

Dalla legge di Coulomb:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' \quad (1)$$

la funzione integranda si può vedere come il gradiente dello scalare $-\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$. Infatti $\frac{d}{dx^i} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$

$$= \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'}} \right) = \frac{1}{2(x^2 + x'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}')^{3/2}} = \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\Rightarrow E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \int \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = -\vec{\nabla} \Phi \quad \text{potenziale scalare}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2)$$

e di conseguenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi) = 0$ ~~non si può~~
 $\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Per una superficie possiamo calcolare il flusso con la legge di Gauss, il teorema di Gauss ci dice che il flusso attraverso una superficie è uguale alla carica racchiusa.

$$\int \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\vec{E}_0} \sigma \, d\vec{A} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \sigma / \epsilon_0$$

Skizze $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2$
 $d\vec{l}_1 = -d\vec{l}_2$

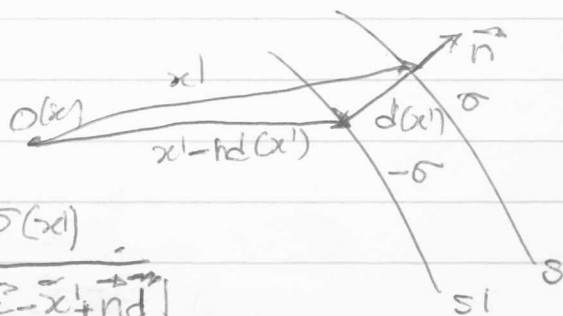
$$\Rightarrow E_2^{\text{long}} = E_1^{\text{long}}$$

$$E_1^{\text{norm}} = E_2^{\text{norm}} + \frac{Q}{C_0}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Strom und Dipole

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S \frac{\sigma(x')}{|\vec{r} - \vec{x}'|} ds + \int_{S'} \frac{-\sigma(x')}{|\vec{r} - \vec{x}' + n\vec{d}|} \right]$$



$$\text{ma } \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}' + \vec{n}d|} \approx \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{n}d \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{(\vec{x}+\vec{a})} = \frac{1}{\vec{x}} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\vec{x}} \right)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} dS - \int \sigma(\vec{x}') \left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + d\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \right] dS'$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\vec{x}') d \cdot \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) dS'$$

$$\sigma(\vec{x}')d = M(\vec{x}') \text{ momento di dipolo}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) \approx \int_S M(\vec{x}') \vec{n} \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) dS'$$

sotto il vettore momento di dipolo

$$\vec{p} = M \vec{n} dS' \Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Eq^{ne} di Poisson:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ -\nabla \Phi = \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla^2 \Phi$$

caso dissipativo dell'eq^{ne} di Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$

Energia del campo.

Il potenziale di n-1 cariche e'

$$\Phi(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \text{l'energia potenziale totale e' } \sum_i \Phi q_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \rightarrow \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x d^3x'$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int \rho(x) \Phi(x) d^3x$$

Usiamo l'eq^{ue} di Poisson $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi \nabla^2 \Phi d^3x \quad \text{integrando per parti}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad u = \Phi \quad dv = \nabla(\nabla \Phi) =$$

$$\Rightarrow \int \Phi \nabla(\nabla \Phi) d^3x = \Phi \nabla \Phi - \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi d^3x$$

ma Φ è nulla all' $\infty \Rightarrow \oint W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\nabla \Phi|^2 d^3x = \int \frac{\epsilon_0 |E|^2}{2} d^3x$

$$\Rightarrow \text{la densità di Energia è } w = \frac{\epsilon_0}{2} |E|^2$$

Dielettrici

Per un sistema di cariche ($r = |\vec{x} - \vec{x}'|$)

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots \right] \quad (1)$$

da $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(x) \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}) - \vec{p}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right]$$

In un mezzo materiale visto dal punto di vista macroscopico valgono le stesse leggi che nel vuoto con una costante dielettrica differente: per es:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0 \quad \vec{E}_0 = \text{campo nel vuoto}$$

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0} \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E_0 \epsilon_r}$$

Si può pensare che esista un campo microscopico dovuto alla struttura interna del mezzo che genera una densità di ^{cariche} polarizzazione $\sigma' \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma - \sigma')$
 $\Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_r} = \sigma - \sigma' \Rightarrow \sigma' = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \sigma$

Questo mostra che le cariche di polarizzazione sono proporzionali alle cariche che generano il campo.

Anche, possiamo costruire il campo ^(pt.) macroscopico come sovrapposizione di ~~vali~~ potenziali da volumi piccoli uno dopo l'altro $\Delta V \Rightarrow q = \rho(x') \Delta V : M = \vec{p} \Delta V$

Dalle (1)

$$\Delta \Phi(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Delta V + \frac{\vec{P}(x) \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \Delta V \right]$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(x) \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right] d^3x'$$

Integrando per parti il II termine:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho(x') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(x')] d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \text{~~7/7/7/7/7~~$$

Siccome $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}] \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

Definiamo il vettore induzione elettrica (o spostamento elettrico)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho} \Rightarrow \text{in assenza di cariche } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

Assumendo che la risposta ^{al campo} del mezzo sia lineare e che il mezzo sia isotropo: $\Rightarrow \vec{P} \parallel \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$
 $E = \frac{1}{\epsilon_0} (\frac{D}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0}) \Rightarrow \chi = \text{susceptibilità dielettrica}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ dove } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi)$$

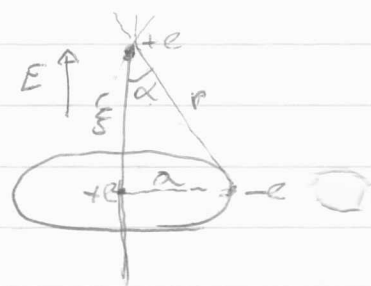
Definire $\epsilon_r = (1 + \chi)$. Se il mezzo non è omogeneo la densità di carica di volume $\rho \neq 0 \Rightarrow \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} =$

Polarizzazione per deformazione

$$= \epsilon_0 \text{div} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \vec{D} = -\vec{D} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$$

Modello classico dell'atomo di Idrogeno sottoposto ad un campo elettrico ortogonale al piano dell'orbita:

L'elettrone e il nucleo vengono spostati in direzioni opposte $\Rightarrow$ si sposta di ξ



$$r = \sqrt{\xi^2 + a^2} \approx a \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2}{a^2} \right) \right) \approx a$$

perché ci sia equilibrio deve essere:

$$eE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a^2} \frac{\xi}{r} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a^2} \frac{\xi}{a}$$

$$\Rightarrow eE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a^3} \xi \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} (e\xi) \vec{p}$$

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}$$

~~Polarizzazione per orientamento~~

Energia elettrostatica nei mezzi dielettrici

Nel vuoto si è visto che $U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) d^3x$

na dielettrica non possiamo più farlo, perché c'è il campo microscopico e l'energia che dobbiamo impiegare per polarizzare il mezzo. Consideriamo un cambiamento di energia δW dovuto ad una variazione delle cariche microscopiche $\delta \rho \Rightarrow$

$$\delta W = \int \delta \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) d^3x$$

in cui Φ è il potenziale dovuto alla carica preesistente.

ma $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \delta \rho = \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D})$

~~$\Phi = -\nabla \cdot \vec{D}$~~ $-\nabla \Phi = \vec{E} \Rightarrow \delta W = \int \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} \cdot \vec{E} d^3x$

int. per parti $\int u dv = uv - \int v du$

$u = \Phi(x) \quad dv = \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} \Rightarrow \Phi \delta \vec{D} - \int \delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \Phi d^3x$

$\Rightarrow \delta W = \int \delta \vec{D} \cdot \vec{E} d^3x \Rightarrow$

$W = \int d^3x \int_0^{\vec{D}} \vec{E} \cdot \delta \vec{D}$ e se il mezzo è lineare $\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \frac{1}{2} \delta(\vec{E} \cdot \vec{D})$
 $W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3x$

Se non è lineare l'energia avrà effetti di isteresi dipendendo da come è variato il campo di induzione elettrica

Polarizzazione per orientamento

L'energia di un dipolo elettrico immerso nel campo $\vec{E}^*$ microscopico è $\vec{p} \cdot \vec{E}^*$

La distribuzione delle energie dei dipoli di un materiale polare è data dalla distribuzione di Boltzmann.

A meno di costanti moltiplicative, il valor medio della polarizzazione rispetto ad $\vec{E}^*$ è dato dal valor medio di $\cos \theta$ tra il campo e i dipoli, in direzione di $\vec{E}$

$P(\theta) = \int \cos \theta f(\cos \theta) d\Omega$

ma $f(\theta) = e^{-\frac{\vec{p} \cdot \vec{E}^*}{kT}} = \exp\left(-\frac{Ep \cos \theta}{kT}\right)$

$\Rightarrow P(\theta) = \frac{\int \cos \theta e^{-\frac{Ep \cos \theta}{kT}} d\Omega}{\int e^{-\frac{Ep \cos \theta}{kT}} d\Omega}$

$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$

$\Rightarrow P(\theta) = \frac{2\pi \int_{-1}^1 x e^{-ax} dx}{2\pi \int_{-1}^1 e^{-ax} dx} = \frac{\frac{1}{a} x e^{-ax} - \frac{1}{a^2} e^{-ax}}{\frac{1}{a} \int_{-1}^1 e^{-ax} dx} = \frac{e^a + e^{-a} - \frac{1}{a}(e^a - e^{-a})}{\frac{1}{a}(e^a - e^{-a})}$
 $a = \frac{Ep}{kT}; x = \cos \theta$

$$P(\theta) = c \log \frac{E_p}{kT} - \frac{kT}{E_p} = L(\alpha) \quad \text{funzione di Langevin}$$

Per valori di $kT \gg E_p$ (praticamente sempre visto che $300K = 0.025 \frac{eV}{e^2}$)
 $L(\alpha) = \frac{\alpha}{3}$

$$\Rightarrow \langle \vec{P} \rangle = \vec{p} L(\alpha) = \frac{p^2 E^*}{3kT} \quad \text{e} \quad \vec{P} = n \langle \vec{P} \rangle = n \alpha E^*$$

~~Dalla derivata che non serve~~

Se un volume V contiene molte molecole, il momento di dipolo totale è $\vec{P} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}$. Il campo dentro la sfera sarà:

$$E_p = \int \vec{E}(x) d^3x = \int E r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

$$\Rightarrow \text{Il campo interno è: } \vec{E}^* = \vec{E}_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

$$\text{ma siccome } \vec{P} = n \alpha E^* \Rightarrow \vec{P} = n \alpha \left(\vec{E}_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{n \alpha E_0}{1 - \frac{n \alpha}{3\epsilon_0}} = E_0 \frac{n \alpha}{3\epsilon_0 - n \alpha} \quad E = E_0 X E$$

$$X = \frac{n \alpha}{1 - \frac{n \alpha}{3}}$$

Passaggio fra due dielettrici

Considerando due dielettrici con costanti dielettriche ϵ_1 & ϵ_2 abbiamo

già visto che siccome $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$\Rightarrow$ la circolazione di E lungo una linea

che passi nei due dielettrici è nulla

ci implica che $E_{T1} = E_{T2}$

Se consideriamo un cilindretto di base dS attraverso



$$P = \epsilon_0 X E = \frac{n \alpha \epsilon_0}{\epsilon_0 - \frac{1}{3} n \alpha} E \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + X)$$

$$= \frac{3 n \alpha \epsilon_0}{3 \epsilon_0 - n \alpha} E \Rightarrow X = \frac{3 n \alpha}{3 \epsilon_0 - n \alpha} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{3 n \alpha}{3 \epsilon_0 - n \alpha} + 1 \right) \epsilon_0$$

$$\epsilon = \frac{3 n \alpha \epsilon_0}{3 \epsilon_0 - n \alpha} + \epsilon_0 = \frac{3 n \alpha}{3 - \frac{n \alpha}{\epsilon_0}} + \epsilon_0 \Rightarrow \Downarrow \epsilon_r = \frac{3 n \alpha}{3 \epsilon_0 - n \alpha} + 1$$

$$\Rightarrow \epsilon_r \left(\frac{\epsilon_r - 1}{3 \epsilon_0 \epsilon_r - 3 \epsilon_0} \right) (3 \epsilon_0 - n \alpha) = 3 n \alpha$$

$$(\epsilon_r - 1) 3 \epsilon_0 + n \alpha - \epsilon_r n \alpha = 3 n \alpha$$

$$(\epsilon_r - 1) 3 \epsilon_0 = (\epsilon_r + 2) n \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{n \alpha}{3 \epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

INFN - Sezione di Pisa

Largo Bruno Pontecorvo, 3 - 56127 Pisa - Italy - Tel. 050 2214000 - Fax 050 2214317 - www.pi.infn.it

le superficie di separazione, siccome il volume del cilindretto non
contiene cariche, allora lì $\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $= \int \vec{D}_1 \cdot \vec{n} dS_1 - \int \vec{D}_2 \cdot \vec{n} dS_2 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$

Due vettori $D = \epsilon E \Rightarrow \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$ dunque, il rapporto fra le componenti trasversale e normale di E dipende dalla tangente dell'angolo del campo con la normale

$$\frac{E_{t1}}{E_{n1}} = \tan \theta_1 \quad \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = \tan \theta_2 \quad \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{E_1}{E_2}$$

$\Rightarrow$ potremmo ricavare una relazione fra le direzioni
dei campi nei due mezzi e le relative costanti dielettriche;

$$\frac{t_p \partial_1}{t_p \partial_2} = \frac{E_{t1}}{E_{n1}} / \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = \frac{E_{t1}}{E_{t2}} \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{E_1}{E_2}$$

Elementi di Teoria della Conduttività
Teoria di Drude.

La conduzione è vista dal punto di vista microscopico come un fenomeno di trasporto di cariche in un campo elettrico.

Il numero di portatori n per unità di volume. Ogni carica ha una probabilità $\frac{1}{n}$ di subire una collisione con un'altra carica ~~una~~ nell'unità di tempo.

La forza subita da una carica q nel campo E è

$$F = -eE = m_e \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Surge la vitesse $\rightarrow$

$$\vec{v} = - \frac{dE}{dt}$$

In media fra due urti successivi, la velocità è

$$\bar{v} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v(t) dt = -\frac{1}{\tau} \frac{eE\tau^2}{m} = -\frac{1}{2} \frac{eE\tau}{m}$$

Se definiamo la densità di corrente J come la densità di carica ρ volte la velocità media $\Rightarrow$

$$\vec{j} = + \frac{ne^2 \tau}{2m} \vec{E}$$

$$N = RI \Rightarrow \frac{dV}{dz} = R \frac{dI}{dz} = R I \frac{dI}{dz}$$

become $I = \frac{dQ}{dt} = - \int \nabla \cdot \vec{n} ds = \oint (J) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = J \Rightarrow E = RJ S$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dz} = \frac{1}{\sigma} \frac{dI}{ds} = E = \frac{1}{\sigma} J \Rightarrow \sigma = \frac{ne\tau}{m}$$



~~Campana di Paschen~~

Passaggio di corrente nei gas $\Rightarrow$ gas: isolante ma
gas ionizzati conduce: Caratteristiche statiche.

Due elettrodi immersi nel gas $V = f(i)$, $f(i)$ dipende dalla
forma degli elettrodi, dimensione e distanza. Comunque si possono
identificare delle fasi tipiche:

$$V = f - Ri$$

Se il gas avesse un comportamento
metallico $\Rightarrow V = (R_g + R_g) i$ legge di Ohm

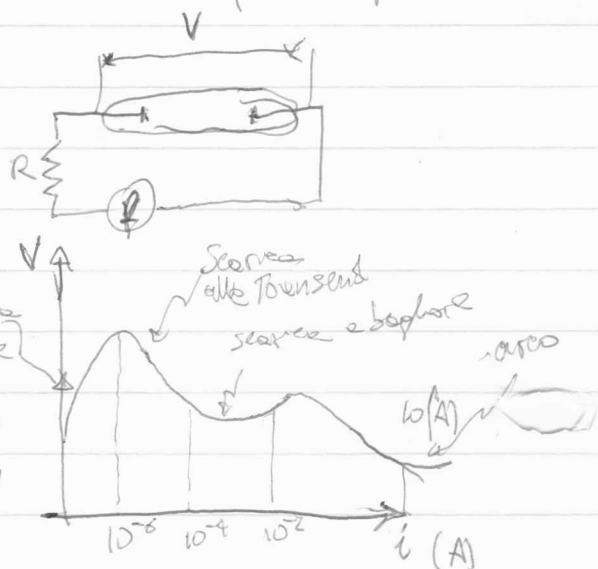
Invece:

Scarica oscura: gli ioni (se già presenti)
impresero ma non riescono a produrre nuovi ioni

Scarica alle Townsend: gli ioni primari
ne producono dei secondari per urto.

Scarica a bagliore: Il campo interno spaziale è alterato dalla
carica locale

Arco: Il catodo comincia ad emettere ioni per emissione termionica



Abbiamo visto che $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Per una corrente continua,
dire che la carica totale in un volume del conduttore rimane
costante porta all'eq^{te} di continuità
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

(Se si può ricavare anche da $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$?) In un conduttore omogeneo
 $\sigma = \text{cost.}$ e $\vec{E} = \vec{E}_0$ $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \sigma \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
 $\Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0$. All'interfaccia fra due conduttori deve essere
continua la componente normale di $\vec{j}$ e la componente tangente
le del campo $\Rightarrow J_{n1} = J_{n2}$; $\frac{J_{t1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t2}}{\sigma_2}$

Lavoro meccanico della corrente elettrica in presenza di un campo

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \vec{E} & d\mathcal{L} &= q \vec{E} \cdot \vec{v} dt = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV dt = \\ &= \vec{j} \cdot \vec{E} dV dt & \Rightarrow & \text{la potenza per unità di volume è} \\ &W &= & \sigma E^2 & \text{Legge di Joule} \\ &= \vec{j}^2 / \sigma & & \end{aligned}$$

In un metallo non uniformemente riscaldato c'è corrente anche in assenza di campo:

$$E = J/\sigma + \alpha \nabla T \Leftrightarrow \vec{J} = \sigma (\vec{E} - \alpha \nabla T)$$

Il flusso di energia $\vec{Q}$ ha una parte che dipende dal potenziale Φ perché ogni elettrone porta un'energia Φe . La differenza

$Q - \Phi J$ non dipende da Φ e si può scrivere come una funzione lineare del campo e ∇T : $Q - \Phi J = \beta E - \gamma \nabla T$

Si può mostrare che $\beta = \sigma \alpha T$ e γ è legata alla conduttività termica K delle $K = \gamma - T \alpha^2 \sigma$

$$\Rightarrow \vec{Q} = (\Phi + \alpha T) \vec{J} - K \nabla T$$

Fenomeni di diffusione

In una soluzione elettrolitica a temperatura costante

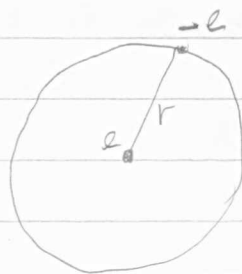
se ρ è la densità di cariche ioniche, il potenziale elettrico lo possiamo definire a partire dal potenziale termodinamico

Φ come: $\Phi = \left(\frac{\partial G}{\partial \rho} \right)_c$ ove con c si è indicata la concentrazione. Se la soluzione è elettricamente neutra, dopo la derivazione si mette $\rho = 0$. Quando è presente un gradiente di potenziale chimico $\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial m} \right)_T$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} - \beta \nabla \mu)$$

Modello "a molla"

Un elettrone legato ad un nucleo da una forza con "costante elastica" K , sotto l'effetto di un campo elettrico E_{ec} si sposterà di x . All'equilibrio:



$$-e E_{ec} = Kx \equiv m\omega_0^2 x \quad \text{def } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Sarà $F = m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = -e E_0 e^{-i\omega t}$

Se cerchiamo soluzioni del tipo $x = x_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} \Rightarrow m(-\omega^2 + \omega_0^2)x_0 = -e E_0$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Se il ~~nucleo~~ ha carica atomica $-Ze$

$\Rightarrow$ il momento di dipolo indotto dal campo

$$p = Ze x_0 = \frac{Ze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Abbiamo visto che per il modello "a molle"

$$r_0 = - \frac{e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

il momento di dipolo indotto è

$$p = -Ze r = p_0 e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{Ze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \quad \text{determina la polarizzabilità}$$

atomo $\alpha^{at} = \frac{Ze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{Ze^2}{m\omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right]}$

se $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \alpha^{at} \approx \frac{Ze^2}{m\omega_0^2}$

ω_0 è la frequenza di vibrazione della nube elettronica ed è dell'ordine di $\frac{E_{FV}}{\hbar}$ essendo E_{FV} dell'ordine della decina di eV. Siccome le polarizzabilità misurate sono dell'ordine di $10^{-24} \text{ cm}^3 \Rightarrow$ la dipendenza in frequenza non entra in gioco quasi mai:

$$10^{-24} = \frac{Ze^2}{m\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{Ze^2}{m} \times 10^{24}$$

$$\begin{aligned} e/m &= 1.7 \cdot 10^{11} \\ e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ &= 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ esu} \end{aligned} \Rightarrow \frac{e^2}{m} = 1.7 \cdot 10^{11} \times 1.6 \cdot 10^{-19} = 10^{12}$$

$$\omega_0 \approx 10^{13}$$

Effetto in frequenza della Polarizzabilità
per deformazione

Cristalli ionici, consideriamo ~~il~~ dipolo indotto dallo spostamento degli ioni carichi trascurando la polarizzazione atomica
 Consideriamo solo due ioni per celle primitive, di cariche $\pm e$

$$p = ew = e(u^+ - u^-)$$

dove $u^\pm$ è lo spostamento del rispettivo ione dall'equilibrio

$$M_+ \ddot{u}^+ = -k(u^+ - u^-) + eE^{loc}$$

$$M_- \ddot{u}^- = -k(u^- - u^+) - eE^{loc}$$

sottraendo $M \ddot{w} = -\frac{k}{M} w + \frac{e}{M} E^{loc}$

ove $\frac{1}{M} = \frac{1}{M_+} + \frac{1}{M_-}$

e $E^{loc} = E_0 e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow w = w_0 e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow -\omega^2 w_0 = -\left(\frac{k}{M}\right) w_0 + \frac{e}{M} E^{loc}$

$\Rightarrow w_0 (\bar{\omega}^2 - \omega^2) = \frac{e}{M} E^{loc}$

$w_0 = \frac{e E_0 / M}{\bar{\omega}^2 - \omega^2}$

di conseguenza $\alpha^{ds} = \frac{p_0}{E_0} = \frac{e w_0}{E_0} = \frac{e^2}{M(\bar{\omega}^2 - \omega^2)}$

Analogo a quelle atomiche ma adesso $\bar{\omega}$ è quella delle oscillazioni del reticolo cristallino $\Rightarrow \hbar \bar{\omega} \approx \hbar \omega_{Debye} \approx 10^{-1} \div 10^{-2} \text{ eV}$
 $\Rightarrow 10^2 \div 10^3$ volte più piccola di quelle atomiche $\Rightarrow$

la polarizzabilità per deformazione è significativamente dip da ω nell'infrarosso e oltre. Inoltre, siccome $M \approx 10^4 m_e$, il termine statico può essere dello stesso ordine di grandezza di quello atomico e quindi l'aver trascurato la polarizzabilità atomica non è giustificabile colore essere corretto. Per esempio si può dire che i contributi alla polarizzabilità sono additivi:

$$\alpha = (\alpha^+ + \alpha^-) + \frac{e^2}{M(\bar{\omega}^2 - \omega^2)}$$

con $\alpha^\pm$ la polarizzabilità atomica degli ioni $\pm$

Insieme con la relazione di Clausius-Mossotti

$$\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon_r(\omega) - 1}{\epsilon_r(\omega) + 2} = \frac{n}{3\epsilon_0} \left[\alpha^+ + \alpha^- + \frac{e^2}{M(\bar{\omega}^2 - \omega^2)} \right]$$

Il termine statico della costante dielettrica relativa si ha

per $\omega \ll \bar{\omega} \Rightarrow \frac{\epsilon_r(0) - 1}{\epsilon_r(0) + 2} = \frac{n}{3\epsilon_0} \left(\alpha^+ + \alpha^- + \frac{e^2}{M\bar{\omega}^2} \right)$

mentre per $\omega \gg \bar{\omega}$

$\bar{\omega} \ll \omega \ll \omega_0$

$$\frac{\epsilon_r(\omega) - 1}{\epsilon_r(\omega) + 2} = \frac{n}{3\epsilon_0} (\alpha^+ + \alpha^-)$$

In funzione di $\epsilon(\infty)$ & $\epsilon(0)$ possiamo scrivere

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + \frac{\epsilon(\infty) - \epsilon(0)}{\frac{\omega^2}{\omega_T^2} - 1}$$

$$\text{con } \omega_T^2 = \bar{\omega}^2 \left(1 - \frac{\epsilon(0) - \epsilon(\infty)}{\epsilon(0) + 2} \right)$$

gli sfarzi sono proporzionali al tempo e viceversa

Consideriamo un cristallo con passo reticolare a . Il campo microscopico $E(r)$ è definito dalla media del campo microscopico E^{mic} su una regione attorno ad r di raggio $r_0 \gg a$

La media si effettua tramite una funzione peso $f(r)$ tale che $f(r) \geq 0$, $f(r) = 0$ per $r > r_0$, $\int f(r) dr = 1$, $f(-r) = f(r)$

$$\Rightarrow E(r) = \int E^{mic}(r-r') f(r') dr'$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r) = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{mic}(r-r') f(r') dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho^{mic}(r-r') dr'$$

discutiamo il caso in cui le cariche microscopiche si può scrivere come il contributo degli ioni in posizione r_j

$$\rho^{mic}(r) = \sum_j q_j \delta(r-r_j)$$

funzione nei cristalli ionici o molecolari ma non in quelli covalenti dove la distribuzione di carica è delocalizzata.

Se gli ioni sono spostati dalla loro posizione d'equilibrio r_j^0 e sono deformati rispetto alle loro forme d'eq. ρ_j^0

$$\Rightarrow \rho_j^{mic}(r) = \sum_j \rho_j^0(r-r_j)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \int dr' \rho_j^0(r-r_j-r') f(r')$$

chiamando $r_j = r_j^0 + \Delta_j$ e $\bar{r}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \int dr' \rho_j^0(r-(r_j^0+\Delta_j)-r') f(r')$$

setto $-\bar{r}$ l'argomento di $\rho \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\bar{r}) f(r-r_j^0-(\bar{r}+\Delta_j)) d\bar{r}$$

sviluppo f varie potenze per distanze dell'ordine di $a \Rightarrow$ possiamo fare uno sviluppo in $\frac{a}{r_0} \Rightarrow f(r-r_j^0-(\bar{r}+\Delta_j)) = \sum_k \frac{1}{k!} [-(\bar{r}+\Delta_j) \cdot \nabla]^k f(r-r_j^0)$
 dunque, al primo ordine:

$$\nabla \cdot E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j q_j f(r-r_j^0) - \sum_j (p_j + q_j \Delta_j) \cdot \nabla f(r-r_j^0)$$

dove $q_j = \int \rho_j(\bar{r}) d\bar{r}$ e $p_j = \int \bar{r} \rho_j(\bar{r}) d\bar{r}$

Nel caso di cristallo monoatomico, le cariche di ogniione
dove essere $\phi \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_j p_j \cdot \nabla f(r-r_j^0)$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_j (p_j \cdot \nabla f(r-r_j^0)) = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Il risultato rimane valido anche per cristalli ionici con una
base. Detto R il vettore posizione del cristallo e d
il vettore della base:

$$P(R) = \sum_d [q(d)u(R,d) + p(R,d)]$$

infatti $p_j \rightarrow p(R,d)$

$$q_j \Rightarrow q(d) \quad r_j^0 \rightarrow R+d, \quad \Delta_j \rightarrow u(R,d)$$

$$d \ll R \Rightarrow f(r-R-d) \approx f(r-R) - d \cdot \nabla f(r-R)$$

otteniamo quanto voluto se $\sum_d q(d) = 0$ e trascuriamo
 $\sum_d d q(d)$ che è il dipolo delle celle in condizioni di equilibrio
cosa che non è lecito nel caso dei cristalli piezoelettrici
(piezoelettricità).

Abbiamo visto che per poter scrivere la
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

dobbiamo trascurare il momento di dipolo di equilibrio delle
celle primitive $p = \sum_d d q(d) f(r-R)$

e quindi un termine $\Delta P = \frac{1}{\epsilon_0} p$ nelle densità di polarizzazione.

Siccome stiamo considerando le divergenze, una costante
nelle addittive ΔP non conta, almeno per un reticolo
infinito. Ma i cristalli sono finiti, $\Rightarrow$ sulla superficie

$$\Delta P \text{ nelle } r \text{ o } \phi \text{ istantaneamente } \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \Delta P \rightarrow \infty$$

Inoltre, per cristalli finiti, non è più neanche vero che

$$\sum_d q(d) = 0$$

$$p' = P \cdot n(d)$$

Infatti, mentre questo è vero per le celle interne, per quelle superficiali, che possono essere solo parzialmente riempite, non è più vero
 $\Rightarrow$ Le celle superficiali contribuiscono con un termine aggiuntivo che rappresenta la carica superficiale ρ_s che si aggiunge a quelle dovute ai dipoli $\vec{p} \cdot \vec{n}$.

Le scelte delle celle cambierebbe se $\vec{P} \cdot \vec{n}$ se ρ_s ma in modo tale che $P_n + \rho_s$ non cambi.

La scelta "naturale" delle celle è quella per cui vale
la $\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{p}$ senza i termini aggiuntivi $\Rightarrow$ una cella in cui ϵ_0 sia mantenuto lo neutralizza anche alla superficie.

I cristalli le cui celle primitive naturali hanno un momento di dipolo $\vec{p}_0$ sono detti piezoelettrici e all'equilibrio hanno una dens. di polarizzazione $\vec{P} = \vec{p}_0$ anche in assenza di campo. Questo implica delle restrizioni sulle simmetrie del cristallo. Infatti un'operazione di simmetria deve conservare $\vec{P} \Rightarrow$ l'unico asse di rotazione è quello parallelo a $\vec{P}$ e non ci possono essere piani di riflessione ortogonali a questo asse.

Transizioni di fase strutturali

Non è raro che alcuni cristalli possano trasformare la propria struttura cristallina sotto l'effetto della temperatura o della pressione.

Supponiamo ci sia uno stato ~~di minima energia~~ ^{stato A} ed uno stato B con uno spettro delle oscillazioni proprie (fononi) meno eccitato ad una determinata temperatura $\Rightarrow$ con entropia ^{minore} ~~maggiore~~. All'aumentare della temperatura ~~gli~~ i modi di B sono più eccitati di quelli di A [gli stati dei fononi hanno una maggiore occupazione]. Siccome l'entropia cresce con $\ln N$, ad un certo punto $S(B) > S(A)$.

Lo stato stabile è identificato dal minimo dell'energia libera

$$F = U - TS \Rightarrow \text{Transizione da } A \rightarrow B$$

da ad una temperatura critica T_c tale che $F_A(T_c) = F_B(T_c)$ (Temperature di Curie) Analogamente può avvenire sotto l'effetto della pressione.

Ferroelettrici: dipolo anche a campo nullo si può invertire con campi forti

Catastrofe di polarizzazione

$$\frac{\epsilon_r + 1}{\epsilon_r - 2} = \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{n\alpha}{\epsilon_0 - \frac{n\alpha}{3}} + 1 = \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{n\alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{1}{3} \frac{n\alpha}{\epsilon_0}} \quad (1)$$

La costante dielettrica relativa tende

all'infinito per $\frac{n\alpha}{\epsilon_0} = 3 \Rightarrow$ catastrofe di polarizzazione

Il valore di ϵ_r nella (1) è sensibile a piccole variazioni di $\frac{n\alpha}{\epsilon_0}$ da 3, suo valore critico. Se scriviamo che

$$\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = 1 - 3s \quad \text{con } s \ll 1$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{1 + 2 - 6s}{1 - 1 + 3s} = \frac{3 - 6s}{3s} = \frac{1}{s} - 2 \approx \frac{1}{s}$$

Supponiamo che vicino alla temperatura critica s vari linearmente con $T \Rightarrow s \propto (T - T_c)$, con ξ costante, per esempio per espansione termica ξ del cristallo

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{\xi}{T - T_c}$$

$\Rightarrow$ vicino alla temperatura critica la costante dielettrica diverge.