

APPUNTI DI TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

La velocità della luce nel vuoto è determinata dalle equazioni di Maxwell, e, qualunque sia il sistema di riferimento, vale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Secondo il principio di relatività, è impossibile con esperimenti fisici evidenziare differenze tra sistemi di riferimento inerziali. Dunque, se la velocità della luce fosse diversa in un sistema in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro, allora cadrebbe tale principio. Si deduce che, non cambiando c , devono cambiare le coordinate.

Nel 1905 Albert Einstein stabilì due postulati.

- 1) Tutti i fenomeni fisici identici si manifestano allo stesso modo nei sistemi di riferimento inerziali, a parità di condizioni.
- 2) La velocità della luce nel vuoto è uguale in tutte le direzioni ed in ogni regione di un dato sistema di riferimento, ed è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Sincronizzazione degli orologi

Per poter definire un “evento” in un sistema di riferimento è necessario avere a disposizione un orologio in quiete nel sistema di riferimento inerziale nel punto in cui accade. Se ci sono due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo, ciascuna avrà i propri orologi in ciascun punto.

Come sincronizzare gli orologi in punti diversi dello stesso sistema di riferimento inerziale?

I passi sono i seguenti.

- 1) Le coordinate degli orologi sono note.
- 2) Ad un istante t_1 , un segnale luminoso parte dall’orologio di riferimento verso quello da sincronizzare ed arriva al tempo $t = t_1 + L/c$ (vedi figura 1).

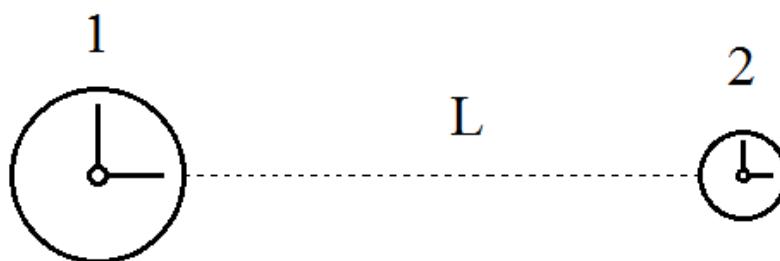


Figura 1 – Sincronizzazione di due orologi.

3) Si mette il conteggio dell'orologio al tempo t .

Alternativamente è possibile riflettere il segnale dal punto verso il riferimento, dove tornerà al tempo t_2 , come si vede in figura 2.



Figura 2 – Sincronizzazione alternativa di due orologi.

Quindi il tempo di sincronizzazione sarà

$$t = t_1 + \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (\text{dovrebbe essere } t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2})$$

Sistemi di riferimento in moto relativo

Confrontiamo due rigelli disposti perpendicolarmente alla direzione del moto. Chiamiamo K e K' rispettivamente un sistema di riferimento inerziale in moto ed uno fisso, ipotizzando che il vettore velocità relativa tra i due sistemi sia diretto lungo l'unica direzione comune $x \equiv x'$, come si evince dalla figura 3.

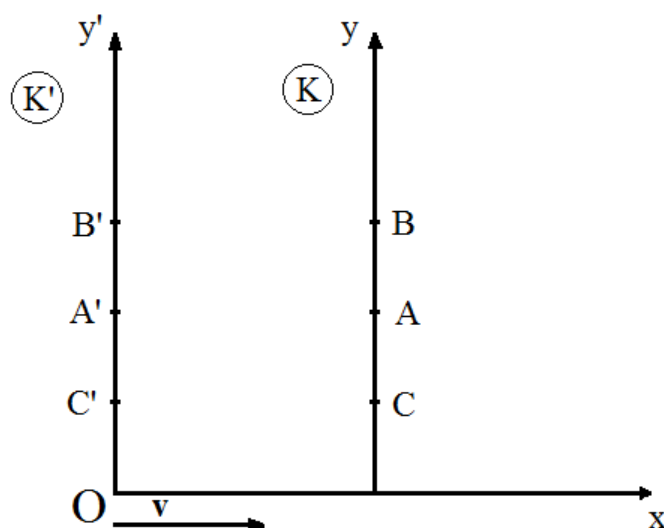


Figura 3 – Confronto delle lunghezze in direzione parallela al moto relativo.

Quando gli assi y e y' coincidono, viene emesso un segnale luminoso da B' e C' verso A' . Nel sistema di riferimento fisso K' , i due segnali arrivano in A' contemporaneamente, per cui in tale riferimento i punti B' e C' attraversano l'asse y' contemporaneamente. Lo stesso

accade per i punti B e C lungo l'asse y. Se, quindi, si trovasse che $B'C' \neq BC$ in un istante t, allora sarebbe possibile trovare differenze tra i due sistemi di riferimento. Ciò porta a concludere che le lunghezze non cambiano in direzione ortogonale al moto.

Nella stessa configurazione, confrontiamo i ritmi tra i due orologi dei due sistemi, servendoci della figura 4.

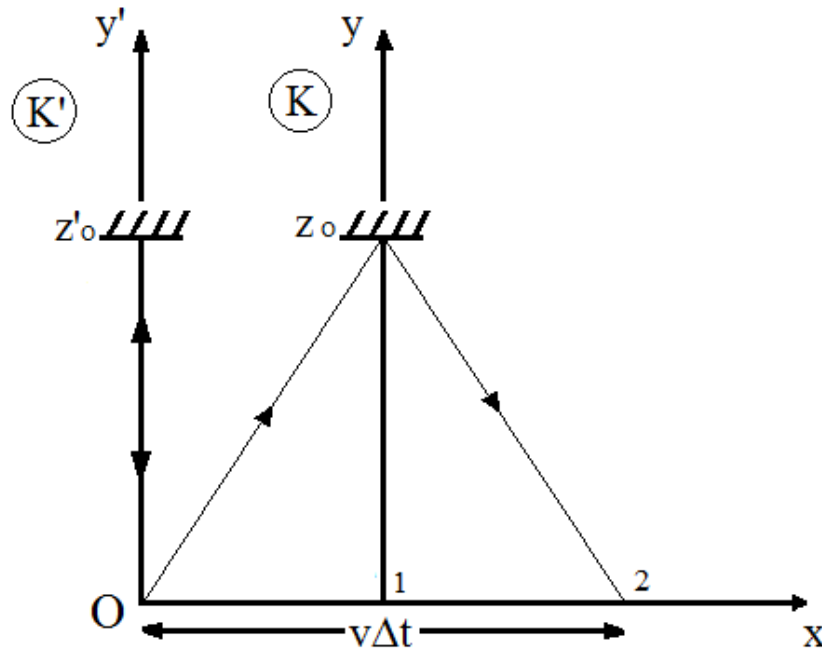


Figura 4 – Confronto dei tempi in direzione parallela al moto relativo.

Ad un certo istante, viene mandato un segnale luminoso da O verso uno specchio distante z'_0 . Tale segnale ritornerà all'origine dopo un tempo pari a

$$\Delta t' = \frac{2z'_0}{c}$$

Ciò accade in quanto sorgente e specchio sono in quiete nel riferimento K'

Cosa succede, invece, nel sistema in moto K ? Il segnale in K viene ricevuto nel punto x_2 in seguito alla riflessione avvenuta in corrispondenza dell'ascissa x_1 . In particolare, si ha

$$\overline{Ox_2} = v\Delta t \Rightarrow \overline{Ox_1} = \frac{v\Delta t}{2}$$

Inoltre, per il postulato della relatività, si ha

$$\overline{Oz_0} = \frac{c\Delta t}{2}$$

Poiché, inoltre, si forma un triangolo rettangolo nella medesima figura 4, scriviamo

$$\overline{Oz_0}^2 = z_0^2 + \overline{Ox_1}^2 = z_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

Sostituendo nella relazione precedente, si ottiene

$$z_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow z_0^2 = \frac{(\Delta t)^2}{4}(c^2 - v^2) \Rightarrow \Delta t = \frac{2z_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2z_0/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t'$$

È stato definito, quindi, il fattore per la dilatazione temporale γ come

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1$$

Come ultima situazione, consideriamo due righelli posti parallelamente alla direzione del moto. Anche in questo caso usiamo uno specchio ad un'estremità del righello ed una sorgente dall'altra estremità. Nel sistema di riferimento K' in quiete, come si vede in figura 5, si pone, lungo la direzione del moto, uno specchio che riflette il segnale inviato dalla origine O' .

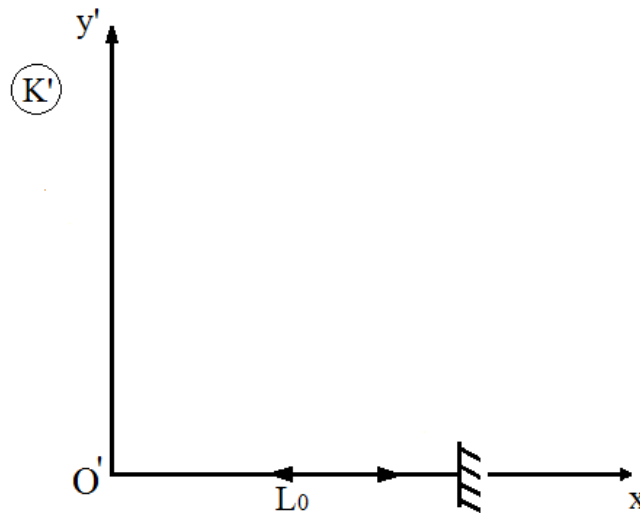


Figura 5 –Il sistema di riferimento in quiete.

Detta L_0 la distanza tra la sorgente del segnale e lo specchio, il segnale ritorna all'origine dopo un tempo

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$

Nel sistema di riferimento in moto K , invece, gli stessi eventi risultano differenti. In particolare, come si nota nella figura 6, chiamiamo I ed S rispettivamente le estremità inferiore e superiore del righello con specchio posizionato in S .

- All'istante di emissione, I è nell'origine ed S in S_1 .
- All'istante della riflessione, I si è spostato in I_1 ed S in S_2 .
- All'istante di ricezione, I si è spostato in I_2 .

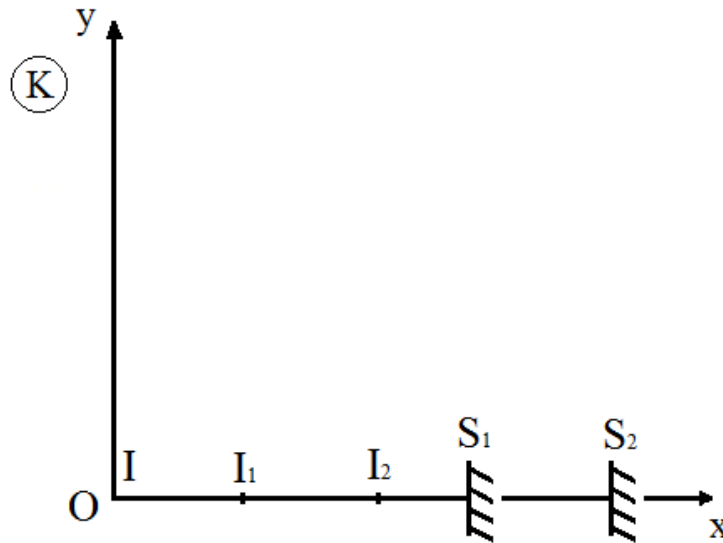


Figura 6 – Il sistema in moto con le posizioni del righello.

Si nota che l'emissione e la ricezione sono registrati in punti diversi nel sistema K.

Nel propagarsi verso destra, la luce rincorre lo specchio con velocità relativa $c - v$, mentre verso sinistra si allontana con velocità relativa $c + v$. Indicando con L la lunghezza incognita del righello in K, allora il tempo che impiega la luce nel tratto da I verso S_1 vale

$$t_1 = \frac{L}{c - v}$$

Viceversa, il tempo che impiega la luce nel tratto da S_2 verso I_1 vale

$$t_2 = \frac{L}{c + v}$$

Il tempo complessivo, dunque, è la somma dei due tempi:

$$\Delta t = t_1 + t_2 = L \left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{2L}{c} \gamma^2$$

Ricordando che $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, dal confronto si ha

$$\gamma \Delta t_0 = \frac{2L}{c} \gamma^2 \Rightarrow \gamma \frac{2L_0}{c} = \frac{2L}{c} \gamma^2 \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Trasformazioni di Lorentz come conseguenza dei postulati di Einstein

Deriviamo le equazioni che definiscono le coordinate nel sistema K' partendo da quelle nel sistema K in modo che esse siano conformi ai postulati. In tale ottica, vanno fatte alcune osservazioni.

- 1) Spazio e tempo devono crescere uniformemente in tutti i sistemi di riferimento inerziali, per cui le equazioni di trasformazione devono essere lineari.

2) L'isotropia dello spazio impone che $y = y'$ e $z = z'$.

Detto ciò, le equazioni della trasformazione di x e t sono del tipo

$$\begin{cases} x' = A_{11}x + A_{12}t + A_{10} \\ x = A_{21}x' + A_{22}t' + A_{20} \end{cases}$$

Ponendo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ e } t = 0 &\Rightarrow x' = 0 \\ x' = 0 \text{ e } t' = 0 &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Si ottiene

$$A_{10} = A_{20} = 0$$

Inoltre, all'istante t , la coordinata x dell'origine di K' è pari a vt , per cui la prima equazione si scrive

$$x' = 0 = A_{11}vt + A_{12}t \Rightarrow \frac{A_{12}}{A_{11}} = -v$$

Analogamente la seconda equazione si scrive

$$x = 0 = -A_{21}vt' + A_{22}t' \Rightarrow \frac{A_{22}}{A_{21}} = v$$

Sostituendo nel sistema iniziale, si ha

$$\begin{cases} x' = A_{11}(x - vt) \\ x = A_{21}(x' + vt') \end{cases}$$

È necessario determinare i due coefficiente adimensionali A_{11} e A_{21} , che, per l'uniformità del tempo e l'isotropia dello spazio, dipenderanno solo dalla velocità v .

A tal proposito, è facile verificare che tali due coefficienti sono uguali. Infatti, se in K un righello ha lunghezza L_0 , i suoi estremi avranno coordinate $x_1 = 0$ e $x_2 = L_0$, per cui, dalla seconda equazione della trasformazione all'istante $t' = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} x'_1 &= 0 \\ x'_2 &= \frac{L_0}{A_{21}} \Rightarrow L' = \frac{L_0}{A_{21}} \end{aligned}$$

Viceversa, prendiamo lo stesso righello e poniamolo in quiete nel sistema K' . Le coordinate degli estremi saranno $x'_1 = 0$ e $x'_2 = L_0$, per cui, dalla prima equazione della trasformazione all'istante $t = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{L_0}{A_{11}} \Rightarrow L = \frac{L_0}{A_{11}} \end{aligned}$$

Siccome i due sistemi sono equivalenti, la loro velocità relativa è la medesima, per cui, non dovendo cambiare le due lunghezze, risulta:

$$L = L' \Rightarrow A_{11} = A_{21}$$

Per trovare il valore esatto di tale costante comune alle due equazioni, sfruttiamo l'invarianza della velocità della luce c . All'istante $t = 0$, mandiamo un segnale dall'origine. L'evento consiste nella ricezione di tale segnale in un punto posizionato lungo l'asse x . Nel sistema di riferimento fermo K , tale coordinata vale

$$x = ct$$

Nel sistema K' , per l'invarianza appena citata, essa vale

$$x' = ct'$$

Sostituendo nel sistema delle trasformazioni, si ha

$$\begin{cases} x' = A_{11}(x - vt) \\ x = A_{11}(x' + vt') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = A_{11}(ct - vt) \\ ct = A_{11}(ct' + vt') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = A_{11}t(1 - \beta) \\ t = A_{11}t'(1 + \beta) \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro le ultime due equazioni, si ricava

$$t't = A_{11}^2 t't(1 - \beta^2) \Rightarrow A_{11}^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

In definitiva, le trasformazioni di Lorentz sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \text{ con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Composizione delle velocità

Consideriamo le trasformazioni di Lorentz appena ricavate in forma differenziale:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{cases}$$

Facendo rapporto membro a membro, si ha

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx}$$

In tale caso, v'_x rappresenta la componente lungo x della velocità di una particella nel sistema di riferimento in moto K' , mentre v è la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento K e K' .

Dividendo numeratore e denominatore per l'intervallo di tempo infinitesimo dt , si ricava

$$v'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

In tale espressione, v_x rappresenta proprio la componente lungo x della velocità della medesima particella nel sistema di riferimento in quiete K . Si noti che per $v \ll c$ si ottengono le trasformazioni di Galileo

$$v'_x = v_x - v$$

Intervalli

Un evento è descritto dalle coordinate del punto e dal tempo in cui è avvenuto.

Consideriamo i due seguenti eventi nel sistema K .

- 1) L'emissione di un segnale luminoso dal punto (x_1, y_1, z_1) al tempo t_1 .
- 2) La ricezione del segnale nel punto (x_2, y_2, z_2) al tempo t_2 .

Detta c la velocità di propagazione del segnale, allora il cammino percorso da quest'ultimo sarà pari a $c(t_2 - t_1)$. D'altra parte, tale distanza percorsa è proprio pari alla distanza euclidea tra i due punti. Nel sistema K , dunque, possiamo scrivere

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

La stessa coppia di eventi può essere osservata nel sistema K' . Siccome la velocità della luce è la stessa nei due sistemi di riferimento, allora

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0$$

In generale, dati due eventi, è possibile definire la quantità

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

Tale quantità viene chiamata intervallo tra i due eventi.

Segue dal principio di invarianza della velocità della luce che se un intervallo è nullo in un sistema di riferimento, esso è tale in tutti i sistemi di riferimento. Inoltre, scrivendo tale intervallo in termini infinitesimi

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Come appena accennato, se $ds = 0$ in un sistema di riferimento inerziale, si ha $ds' = 0$ anche in un altro sistema. Essendo ds e ds' infinitesimi dello stesso ordine, allora, i due devono essere proporzionali

$$ds = a ds'$$

Il coefficiente a può dipendere solo dal valore assoluto della velocità relativa dei due sistemi inerziali. L'isotropia dello spazio, consente di porre tale costanti pari ad 1, per cui

$$ds = ds'$$

Ciò dimostra che l'intervallo appena definito è un invariante. Per semplicità, scriviamo l'intervallo tra i due eventi 1 e 2 in maniera sintetica nel sistema K

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - L_{12}^2$$

Nel sistema generico K' tale intervallo è invariante, ovvero

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - L_{12}'^2$$

Nel caso in cui in un sistema K' per cui i due eventi abbiano luogo nello stesso punto, allora

$$L_{12}'^2 = 0 \Rightarrow s_{12}^2 = s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$$

Eventi per i quali $ds^2 > 0$ sono di tipo tempo (in quanto la componente temporale prevale su quella spaziale).

Allo stesso modo, è possibile trovare un sistema K' in cui i due eventi siano simultanei:

$$t_{12}'^2 = 0 \Rightarrow s_{12}^2 = s_{12}'^2 = -L_{12}'^2 < 0$$

Eventi per i quali $ds^2 < 0$ sono di tipo spazio (in quanto la componente spaziale prevale su quella temporale).

Quadrivettori

L'insieme delle coordinate (ct, x, y, z) di un evento può essere considerato come le componenti di un raggio vettore quadridimensionale. Indichiamo con x^μ le sue componenti (l'indice μ assume i valori 0, 1, 2 e 3):

$$x^\mu = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$$

Il quadrato della distanza è l'intervallo

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

In generale, si chiama quadrivettore A^μ l'insieme di 4 grandezze A^0, A^1, A^2, A^3 che si trasformano come le componenti x^μ di un raggio quadrivettore per trasformazioni di coordinate quadridimensionale. Le Trasformazioni di Lorentz forniscono

$$\begin{cases} A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A^2 = A'^2 \\ A^3 = A'^3 \end{cases}$$

Il modulo quadro del quadrivettore è analogamente definito come

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

Per rendere più comoda la scrittura di tali espressioni, vengono introdotte due tipologie di componenti dei quadrivettori, indicate con A^μ e A_μ . Tali scritture delle componenti prendono il nome rispettivamente controvarianti (indice alto) e covarianti (indice basso). Si ha, per definizione,

$$A^0 = A_0 \quad A^1 = -A_1 \quad A^2 = -A_2 \quad A^3 = -A_3$$

Si osservi che il modulo del quadrivettore, ovvero il suo quadrato, può esprimersi come

$$|A| = A_\mu A^\mu$$

Tale scrittura sottende la sommatoria sugli indici da 0 a 3, scelta conosciuta col nome di convenzione di Einstein.

Si osservi che le equazioni delle trasformazioni di Lorentz appena scritte possono esprimersi anche attraverso le componenti covarianti, a patto che il segno relativo a tutte le componenti spaziali sia cambiato. Per cui esse diventano

$$\begin{cases} A_0 = \frac{A'_0 - \frac{v}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A_1 = \frac{A'_1 - \frac{v}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A_2 = A'_2 \\ A_3 = A'_3 \end{cases}$$

La componente A^0 di un quadrivettore si chiama temporale, mentre le componenti A^1 , A^2 e A^3 sono spaziali. Spesso, per indicare le componenti di un quadrivettore, si separa la componente temporale da quelle spaziali e, quindi, si utilizzano anche le seguenti notazioni

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$$

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$$

Infine, secondo tale notazione, il modulo quadro del quadrivettore si scrive

$$A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$$

Si chiama tensore quadridimensionale di rango 2 l'insieme di 16 grandezze $A^{\mu\nu}$ che per trasformazione di coordinate si trasformano come prodotti di componenti di due quadrivettori. Le componenti dei tensori quadridimensionali possono essere di tre tipi.

- 1) Controvarianti $A^{\mu\nu} = B^\mu B^\nu$
- 2) Covarianti $A_{\mu\nu} = B_\mu B_\nu$
- 3) Misti $A^\mu_\nu = B^\mu B_\nu$ e $A^\nu_\mu = B^\nu B_\mu$

Con le componenti di ogni tensore $A^{\mu\nu}$ è possibile definire uno scalare scrivendo la somma

$$\text{Tr}(A^{\mu\nu}) = A^\mu_\mu = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

Tale scalare prende il nome di traccia del tensore.

Si definisce quadritensore unità il tensore δ^μ_ν tale che, qualunque sia il quadrivettore A^ν , risulti

$$\delta^\mu_\nu A^\nu = A^\mu$$

È evidente che le componenti di questo tensore sono

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = \mu \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu \end{cases}$$

Inoltre risulta

$$\text{Tr}(\delta^\mu_\nu) = 4$$

Innalzando o abbassando uno degli indici del tensore δ^μ_ν , si ottiene un tensore controvariante o covariante, indicato rispettivamente con $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$. Tali tensori sono detti metrici, hanno componenti uguali e si possono rappresentare sotto forma di tabella:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

È evidente che

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu$$

Ne consegue, per sostituzione, che

$$A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$$

Il tensore unitario δ^μ_ν e i tensori metrici $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ sono invarianti, ovvero le loro componenti sono identiche in tutti i sistemi di coordinate. Della stessa proprietà gode lo pseudotensore unità completamente antisimmetrico di Levi – Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, di rango 4. Tutte le componenti di tale tensore che presentano almeno due indici uguali sono nulle, mentre quelle non nulle sono uguali a ± 1 e cambiano di segno scambiando tra loro due indici. In particolare, si pone

$$\varepsilon^{0123} = 1 \Rightarrow \varepsilon_{0123} = -1$$

Il numero di componenti non nulle di tale tensore è pari a $4! = 24$ (basta pensare di scegliere i 4 indici tutti diversi), allora il prodotto scalare del tensore vale

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

Trasformazioni di Lorentz

In forma matriciale, possiamo scrivere le 4 equazioni delle trasformazioni di Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Affinché la matrice di trasformazione Λ^μ_ν conservi il prodotto scalare, deve essere

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$$

Sostituendo nelle equazioni di Lorentz, si ha

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \Rightarrow (\Lambda^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$$

Dal confronto, si scrive l'equazione

$$(\Lambda^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

Riprendiamo le trasformazioni di Lorentz in forma esplicita:

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\ x'^1 = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases}$$

Da tali equazioni estrapoliamo la matrice Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^T$$

Quindi

$$g_{\mu\nu}\Lambda_{\sigma}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\Lambda^{\tau})^{\mu}_{\rho} g_{\mu\nu}\Lambda_{\sigma}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2\beta^2 - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$, allora si ha

$$(\Lambda^{\tau})^{\mu}_{\rho} g_{\mu\nu}\Lambda_{\sigma}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g$$

Quindi il tensore metrico g è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz!!

Si osservi che il determinante di g è pari a -1 . Invece il determinante della matrice Λ è tale che

$$\|\Lambda^T g \Lambda\| = \|g\| \Rightarrow -\|\Lambda\|^2 = -1 \Rightarrow \|\Lambda\| = \pm 1$$

Nel caso di determinante della trasformazione pari a 1, la trasformazione di Lorentz è propria.

Come si comporta l'operatore di derivazione rispetto alle trasformazioni di Lorentz? In generale, gli operatori di derivazione rispetto alle coordinate x^{α} vanno considerati come componenti covarianti di un operatore quadrivettoriale:

$$\partial^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x'_{\beta}} \frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \partial'^{\beta} \partial^{\alpha} x'_{\beta} = \partial'^{\beta} \Lambda_{\beta}^{\alpha}$$

D'altra parte, si ha

$$\Lambda^{\tau}_{\alpha} x'^{\alpha} = \Lambda^{\tau}_{\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} = x^{\tau}$$

Differenziando l'ultima uguaglianza, si ha

$$\Lambda^{\tau}_{\alpha} dx'^{\alpha} = dx^{\tau} \Rightarrow \Lambda^{\tau}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\alpha}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \Lambda^{\tau}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \Rightarrow \partial'_{\alpha} = \Lambda^{\tau}_{\alpha} \partial_{\tau}$$

Quindi anche l'operatore derivata si comporta come un quadrivettore. Inoltre, se V è un generico vettore, allora la quantità

$$\partial_{\mu} V^{\mu}$$

è uno scalare, così come anche la quadridivergenza

$$\partial_{\mu} V$$

In tali casi, abbiamo definito

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial_t}{c}, -\nabla \right)$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial_t}{c}, \nabla \right)$$

Allora la quadridivergenza del gradiente si scrive come

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 = \square$$

Meccanica relativistica: il principio di minima azione

Per studiare il moto delle particelle materiali, partiamo dal principio di minima azione. Secondo tale principio, per ogni sistema meccanico esiste un integrale S , detto azione, che è minimo per il moto effettivo, e la cui variazione δS è conseguentemente nulla.

Definiamo l'integrale d'azione per una particella materiale libera, non soggetta, cioè, all'azione di forze esterne.

È opportuno notare che tale integrale non deve dipendere dalla scelta del sistema di riferimento, ovvero deve essere invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Dunque, esso non può che essere che l'integrale di uno scalare, con funzione integranda differenziale del primo ordine. Il solo scalare di questo tipo che si può formare per una particella materiale libera è proporzionale all'intervallo ds , per cui l'azione per una particella libera è data da:

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

L'integrale, dunque, è esteso alla linea d'universo compresa tra i due eventi a e b , mentre la costante α deve essere positiva qualunque sia la particella. Infatti, l'integrale appena scritto, a meno del segno, è massimo quando viene esteso ad una retta d'universo, e, se fosse positivo, non potrebbe avere un minimo. Si ricordi, inoltre, che l'azione può esprimersi anche come integrale nel tempo della lagrangiana:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

Considerando che $ds = c dt' = c dt / \gamma$, allora

$$S = -\alpha \int_a^b ds = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

La lagrangiana per la particella libera, dunque, è

$$\mathcal{L} = -\alpha c \sqrt{1 - \beta^2} = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\alpha \sqrt{c^2 - v^2}$$

In meccanica classica, ogni particella è caratterizzata dalla propria massa m . Di fatto, imponiamo che nel limite per $v \ll c$, si ottenga proprio la lagrangiana classica, ovvero, in tale caso,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Sviluppando in serie di potenze di v^2/c^2 , si ha

$$\mathcal{L} = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong -\alpha c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = -\alpha c + \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c}$$

Il primo termine della lagrangiana non dipende dalla velocità della particella, per cui è una costante arbitraria della lagrangiana. Uguagliando le due espressioni della lagrangiana, dunque, si ottiene

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c} \Rightarrow \alpha = m c$$

In definitiva, l'azione di una particella libera vale

$$S = -m c \int_a^b ds$$

La lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L} = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

L'impulso di una particella libera si ricava come

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = -m c^2 \frac{-2 \frac{\mathbf{v}}{c^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \mathbf{v}$$

La forza agente sulla particella si ottiene come derivata temporale dell'impulso:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m \mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt}$$

Nel caso in cui varia soltanto la direzione della velocità, ovvero che la forza sia perpendicolare alla velocità, allora il secondo termine è nullo:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Nel caso, invece, in cui varia solo il modulo della velocità, ovvero la forza e la velocità sono collineari, si può dimostrare facilmente che

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Si definisce energia della particella la quantità

$$\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L}$$

Nel nostro caso, si ha

$$\mathcal{E} = \gamma m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma m \left(v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} \right) = \gamma m (v^2 + c^2 - v^2) = \gamma mc^2$$

Tale espressione garantisce che l'energia di una particella libera ferma non è nulla, bensì assume valore pari ad mc^2 . Tale è noto come energia di riposo della particella.

Dalle espressione di energia ed impulso, deriva una importante relazione:

$$\begin{cases} p = \gamma mv \\ \mathcal{E} = \gamma mc^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{v}{c^2} = \frac{\beta}{c} \Rightarrow p = \frac{\beta \mathcal{E}}{c}$$

Definiamo, ora, le componenti controvarianti del quadri – impulso nel seguente modo.

$$p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right)$$

Da tale definizione, si osserva in primis che, in meccanica relativistica, energia ed impulso sono le componenti di uno stesso quadrivettore. Inoltre si ricava

$$|\mathbf{p}|^2 = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = \frac{\gamma^2 m^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 m^2 \beta^2 c^2 = m^2 c^2$$

Quindi

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}|^2 = p^2 + m^2 c^2 \Rightarrow \mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

La funzione hamiltoniana, dunque, è la seguente

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Rappresentazione covariante delle equazioni di Maxwell

Scriviamo la prima e la quarta equazione di Maxwell in forma locale

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Ricordando che $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}$ e che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ si ha

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Nella prima equazione aggiungiamo e sottraiamo la quantità $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \square\Phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \square\mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{J} \end{cases}$$

Per scrivere tali equazioni in rappresentazione covariante, definiamo i seguenti quadri-vettori

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}) = \text{quadripotenziale} \quad A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right)$$

$$J^\mu = \left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \mathbf{J} \right) = \text{quadricorrente} \quad J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$$

Le due equazioni di Maxwell, ricordando dalla definizione di quadridivergenza che i dalembertiani coincidono con le componenti di quest'ultima, diventano le componenti della seguente equazione covariante:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = J^\nu$$

Definiamo il tensore completamente controvariante antisimmetrico $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ con le 6 componenti indipendenti del campo elettromagnetico:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Allora l'equazione covariante della prima e quarta equazione di Maxwell diventa

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Per quanto riguarda la seconda e la terza equazione, che non comprendono la presenza di sorgenti dei campi, l'equivalente trattazione giunge a scrivere la seguente equazione

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

Quadripotenziale del campo

L'azione di una particella in moto in un campo elettromagnetico è composta di due termini: l'azione della particella libera, descritta nel paragrafo precedente, e un termine che descrive l'interazione della particella con il campo. Quest'ultimo deve contenere sia le grandezze che caratterizzano la particella, sia quelle che caratterizzano il campo. Le proprietà della particella sono definite, per quanto concerne la sua interazione con il campo elettromagnetico, da un solo parametro, ovvero dalla carica e della particella. Le proprietà del campo sono, invece, caratterizzate dal quadripotenziale A_μ , le cui componenti sono funzioni delle coordinate e del tempo. Queste grandezze compaiono nell'azione tramite il termine

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu$$

In tale espressione, le funzioni A_μ sono prese in punti della linea d'universo della particella.

L'azione complessiva, dunque, assume la forma

$$S = \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right)$$

Il quadrivettore $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ presenta come componente temporale il potenziale scalare Φ , mentre come componenti spaziali le coordinate del potenziale vettore $\mathbf{A}$.

Ricordando che $dx^\mu = (cdt, -d\mathbf{r}) = (cdt, -\mathbf{v}dt)$, possiamo scrivere

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{mc^2}{\gamma} - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) dt$$

L'integrando rappresenta proprio la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

Tale ultima espressione differisce dalla lagrangiana per una particella libera proprio per i termini che descrivono l'interazione della carica con il campo.

L'impulso generalizzato $\mathbf{P}$ si ottiene derivando la lagrangiana

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p}_L + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

$\mathbf{p}_L$ rappresenta l'impulso della particella libera.

A partire dalla lagrangiana, inoltre, troviamo l'hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - \mathcal{L} = \gamma mc^2 + e\Phi = \mathcal{H}_L + e\Phi$$

$\mathcal{H}_L$ rappresenta l'hamiltoniana della particella libera.

Tenendo presente la relazione che libera le due grandezze libere, ricaviamo che

$$\mathcal{H}_L = c \sqrt{\mathbf{p}_L^2 + m^2 c^2} \Rightarrow \mathcal{H} - e\Phi = c \sqrt{\left| \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right|^2 + m^2 c^2}$$

Per piccole velocità, si ha

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \cong \frac{mv^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

Ne consegue, ripercorrendo i medesimi passaggi, che l'hamiltoniana diventa

$$\mathcal{H} \cong e\Phi + \frac{1}{2m} \left| \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right|^2$$

Inoltre, applicando l'equazione di Eulero – Lagrange, a partire dalla scrittura della funzione hamiltoniana, si può ricavare l'espressione della forza di Lorentz. Infatti l'equazione di Eulero – Lagrange, come noto, è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = -e\mathbf{\nabla}\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{\nabla}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$$

Sfruttando l'identità

$$\mathbf{\nabla}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{\nabla})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{\nabla})\mathbf{A} + \mathbf{B} \times \mathbf{\nabla} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{\nabla} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = -e\mathbf{\nabla}\Phi + \frac{e}{c} ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{\nabla})\mathbf{A} + \mathbf{v} \times \mathbf{\nabla} \times \mathbf{A}) = -e\mathbf{\nabla}\Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{\nabla})\mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_L + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)$$

Uguagliando le ultime due equazioni, si ha

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_L}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\mathbf{\nabla}\Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{\nabla})\mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Inoltre

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{F} = -\frac{e}{c} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla \Phi \right) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Da tale ragionamento viene fuori, appunto, la forza di Lorentz. Alla stessa conclusione si giunge dal principio di minima azione, secondo cui

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right) = - \int_a^b \left(mc \delta ds + \frac{e}{c} A_\mu \delta dx^\mu + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right) = 0$$

Tenendo presente che

$$ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$$

si ha

$$\delta S = - \int_a^b \left(mc \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} + \frac{e}{c} A_\mu \delta dx^\mu + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right) = 0$$

Tale espressione include anche il quadrivettore velocità definito come

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} \Rightarrow \delta S = \int_a^b \left(-mc u_\mu d\delta x^\mu - \frac{e}{c} A_\mu \delta dx^\mu - \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right) = 0$$

Integrando per parti i primi due termini, si ha

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc u_\mu \delta x^\mu + \int_a^b mc \delta x^\mu du_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \delta x^\mu + \int_a^b \frac{e}{c} \delta x^\mu dA_\mu - \int_a^b \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu = 0 \\ \delta S &= \int_a^b \left(mc \delta x^\mu du_\mu + \frac{e}{c} \delta x^\mu dA_\mu - \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right) - \left(mc u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \delta x^\mu = 0 \end{aligned}$$

I termini integrati sono nulli, in quanto l'integrale varia agli estremi per valori dati delle coordinate. Per cui

$$\delta S = \int_a^b \left(mc \delta x^\mu du_\mu + \frac{e}{c} \delta x^\mu dA_\mu - \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right) = 0$$

Inoltre si ricordi che

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \\ dA_\mu &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \end{aligned} \Rightarrow \delta S = \int_a^b \left[mc du_\mu + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\nu \right] \delta x^\mu = 0$$

Si noti che, per ottenere l'ultimo termine, è stato necessario scambiare gli indici ν con quelli μ e viceversa. Tale operazione è consentita, in quanto tali indici sono di sommatoria.

In ultimo, scriviamo i differenziali dei 3 termini nella forma

$$du_\mu = \frac{du_\mu}{ds} ds \quad \text{e} \quad dx^\nu = u^\nu ds$$

Si ottiene

$$\delta S = \int_a^b \left[mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu \right] \delta x^\mu ds = 0$$

Essendo δx^μ arbitrarie, la funzione integranda deve essere nulla:

$$mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu = 0$$

Definendo, come fatto in precedenza, il tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ si ha

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \Rightarrow mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

L'ultima relazione rappresenta l'equazione del moto di una carica in forma quadridimensionale.

Trasformazioni di Lorentz per il campo

Scriviamo, ora, le formule di trasformazione per il campo elettromagnetico, cioè le formule che permettono di determinare il campo in un sistema di riferimento inerziale, allorché questo stesso campo sia dato in un altro sistema.

Il tensore elettromagnetico, dunque, si trasforma come segue

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

In tale espressione Λ denota la generica matrice di trasformazione di Lorentz. Ipotizziamo un boost lungo l'asse x^3 , per cui la matrice caratteristica assume la forma

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che gli elementi del tensore elettromagnetico rappresentano le componenti scalari dei campi elettrico e magnetico. Ad esempio, è possibile calcolare

$$F'^{01} = E'_x = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Per il calcolo, è necessario sommare su tutti gli indici ρ e σ , che vanno entrambi da 0 a 3. Delle 16 combinazioni, però, solo 2 sono non nulle nel rispetto del boost, cosicché

$$E'_x = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_3 \Lambda^1_1 F^{31} = \gamma(E_x - \beta B_y)$$

Analogamente per le altre due componenti, si ottiene

$$E'_y = \Lambda^0_\rho \Lambda^2_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^2_2 F^{02} + \Lambda^0_3 \Lambda^2_2 F^{32} = \gamma(E_y + \beta B_x)$$

$$E'_z = \Lambda^0_\rho \Lambda^3_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} = \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} + \Lambda^0_3 \Lambda^3_0 F^{30} = E_z$$

Lo stesso discorso può essere fatto con le componenti del campo magnetico.

In alternativa, si può dimostrare che, scomponendo i vettori dei due campi lungo la direzione parallela a quella della velocità $\mathbf{v}$ ed ortogonale a quest'ultima, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

PRINCIPII DI TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

La Teoria della Relatività Generale fu formulata da Einstein nel 1916. Essa si basa sul principio di equivalenza della gravitazione e quello di inerzia (nella relazione tra campo gravitazionale e geometria dello spazio – tempo) e sul principio di covarianza generale.

Il linguaggio della Teoria della Relatività è quello dell'analisi tensoriale e della geometria differenziale.

I punti cardine di tale teoria sono i seguenti.

- 1) La teoria Newtoniana non è più adatta a descrivere il campo gravitazionale.
- 2) Abbiamo necessità dei tensori per descrivere il campo gravitazionale. Inoltre è necessario introdurre i concetti di varietà, metrica, connessioni affini e altri enti geometrici.
- 3) Definire il ruolo del principio di equivalenza in tale trattazione.

Campo gravitazionale in meccanica non relativistica

La teoria newtoniana della gravità venne pubblicata nel 1685. I capisaldi di tale teoria, come noto, sono:

- 1) La legge di Newton

$$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}$$

In tale relazione, m_I rappresenta la massa inerziale.

- 2) La legge di gravità di Newton

$$\mathbf{F}_G = m_G \mathbf{g}$$

In tale relazione, m_G rappresenta la massa gravitazionale, mentre l'accelerazione gravitazionale è data dalla legge di gravitazione universale

$$\mathbf{g} = - \frac{G \sum_i M_{Gi} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Se la forza cui è soggetto il corpo è la stessa, allora possiamo scrivere

$$m_I \mathbf{a} = m_G \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \mathbf{g}$$

I campi gravitazionali sono caratterizzati dal fatto che tutti i corpi, indipendentemente dalla massa, si muovono allo stesso modo, a parità di condizioni iniziali. La forza di gravità, dunque, si distingue da tutte le altre forze, ad esempio quella elettromagnetica, che può agire o meno su una particella in funzione del suo rapporto carica/massa. Tale proprietà esclusiva dei campi gravitazionali permette di stabilire un'analogia tra il moto dei corpi in un campo gravitazionale e il moto dei corpi che non si trovano in un campo esterno, ma che sono riferiti ad un sistema di riferimento non inerziale. In altri termini, un sistema di riferimento non inerziale è equivalente ad un campo gravitazionale. Tale affermazione costituisce il cosiddetto principio di equivalenza.

Come immediata conseguenza, si ha che il rapporto tra le due masse appena scritto deve essere una costante identica per ciascun corpo. Di fatto, tutti gli esperimenti condotti sinora confermano tale principio di equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale.

Consideriamo, per esempio, il moto di una particella non relativistica che procede di moto rettilineo uniformemente accelerato. Per il principio di equivalenza, tale particella può essere immaginata in un sistema di riferimento uniformemente accelerato, per cui le equazioni del moto si scrivono

$$m_I \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{tot}} = m_G \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k$$

Lo stesso sistema, ora, lo guardiamo da un ascensore in caduta libera nello stesso campo gravitazionale, per cui il cambio di coordinate da effettuarsi è il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \\ t' = t \end{cases}$$

La nuova equazione del moto è la seguente

$$m_I \left(\frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} + \mathbf{g} \right) = m_G \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k$$

Nell'ipotesi in cui massa inerziale e gravitazionale coincidano, allora

$$m_I = m_G \Rightarrow m_I \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = \sum_k \mathbf{F}_k$$

Come ci si aspettava, l'osservatore in ascensore non sente il campo gravitazionale.

Tuttavia, mentre il principio di equivalenza va bene in assenza di campi gravitazionali (n tal caso i sistemi sono tutti inerziali), nel caso di sistemi non inerziali vi è una sostanziale differenza per quanto riguarda il comportamento all'infinito. Infatti, ad una distanza infinita dai corpi che lo generano, il campo gravitazionale reale tende a zero, mentre i campi equivalenti ai sistemi non inerziali crescono illimitatamente all'infinito o, al più, tendono ad un valore asintotico finito non necessariamente nullo. Si pensi, ad esempio, al caso delle forze centrifughe che nascono da un sistema di riferimento rotante, e che tendono all'infinito al crescere della distanza dall'asse di rotazione.

A tale scopo, per non far comparire nelle equazioni del moto i termini addizionali contenenti le derivate di $\mathbf{g}$, consideriamo un intervallo di tempo sufficientemente breve, in modo da poter considerare $\mathbf{g}$ costante. Un sistema di riferimento scelto in tal modo viene definito localmente inerziale.

Il principio di equivalenza può avere forma forte o debole.

Forma forte. In un qualsiasi campo gravitazionale, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento inerziale, nell'intorno di un generico punto, in modo che gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale siano nulli.

Forma debole. Non fa riferimento a tutte le accelerazioni, bensì soltanto alle leggi del moto in caduta libera. Tale ultima forma può essere espressa anche come uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale.

Campo gravitazionale in meccanica relativistica

La proprietà fondamentale dei campi gravitazionali, e cioè che tutti i corpi si muovono in essi nello stesso modo, resta valida anche in meccanica relativistica. Rimane, di conseguenza, anche l'analogia tra i campi gravitazionali e i sistemi di riferimento non inerziali

In un sistema di riferimento inerziale di coordinate cartesiane, l'intervallo infinitesimo è determinato dalla solita relazione

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nel passaggio ad un sistema di riferimento non inerziale, ds^2 non è più esprimibile tramite i quadrati dei differenziali delle coordinate. Per esempio, se si passa ad un sistema di coordinate in rotazione uniforme, detta Ω la velocità angolare di rotazione diretta lungo l'asse z , si ha

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ 0 & \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Tali trasformazioni equivalgono al sistema

$$\begin{cases} x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t \\ y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t \\ z = z' \end{cases}$$

Sostituendo nell'espressione di ds^2 , si ottiene (basta fare i passaggi per ottenere il risultato)

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x^2 + y^2)]dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt' - 2\Omega x' dy' dt'$$

Quale che sia la legge di trasformazione del tempo, questa espressione non può essere ridotta alla semplice somma dei quadrati dei differenziali delle 4 coordinate. Al contrario, tale espressione suggerisce una forma quadratica più generalizzata, del tipo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Nel passaggio ai sistemi di riferimento non inerziali, dunque, il sistema di coordinate è curvilineo. Le grandezze $g_{\mu\nu}$ definiscono la cosiddetta metrica dello spazio – tempo. È evidente che tali grandezze sono anche simmetriche rispetto ai propri indici, in quanto sia la componente $g_{\mu\nu}$ sia quella $g_{\nu\mu}$ entrano con lo stesso fattore $dx^\mu dx^\nu$ nel calcolo del ds^2 . Nel caso in cui si è in presenza di grandezze per le quali

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ se } \mu \neq \nu,$$

il sistema di metrica siffatto prende il nome di galileiano $\eta_{\mu\nu}$.

In particolare, l'esempio precedente fornisce la trasformazione del tensore metrico:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \Omega_\alpha^\mu \Omega_\beta^\nu dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Omega_\alpha^\mu \Omega_\beta^\nu$$

A questo punto, è facile concludere che, essendo i sistemi di riferimento non inerziali equivalenti a dei campi di forza, tali campi sono determinati dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Inoltre, un campo gravitazionale reale può essere visto come una modifica, punto per punto, della metrica dello spazio – tempo. Ciò implica che le proprietà geometriche dello spazio – tempo sono determinate anche dagli stessi fenomeni fisici e non sono invarianti dello spazio e del tempo.

Osserviamo, ancora, che un campo gravitazionale reale non può essere eliminato con alcuna trasformazione delle coordinate. In altri termini, non esiste alcuna trasformazione di coordinate che, in presenza del capo gravitazionale reale, possa rendere il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ di forma galileiana $\eta_{\mu\nu}$ contemporaneamente in tutto lo spazio – tempo. Tale circostanza fa sì che possa definirsi uno spazio – tempo curvo, contrariamente allo spazio – tempo piatto, ove la citata riduzione è possibile. È possibile, però, trovare una particolare trasformazione che riduca il tensore metrico ad una patrice galileiana in un punto arbitrario di un nuovo spazio – tempo non galileiano (basta diagonalizzare la matrice della metrica nel punto dato, a coefficienti costanti). Una volta fatta tale riduzione, il tensore metrico ha un valore principale positivo ed altri 3 negativi (si indica in tal modo che la segnatura della matrice, ovvero la sua traccia, è -2). Quindi il suo determinante g , in uno spazio – tempo reale, è negativo:

$$g < 0$$

in un campo gravitazionale, la geometria dello spazio diventa non euclidea. Consideriamo, infatti, due sistemi di riferimento: K (inerziale) e K' (non inerziale), quest'ultimo rotante rispetto a K intorno all'asse comune z . Misurando la lunghezza della circonferenza descritta e il suo diametro con un metro fisso nel sistema K (che ha origine nel centro della circonferenza), il loro rapporto è pari esattamente a π e la geometria in K è la classica euclidea. Se, invece, le medesime misure sono fatte con un metro fisso rispetto a K' , dal sistema K vediamo che nella direzione tangenziale alla traiettoria si ha contrazione di Lorentz, mentre il diametro resta inalterato rispetto alla misura precedente. Tale esperimento giustifica il fatto che il rapporto tra lunghezza della circonferenza ed il proprio diametro sarà maggiore di π .

In presenza di un campo gravitazionale, oltre alla metrica non euclidea, questa varia anche nel tempo, per cui i rapporti tra le distanze geometriche sono anche variabili nel tempo!! Ne

consegue che, variando le distanze relative tra particelle, risulta impossibile l'immobilità relativa di un sistema di corpi e deve totalmente cambiare il concetto di sistema di riferimento, così come stato assunto in relatività ristretta.

Poiché la scelta di tale sistema di riferimento è, dunque, arbitraria, in relatività generale le leggi della natura devono esprimersi in un modo formalmente idoneo per ciascun sistema di riferimento quadridimensionale (e quindi in forma covariante). Tale circostanza, però, non implica l'equivalenza fisica di tutti questi sistemi di riferimento (così come accade all'equivalenza fisica di tutti i sistemi di riferimento inerziali in relatività ristretta), bensì una descrizione concreta dei fenomeni fisici, diversa per ogni sistema di riferimento.

Coordinate curvilinee

Consideriamo una trasformazione di un sistema di coordinate x^μ in un altro x'^μ :

$$x^\mu = f^\mu(x'^\mu)$$

In una trasformazione di coordinate, i loro differenziali si trasformano secondo le formule

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} dx'^\sigma$$

Ogni insieme di 4 grandezze A^μ che in una trasformazione di coordinate si trasformano come i differenziali delle coordinate prende il nome di quadriettore controvariante

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} A'^\sigma$$

Sia, inoltre, Φ uno scalare. Le derivate dello scalare rispetto alle coordinate si trasformano:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$$

Ogni insieme di 4 grandezze A_μ che in una trasformazione di coordinate si trasformano come le derivate di uno scalare prende il nome di quadriettore covariante

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu$$

In modo analogo si definiscono i quadritensori di ranghi diversi. Ad esempio, il quadritensore $A^{\mu\nu}$ controvariante di rango 2 è l'insieme delle 16 grandezze che si trasformano come i prodotti di due vettori controvarianti, ovvero secondo la legge

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} A'^{\sigma\tau}$$

Il tensore covariante $A_{\mu\nu}$, invece, si trasforma come

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} A_{\sigma\tau}$$

Infine il tensore misto A^μ_ν si trasforma come

$$A^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} A^\sigma_\tau$$

Le definizioni appena scritte rappresentano una generalizzazione naturale delle definizioni dei quadri vettori e dei quadritensori in coordinate galileiane. Inoltre, le regole di formazione per la moltiplicazione e per la contrazione di prodotti di altri quadritensori in coordinate curvilinee sono le stesse rispetto alle coordinate galileiane. Quindi, da ciò, è possibile dimostrare che il prodotto scalare di due quadri vettori A e B è un invariante:

$$A^\mu B_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} A'^\sigma \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\mu} B'_\tau = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\mu} A'^\sigma B'_\tau = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x'^\sigma} A'^\sigma B'_\tau = A'^\tau B'_\tau$$

Nel passaggio a coordinate curvilinee non cambia nemmeno la definizione del tensore unitario, le cui uniche 4 componenti non nulle e pari ad 1 sono disposte lungo la diagonale principale. Inoltre si ha

$$A^\nu \delta_\nu^\mu = A^\mu$$

Il quadrato dell'elemento di lunghezza infinitesimo, anche in coordinate curvilinee, si scrive

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\nu\mu} dx^\mu dx^\nu$$

$g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico covariante. Si definisce tensore metrico controvariante $g^{\mu\nu}$ l'inverso del tensore metrico covariante, ovvero tale che

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$$

A questo punto è permesso il passaggio dalle componenti covarianti a quelle controvarianti, e viceversa, attraverso le relazioni

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad \text{e} \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

In un sistema di coordinate galileiano, le componenti del tensore metrico sono

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = g^{\mu\nu(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le stesse relazioni si ripetono per i passaggi da tensori covarianti a quelli controvarianti, e viceversa:

$$\begin{aligned}
A^\mu_\nu &= g^{\mu\sigma} A_{\sigma\nu} = g_{\nu\sigma} A^{\sigma\mu} \\
A^{\mu\nu} &= g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} A_{\sigma\tau} \\
A_{\mu\nu} &= g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} A^{\sigma\tau}
\end{aligned}$$

Nel passaggio dalle coordinate galileiane a quelle curvilinee viene definito il determinante jacobiano

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}$$

Questo jacobiano si può esprimere tramite il determinante del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. La formula di trasformazione del tensore metrico, infatti, è

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} g^{\sigma\tau(0)}$$

Se sono identiche le matrici appena scritte, lo sono anche il loro determinanti, ovvero

$$\frac{1}{g} = J \times J \times (-1) \Rightarrow J^2 = -\frac{1}{g} \Rightarrow J = \frac{1}{\sqrt{-g}}$$

In coordinate galileiane x'^μ , l'integrale di uno scalare sul volume $dV' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ è anch'esso uno scalare. Passando alle coordinate curvilinee x^μ , l'elemento di integrazione dV' diventa

$$dV' = \frac{1}{J} dV = \sqrt{-g} dV$$

in coordinate curvilinee, dunque, il prodotto $\sqrt{-g} dV$ si comporta come un invariante quando lo si integra in un quadrivolume.

Distanze e intervalli di tempo

Come è possibile determinare, a partire da valori misurati delle grandezze in un sistema di riferimento x^0, x^1, x^2, x^3 , le distanze e gli intervalli di tempo reali?

Chiamiamo τ il tempo reale e consideriamo due eventi infinitamente vicini, ma che avvengono nello stesso punto dello spazio. L'intervallo tra questi due eventi sicuramente può essere espresso come

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Ponendo nell'ultima espressione $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, allora si ricava il tempo proprio come

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2 \Rightarrow d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0$$

Questa è l'espressione del tempo reale (o proprio) in funzione della coordinata x^0 . Si osservi che, dovendo essere sempre positivo e reale il tempo proprio, si ha

$$g_{00} > 0$$

Tale condizione è strettamente necessaria, quindi, per la corrispondenza tra un campo gravitazionale reale al tensore metrico $g_{\mu\nu}$ di uno spazio – tempo reale. A tale scopo, gioca un ruolo decisivo, inoltre, anche la scelta della giusta segnatura.

Per quanto riguarda, invece, l'elemento dL di distanza spaziale, ricordiamo che in relatività ristretta è possibile definire tale lunghezza come l'intervallo tra due eventi infinitamente vicini che si verificano nello stesso istante. In relatività generale, non è possibile porre banalmente $dx^0 = 0$ nell'espressione del ds , in quanto, come visto, il tempo proprio in un campo è legato alla coordinata stessa da una relazione che cambia punto per punto. Allora, per determinare dL , si procede come segue. Supponiamo che un segnale luminoso venga emesso da un punto B dello spazio (di coordinate $x^\alpha + dx^\alpha$) verso un punto infinitamente vicino A (di coordinate x^α) e riflesso immediatamente lungo lo stesso cammino, così come si vede nella figura 7.

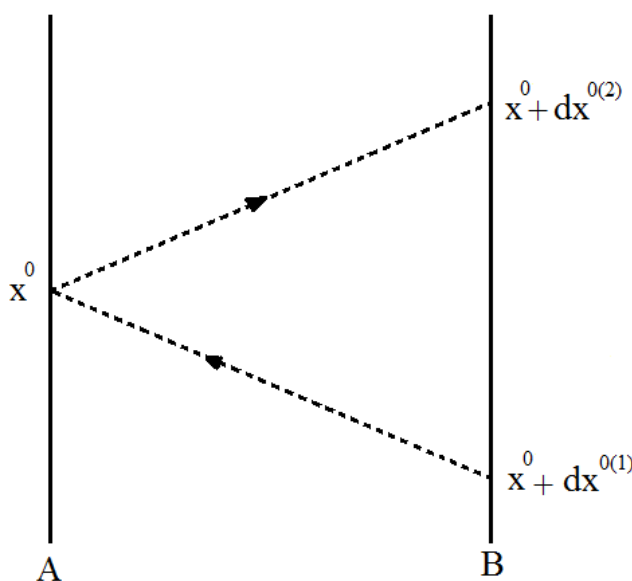


Figura 7 – Il percorso del segnale luminoso.

Il tempo (misurato nel punto B) necessario perché avvenga l'intero processo è evidentemente il doppio del rapporto tra la distanza tra i due punti e c , ovvero $2L/c$.

Scriviamo, ora, l'intervallo mettendo in evidenza le coordinate spaziali e la coordinata temporale:

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n + 2g_{0m} dx^0 dx^m + g_{00} (dx^0)^2$$

In tale scrittura, gli indici assumono valori da 1, 2 e 3 (in tal modo è stata esplicitata la coordinata temporale x^0). L'intervallo tra due eventi corrispondenti alla partenza e all'arrivo del segnale da un punto all'altro è nullo, per cui

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &\Rightarrow g_{mn}dx^m dx^n + 2g_{0m}dx^0 dx^m + g_{00}(dx^0)^2 = 0 \\ g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0m}dx^m dx^0 + g_{mn}dx^m dx^n &= 0 \\ dx^{0(1;2)} &= \frac{-g_{0m}dx^m \pm \sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})dx^m dx^n}}{g_{00}} \end{aligned}$$

Le due soluzioni temporali corrispondono alla propagazione del segnale nelle due direzioni. Se x^0 è l'istante d'arrivo del segnale in A, allora gli istanti della sua partenza in B e del suo ritorno in B saranno rispettivamente quelli col segno negativo e positivo. Quindi l'intervallo di tempo totale tra l'emissione ed il ritorno vale la differenza dei tempi, ovvero

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})dx^m dx^n}}{g_{00}}$$

L'intervallo di tempo reale, ovvero il tempo proprio, si ottiene, come visto, moltiplicando per il fattore $\sqrt{g_{00}}/c$:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\frac{2\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})dx^m dx^n}}{g_{00}} = \frac{2}{c}\frac{\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})dx^m dx^n}}{\sqrt{g_{00}}}$$

Inserendo tale espressione nella formula della distanza prima citata, allora

$$\begin{aligned} d\tau = \frac{2dL}{c} &\Rightarrow dL = \frac{cd\tau}{2} = \frac{\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})dx^m dx^n}}{\sqrt{g_{00}}} = \sqrt{\left(\frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} - g_{mn}\right)dx^m dx^n} \\ dL^2 &= \left(\frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} - g_{mn}\right)dx^m dx^n = \gamma_{mn}dx^m dx^n \end{aligned}$$

γ_{mn} è il tensore metrico tridimensionale che definisce la metrica, ovvero le proprietà geometriche dello spazio. Bisogna, però, tenere presente che, in generale, le g_{mn} dipendono da x^0 , per cui anche la metrica spaziale varia nel tempo. Per tale ragione, ha senso integrare l'espressione di dL solo in caso di indipendenza dei tensori dal tempo, ovvero per campi statici.

Passiamo, ora, alla definizione della nozione di simultaneità in relatività generale. Vediamo, quindi, se è possibile sincronizzare gli orologi che si trovano in punti differenti dello spazio. Una tale sincronizzazione deve evidentemente essere realizzata con uno scambio di segnali luminosi tra due punti.

Consideriamo nuovamente la propagazione, come appena visto, di un segnale da un punto A ad un punto B infinitamente vicini. Consideriamo simultaneo con A l'indicazione dell'orologio in B tra l'istante di partenza e quello di ritorno del segnale, ovvero

$$x^0 + dx^0 = x^0 + \frac{dx^{0(2)} + dx^{0(1)}}{2} = x^0 - \frac{g_{0m}}{g_{00}} dx^m$$

Tale relazione permette di sincronizzare gli orologi in qualsiasi volume infinitesimo dello spazio. È possibile, dunque, sincronizzare gli orologi lungo una qualsiasi linea non chiusa. Lungo un contorno chiuso, invece, tale sincronizzazione è impossibile, in quanto, nel descrivere il contorno e ritornando al punto di partenza, si ottiene per Δx^0 un valore diverso da zero.

Si noti che, mentre in relatività ristretta lo scorrere del tempo è diverso per gli orologi in moto relativo tra loro, in relatività generale il tempo scorre diversamente anche nei punti dello spazio di uno stesso sistema di riferimento.

Derivazione covariante

Ricordiamo che un vettore covariante si trasforma in base alla formula

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu$$

In conseguenza a ciò, si ha che il suo differenziale vale

$$dA_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dA'_\nu + A'_\nu d\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dA'_\nu + A'_\nu \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} dx^\sigma$$

Dunque le dA_μ non si trasformano come un vettore. Ciò avviene solo nel caso in cui le derivate seconde siano nulle, ovvero nel caso in cui le x'^ν siano funzioni lineari delle x^ν .

Ci proponiamo di trovare un tensore in coordinate curvilinee che sia l'analogo del tensore in coordinate galileiane

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

Affinché il differenziale di un vettore in coordinate curvilinee sia anch'esso un vettore, è necessario trasportare uno dei due vettori (con il quale fare la differenza) infinitamente vicini in modo tale che la differenza tra i due vettori coincida, in coordinate galileiane, col differenziale ordinario. Tale trasporto del vettore in questione sarebbe uno spostamento parallelamente a sé stesso. Per effetto del trasporto parallelo, mentre le componenti in coordinate galileiane non variano, in coordinate curvilinee esse sono variabili.

Consideriamo un generico vettore controvariante A^μ . Indichiamo con δA^μ la sua variazione e con DA^μ la differenza infinitesima dei due vettori, ovvero

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu$$

Ma

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu dx^\sigma \Rightarrow DA^\mu = dA^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu dx^\sigma = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu \right) dx^\sigma$$

Le grandezze $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ si chiamano connessioni affini o simboli di Christoffel, sono funzioni dipendenti dalla scelta del sistema di coordinate e contengono le derivate seconde delle coordinate stesse. In coordinate galileiane, $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = 0$, per cui si torna alle derivate ordinarie. Per un vettore covariante, si ottiene la stessa formulazione:

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\nu A_\nu \right) dx^\sigma$$

Le espressioni comprese tra parentesi sono dei tensori che rappresentano proprio la generalizzazione cercata della derivata di un vettore in coordinate curvilinee. Tali tensori sono noti come derivate covarianti rispettivamente dei vettori A^μ e A_μ e si indicano come

$$DA^\mu = D_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\sigma$$

$$DA_\mu = D_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma$$

È facile definire, a questo punto, anche la derivata covariante di un tensore. Consideriamo che questo generico tensore controvariante sia ottenuto come prodotto di due vettori controvarianti $A^\mu B^\nu$. Per un trasporto parallelo, si ha

$$\delta(A^\mu B^\nu) = A^\mu \delta B^\nu + B^\nu \delta A^\mu = -A^\mu \Gamma_{\tau\sigma}^\nu B^\tau dx^\sigma - B^\nu \Gamma_{\tau\sigma}^\mu A^\tau dx^\sigma$$

Per la linearità della trasformazione e per l'arbitrarietà del tensore, si ha

$$\delta(A^\mu A^\nu) = \delta A^{\mu\nu} = -(A^{\mu\tau} \Gamma_{\tau\sigma}^\nu + A^{\tau\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\mu) dx^\sigma$$

Sostituendo nell'espressione della derivata covariante, si ha

$$DA^{\mu\nu} = D_\sigma A^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\tau\sigma}^\nu A^{\mu\tau} + \Gamma_{\tau\sigma}^\mu A^{\tau\nu}$$

Analogamente le derivate covarianti dei tensori covarianti e misti:

$$DA_{\mu\nu} = D_\sigma A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\tau A_{\tau\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau A_{\mu\tau}$$

$$DA_\nu^\mu = D_\sigma A_\nu^\mu = \frac{\partial A_\nu^\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau A_\tau^\mu + \Gamma_{\tau\sigma}^\mu A_\nu^\tau$$

Si può dimostrare che la derivata covariante di un prodotto si ottiene con le stesse regole della derivata ordinaria di un prodotto, mentre la derivata covariante di uno scalare coincide con la derivata ordinaria.

Un'importante proprietà dei simboli di Christoffel è la simmetria rispetto agli indici bassi, per cui

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}$$

In conclusione, vediamo le formule di trasformazione dei simboli di Christoffel da un sistema di coordinate ad un altro:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\rho\tau}^{\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}$$

Si vede che le grandezze $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ si comportano come tensori solo nei confronti delle trasformazioni lineari delle coordinate, allorquando il termine delle derivate seconde è nullo. Grazie a questa formula, è possibile dimostrare che è possibile scegliere il sistema di coordinate in modo tale da rendere nulle tutte le $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ in un punto arbitrario assegnato (tale sistema è detto localmente inerziale o localmente geodetico). Per dimostrare tale affermazione, supponiamo sia, per semplicità, l'origine delle coordinate e che, in tale punto, abbiano i valori iniziali $(\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu})_0$. Eseguiamo in prossimità del punto la trasformazione

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu})_0 x^{\nu} x^{\sigma}$$

Per tale scelta, si ha

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \right)_0 = (\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu})_0 \quad \text{e} \quad \Gamma_{\rho\tau}^{\lambda} = 0$$

Inoltre la trasformazione scelta consente di scrivere

$$\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)_0 = \delta_{\nu}^{\mu}$$

Di conseguenza, i valori di qualsiasi tensore in un punto dato non cambiano, mentre i simboli di Christoffel si annullano riducendo la metrica alla forma galileiana.

Relazione tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico

Dimostriamo che la derivata covariante del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è nulla. Notiamo a tale scopo che, così come per qualsiasi vettore, deve valere la relazione

$$DA_{\mu} = g_{\mu\nu} DA^{\nu}$$

D'altra parte,

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \Rightarrow DA_\mu = g_{\mu\nu} DA^\nu + A^\nu Dg_{\mu\nu}$$

Dal confronto tra le due relazioni si ricava che

$$A^\nu Dg_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow Dg_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow D_\sigma g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\tau g_{\tau\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau} = 0$$

Esprimiamo le derivate del tensore metrico e permutiamo gli indici:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} &= \Gamma_{\mu\sigma}^\tau g_{\tau\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau} \\ -\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} &= -\Gamma_{\mu\nu}^\tau g_{\tau\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\tau g_{\nu\tau} \\ \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} &= \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\tau\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau g_{\sigma\tau} \end{aligned}$$

Sommando membro a membro si arriva a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau} \Rightarrow \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right)$$

Infine scriviamo

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = g^{\mu\tau} \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda g_{\lambda\tau} \Rightarrow \Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\nu} \right)$$

Queste sono le formule dei simboli di Christoffel in funzione del tensore metrico.

Moto di una particella in un campo gravitazionale

Il moto di una particella libera in relatività ristretta è determinato, come noto, dal principio di minima azione

$$\delta S = -mc \int ds = 0$$

ricordiamo che, secondo tale equazione, la particella si muove in modo tale che la linea d'universo ha per estremi i due punti dati per l'integrazione ed è una retta che traduce l'equazione del moto rettilineo uniforme.

Il moto di una particella in un campo gravitazionale deve essere determinato dal principio di minima azione sotto la stessa forma. Dunque, la particella si muove in modo tale che il suo punto d'universo descriva una linea detta geodetica nello spazio quadridimensionale. Tale curva, poiché in presenza di un campo gravitazionale lo spazio – tempo non è galileiano, tale linea non è una retta e il moto reale della particella non è rettilineo uniforme.

Troviamo, a questo punto, le equazioni del moto di una particella in un campo gravitazionale generalizzando le equazioni trovate in relatività ristretta. In prima analisi, osserviamo che, in caduta libera

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial t^2} = 0$$

Effettuando in cambio di coordinate, si ha

$$x'^\mu = f(x^\mu) \Rightarrow \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial t^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial t} = 0$$

Moltiplicando entrambi i membri per il fattore $\partial x'^\gamma / \partial x^\mu$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial t^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t} \frac{\partial x'^\beta}{\partial t} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial t^2} \delta_\alpha^\gamma + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t} \frac{\partial x'^\beta}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 x'^\gamma}{\partial t^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t} \frac{\partial x'^\beta}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Ne segue la definizione stessa dei simboli di Christoffel.

Analogamente, le stesse equazioni di una particella in un campo gravitazionale si scrivono come

$$\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$$

In coordinate curvilinee, evidentemente tale equazione si scrive

$$Du^\mu = 0 \Rightarrow du^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu u^\nu x^\sigma = 0$$

Dividendo per ds , si ottiene

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

Tale espressione è detta equazione della geodetica e può essere scritta anche in termini del tensore $g_{\mu\nu}$

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

Interpretando il secondo termine dell'equazione come un a forza generalizzata, allora il tensore metrico assume il ruolo di potenziale del campo gravitazionale, in quanto le sue derivate definiscono il campo stesso.

Supponiamo, ora, che sia dato una funzione scalare ϕ . La quantità

$$\psi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds}$$

è un invariante per tutte le linee d'universo e il termine $\partial\varphi/\partial x^\mu$ rappresenta un tensore covariante. Definiamo, inoltre,

$$\chi = \frac{d\psi}{ds} = \frac{d^2\varphi}{ds^2}$$

Anche la quantità χ è un invariante, e si esprime come

$$\chi = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial s}$$

Muovendosi sulla geodetica dello spazio curvo, allora

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds}$$

Sostituendo nell'espressione di χ , si ha

$$\chi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \frac{\partial x^\nu}{\partial s}$$

Nel caso limite di velocità piccole, le equazioni relativistiche del moto di una particella in un campo gravitazionale devono ridursi alle rispettive equazioni non relativistiche. Bisogna, inoltre, tener presente che, se le velocità si suppongono piccole, segue anche la condizione di campo gravitazionale debole. In caso contrario, infatti, la particella che in esso si trova acquisirebbe una grande velocità. Scriviamo, in tali ipotesi, la lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\varphi$$

Tale espressione assicura che la lagrangiana non relativistica in assenza di campo

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

sia esattamente quella alla quale si riduce la lagrangiana relativistica nel caso di piccole velocità:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

L'azione non relativistica S per una particella in un campo gravitazionale assume, dunque, la forma

$$S = \int \mathcal{L} dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt = -mc \int ds$$

Dal confronto si ricava

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt \Rightarrow ds^2 = \left(c^2 + \frac{v^4}{4c^2} + \frac{\varphi^2}{c^2} - v^2 - \frac{v^2\varphi}{c^2} + 2\varphi \right) dt^2$$

Trascurando i termini che si annullano per $c \rightarrow \infty$ si ha

$$ds^2 \approx (c^2 - v^2 + 2\varphi)dt^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - dr^2$$

Ricordando che

$$ds^2 = g_{mn}dx^m dx^n + 2g_{0m}dx^0 dx^m + g_{00}(dx^0)^2 = -dr^2 + g_{00}c^2 dt^2$$

È possibile eseguire approssimare a zero i termini spaziali che non sono moltiplicati per il fattore c^2 , scrivendo, quindi,

$$ds^2 \approx -dr^2 + g_{00}c^2 dt^2$$

Dunque la componente g_{00} del tensore metrico, dal confronto, nel caso limite vale

$$(c^2 + 2\varphi)dt^2 - dr^2 = -dr^2 + g_{00}c^2 dt^2 \Rightarrow g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Nel caso del campo gravitazionale terrestre, come noto,

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

Campo gravitazionale costante

Un campo gravitazionale è detto costante se è possibile scegliere un sistema di riferimento tale che tutte le componenti del tensore metrico non dipendano dalla coordinata temporale x^0 , che viene, quindi, chiamata tempo universale.

La scelta del tempo universale non è univoca. Ad esempio, quando si aggiunge ad x^0 una funzione arbitraria delle coordinate spaziali, anche in tal caso tutte le componenti del tensore metrico non contengono la coordinata x^0 . Inoltre è anche evidente che il tempo universale può essere definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, rendendo altrettanto arbitraria la sua scelta dell'unità di misura.

È necessaria, per generare un campo gravitazionale costante, la presenza di un solo corpo, in quanto la mutua attrazione gravitazionale tra più corpi genera un moto, incompatibile con l'ipotesi di campo costante.

Se il corpo che crea il campo è immobile, tale campo è detto statico, poiché tutte le componenti $g_{0\alpha}$ del tensore metrico sono nulle e le due direzioni del tempo sono equivalenti.

La condizione di immobilità del corpo è sufficiente, ma non necessaria per la costanza del campo. Di fatto sono tali anche i campi generati da un corpo a simmetria assiale che ruoti

uniformemente attorno al proprio asse di simmetria. In tal caso, però, i due sensi del tempo non sono più equivalenti, in quanto, invertendo il tempo, cambia anche il segno della velocità angolare di rotazione del corpo. Tale proprietà è caratteristica dei campi stazionari.

Il significato del tempo universale in un campo gravitazionale costante è che l'intervallo di tale tempo tra due eventi in un punto coincide con quello tra qualsiasi altri due eventi in ogni altro punto dello spazio, rispettivamente simultanei con i primi due eventi. Detto ciò, è possibile integrare analiticamente l'espressione del tempo proprio in funzione del tempo universale:

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} x^0$$

In un campo gravitazionale debole si è visto che

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Nel limite di campo debole e velocità piccole, si ha

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) x^0$$

Quindi il tempo proprio trascorre più lentamente quanto più è piccolo il potenziale gravitazionale nel punto dello spazio, ovvero quanto più è grande il suo valore assoluto (il potenziale in questione è negativo).

Tensore di curvatura

Ricordiamo che, se $x^\mu = x^\mu(s)$ è l'equazione parametrica di una curva (s è la lunghezza dell'arco misurata a partire da un punto dato), allora $u^\mu = dx^\mu/ds$ è il vettore unitario, tangente alla curva. Se la curva considerata è una geodetica, allora lungo tale curva si ha

$$Du^\mu = 0$$

È fondamentale intuire che, in uno spazio curvo, il trasporto parallelo da un punto ad un altro porta a risultati differenti se viene effettuato lungo percorsi differenti. In particolare, trasportando il vettore parallelamente a sé stesso lungo un contorno chiuso, il vettore finale non coincide con quello iniziale. Per spiegare tale circostanza, consideriamo la figura 8.

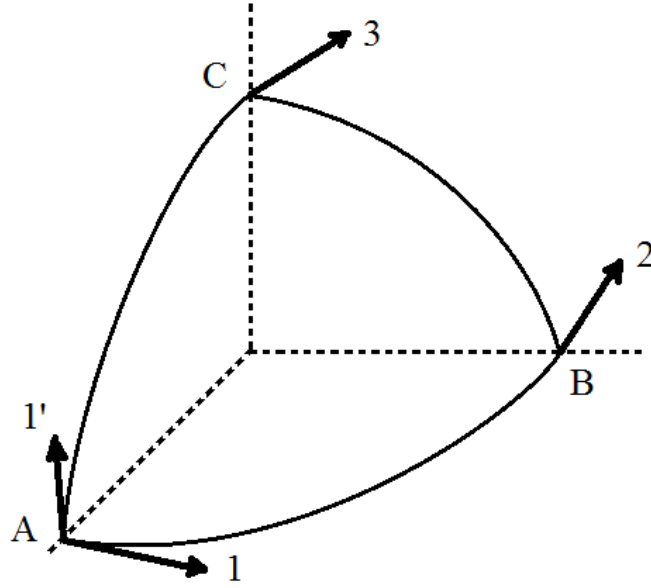


Figura 8 – Il trasporto parallelo nello spazio curvo.

In essa è rappresentata uno spazio curvo bidimensionale, ovvero una qualsiasi superficie curva. Tale superficie è delimitata dalle 3 linee geodetiche. Trasportiamo parallelamente il vettore 1 lungo il contorno formato da queste curve. Dopo il trasporto lungo la curva AB, il vettore 1, mantenendo sempre costante l'angolo rispetto alla curva stessa, diventa 2 in B. Allo stesso modo trasportiamo il vettore 2 da B a C, trasformandosi un 3. Infine lo stesso da C ritornando al punto di partenza A, diventando il vettore 1', non coincidente col vettore 1. Stabiliamo, ora, la formula che determini la variazione di un vettore nel suo trasporto parallelo lungo una curva infinitesima chiusa. Tale variazione può esprimersi come

$$\Delta A_\mu = \oint \delta A_\mu$$

L'integrale è ovviamente preso su tutta la curva data. Sostituendo, si ha

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu \Rightarrow \Delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu$$

Il vettore A_σ scritto sotto il segno di integrazione varia lungo il cammino di integrazione.

Ricordiamo il teorema di Stokes generalizzato, secondo cui

$$\oint A_\mu dx^\mu = \int \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} df^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) df^{\mu\nu}$$

Tenendo presente che la superficie delimitata dalla linea chiusa Δf è considerata una grandezza infinitesima, applicando il teorema di Stokes generalizzato, otteniamo

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial (\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma A_\sigma)}{\partial x^\nu} \right] \Delta f^{\lambda\nu} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} A_{\sigma} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} A_{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right] \Delta f^{\lambda\nu}$$

Per semplificare tale scrittura, si può fare un'approssimazione. In particolare, si può considerare che le componenti del vettore A_{σ} nei punti interni al contorno infinitesimo siano determinate unicamente dai loro valori sul contorno infinitesimo. Ciò vuol dire considerare solo termini del primo ordine (ipotesi di linearità), per cui vale la relazione

$$\frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\sigma\lambda}^{\alpha} A_{\alpha}$$

Sostituendo nelle relazioni precedenti, si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta A_{\mu} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} A_{\sigma} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} A_{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\alpha} A_{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} A_{\alpha} \right] \Delta f^{\lambda\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} \right] A_{\sigma} \Delta f^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\lambda\nu}^{\sigma} A_{\sigma} \Delta f^{\lambda\nu} \end{aligned}$$

$R_{\mu\lambda\nu}^{\sigma}$ è un tensore del quarto ordine, noto come tensore di curvatura o tensore di Riemann.

È evidente che nello spazio quadridimensionale piatto il tensore di curvatura è nullo. Infatti, in tale circostanza, è possibile scegliere un sistema di coordinate dove $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ è nullo ovunque e, di conseguenza, anche il tensore di Riemann è identicamente nullo, e viceversa.