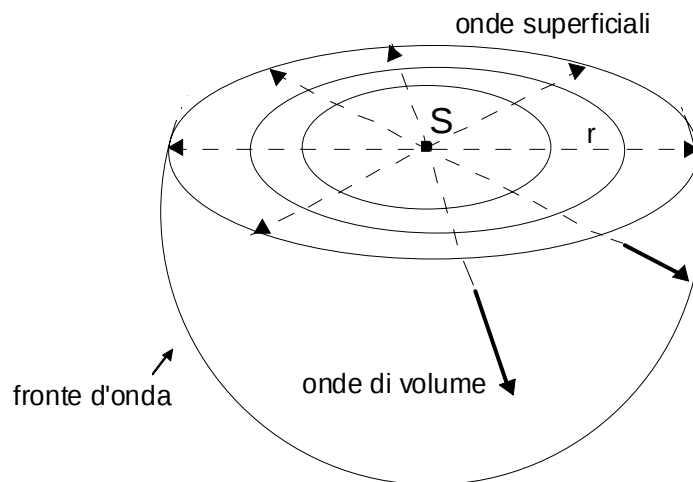


LS in Scienze Geologiche per le Risorse l'Ambiente e il Territorio
RISPOSTA SISMICA LOCALE
6 CFU

LEZIONE 2

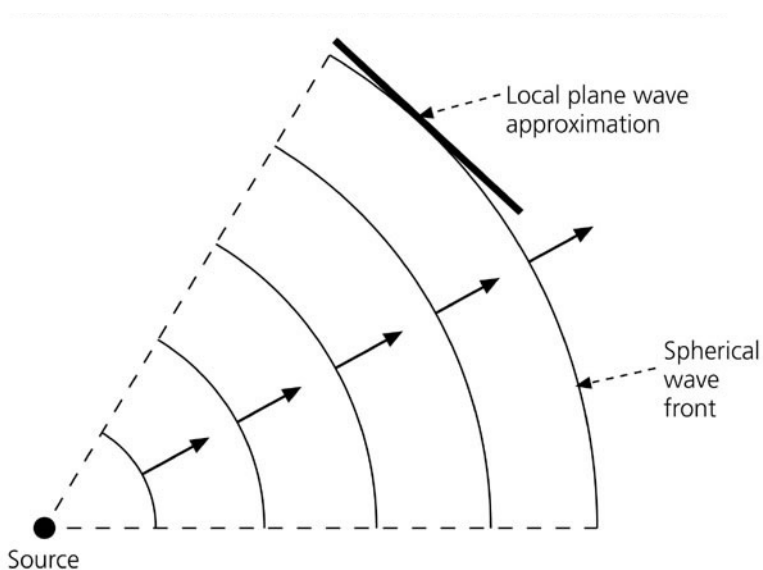
Fronti d'onda ed energia
Leggi di Snell
Partizione dell'energia sismica a una discontinuità

Le superfici su cui il moto delle particelle è lo stesso, ossia su cui la fase ha lo stesso valore, sono detti **FRONTI D'ONDA**. Nel caso di propagazione di onde di volume in un mezzo omogeneo i fronti d'onda sono sferici con centro nella sorgente assunta puntiforme.



La direzione perpendicolare al fronte d'onda è definito **RAGGIO**.

A grandi distanze dalla sorgente il fronte d'onda può essere considerato piano.



FRONTI D'ONDA ED ENERGIA

Consideriamo un'onda piana, costituita da una semplice armonica, che si propaga in un mezzo elastico ed imprime uno spostamento u alle particelle del mezzo definito da:

$$u = A \cos(kx - \omega t)$$

L'energia cinetica per unità di volume al tempo t associata a quest'onda sarà:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

pertanto la E_c varia da un massimo di $\rho A^2 \omega^2 / 2$ ad un minimo valore di zero durante ciascun ciclo. L'energia cinetica al tempo t su un fronte d'onda sferico di area $4\pi x^2$ sarà:

$$E_c = \left[\frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t) \right] 4\pi x^2 \quad \text{da cui:}$$

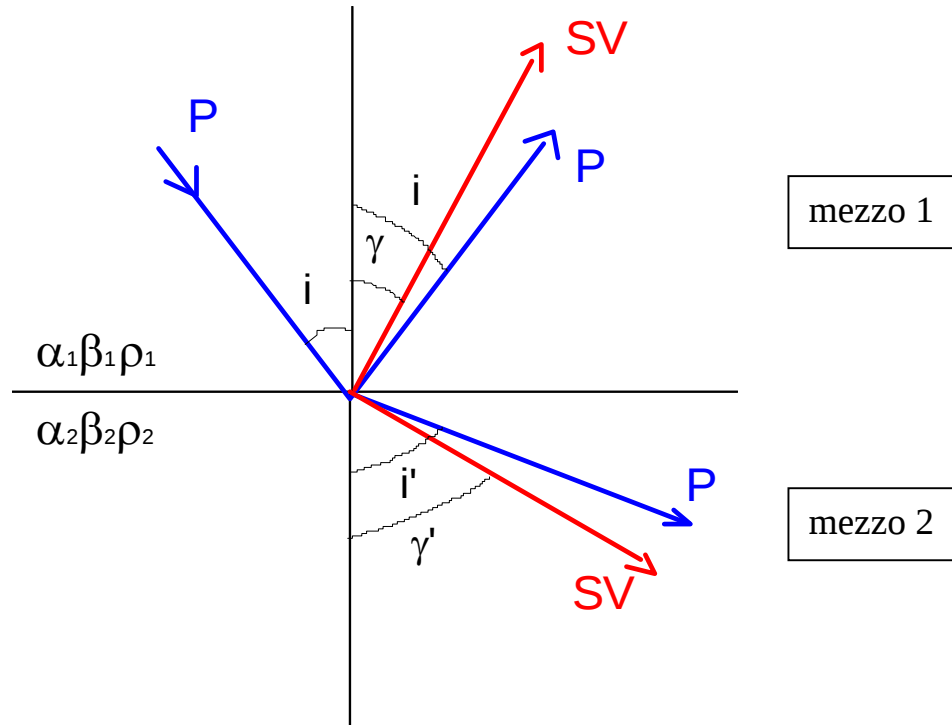
$$A \propto \frac{1}{x}$$

L'energia cinetica al tempo t su un fronte d'onda cilindrico di area $2\pi xz$, in cui z rappresenta la profondità investigata sarà:

$$E_c = \left[\frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t) \right] 2\pi xz \quad \text{da cui:}$$

$$A \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE



$$\frac{\sin i}{\alpha_1} = \frac{\sin \gamma}{\beta_1} = \frac{\sin \gamma'}{\beta_2} = \frac{\sin i'}{\alpha_2} \quad (1)$$

L'esistenza di più onde derivanti da una singola onda incidente implica che l'energia dell'onda incidente deve essere frazionata.

Possiamo quantificare l'energia frazionata usando i potenziali per le onde piane. I potenziali per i differenti tipi di onde P e SV sono definiti come:

$$\Phi_{mezzo1}^- = \Phi_{raggioincidente}^+ + \Phi_{raggioriflesso}^-$$

$$\Phi_{mezzo2}^+ = \Phi_{raggiorifratto}^+ \quad (2)$$

$$\Psi_{mezzo1}^{-} = \Phi_{raggioriflesso}^{-}$$

$$\Psi_{mezzo2}^{+} = \Phi_{raggiorifratto}^{+}$$

in cui Φ e Ψ sono i potenziali delle onde P e SV, rispettivamente.

$$\Phi_{incidente} = A_1 \exp[i\omega(p_{\alpha}x_1 + \eta_{\alpha}x_3 - t)]$$

$$\Phi_{riflessa} = A_2 \exp[i\omega(p_{\alpha}x_1 - \eta_{\alpha}x_3 - t)]$$

$$\Phi_{rifratta} = A_3 \exp[i\omega(p_{\alpha}x_1 + \eta_{\alpha}x_3 - t)] \quad (3)$$

$$\Psi_{riflessa} = B_2 \exp[i\omega(p_{\beta}x_1 - \eta_{\beta}x_3 - t)]$$

$$\Psi_{rifratta} = B_3 \exp[i\omega(p_{\beta}x_1 + \eta_{\beta}x_3 - t)]$$

Si noti che il segno del termine in x_3 varia da positivo a negativo, a seconda che il raggio viaggi verso il basso o verso l'alto.

I rapporti delle ampiezze dei raggi riflessi e rifratti (A_2 , A_3 , B_2 , B_3) rispetto all'ampiezza del raggio incidente (A_1) sono definiti **coefficienti di riflessione e trasmissione**.

La fisica che governa la propagazione delle onde ad un interfaccia richiede che gli *stress* e gli spostamenti siano “trasmessi” attraverso l'interfaccia:

solido-solido: tutte le componenti dello *stress* e degli spostamenti sono continui;

solido-fluido: spostamenti tangenziali discontinui, stress tangenziali nulli;

fluido-fluido: stress e spostamenti normali continui.

Le condizioni di continuità degli *stress* e spostamenti (**condizioni al contorno**) sono le condizioni di partenza per predire come l'energia sismica viene frazionata all'interfaccia.

In generale le condizioni al contorno richiedono uno sviluppo algebrico considerevole per il calcolo dei coefficienti di riflessione e trasmissione.

Esempio 1:

Onde P incidenti ad un interfaccia fluido-fluido. In questo caso semplice non vengono generate onde S, ma soltanto onde P riflessa e rifratta. Pertanto le equazioni del potenziale delle onde P saranno:

mezzo 1:

$$\Phi_1 = A_1 \exp[i\omega(p_1 x_1 + \eta_1 x_3 - t)] + A_2 = \exp[i\omega(p_1 x_1 - \eta_1 x_3 - t)]$$

mezzo 2:

$$\Phi_2 = A_3 \exp[i\omega(p_2 x_1 + \eta_2 x_3 - t)] \quad (4)$$

Gli spostamenti delle onde P sono legati ai potenziali dalla seguente relazione:

$$\vec{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \vec{x}_1 + 0 \vec{x}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \vec{x}_3 \quad (5)$$

Condizioni al contorno: stress normali (σ_{33}) e spostamenti normali (u_3) continui all'interfaccia. Matematicamente tale condizione può essere espressa a partire dal potenziale Φ :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} \quad (6a)$$

$$\sigma_{33}^- = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \varepsilon_{33} = \sigma_{33}^+ \quad (6b)$$

Sostituendo le (4) nelle (6a) e tenendo conto della (6b), è possibile calcolare i rapporti di ampiezza, o, coefficienti di trasmissione e riflessione:

$$\frac{A_3}{A_1} = CT = \frac{2\rho_1 \eta_1}{\rho_1 \eta_2 + \rho_2 \eta_1} \quad (7a)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = CR = \frac{\rho_2 \eta_1 - \rho_1 \eta_2}{\rho_1 \eta_2 + \rho_2 \eta_1} \quad (7b)$$

I coefficienti di riflessione e trasmissione dipendono da $\eta = (\cos i)/\alpha$. Pertanto il frazionamento dell'energia sismica all'interfaccia dipende dall'**angolo di incidenza** (angolo a cui il raggio incide sull'interfaccia).

Esempio 2:

Onde P incidenti ad un interfaccia solido-solido.

Si definisce **impedenza sismica Z** il prodotto della velocità per la densità del mezzo in cui l'onda si propaga:

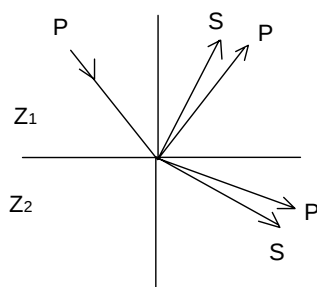
$$Z_i = v_i \rho_i$$

La frazione di energia dell'onda incidente che è suddivisa in P riflessa e P rifratta e S riflessa e S rifratta, dipende fortemente dall'angolo di incidenza. In figura (3.27 e 3.28 Lay & Wallace, 1995) vengono mostrati i coefficienti di riflessione e trasmissione per onde P incidenti dal basso e dall'alto su un' interfaccia.

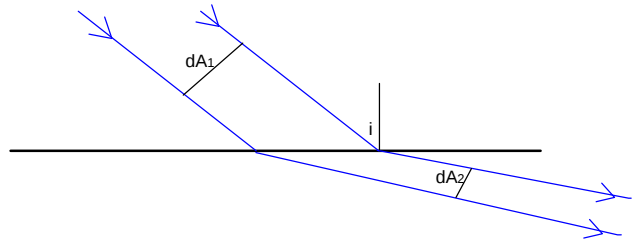
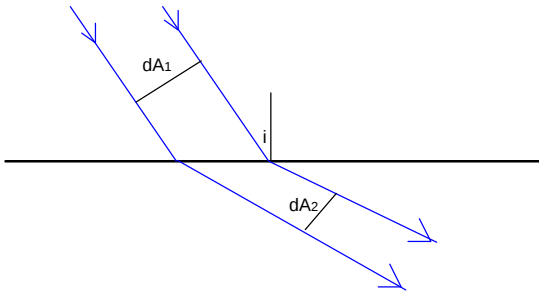
Caso 1, fig. 3.28:

$$Z_1 < Z_2$$

onde P incidenti dall'alto



L'ammontare di energia relativo ad onde P e S riflesse e rifratte non varia molto per angoli di incidenza minori di 15° . Quando l'angolo di incidenza si avvicina al valore dell'angolo critico, il coefficiente di trasmissione varia rapidamente, in particolare aumenta fortemente prima di arrivare a zero. Ciò può essere spiegato con una semplice argomentazione di tipo geometrico. Dal momento che l'ampiezza dell'impulso è proporzionale alla radice quadrata dell'energia per unità di area, come la superficie approssima lo zero, l'ampiezza cresce fortemente:

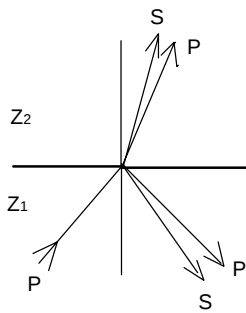


Oltre l'angolo critico le onde P rifratte cessano, cosicché l'energia incidente viene in parte riflessa come onda P ed in parte convertita in onde S riflesse e rifratte.

Caso 2, fig. 3.27:

$Z_1 > Z_2$

onde P incidenti dal basso



Esempio 3:

Onde P incidenti normalmente ad un interfaccia ($i=0^\circ$). Non vengono trasmessi sforzi tangenziali e quindi non possono generarsi onde S. In questo caso particolare (**incidenza verticale**) il frazionamento dell'energia tra onde P riflesse e rifratte diviene molto più semplice. Esso dipenderà dalle proprietà fisiche di ciascun mezzo.

Le equazioni (7) divengono:

$$CR = \frac{\rho_2 \alpha_2 - \rho_1 \alpha_1}{\rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2}$$
$$CT = \frac{2\rho_1 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2}$$
(8)

Esempio 4:

Onde SH incidenti normalmente ad un interfaccia ($i=0^\circ$).

Nel caso di onde SH incidenti ad un interfaccia *solido-solido* le condizioni al contorno sono le stesse di quelle che si verificano all'interfaccia *fluido-fluido* per onde P e SV, ossia continuità degli spostamenti e degli sforzi tangenziali.

Per **incidenza verticale** si avrà:

$$RC = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$TC = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Quando un'onda incidente è riflessa alla superficie di un mezzo a più alta impedenza ($Z_2 > Z_1$), RC è sempre positivo. Ciò significa che l'onda riflessa è in fase con l'onda incidente. Nel caso limite:

$$Z_1/Z_2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad Z_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad RC = 1$$

Se invece l'onda incide su un mezzo con più bassa impedenza ($Z_2 < Z_1$), il coefficiente di riflessione sarà negativo. Ciò significa che l'onda riflessa è sfasata di 180° con l'onda incidente. Nel caso limite:

$$Z_1/Z_2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad Z_2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad RC = -1$$

TC è sempre positivo. Nel caso in cui:

$$Z_1 \gg Z_2 \quad \Rightarrow \quad TC = 2$$

Ciò significa che nel passaggio da un mezzo rigido ad uno con rigidità molto minore, il coefficiente di rifrazione tende a due.

BIBLIOGRAFIA

T. Lay, T.C. Wallace - Modern Global Seismology - Academic Press, 1995. Capitolo 3, paragrafo 3.6.

—