

Oscillazioni e Onde

PACS numbers:

I. IL PROBLEMA

Consideriamo una corda ideale, di dimensione trasversale trascurabile e densità ρ . La corda, in condizioni di riposo giace sull'asse delle ascisse del piano Oxy ed è soggetta ad una tensione T . Se applichiamo una forza F parallelamente all'asse y , la corda si deformerà in una curva nel piano Oxy . Lasciata libera, consideriamo le forze agenti sul segmento

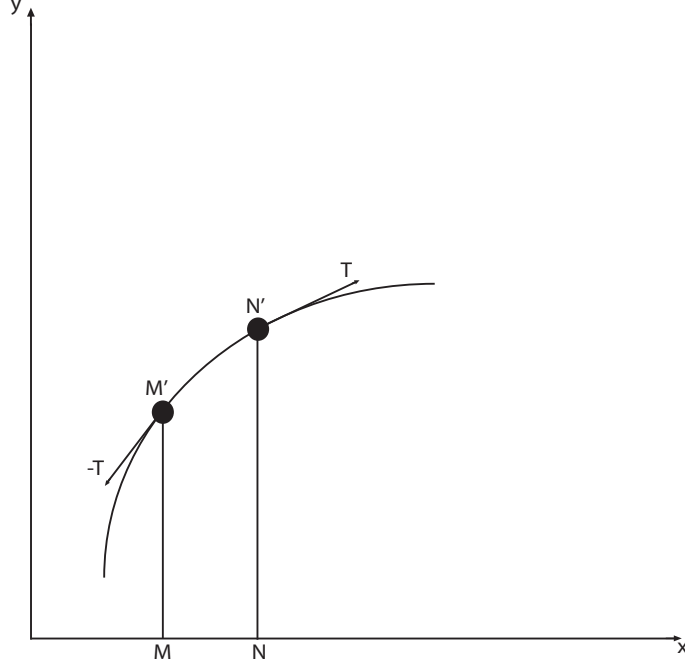


Figure 1: Schematizzazione delle forze agenti su una corda lasciata libera fuori dalla posizione di equilibrio

di corda $M'N'$ nella direzione dell'asse y . Se consideriamo trascurabile la differenza tra i moduli delle tensioni nei punti M' ed N' , e chiamiamo $u(x, t)$ lo spostamento della corda nel punto x all'istante t potremo scrivere:

$$M \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -T \sin(\theta') + T \sin(\theta) \quad (1)$$

essendo θ' e θ gli angoli delle tangenti a $u(x, t)$ rispettivamente in M' ed N' ed $M = \rho dx$.

Al primo ordine, potremo dire che

$$\sin(\theta) \sim \theta \sim \tan(\theta) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

e dunque:

$$\sin(\theta') - \sin(\theta) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx$$

Sostituendo in 1, troviamo:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

La (2) è un caso semplice dell'*equazione delle onde*.

Se consideriamo le dimensioni del rapporto $\frac{T}{\rho}$, vediamo che:

$$\left[\frac{T}{\rho}\right] = \left[\frac{m l t^{-2}}{m l^{-1}}\right] = [l^2 t^{-2}]$$

e dunque ha le dimensioni del quadrato di una velocità, verrà indicata con c^2 e, vedremo, è la velocità di propagazione della perturbazione lungo la corda.

II. LA SOLUZIONE DI D'ALAMBERT

Il primo a dimostrare l'esistenza ed unicità ed a trovare una soluzione di questa equazione fu il matematico francese D'Alembert, e, l'operatore differenziale che applicato ad una funzione delle coordinate $u(x, y, z, t)$, restituisce l'equazione delle onde, da lui, prende il nome di *d'alambertiano* e si indica con il simbolo:

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2$$

La soluzione di D'Alembert parte dal cambiamento di variabili (suggerito dal fatto che $\partial_t^2 - c^2 \nabla^2 = (\partial_t - c\nabla)(\partial_t + c\nabla)$):

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \quad (3)$$

dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\ &= c \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Derivando una seconda volta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \quad (7)$$

e dunque, sostituendo nella (2) otteniamo che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (8)$$

L'Eq.(8) indica che la derivata rispetto a η è una costante rispetto a ξ , dunque una funzione della sola η :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f_1(\eta) \quad (9)$$

Integrando ancora rispetto a η :

$$u(\xi, \eta) = \int f_1(\eta) d\eta + C \quad (10)$$

ove C è una costante rispetto ad η e dunque può essere una funzione di ξ . In definitiva:

$$u(x, t) = g_1(x - ct) + g_2(x + ct) \quad (11)$$

Le funzioni generiche $f_1(x - ct)$ e $f_2(x + ct)$ indicano due perturbazioni che si propagano lungo la corda nelle due direzioni opposte con velocità di modulo c . Queste funzioni possono essere determinate imponendo le condizioni iniziali:

$$u(x, t = 0) = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \phi_1(x) \quad (12)$$

Si ricava:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(z) dz \quad (13)$$

nota come soluzione di D'Alambert e le rette $x \pm ct = cost$ nel piano xt sono le *caratteristiche*.

A. Corda finita

Se la corda ha dimensione finita di lunghezza l , fissata agli estremi ($x = 0$ $x = l$), oltre alle condizioni (12) devono essere soddisfatte le condizioni ulteriori:

$$u(x = 0, t) = 0 \quad u(x = l, t) = 0 \quad (14)$$

La soluzione di D'Alambert, continua ad essere valida, ma le funzioni $g_1(x - ct)$ e $g_2(x + ct)$ hanno un argomento che può essere all'estremo dell'intervallo di definizione del problema. Per poter risolvere il problema occorrerà considerare solo la perturbazione iniziale della corda infinita tale che il movimento della sua porzione $(0, l)$ sia quello indicato dalle condizioni.

$$\begin{cases} g_1(-ct) + g_2(ct) = 0 \\ g_1(l - ct) + g_2(l + ct) = 0 \end{cases}$$

o, indicando la variabile indipendente semplicemente con x :

$$\begin{cases} g_1(-x) = -g_2(x) \\ g_1(l - x) = -g_2(l + x) \end{cases} \quad (15)$$

Possiamo verificare che, sostituendo nella seconda delle (15) x con $(l + x)$, e utilizzando la prima, si ottiene:

$$g_2(x + 2l) = -g_1(-x) = g_2(x)$$

e dunque $g_2(x)$ è periodica di periodo $2l$, e analogamente per la $g_1(x)$.

III. OSCILLAZIONI DI UN GAS COMPRESSO

Consideriamo un gas contenuto in un cilindro di volume $dV = Sdx$ e limitato da un lato da un pistone. Se il pistone (la parete sinistra del cilindro) si muove di $d\xi$, la variazione di pressione fra le due facce, all'inizio, sarà, al primo ordine:

$$dP = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

e di conseguenza, la forza agente sul pistone

$$dF = SdP = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

Applicando la prima legge di Newton $F = ma$ ed essendo $m = \rho_0 V$ si ottiene:

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (16)$$

Dividendo tutto per Sdx si ha:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (17)$$

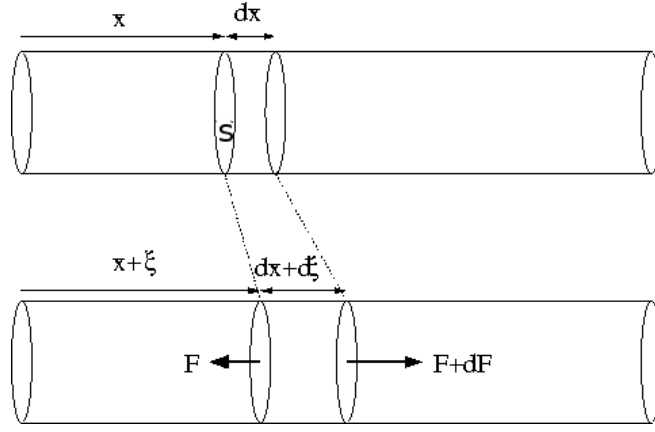


Figure 2: Schematizzazione delle forze agenti su un gas compresso in un cilindro

La variazione di pressione può essere calcolata introducendo il coefficiente di compressibilità k tale che:

$$dP = -\frac{1}{k} \frac{dV}{V} \quad (18)$$

La variazione relativa di volume sarà

$$\frac{S(dx + d\xi) - S(dx)}{Sdx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

e dunque:

$$dP = -\frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \quad (19)$$

e quindi

$$P_{x+\xi} = P_0 - \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

La pressione nel punto $x + \xi + dx + d\xi$ è data da:

$$P_{x+\xi+dx+d\xi} = P_0 - \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(P_0 - \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = P_{x+\xi} - \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad (20)$$

Dunque, sostituendo nella (17), otteniamo:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (21)$$

ovvero:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \xi = 0 \quad (22)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho k}} \quad (23)$$

In una trasformazione adiabatica, è: $PV^\gamma = Cost$, dunque $P\rho^{-\gamma} = k$ implica che:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1} \quad (24)$$

Dunque, utilizzando la $\rho^\gamma = P/k$ e la definizione di k (18):

$$dP = \frac{\gamma P d\rho}{\rho} = -\frac{1}{k} \frac{d\rho}{\rho}$$

da cui si ricava, che per un gas adiabatico, il coefficiente di compressibilità vale:

$$\frac{1}{k} = \gamma P \quad (25)$$

L'equazione delle onde che abbiamo ricavato, riguarda lo spostamento. Per ricavare il comportamento della pressione, possiamo partire dalla (18), scritta come:

$$P = P_0 - \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

dunque, derivando due volte rispetto a x otteniamo:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ma, per la (21):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (26)$$

D'altra parte derivando rispetto a t due volte:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (27)$$

e, confrontando le (26) e (27), si ricava:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 k} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (28)$$

Dunque anche la pressione varia nel cilindro secondo l'equazione delle onde, e analogamente si può ragionare per la densità.

IV. IL METODO DI FOURIER

Per una corda fissata agli estremi, un metodo alternativo, che porta ad interessanti conseguenze è quello di Fourier o di separazione delle variabili. Si tratta di cercare soluzioni particolari dell'equazione di D'Alembert, che siano il prodotto di una funzione solo del tempo e di una del solo spazio:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (29)$$

Sostituendo questa soluzione nell'eq. (2), otteniamo:

$$c^2 X''(x)T(t) = X(x)\ddot{T}(t) \quad (30)$$

avendo indicato con il punto la derivazione rispetto al tempo e con l'apice quella rispetto alla x . Dividendo entrambi i membri per $X(x)T(t)$ otteniamo:

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \quad (31)$$

Poiché il primo membro è solo funzione di x e il secondo solo di t , l'uguaglianza vale solo se entrambi i rapporti sono uguali ad una medesima costante λ (detta di separazione). Pertanto, l'Eq.(31) è equivalente al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \\ \ddot{T}(t) - \lambda T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

La soluzione delle (32) è del tipo:

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ T(t) &= Ce^{\sqrt{\lambda}t} + De^{-\sqrt{\lambda}t} \end{aligned} \quad (33)$$

Alla prima delle (33) possiamo aggiungere le condizioni al contorno: $X(0) = X(l) = 0$. Sostituendo la prima condizione nella (33) otteniamo $A = -B$ e dunque, se $\lambda > 0$ allora $X(x) = 2A \sinh(\sqrt{\lambda}x)$. Siccome il seno iperbolico si annulla solo nell'origine, allora non può essere verificata la seconda condizione al contorno. Pertanto λ dovrà essere negativa: $\lambda = -k^2$ e quindi:

$$X(x) = 2iA \sin(kx) \quad (34)$$

Sostituendo la seconda condizione si ha che $\sin(kl) = 0$ che è soddisfatta solo per $k_n = \frac{n\pi}{l}$. Si avranno dunque infinite soluzioni, tutte equivalenti, anche la somma di queste è una soluzione. Pertanto la soluzione generale sarà:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (35)$$

La costante A può essere trovata imponendo che la soluzione sia "normalizzata", ovvero

$$\int_0^l X^2 dx = 1 \Leftrightarrow A^2 \cdot \frac{l}{2} = 1 \quad (36)$$

e dunque

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \quad \forall n \quad (37)$$

Passando alla parte temporale, possiamo scrivere, ponendo anche qui $\lambda = -k^2$:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

con $\omega_n = ck_n$ e la costante k_n è quella trovata precedentemente. Sostituendo nella seconda delle (33) otteniamo:

$$T(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}$$

Imponendo le condizioni (12) e conglobando il fattore di normalizzazione nelle costanti:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(C_n \cdot e^{i\omega_n t} + D_n \cdot e^{-i\omega_n t}) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \quad (38)$$

$$u(x, t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \phi(x)$$

$$\dot{u}(t=0) = i \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (C_n - D_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \phi_1(x)$$

Se chiamiamo: $C_n + D_n = \alpha_n$ e $i(C_n - D_n) = \beta_n$, moltiplichiamo entrambi i membri per $\sin(\frac{n\pi x}{l})$ e integriamo, ricordando la (36), otteniamo:

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \phi(x) dx \quad (39)$$

$$\beta_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \phi_1(x) dx \quad (40)$$

Considerato che $C_n = \alpha_n - i\beta_n$ e $D_n = \alpha_n + i\beta_n$, si vede che sono uno il complesso coniugato dell'altro, e la $u(x, t)$, può essere scritta come una somma bilaterale con un unico parametro complesso. I coefficienti α_n e β_n che abbiamo trovato sono i coefficienti (di Fourier) dello sviluppo di $u(x, t)$ in una serie che possiamo ricavare manipolando la (38) e che prende il nome di Serie di Fourier:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (41)$$

che in forma complessa può essere scritta come:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} \quad (42)$$

in cui vale la relazione (di *dispersione*) $\omega_n = c \cdot k_n$, $D_{-n} = \bar{D}_n$ e

$$D_0 = \frac{1}{2l} \int_0^l \phi(x) dx$$

V. OSCILLAZIONI DI UNA MEMBRANA

Consideriamo le oscillazioni libere di una membrana rettangolare i cui contorni consistano nei punti del piano $(x, y): x = 0, x = l, y = 0, y = m$. Cerchiamo soluzioni dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (43)$$

che si annullino sul contorno e di cui siano note, all'istante iniziale, la forma funzionale $\phi_1(x, y)$ e la quella della sua derivata temporale $\phi_2(x, y)$.

Di nuovo, applichiamo il metodo di Fourier, cioè cerchiamo soluzioni del tipo:

$$(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) U(x, y) \quad (44)$$

Queste inserite nella (43) danno:

$$-\omega^2 (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) U(x, y) = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) \quad (45)$$

da cui, raccogliendo i termini e ponendo $\omega^2/a^2 = k^2$, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + k^2 U = 0 \quad (46)$$

Come al solito, separando le variabili: $U(x, y) = X(x)Y(y)$, otteniamo due equazioni:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ Y'' + \mu^2 Y = 0 \end{cases} \quad (47)$$

ove: $\lambda^2 + \mu^2 = k^2$.

Il sistema (47) dà la soluzione generica:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \\ Y(y) &= C_3 \sin(\mu y) + C_4 \cos(\mu y) \end{aligned}$$

La condizione al contorno $X(0) = X(l) = 0$ e $Y(0) = Y(m) = 0$ ci permettono di dire che $C_2 = C_4 = 0$, e dunque, a meno delle costanti non nulle:

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin(\lambda x) \\ Y(y) &= \sin(\mu y) \end{aligned} \quad (48)$$

Dalla (48), segue che λ e μ hanno un'infinità di valori tali che:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{i\pi}{l} \\ \mu_j &= \frac{j\pi}{m} \end{aligned} \quad (49)$$

Corrispondentemente, per le costanti k^2 e ω^2 otteniamo:

$$k_{ij}^2 = \pi^2 \left(\frac{i^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right) \quad (50)$$

$$\omega_{ij}^2 = a k_{i,j}^2 \quad (51)$$

La soluzione sarà del tipo

$$u(x, y, t) = \sum_{ij} (\alpha_{ij} \cos(\omega_{ij}t) + \beta_{ij} \sin(\omega_{ij}t)) \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{m}\right) \quad (52)$$

Ove le costanti si calcolano imponendo le condizioni iniziali. Vediamo dalla (52) che, per per ciascuna frequenza propria, esistono più forme differenti della membrana, con differenti linee nodali, cioè linee in cui l'ampiezza della vibrazione si annulla.

Consideriamo il caso di una membrana quadrata: $l = m = r$.

La frequenza in quest caso è data da:

$$\omega_{ij} = \frac{a\pi}{r} \sqrt{i^2 + j^2} \quad (53)$$

Cominciamo a considerare il caso $i = 1, j = 1$: $\omega_{11} = \alpha\sqrt{2}$ frequenza fondamentale;

$$u_{11} = N_{11} \sin(\omega_{11}t + \phi_{11}) \sin\left(\frac{\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{r}\right)$$

Non si annulla in nessun altro punto che non sia il bordo.

Passiamo al caso $i = 1, j = 2$. La frequenza sarà: $\omega_{12} = \omega_{21} = \alpha\sqrt{5}$ in corrispondenza della quale saranno possibili due forme della membrana:

$$u_{12} = N_{12} \sin(\omega_{12}t + \phi_{12}) \sin\left(\frac{\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{r}\right)$$

$$u_{21} = N_{21} \sin(\omega_{12}t + \phi_{21}) \sin\left(\frac{2\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{r}\right)$$

che hanno linee nodali per:

$$x = \frac{r}{2}; y = \frac{r}{2}$$

Oltre alle u_{12} e u_{21} ci sono anche altre infinite soluzioni equivalenti date dalle loro combinazioni lineari, per es. (ponendo per semplicità $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$):

$$u(x, y, t) = \sin(\omega_{21}t) \left[N_1 \sin\left(\frac{\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{r}\right) + N_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{r}\right) \right]$$

Ponendo $N_1 = N_2$ e $u(x, y, t) = 0$, ricaviamo la linea nodale: $x + y = 0$, mentre per $N_1 = -N_2$, si ha $x - y = 0$. I modi corrispondenti a questo caso sono mostrati in fig.3

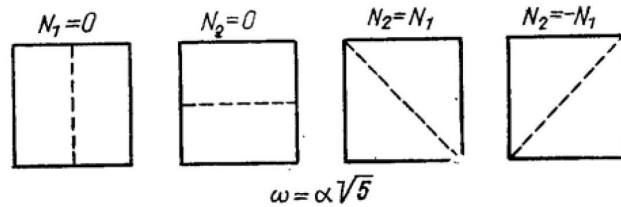


Figure 3: Posizione delle linee nodali per il caso $i=1, j=2$

VI. SOLIDI

Consideriamo le proprietà elastiche di un solido visto come un mezzo continuo omogeneo. quest'approssimazione è in genere valida per onde elastiche di lunghezza d'onda inferiore a $10^{-8} m$. Le idee fisiche alla base di questa trattazione sono essenzialmente la II legge di Newton e la legge di Hooke. La legge di Hooke dice che la deformazione è direttamente proporzionale allo sforzo; questa legge si applica al caso di piccole deformazioni.

A. Deformazioni

Consideriamo tre assi ortogonali unitari $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ solidali al solido indeformato (Fig.(4)); dopo una deformazione gli assi coordinati saranno cambiati in orientazione e lunghezza. I nuovi assi $\hat{x}'$, $\hat{y}'$, $\hat{z}'$ possono essere descritti in funzione

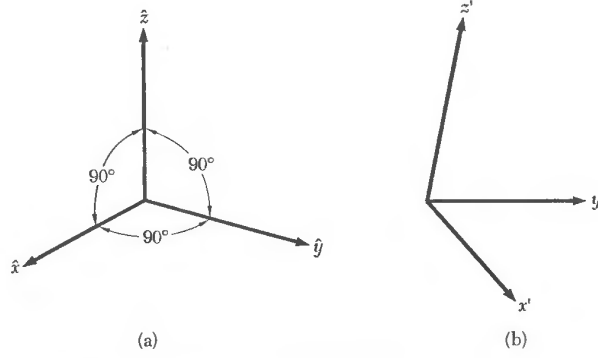


Figure 4: Assi coordinati per la descrizione delle deformazioni elastiche nel caso indeformato (a) e dopo la deformazione (b)

dei vecchi, al primo ordine:

$$\begin{cases} x' = (1 + \epsilon_{xx})\hat{x} + \epsilon_{xy}\hat{y} + \epsilon_{xz}\hat{z} \\ y' = \epsilon_{yx}\hat{x} + (1 + \epsilon_{yy})\hat{y} + \epsilon_{yz}\hat{z} \\ z' = \epsilon_{zx}\hat{x} + \epsilon_{zy}\hat{y} + (1 + \epsilon_{zz})\hat{z} \end{cases} \quad (54)$$

I termini $\epsilon_{\alpha\beta}$ definiscono le *deformazioni* del solido e sono adimensionali. Se anche gli assi originali avevano dimensioni unitarie, non altrettanto si può dire degli assi deformati. Per provarlo possiamo calcolare il modulo quadro dell'asse deformato:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1 + 2\epsilon_{xx} + \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2$$

dunque, al primo ordine è $x' = 1 + \epsilon_{xx}\hat{x}$.

L'effetto di una deformazione su un punto originariamente posto ad $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$ sarà di spostare il punto in $\mathbf{r}'$. Lo spostamento indotto dalla deformazione è

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = x(\hat{x}' - \hat{x}) + y(\hat{y}' - \hat{y}) + z(\hat{z}' - \hat{z}) \quad (55)$$

sostituendo le (54) e raccogliendo i termini, otteniamo:

$$\mathbf{R} = (x\epsilon_{xx} + y\epsilon_{yx} + z\epsilon_{zx})\hat{x} + (x\epsilon_{xy} + y\epsilon_{yy} + z\epsilon_{zy})\hat{y} + (x\epsilon_{xz} + y\epsilon_{yz} + z\epsilon_{zz})\hat{z} \quad (56)$$

che può essere espressa tramite tre parametri di deformazione locale $u(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$ e $w(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{R} = u(\mathbf{r})\hat{x} + v(\mathbf{r})\hat{y} + w(\mathbf{r})\hat{z} \quad (57)$$

Per $\mathbf{r}$ piccoli, confrontando le (56) e (57) otteniamo (con $\mathbf{R}(0) = 0$):

$$x\epsilon_{xx} \simeq x \frac{\partial u}{\partial x}; \quad y\epsilon_{yx} \simeq y \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \dots \quad (58)$$

Normalmente si lavora con dei parametri $e_{\alpha\beta}$ definiti a partire dai parametri $\epsilon_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{xy} &= \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = \epsilon_{yx} + \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & e_{xz} &= \mathbf{x}' \cdot \mathbf{z}' = \epsilon_{zx} + \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ e_{yx} &= e_{xy}; & e_{yy} &= \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; & e_{yz} &= \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z}' = \epsilon_{yz} + \epsilon_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_{zx} &= e_{xz}; & e_{zy} &= e_{yz}; & e_{zz} &= \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (59)$$

B. Dilatazione

L'aumento relativo di volume dovuto ad una deformazione è la *dilatazione*. Il cubo di lati $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, dopo la deformazione avrà un volume:

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z}' = \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & 1 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & 1 + \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \simeq 1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + O(\epsilon^2) \quad (60)$$

dunque la dilatazione è:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (61)$$

C. Sforzi

Per i solidi una forza applicata ad una superficie unitaria è uno *sforzo*. Esistono 9 componenti dello sforzo, ciascuna indicata da una lettera maiuscola con un pedice. La lettera indica la direzione dello sforzo e il pedice indica la direzione della normale alla superficie a cui è applicata, per cui, per es. X_y è la forza applicata in direzione dell'asse x alla faccia la cui normale giace lungo l'asse y (vedi Fig. 5). Il numero di componenti può essere ridotto se si applica la condizione

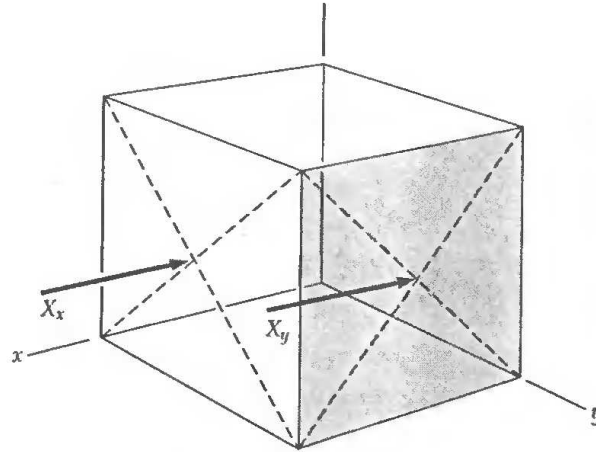


Figure 5: Definizione delle componenti dello sforzo: X_x è la forza applicata nella direzione di x ad una faccia con normale nella direzione x; X_y è applicata in direzione x alla faccia la cui normale è nella direzione y

che, per un cubo elementare, l'accelerazione angolare sia nulla e dunque la torsione sia nulla. Da questo segue che (Fig. 6) $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$ e $Z_y = Y_z$. In totale rimangono 6 componenti indipendenti: $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_y$. Per convenzione il segno positivo è quello della trazione, la pressione ha quello negativo.

Una notazione alternativa per le componenti dello sforzo, che permette espressioni più compatte, è quella di una lettera (per es S o σ) con due indici, il primo indice indica l'asse cui è ortogonale il piano, la seconda la direzione. Per

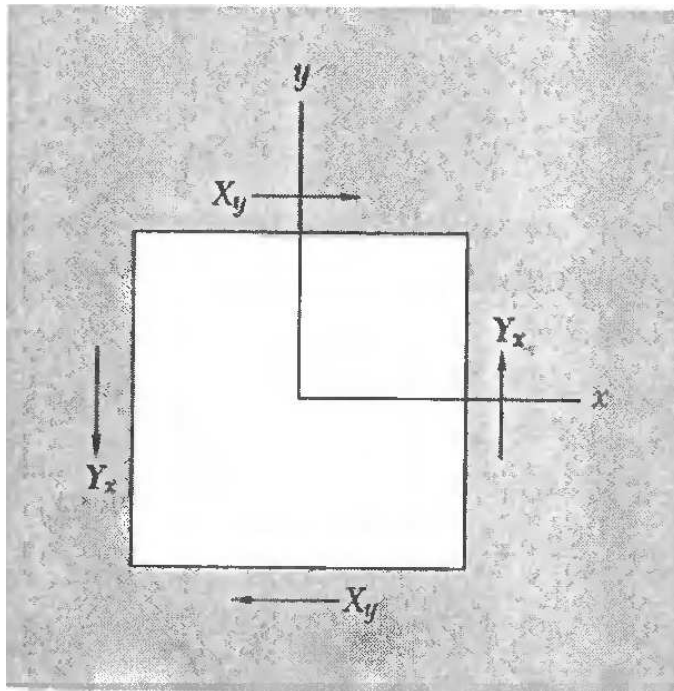


Figure 6: Dimostrazione che per un corpo in equilibrio $X_y = Y_x$. Le forze in ciascuna delle due direzioni si annullano. Anche il momento rispetto all'origine si annulla se $X_y = Y_x$

es. σ_{12} è la trazione nella direzione di x_2 del piano ortogonale a x_1 . In questo modo la componente i-esima di una trazione, che è data dalla somma delle componenti i-esime sulle facce ortogonali all'asse j si scrive:

$$t_i = \sum_j \sigma_{ij} n^j$$

in cui, spesso, il simbolo di sommatoria viene omissso con la convenzione che indici uguali, in alto ed in basso indicano la somma rispetto a quell'indice (si saturano, in gergo).

Da questa notazione è evidente che lo sforzo forma un tensore di rango 2 (una matrice) con tre righe e tre colonne (9 elementi), che, con le considerazioni fatte precedentemente è simmetrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, il che porta le componenti indipendenti a 6:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Le componenti normali dello sforzo sono quelle sulla diagonale, le componenti *di taglio* sono quelle off-diagonal. Il tensore degli sforzi può essere diagonalizzato in modo che non compaiano sforzi di taglio sulle facce ortogonali agli assi principali.

D. Onde S e P

1. Equazioni del moto

Se con la notazione sopra esposta vogliamo scrivere la legge di Newton $F=ma$, applicata ad un solido, otteniamo:

$$\sum_i F_i = \int_V f_i dV + \int_S t_i dS = \int_V f_i dV + \int_S \sigma_{ij} n^j dS = m a_i \quad (63)$$

Per il teorema della divergenza, possiamo scrivere:

$$\int_S \sigma_{ij} n^j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$$

da cui si deduce l'equazione di Navier:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (64)$$

Ignorare le forze di volume f_i , semplifica le cose ma può essere pericoloso quando si trattano oscillazioni a bassa frequenza (per es. quando si considerano le oscillazioni di tutta la terra, le forze di gravità sono importanti).

La relazione che lega le deformazioni agli sforzi se è lineare è la legge di Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon^{kl} \quad (65)$$

in cui abbiamo definito il tensore di rigidità (stiffness) del quarto ordine C_{ijkl} le cui componenti sono note come costanti di rigidità elastica o moduli di elasticità.

La legge (65), sostituita nella (64) e con le definizioni (58) ci fornisce la legge di propagazione di una deformazione in un solido:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} C_{ijkl} \frac{\partial u^k}{\partial x_l} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^j \partial x^l} \quad (66)$$

Le 81 componenti del tensore di rigidità, possono essere ridotte grazie a numerose considerazioni: in primo luogo, la simmetria delle σ_{ij} e delle ϵ_{kl} riduce il numero delle componenti indipendenti a 36 (prodotto delle 6 σ indipendenti per le 6 ϵ indipendenti); altre considerazioni meno banali portano le componenti indipendenti a 21. Per ottenere qualche risultato, però dobbiamo ridurre la complessità del mezzo. Il caso più semplice è quello di un mezzo isotropo e omogeneo. In questo caso si dimostra che:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (67)$$

dove le costanti λ e μ sono le costanti di Lamé. Sostituendo la (67) nella (65) si ottiene:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon^{kl} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (68)$$

ma $\delta_{kl} \epsilon^{kl} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \partial u_k / \partial x_k$ che è l'aumento frazionario di volume Δ , Dunque:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \Delta + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (69)$$

La costante di Lamé μ è nota come modulo di deformazione o rigidità, la λ , di per sé non ha significato fisico ma in combinazione con l'altra definisce la costante $\kappa = \lambda + 2/3\mu$ nota come incomprimibilità o modulo di volume. La rigidità è piccola per materiali con bassa viscosità. Il modulo di volume esprime la resistenza ai cambi di volume $\kappa = -\partial P / \partial \Delta$ in cui P è la pressione. Concludendo, sostituendo la (69) nella (66) otteniamo:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (70)$$

2. Onde

Possiamo scrivere la (70) in notazione vettoriale come:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (71)$$

Facendo uso della identità vettoriale $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ applicata al vettore ∇ si ottiene che:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

e di conseguenza:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

Sostituendo nella (71) si ottiene:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (72)$$

che è formata da un primo termine dilazionale ed un secondo termine rotazionale. L'equazione (72) è di difficile risoluzione in generale, e si preferisce separarla in equazioni che considerino solo la parte rotazionale o solo quella rotazionale. Per eliminare la parte rotazionale si fa uso della proprietà $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ che è evidente se si pensa che il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale a entrambi i vettori. Prendendo la divergenza della (72), allora si ottiene:

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (73)$$

e, detta $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$:

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Theta \quad (74)$$

che è l'equazione (scalare) della propagazione di un'onda di volume attraverso il mezzo con una velocità di propagazione:

$$v_s = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa + 4/3\mu}{\rho}} \quad (75)$$

Analogamente, prendendo il rotore, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 (\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} = \beta \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (76)$$

che è l'equazione vettoriale della propagazione di un disturbo rotazionale con velocità $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$. Le onde dilazionali e rotazionali sono note rispettivamente come *onde P* e *onde S*.

Un modo più elegante per ottenere i risultati appena mostrati è utilizzare il teorema di Helmholtz che dice che qualsiasi campo vettoriale può essere decomposto nella somma di un gradiente di un potenziale scalare e del rotore di un campo vettoriale:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi} \quad (77)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0 \quad (78)$$