

Complemento

Rappresentazione esponenziale
delle grandezze complesse

Introduzione.

- Lo sviluppo in serie di Mc Laurin della funzione esponenziale e^x attorno a $x=0$ è:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Lo sviluppo in serie di Mc Laurin delle funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ attorno a $x=0$ è:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Sviluppo in serie a termini complessi

Le serie a segni alternati precedenti ci suggeriscono un trucco per rappresentare le funzioni seno e coseno.

Ricordando che: $\sqrt{-1} = i \Rightarrow i^{2n} = (-1)^n; i^{2n+1} = (-1)^n i$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (i)^{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (i)^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$|e^{ix}|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Che ci porta a scrivere anche:

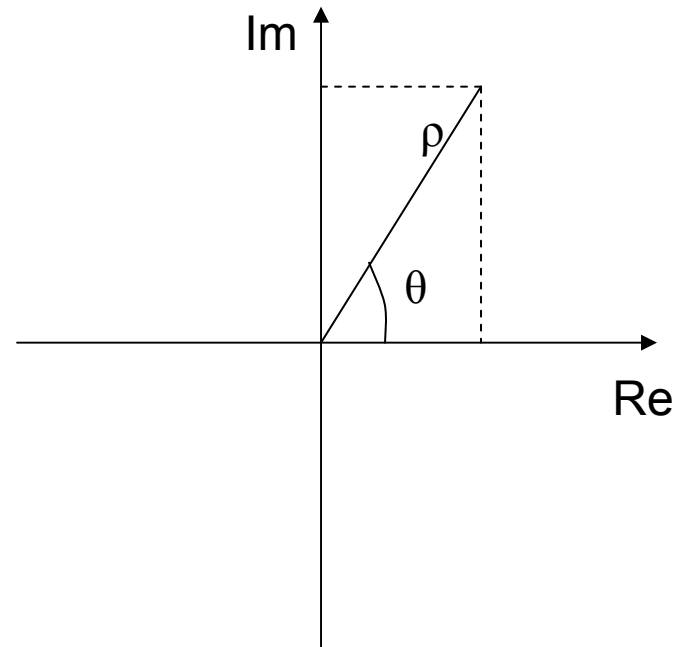
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Rappresentazione vettoriale

Se consideriamo una qualsiasi
grandezza complessa
esprimibile come:

$$A = \rho e^{(i\theta)}$$

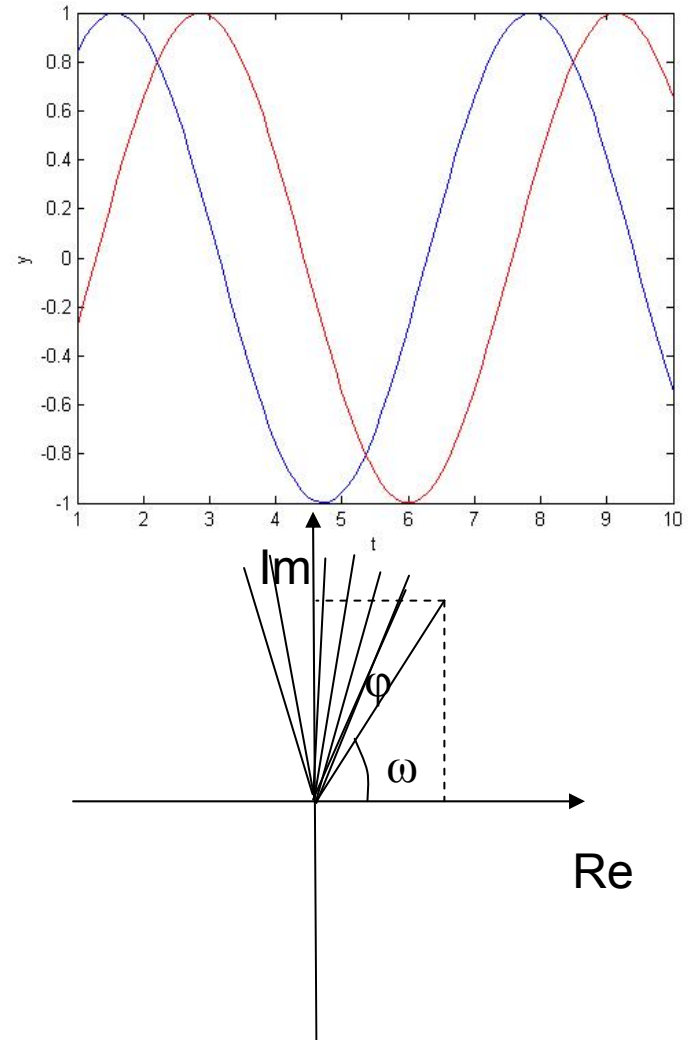
Ricordando gli sviluppi
precedenti, possiamo
considerare un piano
cartesiano con un asse
reale e l'altro immaginario e
rappresentare la grandezza
A in forma polare



Sfasamenti

- Data una grandezza $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$, il parametro ω prende il nome di *pulsazione*, quello φ è la *fase*, A è l'ampiezza.
- Due grandezze con uguale pulsazione ω possono avere fasi diverse; per es.

$$y = \sin(t) \text{ e } y = \sin(t + \varphi)$$



Derivata e integrale di funzioni periodiche

Considerato quanto detto, è invalso l'uso di rappresentare le funzioni periodiche come esponenziali complessi. Questo rende molto facile la derivazione e l'integrazione:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (Ae^{i\omega t}) = (i\omega)^n Ae^{i\omega t}$$
$$\int (Ae^{i\omega t}) dt = \frac{1}{i\omega} Ae^{i\omega t}$$

Ricordando la rappresentazione polare, possiamo anche dire che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$; ...e dunque la derivazione introduce uno sfasamento di $\pi/2$ e l'integrazione di $-\pi/2$