrico), fu introdotto il vettore **induzione magnetica**, B , di **valore pari alla densità areica dei poli indotti sulla superficie di un corpo magnetizzabile esposto a un campo magnetico**; la sua **unità di misura**, cioè il maxwell/cm², fu denominata **gauss** ((simbolo G), in onore di K.F. Gauss, e oggi è detta anche **abtesla** (abT)).

Per dare conto della **magnetizzazione d'insieme**, e non soltanto di superficie, di corpi esposti a un campo magnetico fu introdotto il vettore (**intensità di**) **magnetizzazione** M , definito come **rapporto tra il momento magnetico dm acquistato da un elemento di corpo magnetizzato e la misura du del volume di tale elemento**, supposto sufficientemente piccolo perché nel suo ambito il corpo si possa considerare **magneticamente omogeneo**. Tale vettore fu assunto **funzionalmente dipendente da H** , esattamente come nella magnetologia IUPAP. Anche se gradualmente nel tempo, su tale vettore si elucubrarono le considerazioni che

portarono ai concetti di mezzo magneticamente lineare, quadratico, ecc. e delle relative suscettività e permeabilità scalari e tensoriali, secondo ciò che è stato sintetizzato nei precedenti parr. 3.5 e 3.6 per l'attuale magnetologia in unità SI.

L'assunzione dell'adimensionalità e del valore 1 per la costante magnetostatica del vuoto portò parimenti all'**adimensionalità** e al **valore unitario** per la **permeabilità magnetica del vuoto**. Per il generico punto P del generico mezzo la relazione CGSsim fra i tre vettori magnetici risultò nella forma:

$$[IV.4*4] \quad \mathbf{B}(P) = \mathbf{H}(P) + 4\pi \mathbf{M};$$

la magnetizzazione $\mathbf{M}$ dipende funzionalmente da $\mathbf{H}$, con la quale è equidimensionata; riferendosi alle componenti cartesiane si ha:

$$[IV.4*5] \quad M_i(P) = [f_i(H_x, H_y, H_z)]_P, \text{ con } i=x, y, z.$$

La relazione [IV.4*4] consentì di aggiungere all'intensità $\mathbf{H}$ (in cui con la [IV.4.5] si poteva includere la magnetizzazione $\mathbf{M}$) l'induzione $\mathbf{B}$ come secondo vettore per descrivere completamente i campi magnetici (tale relazione mostra che da due vettori dei tre del campo può sempre essere determinato il terzo). Per un **mezzo magneticamente lineare e isotropo** si perveniva a scrivere:

$$[IV.4*6] \quad \mathbf{M}(P) = \chi(P) \mathbf{H}(P),$$

essendo $\chi(P)$, funzione adimensionata di punto, la **suscettività magnetica del mezzo**. Da qui derivava:

$$[IV.4*7] \quad \mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi) \mathbf{H},$$

con

$$[IV.4*8] \quad \mu = 1 + 4\pi\chi$$

permeabilità magnetica del mezzo (non v'è motivo di distinguere tra assoluta e relativa).

La seguente **Tab. IV.4** riporta, in forma differenziale, le relazioni che esprimono le **proprietà di $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ in unità CGSsim per mezzi magneticamente lineari e isotropi** (le **proprietà intrinseche**, cioè indipendenti dalle particolarità del mezzo, sono contraddistinte **con un asterisco**; c indica la velocità della luce nel vuoto, occorrente, quale fattore normalizzante, nelle relazioni dove compaiono insieme unità magnetiche CGSms e unità elettriche CGSes).

Tab. IV.4 – FORMA DIFFERENZIALE DELLE PROPRIETÀ VETTORIALI DEI VETTORI MAGNETICI $\mathbf{B}$ E $\mathbf{H}$ STAZIONARI PER MEZZI MAGNETICAMENTE LINEARI E ISOTROPI IN UNITÀ CGSsim

Proprietà	Induzione magnetica	Intensità magnetica
Solenoidalità	*div $\mathbf{B} = 0$	div $\mathbf{H} = \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{H}$
Rotazionalità	rot $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{H}$	*rot $\mathbf{H} = \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{B}$

Una grande difficoltà in questo primo periodo fu costituita dal problema di precisare la **connotazione fisica dei poli magnetici**, il cui concetto era peraltro di natura basilare: per es., dov'erano esattamente localizzati i poli di un sottile magnete rettilineo? Fu tutto un fiorire di studi a tale riguardo, in genere concludentisi con la proposizione di formule sulla posizione dei poli rispetto alle estremità del magnete (e similmente per magneti non rettilinei).

Dopo la pubblicazione, nel 1820, dei risultati delle esperienze di H. Chr. Oersted sull'**equivalenza di effetti e di comportamenti tra magneti permanenti e circuiti percorsi da corrente elettrica**, effettuate davanti all'Accademia di Copenhagen dal 1816, apparve presto chiaro che una potente **sorgente dei campi magnetici**, anzi l'unica sorgente di essi ove si tenesse conto anche degli aspetti microscopici dei

fenomeni, era la **corrente elettrica**. Così, in breve volgere di tempo, all'incirca dal 1821, per opera principalmente dei già nominati A. M. Ampère e P.-S. Laplace, il “**magnetismo dei poli**” fu prima affiancato e poi sostituito dall'attuale “**magnetismo delle correnti elettriche**”.

Questo non significa che la locuzione **“polo magnetico”** non abbia più diritto di cittadinanza nel linguaggio della fisica: essa è rimasta, ma non con il suo primo significato di sorgente dei campi magnetici analogicamente corrispondente alla carica elettrica per i campi elettrici; a differenza delle cariche elettriche, che sono enti separabili (è possibile infatti ottenere singole cariche elettriche positive oppure negative, indipendenti fra loro: si pensi, per es., a ioni positivi e negativi in strutture molecolari), **i poli magnetici non sono enti fisici separabili**. Indicativa a tale riguardo per i poli supposti alle estremità di un magnete lineare è il cosiddetto **esperimento del magnete tagliato**: se un sottile magnete rettilineo è tagliato a metà in lunghezza, non si hanno i due poli separati, ma magneti completi, e così via in tutti i successivi possibili tagli, fino ad arrivare a una singola particella elementare tra quelle costituenti la materia, la quali o non presentano magnetismo o presentano un momento magnetico dipolare, risultando allora modellizzabile a guisa ancora di minuscolo magnete lineare. L'**unico significato accettabile per “polo magnetico”** è per la denominazione di **punti dove il vettore H ha divergenza non nulla**, cioè da dove si dipartono (divergenza positiva, poli positivi) oppure dove terminano (divergenza negativa, poli negativi) linee di intensità magnetica (tale denominazione non si pone per l'induzione B , che, essendo a divergenza identicamente nulla, non può avere poli).

IV.5. Un'incongruenza nell'attuale magnetologia IUPAP in unità SI

Una non irrilevante differenza tra l'attuale magnetologia in unità SI normata dalla IUPAP e la precedente magnetologia CGSsim consiste nel fatto che le azioni (momenti di coppia M) esercitate da un campo magnetico su momenti magnetici dipolari m sono ascritte al vettore induzione B nella prima (cfr. [IV.3.4.4*1]) e al vettore intensità H nella seconda (cfr. [IV.4*3]); in ambedue le dette magnetologie si ascrive poi a H la magnetizzazione dei corpi, facendo dipendere da H la magnetizzazione M (cfr. [IV.3.5*4] e [IV.4*6]).

Orbene, come ricorderemo a suo tempo (Cap. X), salvo che nelle sostanze diamagnetiche, le quali fanno storia a sé, la **magnetizzazione macroscopica** delle altre sostanze consegue all'**azione di coppie di forze che il campo magnetizzante esercita sui momenti magnetici elementari** delle singole molecole (sostanze paramagnetiche) oppure di aggruppamenti di momenti magnetici molecolari equiorientati (**domini magnetici** delle sostanze ferromagnetiche e ferrimagnetiche). Proprio con riferimento a corpi magnetizzati, v'è una **situazione sperimentale** che sembra indicare senza dubbio come a determinare **coppie di forze su momenti magnetici** sia **il vettore intensità H e non il vettore induzione B** . Ci si riferisce al ben noto fatto che **per evitare la smagnetizzazione nel tempo subito da un magnete provvisto di traferro** e ridurla a quella, estremamente più lenta, dovuta ai disordinati moti di agitazione termica dei momenti magnetici elementari della sostanza di cui è fatto il magnete **occorre eliminare il traferro** di quest'ultimo, **disponendo una cosiddetta “àncora” di ferro dolce tra le espansioni polari**.

Si consideri la **fig. IV.5/1**, che nelle sue parti 1, 2 e 3 mostra l'andamento del campo, rispettivamente, di magnetizzazione M , di induzione B e di intensità H per un magneteanulare provvisto di traferro, cioè di un'interruzione del suo circuito magnetico (magneti di questa forma sono largamente usati per esperimenti fisici e per applicazioni tecniche).

M esiste soltanto nell'interno del magnete ed è un campo polare, i suoi poli risultando addensati, com'è mostrato (1), sulla superficie del traferro, le cosiddette *estremità*, o *espansioni polari* del magnete. Il campo B è, come sappiamo, a divergenza nulla e le sue linee sono in questo caso *linee chiuse*, interessanti anche il traferro (2). La divergenza del campo H è invece non nulla nei punti dove $B \cdot \text{grad}(1/\mu)$ è non nullo, per cui i poli di H sono i punti delle estremità polari (3), con il segno risultante dal prodotto scalare dato or ora; se indichiamo con H_0 e H_f l'intensità rispettivamente nell'aria (a) del traferro e nel ferro (f) del magnete, dato che non ci sono correnti elettriche generatrici in gioco, se consideriamo

una linea come quella indicata, chiamandone l_a la lunghezza nell'aria del traferro e l_f la lunghezza nel ferro, il teorema della circuitazione magnetica [IV.4.7.2*2] dà $H_f l_f + H_a l_a = 0$, cioè

$H_f = -(l_a/l_f) H_a$; si fa presente che è $H_a = B_a/\mu_0$, misurabile senza difficoltà e di valore piuttosto grande, dell'ordine delle centinaia di migliaia di A/m, mentre il valore di H_f , dipendendo dalla larghezza del traferro, è assai minore. In conclusione, $\mathbf{H}$ è diretto nel verso di $\mathbf{B}$ nell'aria del traferro, mentre nell'interno del magnete è assai meno intenso e diretto nel verso opposto a quello di $\mathbf{B}$.

Immaginiamo ora (4) d'inserire un pezzo di ferro dolce esattamente nel traferro in modo da annullarlo, e con esso chiudere il circuito magnetico; l_a va a zero e con essa s'annulla l'intensità H_f nel magnete, risultando quindi che v'è un campo di magnetizzazione e un campo d'induzione, ma non un campo d'intensità (per avere questo risultato non occorre che l'anzidetto pezzo di ferro, che viene detto *ancora* del magnete, sia inserito nel traferro com'è indicato nella figura, in quanto esso può essere semplicemente appoggiato sulle due estremità polari, a guisa di ponte).

Se a determinare le azioni di coppia sui momenti elementari del magnete fosse il campo $\mathbf{B}$, che nell'interno del magnete non cambia di direzione per la presenza dell'ancora, **non si comprende perché con quest'ultima la smagnetizzazione che si osserva nel tempo risulti assai rallentata**. Ciò è invece **ben comprensibile** se i momenti $\mathbf{m}$ di coppia sui momenti magnetici fossero **da ascrivere all'intensità**, e non all'induzione, del campo magnetico secondo la relazione [IV.4*3] della prima magnetologia CGS, cioè:
[IV.5*1] $\mathbf{m} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Senza l'ancora, esisterebbe nel magnete il moderato campo interno d'intensità H_f , che, come s'è già detto, è diretto nel verso opposto a quello di $\mathbf{B}$ e quindi a quello del campo esterno $\mathbf{H}$ che ha magnetizzato originariamente il magnete; questo campo interno, ancorché di moderato valore, **col trascorrere del tempo tende a ribaltare i vari momenti magnetici elementari** della sostanza costituente il magnete, cioè smagnetizza progressivamente quest'ultimo: non per nulla, i fisici di qualche tempo fa usavano per H_f la ben appropriata denominazione di **campo smagnetizzante**.

Se si adottasse il modo di vedere le cose descritto dalla [IV.5*1], che indicheremo, per nostra comodità, come *impostazione SI* della magnetologia*, si migliorerebbe la **coerenza fisica** e anche l'**operatività**, con quest'ultima riferendosi al fatto che **l'intensità magnetica $\mathbf{H}$ avrebbe**, come nei Sistemi CGS, **una definizione operativa**, costituita appunto dalla [IV.5*1] applicata con un momento magnetico $\mathbf{m}$ noto, mentre nel Sistema SI $\mathbf{H}$ è priva di una qualunque definizione di tale genere. A petto di questi cospicui vantaggi sta il sopportabile scompiglio costituito dalla **forma leggermente diversa** che assumerebbero **alcune poche relazioni**.

Va rilevato che nella generalità dei testi e dei corsi universitari di elettromagnetismo si segue l'impostazione IUPAP che porta alle unità SI; i corsi di elettromagnetismo dove non sono da lamentare i detti inconvenienti sono quelli di fisica microscopica, nei quali si usano unità CGSsim, e un numero molto ridotto di corsi di fisica generale nei quali si segue (è da dire "correttamente") l'impostazione che porta a ciò che qui abbiamo

indicato con la sigla SI* (è quanto accade, per esempio, nei corsi di fisica generale per la laurea in fisica nell'università I "La Sapienza" di Roma).

IV.6. Comparazione tabellare tra unità elettromagnetiche SI, SI* e CGSsim; formule "universali" dell'elettromagnetismo

Per comodità didattica si ritiene utile riportare nella seguente **Tab. IV.6.1** alcune delle relazioni con i vettori magnetici **per mezzi magneticamente lineari**, le quali hanno una forma diversa nelle formulazioni SI e SI*; per utile completezza, sono riportate anche le relazioni corrispondenti nel Sistema CGSsim (c è la velocità della luce nel vuoto, μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto, ϵ_{ij} , μ_{ij} e ϵ_{rij} sono i tensori a due indici della suscettività e della permeabilità magnetica assoluta e relativa del mezzo).

TAB. IV.6.1. – RELAZIONI MAGNETICHE CORRISPONDENTISI NEI SISTEMI SI, SI* E CGSSIM PER MEZZI LINEARI

Grandezza	SI	SI*	CGSsim
Momento di coppia } agente su un momento magnetico dipolare m	m B (altra possibile definizione operativa di B)	m H (definizione operativa di H)	m H (definizione operativa di H)
Forza di Lorentz agente su una carica elettrica q in moto con velocità v	F = qv B (definizione operativa di B)	F = qv B (definizione operativa di B)	F = (1/c) qv B (definizione operativa di B)
Relazione tra B , H e M	B = μ_0 (H + M)	B = μ_0 H + M	B = H + 4 π M
Relazione tra M e H (mezzi magneticamente lineari)	M = χ_{ij} H	M = χ_{ij} H	M = χ_{ij} H
Relazione tra B e H (mezzi magneticamente lineari)	B = μ_0 (1 + χ_{ij}) H = μ_{rij} H = μ_{ij} H	B = μ_0 (1 + χ_{ij}) H = μ_{rij} H = μ_{ij} H	B = (1 + 4 π χ_{ij}) H = μ_{ij} H
Momento magnetico di spira piana (area S) con corrente di intensità i	m = iSn (versore n per corrente antioraria)	m = μ_0 iSn (versore n per corrente antioraria)	m = iSn (versore n per corrente antioraria)

Per gli stessi motivi, si ritiene utile ricorrere alla cosiddetta **formulazione universale** – che è utile nell'intero elettromagnetismo – e ripetere alcune delle più importanti relazioni di base non soltanto della magnetostatica ma, in generale, dell'intero **elettromagnetismo**; questa formulazione comporta l'uso di alcune grandezze attribuendo alle quali determinati valori le relazioni in questione assumono la forma corretta per i vari sistemi metrologici; nel nostro caso, tali grandezze sono quelle indicate con α e b (costanti di comodo), γ_0 (costante elettromagnetica del vuoto), nonché la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 e la permeabilità magnetica del vuoto μ_0 . Nella **tab. IV.6-2** sono dati i valori di queste grandezze da inserire nelle relazioni di elettromagnetismo che le seguono per avere le relazioni medesime come formule SI oppure CGSsim (o di Gauss), cioè nei due sistemi metrologici più diffusi nell'ambito delle scienze fisiche.

Alcune delle relazioni ricordate sono state presentate e commentate in paragrafi precedenti di questo stesso capitolo; delle altre, merita un commento la relazione riguardante il rotore dell'intensità del campo elettrico, **rotE**, che, per l'ordine in cui è data con le due che la precedono (**divD** e **divB**) e quella che la segue (**rotH**), è nota come **terza equazione di Maxwell**. Il commento riguarda il fatto che la forma datale da colui che per primo l'introdusse nel 1873, James Clerk Maxwell, già nominato in precedenza, era più semplice, in quanto si limitava al primo dei due addendi che compaiono nel secondo membro, cioè si limitava a **rotE** = - ($\partial \mathbf{B} / \partial t$). Ciò derivava dal fatto che questo rotore è in

relazione con le intensità dei campi elettrici in gioco nella propagazione di una perturbazione elettromagnetica e Maxwell era interessato principalmente a quanto

accadeva nel vuoto; orbene, nel vuoto l'unico campo elettrico da considerare era quello da **induzione elettromagnetica da variazione**, legato alla derivata temporale dell'induzione magnetica $\mathbf{B}$ come abbiamo scritto poco sopra; in generale, invece, occorre tenere conto anche dei campi elettrici da **induzione elettromagnetica da movimento**, producentisi a seguito del movimento, con velocità $\mathbf{v}$, di corpi conduttori in un campo d'induzione magnetica $\mathbf{B}$ (campi con intensità $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) e, per di più, anche dei cosiddetti **campi elettrici impressi**, cioè presenti perché prodotti da generatori dei vari tipi (intensità $\mathbf{E}_p$); il rotore del campo elettrico complessivo (risultante vettoriale del rotore di tutti i campi elettrici testè nominati, finisce per assumere la forma riportata nella tabella, che correttamente dovrebbe essere ricordata come **forma completa della terza equazione di Maxwell**.

Conclusivamente, la **tab. IV.6.-3** presenta il quadro delle principali grandezze di interesse del magnetismo e le loro unità di misura nei sistemi SI e CGSsim, con il relativo conguaglio.

TABELLA IV.6-2 - FORMULE UNIVERSALI DI ELETTROMAGNETISMO PER MEZZI ELETTROMAGNETICAMENTE LINEARI [nelle due colonne a destra, il valore complessivo della combinazione di costanti tra parentesi quadrata, rispettivamente per il sistema indicato]

COSTANTI		[...] SI	[...] CGSsim
α	(costante di comodo)	1	4p
b	(costante di comodo)		
c	velocità delle luce nel vuoto	$2,997.924.58 \cdot 10^8$ m/s (val. esatto)	$2,997.924.58 \cdot 10^{10}$ cm/s (val. esatto)
γ_0		1	1/c
ϵ_0	(costante dielettrica del vuoto= $1/(c^2 \mu_0)$)	$8,856 \cdot 10^{-12}$ F/m	
μ_0	(permeabilità magnetica del vuoto)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	1
RELAZIONI	FORMULE UNIVERSALI		
Forza $\mathbf{f}$ fra elementi di corrente (legge elettrodinamica di Ampère)	$d\mathbf{f} = \left[\frac{\alpha \gamma_0^2}{4\pi} \mu_0 \right] \mu_r i_1 i_2 \frac{d\mathbf{l}_1' (d\mathbf{l}_2' \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$ (μ_r permeabilità magnetica relativa; i , intensità di corrente elettrica)	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ H/m	$1/c^2$
Forza di Laplace	$d\mathbf{f} = [\gamma_0] i d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}$ ($\mathbf{B}$, induzione magnetica)	1	1/c
Formula di Laplace	$\mathbf{B} = \left[\frac{\alpha \gamma_0 \mu_0}{4\pi} \right] \mu_r i \oint \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}}{r^3}$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ H/m	1/c
Induzione $\mathbf{B}$ in un solenoide rettilineo indefinito, a spire serrate	$\mathbf{B} = [\alpha \gamma_0 \mu_0] \mu_r i n$ (n , spire a unità di lunghezza)	μ_0	$4\pi/c$
Legge di Faraday-Neumann-Lenz	$f_{indotta} = -[\gamma_0] \frac{dF(\mathbf{B})}{dt}$ (t , tempo)	1	1/c
EQUAZIONI DI MAXWELL DELL'ELETTROMAGNETISMO PER MEZZI ELETTROMAGNETICAMENTE LINEARI	EQUAZIONI $\text{div } \mathbf{D} = [\alpha] \rho$ ($\mathbf{D}$, induzione elettrica; ρ, densità volumica di carica elettrica) $\text{div } \mathbf{B} = 0$ $\text{rot } \mathbf{E} = [\gamma_0] \left[-\frac{\nabla \mathbf{B}}{\nabla t} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_p) \right]$ ($\mathbf{E}$, intensità elettrica; $\mathbf{v}$ velocità; $\mathbf{E}_p$ campo elettrico impresso) $\text{rot } \mathbf{H} = [\alpha \gamma_0] \mathbf{j} + [\gamma_0] \frac{\nabla \mathbf{D}}{\nabla t}$ ($\mathbf{j}$, densità di corrente elettrica) RELAZIONI COSTITUTIVE	1 1 1, 1	4p 1/c 4p/c, 1/c

	$\mathbf{D} = [b] \, \epsilon_r \mathbf{E}$ (ϵ_r costante dielettrica relativa)	ϵ_0	1
	$\mathbf{B} = [b] \, \mu_r \mathbf{H}$	μ_0	1
	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (σ conduttività elettrica)		

