

Cap. III. - Richiami dei fondamenti della teoria classica dei campi

III.1. Generalità sui campi fisici

III.1.1. Definizioni elementari

Nel linguaggio della fisica l'espressione **campo fisico** sta a indicare, in accordo col significato letterale di «campo» nella lingua corrente (per es.: «campo di grano» = zona di terreno in ogni particella del quale sia presente una spiga di grano), **una porzione di spazio** (uni-, bi-, tri-, ecc. -dimensionale) **in ogni punto del quale sia misurabile una data grandezza fisica**, che si chiama genericamente *grandezza del campo*. In quel che segue **ci si riferirà, salvo contrario esplicito avviso, all'ordinario spazio tridimensionale euclideo**, riferito a un dato sistema di coordinate (cartesiane, ecc.)

A seconda della natura scalare, vettoriale, ecc. **della grandezza del campo**, si parla poi specificamente di:

a) **campo scalare**, qual è, per es., un campo di temperatura in un corpo, la quale ultima grandezza è compiutamente espressa dal **numero con segno**, come dire uno **scalare** (o **tensore di rango zero** o **tensore senza indici**), che ne costituisce la **misura** secondo una data scala termometrica; per la grandezza s ripartita in questi campi di parla anche di **scalare del campo**, che è indicato con il simbolo $s(P)$, o $s(x,y,z)$, e dal punto di vista matematico va inteso quindi come una **funzione scalare** delle coordinate cartesiane x, y, z (o altre) del generico punto P del campo;

b) **campo vettoriale**, qual è, per es., il campo del peso di un corpo nell'ambiente terrestre, il quale peso è un **vettore** (anche, **tensore di rango 1**) $\mathbf{v}$, **definito mediante i 3 vettori** (per es., $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$) che ne costituiscono le proiezioni sugli assi coordinati di un definito sistema di riferimento cartesiano (quel che segue si adatta opportunamente a sistemi di riferimento non cartesiani) e che sono detti **i (vettori) componenti** di esso, oppure, equivalentemente, **mediante i 3 scalari** costituiti dal valore (v_x, v_y, v_z) dei detti vettori componenti e che sono detti **le (intensità) componenti**; i tre componenti vettoriali possono pensarsi derivare dal prodotto di ogni componente scalare per il versore del corrispondente asse coordinato e, viceversa, ognuna delle tre componenti scalari può essere pensata come l'intensità del corrispondente componente vettoriale.

Per la grandezza fisica ripartita in questi campi di parla anche di **vettore del campo**, con simbolo $\mathbf{v}(P)$, o simile, nel generico punto P ; un simbolo equivalente è s_i (**tensore a un indice**), con $i=xyz$, che evidenzia le 3 componenti rispetto agli assi coordinati cartesiane, $\mathbf{v} \nabla v_x, v_y, v_z$, ciascuna delle quali è una funzione scalare delle coordinate cartesiane x, y, z (o di altro tipo), che individuano univocamente il **valore** (scalare) **della grandezza del campo** $\mathbf{v}(P)$ in P (detto anche, ma spesso ambiguamente, **intensità** del campo in P) e l'**orientamento** (**direzione** e **verso**) del vettore in P nel prescelto sistema di riferimento (come dire dalla direzione e dal verso della tangente orientata alla “*linea del campo*” per P di cui parleremo nel successivo par.1.3).

Il **campo** (scalare) **del valore della grandezza di un campo vettoriale** è detto **campo scalare associato** al campo vettoriale che si sta considerando.

c) **campo tensoriale** (*propriamente detto*), qual è, per es., quello dello sforzo nell'interno di un solido sollecitato meccanicamente, che è un **tensore di rango 2 definito dai 3 vettori che ne costituiscono i componenti nello spazio ordinario** (o, equivalentemente, dai **9 scalari costituenti le componenti di questi 3 vettori**); nel rappresentare certi fenomeni ci si serve di tensori più complessi, e precisamente **tensori di rango 3, 4, ecc.**, con un proporzionalmente maggiore numero di componenti vettoriali e scalari (come dire, nello spazio ordinario, **rispettivamente 9, 27, ecc. vettori componenti** o, equivalentemente, **27, 81, ecc. scalari componenti**); un simbolo equivalente è s_{ij} per il rango 2 (**tensore a 2 indici**), s_{ijk} per il rango 3 (**tensore a tre indici**), e così via, con $i,j,k,\dots = x,y,z$, o altri simboli letterali; per la grandezza ripartita in questi campi di parla anche di **tensore del campo**.

In questa gerarchia di tensori per rappresentare nello spazio-tempo le grandezze fisiche a partire dagli scalari, se n è il numero intero positivo o nullo che identifica il rango del tensore (0, 1, 2, ecc. per i campi rispettivamente scalari, vettoriali, tensoriali di rango crescente a partire dal secondo), per rappresentare equivalentemente la grandezza del campo occorrono, quali componenti di essa nel sistema di riferimento tridimensionale adottato, 1 scalare (e 0 vettori) per uno scalare ($n=0$) e 3^n scalari oppure 3^{n-1} vettori per un rango $n \geq 1$.

La complessità delle espressioni matematiche riguardanti le grandezze dei campi aumenta notevolmente con il crescere del rango dei campi medesimi poiché ogni equazione tensoriale di rango n si traduce, per i calcoli, in 3^n corrispondenti equazioni normali, cioè contenenti soltanto grandezze scalari. Per ovviare a grandi difficoltà di calcolo, si cerca, ovviamente quando la cosa è fisicamente accettabile, di formalizzare i problemi di campo in termini del rango più basso che si può, ricorrendo a opportune accettabili approssimazioni.

Come osservazione finale di carattere lessicale, nel linguaggio della fisica attuale il termine «**campo**» è usato anche per indicare la «**grandezza del campo**»: così, per es., «campo magnetico» può significare, a seconda dei casi, sia, come tra poco sarà precisato, la regione dello spazio in cui sono sensibili «azioni magnetiche», sia l'«induzione magnetica», $\mathbf{B}$, che è la grandezza vettoriale oggi assunta come grandezza descrittiva principale del detto campo. Sarebbe bene però, almeno nell'ambito didattico, non seguire tale uso, che può dare luogo a espressioni ambigue; è questo appunto il caso del campo magnetico, per il quale nel passato, anche recente, come grandezza del campo fu assunta non l'induzione magnetica ma l'«intensità magnetica» $\mathbf{H}$ (v. par. IV.3.5) (uso che in certi ambiti sussiste tuttora), per cui «campo magnetico» potrebbe essere inteso in certi contesti come 'induzione magnetica' e in altri come 'intensità magnetica'.

III.1.2. Variabilità e invarianza di campi

Per quanto riguarda la **variabilità** (o, alternativamente, l'**invarianza**) *nello spazio e nel tempo* relativamente a una *data regione spaziale* (che eventualmente può coincidere con l'intera regione in cui il campo esiste) e a un *dato intervallo di tempo*, ricordiamo che per il **dominio spaziale** si parla di:

a) **campo posizionale** quando **la grandezza del campo varia, a un certo istante**, in valore, direzione o verso **da punto a punto** della sua regione di spazio, come dire che dipende dalla posizione considerata, e di

b) **campo uniforme** quando **la grandezza del campo non varia da punto a punto**, in un caso e nell'altro **potendo però variare, in ciascun punto, da istante a istante**; per il **dominio temporale** si parla di:

c) **campo costante**, o **statico** (in particolare, *gravitostatico*, *elettrostatico*, *magnetostatico*), quando **la grandezza del campo nel generico punto non varia da istante a istante** in valore, direzione o verso, potendo però variare, a un dato istante, da punto a punto;

infine, per l'**insieme dei domini spaziale e temporale** si parla di:

d) **campo uniforme e costante** relativamente all'**invarianza spaziotemporale**, cioè quando il campo è contemporaneamente invariante nello spazio e nel tempo, come dire che **la grandezza del campo non varia né da punto a punto né da istante a istante**.

Nel caso di campi vettoriali e tensoriali le dette uniformità spaziale e costanza temporale potrebbero riguardare soltanto qualcuno degli elementi del campo, e allora si parlerebbe di *uniformità parziale* o di *costanza parziale*, specificando l'elemento interessato: per es., nel campo di velocità dei fotoni di un fascio luminoso con asse rettilineo e sezione costante in un mezzo assorbente, si ha un'uniformità parziale in quanto sono spazialmente invarianti la direzione e il verso, ma non l'intensità, che diminuisce lungo il fascio a causa dell'assorbimento da parte del mezzo; analogamente, si ha una costanza parziale per una corrente elettrica alternata in un conduttore rettilineo, della quale in ogni punto non varia nel tempo la direzione, mentre variano sinusoidalmente il verso e la densità di corrente).

III.1.3. Rappresentazione geometrica di un campo vettoriale mediante le linee del campo. Campo scalare associato e relative isolinee, isosuperfici e isovolumi

Relativamente a denominazioni particolari, alla rappresentazione geometrica e ai cosiddetti «operatori di campo», a meno di esplicito diverso avviso **ci si limiterà qui a ricordare le nozioni fondamentali per i soli campi vettoriali, alla categoria dei quali appartiene il campo magnetico**.

Sia $\mathbf{v}_1$ il vettore di un campo vettoriale nel generico punto P_1 e t_1 la retta orientata rappresentante la direzione di $\mathbf{v}_1$ in P_1 (**fig. III.1.3/1**); s'immagini di spostarsi di un tratto piccolissimo lungo t_1 , portandosi da P_1 nel punto P_2 ; la determinazione in intensità e direzione del vettore del campo $\mathbf{v}_2$ è, in generale, diversa da quella in P_1 , con una diversa linea orientata di direzione, t_2 ; ripetendo questo procedimento più volte si viene a determinare una spezzata $P_1P_2\dots$ che approssima una linea continua orientata $l(P_1)$ al limite dell'essere infinitesimi i tratti P_1P_2 , P_2P_3 , ecc., detta **linea del campo** per il (generico) punto P_1 ; altre denominazioni correnti, ma meno proprie in generale, sono *linea di forza* (che è propria soltanto per campi il cui vettore sia una forza) e *linea di flusso* (propria soltanto per il campo della velocità di una corrente fluida o assimilabile a questa).

La rappresentazione di un campo vettoriale mediante le linee del campo medesimo ha una sua intrinseca utilità, visto il modo essenzialmente analogico (come dire "per immagini") con cui la nostra mente idealizza (laddove può) la realtà fisica, ma, al tempo stesso, non è priva di ambiguità ove da essa si vogliano derivare informazioni di natura non geometrica; per es., se è vero che a un campo vettoriale uniforme corrisponde

sempre una struttura a linee del campo parallele, non è vero che a una struttura di questo genere corrisponda sempre un campo uniforme, come si ha nel caso, prima richiamato di un fascio di radiazione a sezione costante ma con intensità decrescente lungo la direzione di propagazione.

Per un campo vettoriale non uniforme, ogni linea luogo dei punti ove la grandezza del campo v ha un medesimo valore v^* si chiama **isolinea** del campo scalare associato d'intensità; analogamente per le isolinee del campo associato a una data componente (cartesiana o di altra natura); estensivamente, si parla di **isosuperficie** e di **isovolume** relativamente a superfici e a volumi su cui o in cui uno degli anzidetti scalari (intensità o data componente) abbia un medesimo valore.

Una prima, e tutto sommato pressoché definitiva, sistemazione della **teoria dei campi vettoriali** fu fatta nella prima metà del sec. 19°, specialmente a opera dei grandi fisici matematici **Karl Friedrich Gauss** <gàus> (1777-1855, professore di astronomia nell'università di Göttingen), **André-Marie Ampère** <ampèr> (1775-1836, professore di fisica in varie università francesi), **Pierre-Simon de Laplace** <laplàs> (1749-1827, professore di matematica nell'università di Parigi), con iniziale riferimento a campi fluidodinamici, cioè a campi (vettoriali) della velocità delle particelle di una corrente di liquido incompressibile (tipicamente, di acqua, e quindi campi idrodinamici); questa **origine fluidodinamica** spiega la **denominazione di vari enti** fisici e matematici via via introdotti a proposito dei campi fisici (quali «sorgente», ecc., «linea di flusso», ecc. e i cosiddetti *operatori di campo*: «flusso [=corrente di fluido] attraverso una superficie», «divergenza [delle linee di corrente] in un punto», ecc.).

III.1.4. Sorgenti di un campo

In senso letterale, per **sorgente di un campo** è da intendersi l'**ente fisico che è causa dell'esistenza di quel campo** o, se si vuole, che «genera» il campo (oppure «da cui il campo promana» o espressioni equivalenti), con significato talora concreto, talaltra astratto: così, per es., si può dire che sorgente di un campo (scalare) di temperatura è un dato corpo caldo, e che sorgente di un campo (vettoriale) gravitazionale oppure elettrico è, rispettivamente e concretamente, un corpo materiale oppure un corpo elettrizzato o anche, astrattamente, la massa materiale oppure la carica elettrica di cui tale corpo è portatore.

Relativamente all'**estensione di un sorgente**, si parla, con immediato significato, di **sorgente estesa** (in particolare, riferendosi alla geometrizzazione di essa, di **sorgente lineare** o **unidimensionale**, **superficiale** o **bidimensionale**, **volumica** o **tridimensionale** e poi, genericamente, **n-dimensionale**) oppure di **sorgente puntiforme**.

In quest'ultima espressione il termine «**puntiforme**» ha un significato particolare e piuttosto rilevante nella pratica, ben diverso da quello che esso ha nella geometria. Visto che in Natura non esistono oggetti rigorosamente puntiformi (cioè con dimensioni geometriche rigorosamente nulle), **la qualifica di «puntiforme»** (etimologicamente, «a forma di punto») **si applica a ogni oggetto le cui dimensioni lineari siano molto minori** (secondo un prefissato criterio di accuratezza) **rispetto a ogni altra lunghezza che compaia nella questione che si sta esaminando**: un significato, come si vede, **del tutto relativo** e non definibile in assoluto.

È questo uno dei vari casi in cui nella fisica si usano termini e locuzioni della matematica non nel significato assoluto che è loro proprio, bensì in un significato relativo al particolare contesto in cui si sta operando; casi del genere sono, come vedremo, «infinitesimo», «infinito», «filiforme», ecc.: un ente che

può essere considerato correttamente con una di queste qualifiche nell'ambito di una certa questione, non potrebbe assolutamente essere considerato tale in un ambito differente.

Va precisato subito che le sorgenti vanno distinte tra loro, oltre che per le dimensioni geometriche, anche e soprattutto in base alla **natura fisica dell'ente in cui esse consistono**: così, per es., un corpo elettrizzato (positivamente oppure negativamente) è una **sorgente scalare** (positiva oppure negativa) di un campo elettrico, in quanto la «carica elettrica» (positiva oppure negativa) che lo qualifica è una grandezza scalare (completamente definita dal nome e dal numero con segno che ne costituisce la misura). Analogamente, si parlerà di **sorgente vettoriale** e di **sorgente tensoriale**.

Sarebbe opportuno, e coerente con altre espressioni riguardanti sorgenti di campi, denominare **polo del campo** ogni **sorgente puntiforme scalare** nel significato prima precisato, ed è a quest'uso che ci si atterrà in questa sede. Così, ogni **sorgente reale estesa** (cioè non puntiforme, sia essa continua oppure discontinua) potrà essere vista, ove riesca utile, come un'opportuna distribuzione geometrica di poli, a seconda dei casi discontinua oppure continua e, in quest'ultimo caso, ripartiti su una linea, su una superficie oppure entro un volume nel caso di una sorgente rispettivamente lineare, superficiale, volumica.

La **rappresentazione geometrica di un polo**, o sorgente scalare puntiforme che dir si voglia, è molto semplice: la sua immagine è un punto da cui divergono (polo positivo o sorgente positiva o sorgente propriamente detta) oppure in cui convergono (polo negativo o sorgente negativa o pozzo) linee del campo (fig. III.1.4/1): così, nella rappresentazione geometrica dei campi vettoriali un polo puntiforme è immediatamente riconoscibile in quanto il punto rappresentativo di esso è origine (polo positivo) oppure termine (polo negativo) di linee del campo (sono ben evidenti l'origine e il significato idrodinamici di tali denominazioni, e di altre che stanno per seguire, ove siano viste come relative al campo della velocità delle particelle di una corrente d'acqua).

E' anche possibile dare una **valutazione quantitativa e individuare la posizione** di un polo mediante due operatori vettoriali: il **flusso** e la **divergenza** del vettore del campo.

III.1.5. Operatori di sorgenti polari di campi vettoriali: flusso; divergenza; operatore *nabla*. Campi solenoidali

Due importanti interrogativi che si presentano preliminarmente quando ci si accinge a esaminare un campo vettoriale riguardano l'accertare se esso deriva da poli e, nel caso affermativo, l'accertare quanto 'valgano' e dove siano 'localizzati' i poli medesimi. A questi interrogativi rispondono particolari operatori da applicarsi al vettore del campo, detti **operatori polari** in quanto relativi appunto ai poli del campo.

Il primo di tali operatori, di natura integrale spaziale, è la grandezza scalare **flusso del vettore del campo attraverso una superficie**; se S è tale superficie, esso è l'integrale

$$[\text{III.1.5*1}] \quad \Phi_s(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

essendo $\mathbf{n}$ il **versore** (vettore di modulo unitario) che individua la normale al generico elemento infinitesimo dS di S , che è orientata secondo criteri di convenienza; di solito, per una superficie aperta $\mathbf{n}$ è assunto col verso coespiciente con quello di $\mathbf{v}$, mentre **per una superficie chiusa $\mathbf{n}$ è sempre nel verso uscente da essa.**

Il **significato analogico** di tale operatore è molto semplice nel suo ambito originario, cioè nell'idrodinamica. Infatti, ove $\mathbf{v}$ rappresenti la velocità (per es., in m/s) di una corrente d'acqua in ogni elemento infinitesimo dS di S (in m^2), l'integrale ora scritto dà la portata (in m^3/s) della corrente che fluisce attraverso S (tuttora nell'idraulica «flusso», sottinteso «della velocità», significa «portata» della corrente).

Più interessante ai nostri fini è il caso che il flusso riguardi una **superficie chiusa**, Σ :

$$[\text{III.1.5*2}] \quad \Phi = \oint_{\Sigma} (\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

dove, com'è stato detto poco sopra, il versore $\mathbf{n}$ è nel verso uscente da Σ .

L'integrazione indicata dà, come l'intuizione ci avverte, un risultato nullo se entro Σ non vi sono affatto poli oppure se il contributo dei poli positivi (idrodinamicamente, la portata effluente) è uguale a quello, di segno contrario, dei poli negativi (portata affluente); se non è nullo, tale risultato è poi positivo oppure negativo a seconda che entro Σ prevalga il contributo dei poli positivi oppure di quelli negativi.

Occorre ora precisare quantitativamente quello che finora è stato chiamato «contributo» (nell'analogia idrodinamica, «portata») di un polo nel generico punto P .

Consideriamo il flusso di $\mathbf{v}$ uscente dalla superficie dell'elemento infinitesimo del volume racchiuso dalla superficie Σ costituito dal cubetto di spigoli dx, dy, dz indicato nella **fig. III.1.5/1**. Se, nel progressivo impiccolimento delle dimensioni lineari che l'integrazione comporta, si è nella fase in cui la variazione del vettore lungo una direzione può essere lecitamente approssimata con il primo termine dell'appropriato sviluppo in serie, il contributo dato complessivamente dalle due facce del cubetto che sono ortogonali all'asse x vale, come immediatamente si riconosce, $[-v_x]dydz + [v_x + (\frac{\partial v_x}{\partial x}dx)]dydz$; ripetendo questo ragionamento per gli altri

due assi coordinati e chiamando $d\sigma = dx dy dz$ il detto elemento cubico infinitesimo del volume racchiuso da Σ , in luogo della [III.1.5*2] si può scrivere

$$[\text{III.1.5*3}] \quad \Phi = \oint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\Sigma} (\text{div } \mathbf{v}) d\sigma,$$

avendo chiamato **divergenza** (simbolo: «div») del vettore $\mathbf{v}$ nel generico punto P del volume Σ racchiuso da Σ (derivante, per integrazione, dal cubetto infinitesimo) la quantità scalare:

$$[\text{III.1.5*4}] \quad (\text{div } \mathbf{v})_P = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_P + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_P + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_P,$$

come dire la somma delle 3 derivate parziali delle corrispondenti componenti del vettore del campo nel punto P di questo che risulta d'interesse. In molte questioni di carattere generale il riferimento al particolare punto P del campo può essere omissso e allora

scompare il relativo pedice nella definizione ora data. **La divergenza del vettore di un campo ha le dimensioni del vettore diviso per una lunghezza.**

Da quanto detto risulta, per il significato di questo operatore vettoriale, che **se la divergenza risulta non nulla in un punto di un campo, in quel punto esiste un polo del campo**, la cui natura positiva oppure negativa è data dal **segno** della divergenza, mentre il valore di questa dà l'**intensità** del polo medesimo. La denominazione di questo operatore si riferisce al fatto che da un polo positivo (sorgente positiva) partono (se si vuole, divergono) linee del campo, mentre in un polo negativo convergono (che è il contrario di «divergono») linee del campo (v. preced. fig. .III.1.4/1).

La relazione [III.1.5*3] è nota come **teorema di Gauss del flusso e della divergenza**; brevemente: *il flusso di un vettore attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza nel volume di quella superficie*. Essa costituisce il **legame** tra i due operatori polari *flusso attraverso una superficie chiusa*, che è un **operatore integrale** e informa globalmente sulla *presenza di poli entro la superficie*, e *divergenza*, che è un **operatore differenziale**, o di punto, e informa sulla *presenza e sulle caratteristiche di un polo nel punto in cui la divergenza è calcolata*.

Un'altra **definizione analitica per la divergenza**, equivalente alla [III.1.5*4], si ottiene facendo intervenire l'**operatore vettoriale simbolico** ∇ , detto, per la forma del suo simbolo (lettera greca “delta” maiuscola rovesciata), **nabla** (in greco «arpa»), che ha per componenti (simboliche) le derivazioni parziali rispetto a x, y, z :

$$[\text{III.1.5*5}] \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{y}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{z}_1 ,$$

essendo $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$ i versori degli assi coordinati (questo operatore ha dunque per “componenti” le derivazioni parziali rispetto alle variabili coordinate); precisamente, è:

$$[\text{III.1.5*6}] \quad \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} .$$

La **divergenza di un vettore** è dunque esprimibile anche come **prodotto scalare di nabla per il vettore** (“applicazione” di nabla al vettore). Come si vedrà nel seguito, il vettore nabla, pur non essendo intrinsecamente indispensabile, è molto utile per esprimere in forma compatta varie relazioni tra i vettori e gli scalari di un campo vettoriale.

Partendo dal principio che le denominazioni esplicite hanno un significato analogico immediato che in genere manca alle notazioni simboliche e che il nostro modo di ragionare è essenzialmente di tipo analogico, in questa sede **si preferirà in genere la locuzione «divergenza del vettore $\mathbf{v}$ »** ($\text{div } \mathbf{v}$) all'equivalente notazione di calcolo vettoriale ($\nabla \cdot \mathbf{v}$).

Si chiama **campo solenoidale** un campo vettoriale **la cui divergenza sia identicamente nulla**, per il quale cioè si abbia, in qualunque punto di esso:

$$[\text{III.1.5*7}] \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 .$$

Un'ovvia caratteristica di un campo solenoidale è che **le linee del campo non hanno inizio né fine**, mancando nel campo poli dai quali o sui quali dovrebbero originarsi o terminare; il caso più semplice è che esse siano **in particolare linee chiuse orientate**. I campi solenoidali a linee chiuse sono talmente frequenti nella realtà fisica da

aver assunto una funzione antonomastica per l'intera categoria di tali campi; infatti, se in un campo di questo genere si considera una qualunque linea chiusa C (fig. III.1.5/2), l'insieme delle linee del campo passanti per i punti di C costituisce

una figura geometrica a forma di tubo detta *tubo di flusso*, e «tubo» in greco si dice *solèn-ènos*: «campo solenoidale» è come dire «campo a tubo».

Riprendendo ciò che è stato accennato all'inizio a proposito della nullità del flusso attraverso una superficie chiusa, **la solenoidalità di un campo è assicurata soltanto dall'annullarsi identico della sua divergenza, e non del flusso attraverso una superficie chiusa**, il quale ultimo potrebbe risultare nullo pur in presenza di più poli se questi «si compensano» fra loro. All'inverso, è poi da osservare che **all'annullarsi della divergenza di un campo vettoriale non sempre corrisponde l'annullarsi del flusso attraverso una superficie chiusa**.

Si consideri, per es., la situazione della fig. III.1.5/3. Si ha un polo puntiforme positivo $+p$, ma del campo da esso generato si considera soltanto la regione tra le due superfici chiuse Σ_1 e Σ_2 indicate (le linee

del campo sono semirette uscenti dal polo). In questa regione la divergenza è ovunque nulla (non vi sono poli) ed è nullo anche il flusso del vettore del campo attraverso superfici chiuse quali la Σ_1 , ma non per superfici quali la Σ_2 . Il fatto generale che si può trarre da questo esempio è che **due operatori di campo attinenti alla stessa proprietà** (nel nostro caso, l'esistenza di poli del campo) **ma l'uno differenziale** (la divergenza) **e l'altro integrale** (il flusso attraverso una superficie chiusa) **si equivalgono come significato** (la solenoidalità) **se, data una qualunque superficie chiusa nel campo, è sempre possibile passare da essa, mediante traslazioni e deformazioni, a un qualunque punto del campo**. Come si riconosce a occhio, ciò è possibile per una superficie del tipo della Σ_1 , ma

non per una superficie del tipo della Σ_2 : nel tentativo di ridurla a un generico punto P del campo, essa finisce con l'adagiarsi sulla frontiera interna del campo, Σ_1 , e qui resta bloccata.

Ricordiamo ora dalla geometria la nozione di **grado di connessione di uno spazio**, che può essere valutato semplicemente contando le superfici che limitano lo spazio considerato; così, lo spazio euclideo ordinario, che ha per unica frontiera la cosiddetta 'sfera all'infinito', ha grado di connessione 1 o, come anche si dice, è **a connessione semplice**, mentre qui abbiamo a che fare con uno spazio a connessione 2, visto che sono frontiere del campo considerato le due superfici chiuse Σ_1 e Σ_2 . Orbene, **ai fini del significato fisico (solenoidalità del campo, assenza di poli) l'annullarsi identico della divergenza equivale all'annullarsi identico del flusso attraverso una superficie chiusa, e viceversa, soltanto in un campo vettoriale definito in uno spazio a connessione semplice, e questo vale per altre coppie differenziale-integrale di operatori di campo**.

Un'ultima osservazione: le superfici chiuse che, come la Σ_2 della fig., sono 'bloccate' da una frontiera del campo al finito nel tentativo di ridurle a un punto qualunque del campo si chiamano «*superfici concatenate con una frontiera del campo*».

In accordo con ciò che è stato detto prima sul significato della divergenza, un campo solenoidale non ha poli, o sorgenti scalari che dir si voglia; ciò chiaramente non significa che il campo non ha sorgenti in assoluto, posto che qualche ente lo dovrà pure generare: il modo corretto di leggere la condizione [III.1.5*7] è di affermare che **se la divergenza del vettore di un campo è identicamente nulla, il campo ha sorgenti non scalari**,

cioè vettori o tensori; per es., un campo elettrico può essere generato, anziché da cariche elettriche puntiformi (poli o sorgenti scalari), da momenti elettrici dipolari (sorgenti vettoriali), quadrupolari (sorgenti tensoriali di rango 2), e via dicendo.

Data l'importanza di queste **sorgenti non scalari** ricordiamo qui di seguito, dopo il campo di polo, le proprietà fondamentali e i campi generati da alcune di esse. Tenendo d'occhio l'evoluzione storica di questi concetti, le dette sorgenti non scalari saranno presentate qui come combinazioni di poli. Va però tenuto presente che la **grandezza caratterizzante** di esse, e cioè il momento dipolare, il momento quadrupolare, e via dicendo per rango crescente, **in molti casi non deriva realmente da una combinazione di poli ma è una grandezza a sé stante**.

III.1.6i. Proprietà fondamentali di alcuni campi, per rango polare crescente

III.1.6.1. Campo di polo

Il riferimento logico (oltre che storico) per le nozioni che stanno per essere ricordate è il **campo gravitazionale** (attrazione reciproca di masse materiali), il primo a essere introdotto con la formulazione della **legge della gravitazione universale** da parte di I. Newton nel 1687, secondo la quale la forza f_{12} con cui un corpo 1, di massa m_1 , attrae un corpo 2, di massa m_2 , situato da esso a una distanza r_{12} grande rispetto alle dimensioni lineari dei due corpi (che quindi possono essere considerati puntiformi) vale:

$$[III.1.6.1*1] \quad f_{12} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \text{ vers } r_{12} ,$$

dove G è una costante, detta *costante della gravitazione universale*, il cui valore dipende dal sistema di unità di misura in cui si opera (in unità SI vale $6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$); il segno meno del secondo membro significa che si tratta di una forza attrattiva, cioè agente nel verso opposto di r_{12} (le masse sono considerate positive, salvo contrario esplicito avviso).

Questa forza (attrattiva) può essere interpretata come prodotto $m_2 F$ tra m_2 e il vettore

$$[III.1.6.1*2] \quad F = \frac{f_{12}}{m_2} r = - G \frac{m}{r^2} \text{ vers } r ,$$

dove r (generalizzazione di r_{12}) è la distanza dal punto in cui è la generica massa m (generalizzazione di m_1) al generico punto della regione circostante (ove, se occorre, si può localizzare l'altra generica massa m_2): F è il (vettore del) **campo gravitazionale** (attrattivo) generato tutt'intorno dalla massa (puntiforme) m a distanza r .

La relazione [III.1.6.1*2] può essere interpretata anche come **definizione operativa** dell'**intensità del campo gravitazionale** F ; poiché prendendo per m_2 la massa unitaria ($m_2=1$) la [III.1.6.1*2] F viene a coincidere con f , F corrisponde alla **forza attrattiva** che la massa generica m esercita **sulla massa unitaria** che sia posta a distanza r da essa.

Passando ora al campo che ha per poli cariche elettriche puntiformi (**campo elettrico**), vale una definizione formale e operativa analoga alla [III.1.6.1*2], però col segno «più» invece del «meno», in relazione al fatto che l'azione tra cariche dello stesso segno è repulsiva e non attrattiva, come per le masse; brevemente si dice che il campo gravitazionale è un **campo newtoniano** (poli omonimi si attraggono), mentre quello elettrico è un **campo coulombiano** (poli omonimi si respingono), con evidente

riferimento agli scienziati che enunciarono le leggi fondamentali dei due tipi di campo (il succitato Newton e il francese Charles-Augustin de Coulomb <kulòm>, 1736-1806).

Ciò posto, come ulteriore generalizzazione per **tutti i tipi di campo di polo** dalla [III.1.6.1*2] possiamo derivare per l'**intensità I di un campo di polo** (anche, campo di monopòlo) l'espressione:

$$[III.I.6.1*3] \quad I = \pm k \frac{p}{r^2} \text{ vers } \mathbf{r},$$

dove p è il **valore del polo** (massa puntiforme, carica elettrica puntiforme, o altro ente puntiforme), k è una **costante dipendente dal tipo di campo e dalle unità di misura** adottate, r è sempre la **distanza dal polo** (fig. III.1.6.1/1) e va preso il segno «più» per i campi coulombiani, il segno «meno» per i campi newtoniani. La relazione ora scritta mostra che, a parità di ogni altra grandezza, **il valore dell'intensità di un campo di polo è inversamente proporzionale al quadrato della distanza**, ed è questa la caratteristica distintiva di questo tipo di campi.

III.1.6.2. Campo di dipolo

Dipolo (o *sorgente dipolare*; raro *dupolo*) è la **sorgente puntiforme vettoriale** (o tensoriale di rango 1) costituita da, o equivalente a, **due poli di uguale valore p e segno opposto**, a distanza Δ (lettera greca «delta» minuscola) **tra loro infinitesima**: qui «distanza infinitesima» significa una *distanza molto piccola* (secondo la scala di accuratezza prescelta nel problema in studio) *rispetto alla distanza a cui ci si mette rispetto ai poli, ma al tempo stesso sufficientemente grande rispetto alle dimensioni lineari dei poli affinché questi possano essere considerati a loro volta puntiformi nell'ambito del dipolo medesimo*. La qualifica di «vettoriale» per un dipolo deriva dal fatto che a caratterizzarlo è il vettore **momento di dipolo**

$$[III.I.6.2*1] \quad \mathbf{M} = p \Delta,$$

con la distanza Δ orientata *dal polo negativo verso quello positivo*. **Unità di misura SI del momento di dipolo** è il prodotto dell'unità di polo per l'unità di lunghezza: per es., in unità SI è il **kilogrammo per metro** (kg m) per un *dipolo gravitazionale* e il **coulomb**

per metro (C m) per un *dipolo elettrico*.

Poiché in un dipolo il polo positivo è esattamente compensato da quello negativo,

il campo di dipolo ha divergenza identicamente nulla, cioè è solenoidale, con linee senza inizio né fine e precisamente chiuse al finito o all'infinito (fig. III.1.6.2/1.).

Come si riconosce componendo i campi generati separatamente dai due poli con cui si può modellizzare un dipolo, per l'**intensità I del campo generato da un dipolo** nel generico punto a distanza r suffi-

cientemente grande rispetto a λ (per la necessaria puntiformità del dipolo) si può scrivere:

$$[\text{III.1.6.2*2}] \quad \mathbf{I} = (k/r^3)[3(\mathbf{M} \cdot \text{vers} \mathbf{r}) - \mathbf{M}],$$

come dire che, a parità di ogni altra grandezza, **il valore dell'intensità di un campo di dipolo è inversamente proporzionale al cubo della distanza.**

III.1.6.3. Campi di rango tensoriale maggiore di 1. Campi polari generalizzati

Il primo di essi è il **campo di quadrupolo**, che è modellizzabile in vario modo. Il modello più semplice, che si rifà a dipoli, è di considerare un **quadrupolo** come l'insieme puntiforme di 4 poli di uguale valore assoluto ($\pm p$), ma due positivi e due negativi, combinabili in due dipoli di mo-

menti **m** uguali e opposti (**fig. III.1.6.3/1**) che non s'annullano reciprocamente perché i loro punti di applicazione sono a distanza infinitesima (ma non nulla) fra loro; in tale modello, per determinare l'intensità del campo generato si può procedere com'è stato accennato prima per il dipolo, cioè componendo i campi generati singolarmente dai due dipoli, ottenendo un risultato piuttosto complesso, che qui sarà omesso per ragioni di semplicità. Analogamente, saranno omesse le ancora più complesse formule di campo per altri modelli di quadrupoli, rilevando peraltro che **il valore dell'intensità del campo generato è sempre proporzionale all'inverso della quarta potenza della distanza**. Si riconosce pure che a caratterizzare un quadrupolo è un **tensore a due indici**, del tipo T_{ij} (cioè **di rango 2**), detto **momento di quadrupolo**: quest'ultimo è dunque una **sorgente tensoriale di rango 2**.

Una sorgente tensoriale di rango immediatamente superiore è l'**ottupolo**, il sistema puntiforme costituito da (o riducibile a) 8 poli di ugual valore assoluto, 4 positivi e 4 negativi, combinabili in due quadrupoli con momenti uguali, opposti e non compensantisi in quanto i loro punti di applicazione sono a una certa distanza infinitesima tra loro (la situazione è simile a quella illustrata nella fig. III.1.6.3/1 per un quadrupolo). A caratterizzare tale tipo di sorgente è un **tensore a 3 indici**, T_{ijk} (**rango 3**), detto **momento di quadrupolo**: quest'ultimo è dunque una **sorgente tensoriale di rango 3**. La trattazione analitica e i risultati che se ne ottengono sono ancora più complessi di quelli relativi al quadrupolo, avendosi peraltro il significativo risultato che **il valore dell'intensità del campo generato è inversamente proporzionale alla quinta potenza della distanza**.

Proseguendo senza entrare nei particolari, risulta che la dipendenza del valore dell'intensità dalla potenza $(n+2)$ negativa della distanza per la sorgente di rango n vale anche per le sorgenti di rango via via crescente, e cioè $n=4$ (**esadecupolo**, modello a 16 poli), $n=5$ (modello a 32 poli), ecc.

Va osservato tuttavia che nella didattica normale relativa alla teoria dei campi è raro portare in conto sorgenti tensoriali di rango 2 (quadrupoli) e men che meno di rango maggiore (ottupoli, ecc.). Ciò dipende sia dalle accennate grandi difficoltà formali sia dal fatto che, a parità di distanza, l'intensità dei loro campi è assai minore di quella dovuta a sorgenti vettoriali e in molti casi può essere lecitamente trascurata (una significativa eccezione è costituita dall'analisi armonica del campo magnetico medio: v. Cap. VI).

Osserviamo ancora che **ognuna delle dette sorgenti vettoriali e tensoriali** può essere sempre **modellizzata** come costituita da un certo numero di poli di opportuna intensità e opportunamente disposti, cioè **con un modello polare**. In realtà, come abbiamo osservato in una precedente occasione, un modello polare può riuscire comodo per qualche verso, ma non va dimenticato che **la realtà fisica di queste sorgenti è sempre completamente definita dal momento** (dipolare, quadrupolare, ecc.), il quale si presenta dunque come **unica grandezza caratteristica**. Da ciò deriva, tra l'altro, il fatto che, per es., nel caso di una sorgente vettoriale si preferisce parlare di **momento dipolare** in luogo di **momento di dipolo** per esplicitare l'atteggiamento di prescindere, oltre che da modelli dipolari, anche dall'effettiva presenza di due poli costituenti un dipolo, e analogamente per **momento quadrupolare** anziché **momento di quadrupolo**, e così via.

Converrà concludere con un'osservazione piuttosto interessante: **un campo vettoriale qualunque può essere sempre modellizzato come risultante della**

sovrapposizione di campi di rango crescente a partire da un campo scalare (di rango nullo).

III.1.7. Operatori circuitazione e rotore. Campi conservativi

Una parte importante nello sviluppo della teoria dei campi fu costituito dalle considerazioni che si fecero sui campi di forza, cioè sui campi vettoriali il cui vettore sia una forza, che indicheremo genericamente con $\mathbf{v}$. Se s'immagina che il punto d'applicazione della forza si sposti di un tratto infinitesimo $d\mathbf{l}$, la forza, come si sa, compie il lavoro $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$; il lavoro compiuto per uno spostamento lungo una qualunque linea chiusa l , fino a tornare nel punto di partenza, vale dunque:

$$[\text{III.1.7*1}] \quad \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

Questa relazione definisce la **circuitazione** (taluno dice *circolazione*) del vettore $\mathbf{v}$ (estensivamente, del campo di tale vettore) lungo la linea chiusa l , come integrale di linea di $\mathbf{v}$ lungo l e, ovviamente, vale per il vettore di un campo vettoriale qualunque.

Un **campo vettoriale** la cui **circuitazione sia identicamente nulla** si chiama **campo conservativo**, con riferimento al fatto che in un campo di forza siffatto qualunque spostamento chiuso compia il punto di applicazione della forza del campo, il lavoro compiuto da quest'ultima è nullo e quindi l'energia meccanica totale nel punto di arrivo è esattamente uguale a quella nel punto da cui si è partiti, come dire che **si è «conservata» l'energia totale** in gioco nel campo. Se non si tratta di un campo di forza, questa interpretazione energetica non è possibile in termini così diretti; resta comunque il fatto che la conservatività di un campo ha una stretta attinenza con le proprietà di una funzione scalare relativa all'energia potenziale, di vario tipo, in gioco nel campo, che si chiama appunto **potenziale** del campo; parleremo di ciò più avanti (par. III.1.9).

Come per la divergenza nei riguardi del flusso attraverso una superficie chiusa, si può affiancare all'operatore integrale **circuitazione** un **operatore differenziale**, e questo è il **rotore**, con il simbolo rot , definibile sinteticamente come il prodotto vettore dell'operatore nabla per il vettore $\mathbf{v}$ e, in modo meno sintetico ma esplicito, come il vettore che ha per componenti i minori del secondo ordine degli elementi della prima riga della matrice 3×3 (al solito, in un ordinario riferimento cartesiano ortogonale)

$$[\text{III.1.7*2}] \quad \text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

con $\mathbf{x}_i$ versori degli assi coordinati e v_i componenti del vettore $\mathbf{v}$ del campo: per es., il componente secondo l'asse coordinato x è $[(\frac{\partial}{\partial y} v_z) - (\frac{\partial}{\partial z} v_y)] \mathbf{x}_1$.

La relazione tra l'operatore integrale circuitazione (relativo a una linea chiusa) e l'operatore differenziale rotore (relativo a un punto del campo) è data dalla seguente identità vettoriale, detta **teorema di Stokes della circuitazione** (George Gabriel Stokes <stóuks>, 1819-1903, professore di matematica nell'università inglese di Cambridge):

$$[\text{III.1.7*3}] \quad \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_l} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

cioè la circuitazione di un vettore $\mathbf{v}$ lungo una linea chiusa l è pari al flusso del rotore del vettore attraverso una qualunque superficie aperta S_l che abbia l come suo bordo.

Un campo il cui rotore sia identicamente nullo, per il quale cioè sia

$$[\text{III.1.7*4}] \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0,$$

si chiama **campo irrotazionale**.

È importante osservare che per questa coppia di operatori vettoriali circuitazione-rotore, si verifica nei riguardi della **conservatività** di un campo vettoriale una **situazione**

analoga, anche se non identica, a quella che è stata discussa in precedenza per la coppia divergenza-flusso relativamente alla **solenoidalità** (par. 1.5). **La conservatività è assicurata dall'annullarsi identico della circuitazione; l'annullarsi identico del rotore l'assigura soltanto nel caso che si operi in uno spazio a connessione semplice**, qual è l'ordinario spazio euclideo.

La **fig. III.1.7/1** mostra un caso di campo a rotore identicamente nullo (cioè irrotazionale) ma a circuitazione non identicamente nulla (cioè non conservativo). Si tratta del campo della velocità $\mathbf{v}$ di una

corrente d'acqua in moto laminare (cioè senza vortici) tra due tubi coassiali, trasversalmente all'asse del sistema; lo spazio del campo non è a connessione semplice in quanto si hanno come frontiere la superficie esterna del tubo interno, quella interna del tubo esterno e qualche superficie (porzioni della sfera all'infinito se i tubi sono considerati indefiniti) che chiuda i tubi trasversalmente all'asse. Si ha ovunque $\text{rot} \mathbf{v} = 0$, cioè il campo di $\mathbf{v}$ è irrotazionale, ma la circuitazione risulta nulla per linee chiuse come la l_1 , non concatenate con singolarità di frontiere, ma non nulla per linee chiuse del tipo della l_2 , concatenate con la frontiera del tubo interno (per es., per la circonferenza di raggio r mostrata nella fig. la circuitazione è $2\pi r v$);

dunque, si ha un **campo irrotazionale ma non conservativo**.

III.1.8. Campo vettoriale di gradiente di un campo scalare

Dato un **campo scalare** $s(P)$, suo **campo di gradiente** di è il campo vettoriale il cui vettore è il **gradiente** dello scalare, che è il **vettore** definito dalla relazione:

$$[\text{III.1.8*1}] \quad (\text{grad } s)_P = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_P \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_P \mathbf{y}_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)_P \mathbf{z}_1,$$

avente dunque come **componenti le derivate dello scalare rispetto alle coordinate** e ottenibile come **applicazione allo scalare s del vettore nabla**. Come è stato osservato in un'occasione precedente, in relazioni di carattere generale può essere omesso il pedice di riferimento al particolare punto P del campo.

Il termine **gradiente** deriva dal participio presente *gradiens -entis* del verbo latino *gradiri* «camminare»: in effetti, questo vettore indica con la sua direzione e il suo verso la direzione e il verso in cui lo scalare aumenta di più («cammina») nello spazio, e con la sua intensità indica la rapidità spaziale di tale aumento. Com'è facile verificare, le isolinee (nonché le isosuperfici) del campo scalare e le linee del relativo campo di gradiente sono mutuamente ortogonali.

Come subito vedremo, il campo di gradiente ha divergenza identicamente nulla (cfr. la successiva [III.1.9*1], cioè è un **campo non solenoidale**.

III.1.9. Identità notevoli per un campo vettoriale

Riportiamo qui di seguito alcune identità coinvolgenti operatori di un campo vettoriale $\mathbf{v}$ (la dimostrazione delle quali omettiamo per ragioni sia di semplicità sia di brevità), esprimendole sia con i simboli operatoriali specifici sia ricorrendo all'operatore nabla.

Divergenza del gradiente di uno scalare s :

$$[\text{III.1.9*1}] \quad \text{div grad } s = \nabla^2 s,$$

dove il simbolo ∇^2 indica l'**operatore laplaciano** o **operatore di Laplace**, che (nel consueto riferimento cartesiano) ha l'espressione generica

$$[\text{III.1.9*2}] \quad \nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$$

e le seguenti espressioni specifiche per uno scalare s e un vettore $\mathbf{v}$:

$$[\text{III.1.9*3}] \quad \nabla^2 s = (\partial^2/\partial x^2) s + (\partial^2/\partial y^2) s + (\partial^2/\partial z^2) s,$$

$$[\text{III.1.9*4}] \quad \nabla^2 \mathbf{v} = (\partial^2 v_x/\partial x^2) \mathbf{x}_1 + (\partial^2 v_y/\partial y^2) \mathbf{y}_1 + (\partial^2 v_z/\partial z^2) \mathbf{z}_1,$$

essendo v_x, v_y, v_z le componenti cartesiane di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$ i versori degli assi coordinati; dunque, **un campo di gradiente di uno scalare non ha divergenza identicamente nulla**, cioè **non è identicamente solenoidale** (ha sorgenti scalari, o poli che dir si voglia, come dire che è un **campo polare**).

Divergenza del rotore di un vettore $\mathbf{v}$:

$$[\text{III.1.9*5}] \quad \text{div rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0,$$

cioè **un campo di rotore di un vettore è identicamente a divergenza nulla**, come dire che è un **campo identicamente solenoidale** (per sorgenti non ha poli, ma momenti dipolari o di rango maggiore).

Rotore del gradiente di uno scalare s :

$$[\text{III.1.9*6}] \quad \text{rot grad } s \equiv \nabla \times (\nabla s) = 0,$$

trattandosi dunque di un campo irrotazionale e anche, ma in uno spazio a connessione semplice, conservativo.

Rotore del rotore di un vettore $\mathbf{v}$:

$$[\text{III.1.9*7}] \quad \text{rot rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \text{grad div } \mathbf{v} - \nabla^2 \mathbf{v},$$

per cui un campo di rotore di un rotore di un vettore è in generale rotazionale e quindi non conservativo; in particolare, per un vettore solenoidale ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) è uguale al contrario del laplaciano del vettore medesimo.

III.1.10. Il potenziale di un campo vettoriale

Si tratta di una grandezza che trae la sua **denominazione** dal fatto di essere stata introdotta (negli anni Trenta del 19° sec.) per rendere direttamente calcolabile l'**energia potenziale di masse materiali in un campo di forza posizionale** (cioè il cui vettore vari in modo noto con la posizione considerata), come, per es., il campo gravitazionale terrestre (o, genericamente, un **campo attrazionale**, cioè governato dalla legge dell'attrazione universale di Newton) oppure un campo elettrico, l'intensità dei quali è la forza agente, rispettivamente, sulla massa unitaria puntiforme oppure sulla carica elettrica unitaria puntiforme positiva.

Così, se, per es., un ente fisico puntiforme di grandezza g (per es., massa oppure carica elettrica) si sposta in un campo di forza newtoniano oppure coulombiano, il lavoro L fatto dalla forza del campo in corrispondenza a uno spostamento di g da un punto P_1 a un altro punto P_2 lungo un certo cammino l vale:

$$[\text{III.1.10*1}] \quad L = \pm g \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l},$$

dove, come è stato già detto, si assume il segno $-$ per i **campi newtoniani** (per es., massa in un campo gravitazionale) e il segno $+$ per i **campi coulombiani** (per es., carica elettrica in un campo elettrico).

Se si considera un punto fisso A nel campo (**punto di riferimento**), si può immaginare di andare dall'uno all'altro dei due punti detti seguendo, tra gli infiniti cammini l possibili, uno che, anziché andare direttamente da P_1 a P_2 , vada da P_1 ad A e poi da A a P_2 (**fig. III.1.10/1**), per modo che **per la grandezza puntiforme unitaria** ($g=1$) il precedente integrale di linea si può scrivere:

$$[\text{III.1.10*2}] \quad L = \pm \int_{P_1}^A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \pm \int_A^{P_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \pm \int_{P_1}^A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} - [\pm \int_{P_2}^A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}] = V_1 - V_2 ,$$

convenendo di chiamare **potenziale del campo** nel generico punto P di questo la **funzione** scalare definita dall' **integrale di linea**

$$[\text{III.1.10*3}] \quad V(P) = \pm \int_{P_1}^A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + V(A) ,$$

dove $V(A)$ è una costante detta **potenziale di riferimento**, il cui valore è fissato una volta per tutte (nel problema che si sta studiando) per il punto di riferimento A , la posizione del quale è, a sua volta, fissata una volta per tutte.

Per dare un valore al potenziale di riferimento $V(A)$ occorrono dunque **due convenzioni**, la prima sulla **posizione del punto di riferimento** A e la seconda sul **valore $V(A)$ del potenziale in questo punto**. Com'è comprensibile, in genere si adottano convenzioni che, per un verso o per l'altro, riescano comode; per es., quando si può si sceglie il **punto di riferimento all'infinito**, cioè a distanza molto maggiore di ogni altra distanza che compaia nel problema in esame in quanto in un punto del genere l'intensità dei campi generati da sorgenti che non siano anch'esse all'infinito può essere assunta nulla e nulla osta all'assunzione di un valore nullo anche per il potenziale di riferimento. Generalizzando questa situazione, si può dire che, fin che si può, **conviene assumere il potenziale di riferimento nullo in un punto dove il campo sia nullo** (precisamente, dove esso sia irrilevante nell'ambito di approssimazione in cui ci si pone), e ciò può accadere anche in punti al finito (per es., ciò accade in qualsiasi punto interno di un conduttore elettricamente carico che sia considerato in condizioni statiche).

Fatta questa duplice scelta per il potenziale di riferimento, occorre tenere bene a mente che **il potenziale di un campo vettoriale è una funzione a un solo valore (o monodroma o univoca) di punto soltanto se il campo è conservativo, altrimenti essa è, nel generico punto, a infiniti valori, come dire che è indeterminata**.

Per giustificare ciò, pensiamo allo spostamento dal generico punto P di un campo al punto di riferimento A a cui si riferisce la definizione [III.1.10*3]. In generale, lo spostamento potrebbe avvenire sia seguendo un **cammino semplice**, cioè senza nodi, come il cammino P_1P_2 o quello P_1AP_2 della fig. III.1.10/1 sia seguendo un **cammino annodato**, cioè che interseca sé stesso in certi punti detti **nodi** formando un **cappio** (o più di un cappio), come il cammino AP della **fig. III.1.10/2**. Nel caso di questa figura, il cammino annodato da P ad A , che ha un solo cappio c nel nodo P^* , può sempre pensarsi come somma del cammino semplice AP^*P e del cappio c , come dire che la **definizione generale del potenziale**, valida anche per

cammini comunque annodati, può scriversi:

$$[III.1.10*4] \quad V(P) = \pm \oint_{P, l^*}^A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + \sum_i S_i \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + V(A),$$

dove l'integrale di linea indicato va inteso sempre lungo un cammino semplice l^* dal generico punto P del campo al punto di riferimento A e la sommatoria di circuitazioni di indice i costituisce il contributo, intrinsecamente indeterminato, delle varie circuitazioni (o cicli, di numero, forma e lunghezza arbitrari) comprese nel cammino che va considerato. Ovviamente, **se il campo è conservativo** le dette circuitazioni sono nulle per definizione (cfr. par. 1.7) e quindi il **potenziale polidromo** (cioè a infiniti indefinibili valori) della [III.1.10*4] si riduce al **potenziale monodromo** dato dalla [III.1.10*3], il cammino da P ad A potendo allora essere indifferentemente semplice oppure annodato in qualsivoglia modo: **in un campo conservativo il potenziale è una funzione univoca di punto**.

Passando ora dagli aspetti matematici a quelli fisici, se si ha un **campo di forza** (esplicitamente, come capita per campi gravitazionali, oppure implicitamente, come capita per campi elettrici e anche magnetici) e se esso è **conservativo**, il potenziale del campo in un punto misura (una volta fatte le due convenzioni sul riferimento) il **lavoro delle forze del campo** quando l'ente fisico di valore unitario su cui agisce la forza del campo, detto "*ente potenziato unitario*" (per es., la massa unitaria o la carica elettrica unitaria positiva citate dianzi) s'immagina che vada dal punto in cui si calcola il potenziale al punto di riferimento (attenzione alla natura del campo e quindi alla scelta del segno!); ciò significa che **il potenziale del campo in un punto misura l'energia potenziale da attribuire all'ente unitario potenziato nel punto in questione**. Ne segue che:

a) il lavoro fatto dalle forze del campo quando l'ente potenziato unitario si sposta da un punto a un altro è dato semplicemente dalla differenza tra il potenziale nel punto di partenza e quello nel punto di arrivo; la **differenza di potenziale** ha quindi un **notevole significato energetico**; inoltre, essa ha un **significato assoluto**, in quanto, a parità di ogni altra condizione, **resta costante se si cambia il punto di riferimento**;

b) il lavoro fatto dalle forze del campo relativo a un certo spostamento di **un ente potenziato non unitario** si ottiene moltiplicando la differenza di potenziale in gioco per il valore dell'ente medesimo.

Questi notevoli fatti costituiscono la prima ragione dell'importanza che il potenziale ha nella teoria dei campi vettoriali.

La seconda e altrettanto notevole ragione d'importanza del potenziale deriva dal fatto che se si differenzia la definizione generale [III.1.10*4] del potenziale V , per es. rispetto alla variabile coordinata x (le circuitazioni eventualmente presenti sono costanti e quindi non danno contributo quando si differenzia) si ottiene $dV = \pm v_x dx$; procedendo analogamente per le altre due variabili coordinate e ricordando le definizioni del gradiente di uno scalare [III.1.8*1], alla fine per il vettore del campo si può scrivere:

$$[III.1.10*5] \quad \mathbf{v}(P) = \pm \text{grad } V(P).$$

Ecco dunque la seconda grande utilità del potenziale, e cioè di poter essere usato **per calcolare**, mediante il suo gradiente, **il vettore del campo**, costituendo una via più agevole di quella per così dire normale, ossia mediante le cosiddette "formule di campo". Infatti, queste ultime (e ne vedremo parecchie nel Cap. IV seguente) comportano integrali di grandezze vettoriali, come dire terne di integrali scalari, mentre il calcolo del

gradiente del potenziale presente nella [III.1.10*5] comporta soltanto derivazioni di scalari, che indubitabilmente sono operazioni assai più facili delle integrazioni di vettori.

Il potenziale di cui abbiamo parlato sinora va propriamente chiamato **potenziale scalare** in certi casi in cui potrebbero sorgere equivoci; infatti, **per i campi vettoriali solenoidali** è possibile introdurre, con vantaggio, un altro potenziale, detto, a causa della sua natura, **potenziale vettore**. Un campo per cui questa grandezza può essere introdotta è il campo magnetico; tuttavia, il potenziale magnetico vettore non ha un uso generale nella fisica del magnetismo e per il momento non parleremo di esso.

Concludendo questo sommario richiamo ai fondamenti della *teoria del potenziale* diremo che:

- (1) per **un generico campo vettoriale** è **sempre possibile** introdurre per esso il **potenziale** (scalare) dato dalla [III.1.10*4], nella quale va preso il **segno – per campi newtoniani** e il **segno + per campi coulombiani**;
- (2) nella relazione ora ricordata compare una costante additiva detta **potenziale di riferimento**, che va preliminarmente precisata come **valore** da assegnare al potenziale medesimo **in un prescelto punto di riferimento**, che può essere indifferentemente sia al finito sia all'infinito;
- (3) **se il campo non è conservativo**, il potenziale (scalare) è una **funzione polidroma di punto** e quindi **non ha un significato fisico diretto**;
- (4) tuttavia, il potenziale (scalare), anche se polidromo, è **sempre utilizzabile per calcolare, mediante il gradiente, il vettore del campo**, secondo la [III.1.10*5];
- (5) **se il campo è conservativo**, il potenziale (scalare) è una **funzione monodroma di punto**, cioè a un solo ben definito valore, e costituisce una **misura dell'energia meccanica potenziale** degli enti su cui il campo agisce, peraltro secondo modalità interpretative che dipendono dalla natura del campo.

III.1.11. Qualificazioni particolari di campi vettoriali: campi poloidali e toroidali

Si dimostra (*teorema di Clebsch* <klèbsc(e)> e *Stokes*) che qualunque campo vettoriale, di vettore $\mathbf{v}$, può essere sempre posto nella forma

$$[\text{III.1.11*1}] \quad \mathbf{v} = \text{grad } s + \text{rot } \mathbf{p},$$

cioè come risultante di un **campo di gradiente di un opportuno scalare s** e di un **campo di rotore di un opportuno vettore $\mathbf{p}$** .

Questi due componenti hanno caratteristiche completamente differenti. Il **campo di gradiente**, $\mathbf{v}_p = \text{grad } s$, è **irrotazionale** (cfr. [III.1.9*6]) e quindi, in uno spazio a connessione semplice, è anche un campo **conservativo**; però **non è solenoidale** (cfr. [III.1.9*1]) e quindi **le sue sorgenti sono poli**, ricevendo per tale motivo la denominazione di **campo poloidale**. Il **campo di rotore**, $\mathbf{v}_t = \text{rot } \mathbf{p}$, è invece **rotazionale** e **non conservativo** (cfr. [III.1.9*7]); le sue linee sono chiuse, con una struttura d'insieme che ricorda quella delle linee del campo magnetico all'interno di un avvolgimento toroidale percorso da corrente elettrica, e per tale motivo si parla per esso di **campo toroidale**.

III.2. Il concetto di «campo fisico» nella filosofia naturale

Nello sviluppo storico della fisica, per lungo tempo una forza, una coppia di forze ed enti derivati furono sempre concepiti come realtà fisiche soltanto in quanto capaci di

esercitare **azioni di contatto** con il corpo su cui si esplicavano, cioè si rifuggiva dall'idea di **azione a distanza**, senza contatto diretto. Ciò è ancora ben avvertibile (siamo alla fine del 17° sec.) nei passi della *Philosophiae naturalis principia mathematica* («Principi matematici della filosofia naturale», 1687) che I. Newton dedica alle azioni gravitazionali; nella sostanza, egli fa capire che, dati due corpi materiali, le cose vanno «come se» (citazione originale) l'uno esercitasse un'azione sull'altro, pur non essendoci alcun contatto tra i due (clamoroso appare in particolare il caso degli astri). Oltre alle **azioni gravitazionali**, altre azioni a distanza o, come oggi si preferisce dire, **interazioni a distanza** tra corpi sono quelle *elettriche*, *magnetiche* ed *elettromagnetiche*, nonché altre, di natura differente (cosiddette *interazioni deboli* e *interazioni forti*), che riguardano il mondo microscopico delle particelle costituenti ultimativamente la materia.

Diciamo subito che ancor oggi non si conosce la natura di tutte queste azioni, mentre una formalizzazione soddisfacente di esse è stata realizzata mediante la già nominata **teoria dei campi**, sviluppatasi a partire, all'incirca, dai primi decenni del 19° secolo e poi arricchitasi, all'incirca dagli anni Venti del 20° sec., con le acquisizioni della fisica relativistica e quantistica. Qui ci limiteremo a ricordare le idee base della formalizzazione («spiegazione» sarebbe un termine inappropriato) delle azioni macroscopiche a distanza nell'ambito di questa teoria.

Si consideri una certa regione dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale, che sia vuota in assoluto, cioè priva sia di materia sia di qualunque forma di energia (suono, luce, radio, ecc.); la condizione fisica del generico punto P di essa è completamente identificata dalla **posizione** di esso, cioè dalle sue 3 coordinate in un dato sistema di riferimento geometrico. Immaginiamo ora di porre in un punto P_1 di tale regione un corpo «materiale» (cioè fisicamente importante soltanto per la sua massa m_1); la situazione nel punto non è cambiata per quanto riguarda l'assenza di ogni azione sul corpo considerato. Consideriamo ora che un secondo corpo, di massa m_2 , sia posto in un punto P_2 a distanza r_{21} da P_1 assai grande rispetto alle dimensioni di ognuno dei due corpi, per modo che questi possano essere considerati puntiformi; come sappiamo dalla legge di Newton della gravitazione universale, il primo corpo risente ora una forza attrattiva che verso il secondo corpo data dalla relazione [III.1.6*1] (*legge della gravitazione universale*), che qui scriveremo come $F = m_1 f$, cioè come prodotto della massa che risente la forza per la grandezza vettoriale $f = -(km_2/r_{21}^2)\text{vers } r_{21}$, essendo k una costante ricavabile dalla detta relazione.

In definitiva, la presenza della massa puntiforme m_2 ha radicalmente modificato le **proprietà fisiche** del «punto» in cui si trova la massa m_1 , nel senso che per caratterizzare completamente questo punto **dal punto di vista fisico**, alle sue coordinate geometriche va aggiunta la predetta forza specifica (cioè a unità di massa, quel che si chiama «forza massica») f esercitata dalla massa m_2 ; in definitiva, **la massa m_2 ha modificato lo spazio circostante**, generando in esso un campo vettoriale il cui vettore è appunto f , quel che si chiama **campo gravitazionale** della detta massa. Quest'ultima è il **polo** da cui si dipartono le linee del campo. Per i fautori delle azioni a contatto senza eccezioni, l'azione a distanza tra due masse puntiformi espressa dalla [III.2*1] può essere interpretata come **interazione locale** (verrebbe voglia di dire **interazione a contatto**) tra il campo gravitazionale generato dalla massa «lontana» m_2 in P_2 , espresso dalla [III.2*2], e la massa m_1 posta in P_1 .

Naturalmente, in ciò che precede il ruolo attivo/passivo delle due masse considerate può essere tranquillamente invertito; come pure, non vi sono difficoltà per allargare il

discorso al caso in cui siano presenti più di due masse puntiformi e, con qualche complicazione formale, anche masse non puntiformi.

Considerazioni analoghe possono essere svolte per altri campi polari, quali, per es., i campi elettrici (qui i poli sono costituiti da punti in cui sono localizzate cariche elettriche). Osserviamo però, *en passant*, che le cariche elettriche possono essere dei due segni e si hanno azioni repulsive tra cariche dello stesso segno, mentre abbiamo già detto che tra masse, che sono intrinsecamente dello stesso segno (positivo), le azioni sono sempre attrattive (questo spiega il segno meno presente nelle [III.2*1 e *2]; la convenzione su questo segno, che è stata richiamata anche nel par. precedente a proposito del potenziale scalare, ha lo scopo di rendere coerenti tra loro le formule dei campi gravitazionali, cioè newtoniani, ed elettrici e magnetici, cioè coulombiani).