

SUNTO DI RELATIVITA' RISTRETTA

Appunti per i corsi di Fisica 1 e 2
Corso di Laurea in Matematica

Massimo Bassan

Queste **non sono dispense** di Relatività Ristretta: è solo una raccolta di formule per cercare di unificare la notazione, viste le tante diverse convenzioni che si incontrano sui testi. In molti testi potete trovare una trattazione completa ed esauriente dell'argomento. Cito a titolo di esempio, fra i tanti, quelli a me più noti:

- *ABP*: E. Amaldi, R. Bizzarri, G. Pizzella: Fisica Generale 2 cap.10- Ed Zanichelli - il cui filo logico ho seguito in queste note- purtroppo non viene più stampato, ma si trova per esempio in biblioteca.
- *LL*: L. Landau, E. Lifshitz: Teoria dei Campi - ed Editori Riuniti - un testo classico di riferimento per relatività (ristretta ed anche generale) ed elettromagnetismo; ma la notazione differisce da quella adottata qui; testo difficile.
- *AB*: A. Bettini: Meccanica e Termodinamica - ed. DeciBel - , usa purtroppo l'asse temporale immaginario
- *G. Giuliani, I. Bonizzoli*: lineamenti di elettromagnetismo ed. La Goliardica Pavese
- *G. Caricato, G. Duse* : Fondamenti di Relatività Ristretta ed. CompoMat -testo uscito nel 2008

NOTAZIONE: Riassumiamo qui le notazioni adottate in queste note (tra parentesi la notazione alternativa NON adottata):

- I quadrivettori hanno la componente temporale indicata dall'indice 0 (e non 4), quelle spaziali da {1,2,3}.

- La metrica di Minkowski è $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$ (e non $\text{diag}[-1, 1, 1, 1]$ nè $\text{diag}[1, 1, 1, -1]$).

- Gli indici latini [i,j,k...] assumono i valori {1,2,3}, mentre quelli greci $[\mu, \nu, \lambda...] = \{0, 1, 2, 3\}$ (e non viceversa) - ma esiste una versione precedente di questa nota con convenzione inversa (mi adeguavo al testo di Landau- E. Lifshitz).

- I quadrivettori mischiano grandezze fisiche diverse, con delle potenze di c per pareggiare le dimensioni fisiche: si pone il problema di chi viene normalizzato a chi ! Per esempio:

- La quadrivelocità ha le dimensioni fisiche di [m/s] (e non adimensionale)

- la quadricorrente ha dimensioni di $[J] = [A/m^2]$ (e non di $[C/m^3]$), per cui $j^0 = \rho \cdot c$; e il quadripotenziale di $[A] = [V \cdot s/m]$ (e non di $[V]$) per cui $A^0 = V/c$.

Esiste in letteratura una giungla di notazioni diverse, con ogni possibile combinazione delle opzioni sopra indicate.

1 Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo due sistemi di riferimento $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$, in moto relativo con velocità $\vec{u}$ lungo l'asse $\hat{z}$. Le trasformazioni di Galileo (GT) consentono di esprimere le coordinate di un vettore posizione $\vec{r} = \{x, y, z\}$, note in $\mathbb{R}$, anche in $\mathbb{R}'$:

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \\z' &= z - ut\end{aligned}$$

a queste aggiungiamo, "a posteriori", $t' = t$, ossia l'invarianza della misura del tempo da un riferimento all'altro (tempo assoluto). Nel seguito useremo la notazione $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Derivando queste equazioni rispetto al tempo una volta, si ottiene la legge di trasformazione delle velocità :

$$v'_x = v_x \tag{1}$$

$$v'_y = v_y \tag{2}$$

$$v'_z = v_z - u \tag{3}$$

e derivando una seconda volta, la legge di trasformazione delle accelerazioni:

$$a'_x = a_x; \quad a'_y = a_y; \quad a'_z = a_z \tag{4}$$

ossia $\vec{a}' = \vec{a}$ che mostra, per esempio, come il secondo principio della dinamica (la legge di Newton) sia invariante per GT

L'equazione 3 è chiaramente incompatibile con il requisito di costanza della velocità della luce ($c' = c$) emerso dalle osservazioni interferometriche di Michelson- Morley (1891) e dalla formulazione delle equazioni di Maxwell (1873). Per risolvere questa contraddizione, J.Larmor (1897) e H.A. Lorentz (1904) proposero le seguenti modifiche alle equazioni di trasformazione, che oggi vanno sotto il nome di Trasformazioni di Lorentz (LT)

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \\z' &= \frac{z - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\t' &= \frac{t - uz/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Notate in particolare la quarta equazione: $t' \neq t$: la fine del tempo assoluto: il tempo diventa una coordinata che assume valori diversi nei diversi riferimenti. Queste equazioni descrivono l'unico sistema di trasformazioni di coordinate che:

- sia lineare in x, y, z, t
- garantisca che tutte le leggi della meccanica (e, vedremo poi, dell'elettromagnetismo) siano invarianti sotto trasformazione, ossia siano espresse da equazioni identiche in ogni riferimento inerziale
- verifichi il requisito $c = c'$ di invarianza della velocità della luce
- si riduca alle trasformazioni GT per $|u| \ll c$

Un po' di cosmetica- Definiamo:

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \leq 1 \quad \gamma(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \geq 1 \quad (5)$$

Si noti che $LT \rightarrow GT$ quando $\gamma(u) \rightarrow 1$ e che $\gamma(u) \simeq 1$ per $\beta < 0.2$, ossia per $u < 6 \cdot 10^7 m/s$. Non desta perciò meraviglia che ai tempi di Galileo (ed anche molto dopo), quando queste velocità erano irrealizzabili, le trasformazioni GT fossero pienamente soddisfacenti.

Riscriviamo le LT moltiplicando la quarta equazione per c : otteniamo una forma più simmetrica, elegante e dimensionalmente coerente:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(u)(ct - \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(u)(z - \beta ct) \end{aligned}$$

Introduciamo, per ora solo come notazione di comodo, la variabile $x^0 = ct$; ed anche $\{x, y, z\} = \{x^1, x^2, x^3\}$; riscriviamo, nella quarta equazione (trasformazione per z), $\beta ct = \beta x^0$.

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(u)(x^0 - \beta x^3) \\ x^{1'} &= x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= \gamma(u)(x^3 - \beta x^0) \end{aligned}$$

Possiamo scrivere le trasformazioni in forma matriciale:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (6)$$

dove la matrice di Lorentz Λ^{μ}_{ν} vale, nel caso semplice del nostro esempio:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(u) = \begin{pmatrix} \gamma(u) & 0 & 0 & -\gamma(u)\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(u)\beta & 0 & 0 & \gamma(u) \end{pmatrix} \quad (7)$$

e gli indici μ, ν assumono i valori 0,1,2,3.

La trasformazione inversa si ottiene, come evidente dalla fisica del problema, semplicemente con la prescrizione $\beta \rightarrow -\beta$.

Il gruppo di Lorentz comprende le trasformazioni ad un sistema in moto inerziale in una direzione arbitraria rispetto agli assi coordinati. Il caso generale, che include anche rototraslazioni del sistema di riferimento, (gruppo di Poincarè) è rappresentato da una matrice assai più complicata. La posizione degli indici (controvariante in alto e covariante in basso) sarà discussa più avanti.

Introduciamo la **convenzione di Einstein sulle somme**: si sottintende il simbolo di sommatoria su un indice se questo è ripetuto due volte in un'espressione, una volta in alto e una in basso. Quindi scriviamo l'eq.(6) come:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (8)$$

L'indice ripetuto si dice *muto*, perchè scompare una volta effettuata la somma. Una semplice verifica delle equazioni richiede che gli stessi indici non muti siano presenti, con la stessa posizione (alta o bassa) nei due membri delle equazioni. In questo caso abbiamo μ in alto sia a destra che a sinistra, mentre ν è muto.

Trasformazioni delle velocità

Occorre derivare le coordinate spaziali rispetto al tempo corrispondente, ossia :

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} + \frac{dx'}{dx} \frac{dx}{dt'} \quad \text{e simili per le altre componenti.}$$

Per il nostro caso particolare, $\vec{u} = u\hat{z}$ otteniamo:

$$v'_x = \frac{1}{\gamma(u)} \frac{v_x}{1 - uv_z/c^2} \quad (9)$$

$$v'_y = \frac{1}{\gamma(u)} \frac{v_y}{1 - uv_z/c^2} \quad (10)$$

$$v'_z = \frac{v_z - u}{1 - uv_z/c^2} \quad (11)$$

Notiamo che, al contrario di quanto avviene in GT, anche le velocità "trasverse" (cioè non parallele ad $\vec{u}$) sono modificate dalla trasformazione, anche se la variazione è depressa per un fattore γ^{-1}

Consideriamo in particolare un moto con velocità lungo la direzione di trascinamento (o, come si usa dire, di "boost"): $\vec{v}/\vec{u}$. Nel nostro caso, $\vec{v} = v_z\hat{z}$, si ha:

$$v'_x = 0; \quad v'_y = 0; \quad v'_z = \frac{v - u}{1 - uv/c^2} \quad (12)$$

Da qui è immediato verificare, ponendo $v_z = c$, che il modulo della velocità della luce è invariato:

$$c' = \frac{c - u}{1 - u/c} = c \quad (13)$$

2 Due celebri conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz

Dilatazione dei tempi Consideriamo un orologio a riposo nell'origine di $\mathbb{R}$, che misura un intervallo di tempo Δt ; osserviamo ora lo stesso intervallo di tempo misurato in $\mathbb{R}'$:

$\Delta t' = \gamma(u)(\Delta t - \beta \Delta x)$. Il secondo termine è nullo poichè l'orologio è fermo, e nell'origine. Quindi:

$$\Delta t' = \gamma(u) \Delta t \quad (14)$$

Ricordando che $\gamma(u) > 1$, vediamo che l'intervallo di tempo $\Delta t'$, misurato in ogni riferimento $\mathbb{R}'$ in moto rispetto a $\mathbb{R}$, è più lungo dell'intervallo Δt misurato nel riferimento in cui l'orologio è in quiete. Chiamiamo quest'ultimo valore, il minore possibile, **tempo proprio** e lo indichiamo con il simbolo τ . Riassumendo:

$$\boxed{\Delta t' = \gamma(u) \cdot \Delta \tau} \quad (15)$$

Contrazione delle distanze Consideriamo ora un righello di lunghezza $L = z_a - z_b$, a riposo in $\mathbb{R}$. Osservato da un $\mathbb{R}'$ avremo

$$L' = z'_a - z'_b = \Delta z' = \gamma(u)(\Delta z - u \Delta t) \quad (16)$$

$$\Delta t' = \gamma(u)(\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta z) \quad (17)$$

Poichè il righello è ora in movimento, dobbiamo misurarne i due estremi *simultaneamente*, affinché la misura abbia senso (provate a misurare la lunghezza di un'auto in corsa !). Occorre quindi imporre $\Delta t' = 0$ da cui segue: $\Delta t = u \Delta z / c^2$. Sostituendo questa condizione nella prima equazione otteniamo:

$$L' = \gamma(u)(\Delta z - \beta^2 \Delta z) = \frac{L}{\gamma(u)} \quad (18)$$

Si riconosce quindi che una qualunque lunghezza o distanza risulta *più corta* di quella misurata in un riferimento in cui questa sia in quiete: $L' < L, \quad \forall \mathbb{R}'$.

Supponiamo di avere due osservatori, uno in $\mathbb{R}$ e l'altro in $\mathbb{R}'$, ciascuno dotato di un righello lungo $L = 1$ m: ciascuno vedrà l'altro più corto del proprio. Quale è la soluzione di questo paradosso ?

3 L'invariante di Lorentz - Minkowski

E' facile verificare (e siete invitati a farlo, è un calcolo semplice) che le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la forma quadratica, detta "intervallo" :

$$\Delta s^2 = (c \Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s'^2 \quad \forall \mathbb{R}' \quad (19)$$

Notiamo la somiglianza formale di questo invariante con la norma (invariante per rototraslazione) di un vettore in R^3 :

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = r'^2 \quad (20)$$

riscriviamo la norma nel modo seguente:

$$r^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \delta_{ik} \Delta x^i \Delta x^k$$

dove $\delta_{ik} \equiv \text{diag}[1 \ 1 \ 1]$ è la matrice unità (simbolo di Kronecker) e abbiamo sottinteso, in base alla convenzione di Einstein, la somma sugli indici $[i, j] = 1, 2, 3$. È un modo, solo apparentemente complicato, per dire a calcolare r^2 concorrono solo i termini diagonali dei prodotti $\Delta x^i \Delta x^k$; chiamiamo δ_{ik} la **metrica** della geometria cartesiana.

Questo suggerisce di definire uno "spazio-tempo" quadrimensionale caratterizzata dalla metrica (19). Introducendo il *Tensore Metrico di Minkowski*

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1] \quad (21)$$

riscriviamo la metrica (19) come

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\nu \Delta x^\mu = \eta_{\mu\nu} \Delta x'^\nu \Delta x'^\mu \quad (22)$$

Curiosità geometrica: La similitudine di un boost di Lorentz con una rotazione intorno ad un asse coordinato è sottolineata in modo suggestivo, ma che consideriamo qui come una pura curiosità, dalla seguente considerazione: definiamo $\beta \equiv \tanh(k) < 1$, ne segue $\gamma(u) = \cosh(k)$; $\beta\gamma(u) = \sinh(k)$. Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \cosh(k) - x^3 \sinh(k) \\ x'^3 &= -x^0 \sinh(k) + x^3 \cosh(k) \end{aligned}$$

Cioè una rotazione di un angolo immaginario ik intorno agli assi x^1, x^2 .

NOTAZIONE: la caratteristica rilevante dell'invariante di Minkowski è che la componente temporale (0 nella nostra notazione) ha segno diverso da quelle spaziali (1,2,3). E' altrettanto lecito, e forse più intuitivo, ma meno frequente, definire $\eta_{\mu\nu}$ con i segni invertiti (=diag (-1, 1, 1, 1)). Se, come accade talvolta*, la variabile temporale è indicata con x^4 invece di x^0 , la matrice di Minkowski avrà componenti diag (1, 1, 1, -1) oppure diag (-1,-1,-1, 1). Tutte queste notazioni sono lecite e valide: se ne sceglie una (noi abbiamo scelto la (21) e ci si attiene ad essa evitando commistioni. Citiamo infine la scelta di alcuni testi (p.es. il Bettini) di utilizzare come variabile temporale immaginaria $x^0 = ict$, il che ci consente di usare ancora una metrica cartesiana, a 4 dimensioni. Anche se può apparire come la soluzione più semplice, non è in realtà molto usata perchè mal si presta alla generalizzazione ad un tensore metrico non diagonale e dipendente dalla posizione, come avviene in Relatività Generale.

* questa scelta, purtroppo in disuso, avrebbe indubbi vantaggi nella conta di righe e colonne delle matrici: vedi p.es. l'eq.(7) o la sezione sul tensore elettromagnetico

4 Lo spazio tempo di Minkowski e il cono di luce

Abbiamo definito lo Spazio-Tempo di Minkowski grazie alla sua metrica (19). Un punto in questo spazio-tempo è rappresentato da 3 variabili spaziali ed una temporale, ossia il luogo ed il tempo in cui viene considerato: lo chiamiamo *evento*. Possiamo dare una rappresentazione grafica a 2D dello spazio-tempo usando un asse temporale x^0 e un asse spaziale, p.es. x^3 .

Per tradizione, si pone x^0 sull'asse verticale e x^3 su quello orizzontale: per un moto in una dimensione, le traiettorie sono delle curve $x^0(x^3)$ (in notazione convenzionale, $ct(z)$), cioè con convenzione opposta rispetto alla traiettoria $z(t)$ studiata in meccanica classica.

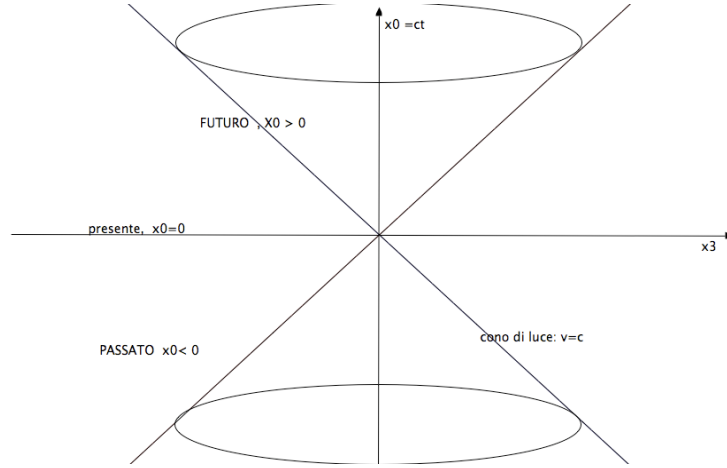


Figure 1: Rappresentazione 2D del cronotopo di Minkowski e del cono di luce

In questo diagramma l'asse verticale ($x^3 = 0$) rappresenta la storia (la *Linea di Universo*) di un corpo fermo nell'origine al passare del tempo, cioè al crescere di x^0 . Analogamente, l'asse (in generale l'iperpiano) orizzontale rappresenta l'immagine dell'universo al tempo attuale ($x^0 = 0$), ossia "il presente". Il semipiano $x^0 > 0$ è quindi il futuro, mentre il semipiano inferiore rappresenta il passato. Su questo piano $\{x^3, x^0\}$ possiamo tracciare le due rette a 45° con gli assi, che hanno come equazione: $dx^0/dx^3 = 1$, ossia $v_z = c$. Le bisettrici dei quadranti sono dunque le traiettorie di corpi o punti materiali che si muovono alla velocità della luce. Se aggiungiamo un terzo asse x^2 queste due rette vengono estese ad un cono, detto *Cono di luce*; con il quarto asse x^1 , meno intuitivo da visualizzare, avremo infine un ipercono. Il cono di luce separa lo spazio in 3 regioni: la regione interna alla falda e con $x^0 > 0$, quella con $x^0 < 0$ e la regione esterna al cono. La linea di universo dei corpi che si muovono con velocità $|v| < c$ è contenuta interamente all'interno del cono di luce. Qualunque punto interno alla falda superiore al cono è raggiungibile dall'origine mediante un segnale che viaggi a velocità $< c$, e rappresenta quindi il *futuro causale*, ossia l'insieme degli eventi sui quali l'osservatore posto nell'origine può avere un'influenza. Analogamente, i punti interni alla falda inferiore del cono di luce sono il *passato causale*, cioè gli eventi che possono aver influenzato l'evento nell'origine. Gli eventi che giacciono all'esterno del cono di luce sono in legame non causale con l'origine: potrebbero essere collegati ad essa solo da un segnale che viaggi a velocità $> c$, se esistesse. L'assenza di un legame causale tra l'origine e i punti esterni al cono di luce può essere sottolineata dal fatto che, con un'opportuna trasformazione di Lorentz, (vedi ABP) i due

eventi possono essere portati a giacere sul nuovo asse $x'_0 = 0$, ossia essere contemporanei.

Riconsideriamo l'intervallo tra due eventi Δs^2 : esso può essere positivo, negativo o nullo. A seconda del segno distinguiamo tre generi:

- *Genere luce* $\Delta s^2 = 0$. E' immediato riconoscere che $\Delta s^2 = 0$ implica $r^2 = (c\Delta t)^2$, ossia $v^2 = c^2$. $\Delta s^2 = 0$ è quindi la caratteristica di intervalli appartenenti al cono di luce, ed appartiene a traiettorie di fotoni e gravitoni, le uniche particelle che si propaghino alla velocità c .
- *Genere tempo*: $r^2 < (c\Delta t)^2$, ossia $v < c$. Con la nostra scelta della metrica si ha $\Delta s^2 > 0$. E' la distanza tra due eventi tra i quali è possibile una comunicazione ed un rapporto causa-effetto.
- *Genere spazio*: $r^2 > (c\Delta t)^2$. E' infine la distanza tra due eventi esterni al cono di luce, tra i quali non può esistere connessione causale. Nella nostra notazione $\Delta s^2 < 0$

Poiche' Δs^2 è invariante per LT, lo è anche il suo segno, e quindi anche il genere. Un intervallo di genere, e.g. tempo, lo rimane in qualunque riferimento inerziale.

Quadrivolume: Consideriamo un elemento di volume nello spazio-tempo di Minkowski : $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, e studiamo come viene modificato in una LT :

$$d^4x' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = (\gamma(u)dx^0) dx^1 dx^2 (dx^3/\gamma(u)) = d^4x. \quad (23)$$

Anche l'elemento di 4-volume è quindi un invariante sotto LT

5 Quadrivettori

Ricordiamo la definizione di un vettore in R^3 : è un vettore qualunque entità composta di tre componenti che si trasformino, sotto rototraslazione, come le componenti del vettore posizione $\vec{r}$:

$$v'^i = R^i_j v^j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (24)$$

Come conseguenza, la norma di un qualunque vettore è conservata [†]:

$$|\vec{v}'|^2 = \delta_{ij} v'^i v'^j = v_i v^i = |\vec{v}|^2 \quad (25)$$

In analogia con questa definizione, definiamo **quadrivettore** un'entità composta di quattro componenti che si trasformino, sotto boost di Lorentz, come le componenti di un evento (o quadrivettore posizione) x^μ :

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu \quad (26)$$

[†]Anticipiamo qui la notazione $\sum_i \delta_{ij} v^j = v_i$, che corrisponde a passare da un vettore colonna a un vettore riga. Viene chiamato *abbassamento dell'indice*. Nel seguito, indici dei quadrivettori verranno abbassati e alzati con la metrica $\eta_{\mu\nu}$, passando da vettori covarianti a controvarianti e viceversa

e per i quali sia quindi invariante la norma:

$$V^\mu V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V_0^2 - V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 = V'^\mu V'_\mu \quad (27)$$

Un quadrivettore è composto da tre componenti "spaziali", cioè che si trasformano come le componenti di $\vec{r}$, ed una componente "temporale" che si trasforma come $x^0 = ct$. La differenza è chiara nel segno dei rispettivi termini nella norma.

Spesso un quadrivettore $A^\mu = [A^0, A^1, A^2, A^3]$ è indicato con la notazione breve $A^\mu = [A^0, \vec{A}]$; tuttavia questo può generare confusione tra le componenti spaziali $[A^1, A^2, A^3]$ ed il corrispondente vettore "cartesiano" $\vec{A}$ che non sempre coincidono (vedi ad esempio la 4-velocità, poco più avanti. Useremo quindi : $A^\mu = [A^0, A^m]$ con $m = 1, 2, 3$, e cercheremo di usare simboli diversi per un vettore "classico" e per il corrispondente quadrivettore relativistico.

Definiamo il prodotto scalare, invariante per LT, tra due 4-vettori:

$$A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_0 B^0 - A_m \cdot B^m \quad (28)$$

Come per un vettore ordinario, la norma può essere interpretata come il prodotto scalare del 4-vettore con se stesso.

Nel seguito chiameremo *covariante* o, impropriamente, *invariante* una grandezza che cambia secondo le LT. A rigore, uno scalare è *invariante* perché non varia (ha lo stesso valore in ogni Rif., come ad esempio la carica elettrica), mentre un 4-vettore o un tensore (vedi oltre) è *covariante* in quanto si trasforma come x^γ .

Quadrivettori della dinamica

Costruiamo, in analogia con la meccanica Newtoniana, le grandezze 4-vettoriali della dinamica:

- Quadrivelocità : come primo esempio consideriamo l'estensione relativistica del vettore velocità $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{x} \rightarrow \frac{d}{d\tau} x^\mu$. Questo, chiaramente, non è invariante (x^μ lo è, ma t no).

Sostituendo $t \rightarrow \tau = t/\gamma(u)$ otteniamo una quantità numericamente molto vicina alla velocità Newtoniana ($\gamma \simeq 1$ per piccole $u \ll c$), ma invariante per boost di Lorentz. Quindi definiamo la 4-velocità w^μ

$$w^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu = \gamma(u) [c, \vec{v}] \quad (29)$$

Abbiamo definito la 4-velocità col simbolo w^μ per distinguerla dalla velocità usuale v^i , da cui differisce per un fattore γ : $w^1 = \gamma(u) v^1$ etc. In particolare, $w^0 = \frac{d}{d\tau} x^0 = \gamma(u) c$

Calcoliamo la norma di w^μ in un sistema di riferimento solidale, rispetto all'osservatore, con la particella in moto: $u = v$

$$w^\mu w_\mu = \gamma^2 [c^2 - u^2] = c^2 \quad \text{costante} \quad (30)$$

- Quadriaccelerazione: di nuovo, deriviamo la 4-velocità rispetto al tempo proprio τ :

$$a^\mu = \frac{dw^\mu}{d\tau} \quad (31)$$

È facile vedere che la 4-accelerazione è ortogonale alla 4-velocità, nel senso che il prodotto scalare è identicamente nullo: $a^\mu w_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} w^\mu w_\mu = 0$. Notiamo inoltre che $a^0 = c \frac{d}{d\tau} \gamma(u) \neq 0$.

- Quadriquantità di moto : come in meccanica newtoniana, definiamo la 4-quantità di moto, o 4-momento, moltiplicando la 4-velocità di un corpo per la sua massa: $p^\mu = mw^\mu$. Scomposto nelle sue componenti, questo implica che

$$\begin{aligned} p^k &= \gamma(u)mv^k, \\ p^o &= \gamma(u)mc \end{aligned} \quad (32)$$

Uguale al momento newtoniano, tranne che per il fattore $\gamma(u)$: che a piccole velocità è influente, ma che implica $\vec{p} \rightarrow \infty$ quando $u \rightarrow c$. Quale è il significato della equazione per p^o ? Se consideriamo la grandezza cp^o e la sviluppiamo al primo ordine in serie di $\beta = u/c < 1$, otteniamo

$$cp^o = \gamma(u)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \simeq mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right] = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \dots \quad (33)$$

Il secondo termine è l'energia cinetica del corpo in oggetto. Identifichiamo il primo termine come una *energia di massa* di cui ogni corpo, anche a riposo, è dotato, per il solo fatto di avere massa. Questa interpretazione è stata a posteriori confermata da numerosi fenomeni, p.es. dalla stabilità dei nuclei atomici o dalle reazioni di fissione e fusione nucleare. Consideriamo quindi cp^o come l'energia $\mathcal{E}$ associata alla particella. In conclusione:

$$p^\mu = [\mathcal{E}/c, p^k] \quad (34)$$

Esplicitiamo ora la norma di p^μ : possiamo scrivere $p^\mu p_\mu = m^2 w^\mu w_\mu = (mc)^2$ ma anche $p^\mu p_\mu = (\mathcal{E}/c)^2 - p^2$. Confrontando le due espressioni otteniamo

$$\mathcal{E} = \pm c\sqrt{p^2 + m^2 c^2} \quad (35)$$

Che è la relazione tra energia e momento (*relazione di dispersione*) per una particella relativistica. Alcune osservazioni sull'energia relativistica:

- Una particella con massa nulla (un fotone) può avere energia e momento. La pressione di radiazione si spiega quindi, in relatività, con un'interpretazione corpuscolare.
- L'equazione (35), generalizzata ad un sistema di molte particelle (vedi ABP) è alla base della dinamica relativistica (urti elastici, disintegrazioni etc.) utilizzata negli esperimenti di alte energie su acceleratori.
- Notiamo dalle eq.(32) che, per accelerare un corpo a velocità prossima a c , occorre portarlo ad avere $|p| \rightarrow \infty$ e fornirgli energia $\mathcal{E} \rightarrow \infty$. Ciò si vede agevolmente compiendo una LT verso il riferimento in cui il corpo è in quiete. Questo conferma il carattere asintotico ed insuperabile di c per le velocità dei corpi dotati di massa.
- Una volta identificato cp_0 con l'energia del corpo, la prima delle eq.(33) ci dice che $\gamma(v)$ è il rapporto tra energia totale ed energia di massa della particella:

$$\gamma(u) = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}$$

Questo ci suggerisce un'interpretazione fisica del fattore γ .

6 Dinamica Lorentz- invariante

Affrontiamo ora la I legge della dinamica. Nel paragrafo precedente abbiamo definito alcuni quadrivettori: purché sia verificata la invarianza per boost di Lorentz, queste quantità sono del tutto arbitrarie. La situazione cambia quando andiamo a scrivere l'equivalente relativistico di una legge fisica; nel nostro caso, della legge di Newton: qui dobbiamo formulare una equazione tra quadrivettori (affinché sia invariante) ma che descriva la realtà, cioè che sia sperimentalmente verificata. Partiamo dalle relazioni newtoniane, "classiche", che sappiamo corrette per $u \ll c$:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}; \quad \text{II legge della dinamica} \quad (36)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\mathcal{E}; \quad \text{definizione di potenza} \quad (37)$$

È un buon punto di partenza (una relazione vettoriale + una scalare) ma non è chiaramente invariante per LT. Moltiplichiamo le equazioni per $\gamma(u)$, differenziando quindi rispetto a $\tau = t/\gamma$ invece che t ; dividiamo inoltre la seconda relazione per c . Otteniamo

$$\gamma(u)\vec{F} = \frac{d}{d\tau}\vec{p}; \quad \gamma(u)\vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \frac{d\mathcal{E}}{cd\tau} = \frac{dp^0}{d\tau} \quad (38)$$

due relazioni che possiamo sintetizzare nella relazione 4-vettoriale:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma(u)[\vec{F} \cdot \vec{\beta}, \vec{F}] \equiv f^\mu \quad (39)$$

L'entità f^μ qui definita è un 4-vettore? Ricordiamo che, in generale, data una relazione $C = D$ valida in una qualunque classe di trasformazioni, se C varia secondo una legge data, anche D deve seguire la stessa legge di trasformazione, affinché la relazione mantenga la sua validità. Quindi, poichè chiediamo invarianza per LT delle leggi della dinamica, e l'eq.(39) esprime l'uguaglianza tra il quadrivettore $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ e l'entità f^μ , ne deduciamo che anche f^μ è un quadrivettore. L'eq.(39) esprime quindi la legge di Newton in forma covariante, con correzioni numeriche che sono trascurabili per $u \ll c$, ma rilevanti per particelle relativistiche.

In assenza di forze esterne abbiamo $p^\mu = \text{costante}$ (nel tempo). La conservazione di energia e impulso sono condensate in un'unica legge di conservazione, valida in ogni $\mathbb{R}$.

Notiamo infine che nell'eq.(36) "classica" di partenza avremmo potuto apportare fattori gamma "correttivi", senza che la sua validità "Newtoniana" venisse intaccata, in quanto $F, \gamma F, F/\gamma$ etc. danno tutti lo stesso valore nel limite newtoniano. La equazione giusta ci viene da esperimenti condotti su particelle elementari in moto relativistico (per esempio, in un ciclotrone) sottoposte a forze elettriche e magnetiche. E ci dice che la eq.(36) è corretta anche in regime relativistico.

6.1 Sistemi di molte particelle - cenni

Come in Meccanica classica, possiamo definire quantità di moto ed energia per un sistema di due o più particelle, ognuna dotata di quadrimpulso p^μ :

$$P^\mu = \sum_{j=1}^N p_{(j)}^\mu = [\sum \mathcal{E}_j, \sum \vec{p}_j] \equiv [P^0, \vec{P}] \quad (40)$$

Dove l'indice (j) indica qui la j -esima particella.

Con le equazioni della dinamica relativistica, che qui abbiamo applicato ad una particella singola, si trattano tutti i problemi a molte particelle (urti, disintegrazioni, interazioni): la dinamica relativistica è indispensabile, in particolare, nella fisica delle particelle elementari (le particelle elementari sono spesso assai veloci...). La conservazione di quantità di moto e di energia sono elegantemente riunite nella conservazione del quadrimpulso:

$$P^\mu P_\mu = P^0{}^2 - |\vec{P}|^2 = \frac{1}{c^2} \sum (\mathcal{E}_j)^2 - |\sum \gamma(u) m_j \vec{w}_j|^2 = \text{cost}$$

conservata durante il moto, ma anche per un cambio di riferimento, in quanto norma di un quadri-vettore. Per un sistema isolato, nel riferimento che si muove solidale con il centro di massa, si ha $\vec{P} = 0$, e quindi $P^\mu P_\mu = \frac{1}{c^2} \sum (\mathcal{E}_j)^2 = (P^0)^2$.

$\frac{(P^0)_{cm}}{c}$ prende il nome di *massa invariante* del sistema; con la nostra scelta della metrica, $P^0 > 0$.

7 Vettori covarianti, controvarianti e tensori

Consideriamo la quantità $\eta_{\mu\nu} \cdot A^\nu$: la somma su ν lascia "non saturato" il solo indice μ , in basso; svolgendo il prodotto matriciale otteniamo:

$$\eta_{\mu\nu} \cdot A^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & A_3 \end{pmatrix} \equiv A_\mu \quad (41)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito il vettore "covariante" A_μ che, rispetto al vettore "controvariante" A^μ , ha le componenti spaziali cambiate di segno.

Quale delle due rappresentazioni è quella "vera", o corrispondente alla realtà fisica? Entrambe, poichè contengono la stessa informazione, ma non sono grandezze misurabili. L'osservabile fisica è la norma del quadri-vettore che, secondo l'eq. (28) è data da

$$A^\mu A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu = A_0^2 - |\vec{A}|^2 \quad (42)$$

Si dice che il tensore metrico $\eta_{\mu\nu}$ "abbassa l'indice" al vettore che lo segue, cioè lo tramuta da controvariante in covariante. Analogamente la matrice $\eta^{\mu\nu}$ "alza l'indice", provocando la trasformazione da covariante in controvariante. È facile verificare che la metrica di Minkowski (in generale qualunque metrica) con un indice alto e uno basso corrisponde alla matrice unità:

$$\eta^\mu{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \cdot \eta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \cdot \eta_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu \quad (43)$$

Tensori

Si chiama tensore di rango 2 una matrice T 4 x 4 che, sotto trasformazione di Lorentz, si trasforma secondo la prescrizione seguente

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\gamma T^{\alpha\gamma} \quad (44)$$

In pratica, la trasformazione consiste nel moltiplicare la matrice T per una matrice di Lorentz per ogni indice presente.

Il prodotto di due vettori $A^\mu B^\nu$ è naturalmente un tensore, ma non tutti i tensori sono fattorizzabili in questo modo.

Esercizio: verificare che la traccia di un tensore T^μ_μ è un' invariante per trasformazioni di Lorentz. Possiamo estendere immediatamente il concetto di tensore ad una entità matematica K con n indici (e quindi di rango n) :

$$K'^{\alpha\dots\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \dots \Lambda^\nu_\beta K^{\mu\dots\beta} \quad (45)$$

In Relatività Generale si incontrano vari tensori con 4 indici (4^4 elementi). Anche in teoria dell'elasticità, si trovano tensori di rango 4 ma, essendo una teoria in $\mathbb{R}^3$, gli elementi sono solo 3^4 .

In questo corso tuttavia ci limiteremo a considerare tensori di rango 2

Anche ai tensori è possibile alzare o abbassare uno (o più) indici moltiplicandoli a sinistra per una (o più) matrici metriche.

C'è una semplice regola mnemonica per districarsi tra gli indici di questi prodotti: gli indici ripetuti (in alto e in basso) sono "saturati" nella somma, e non compaiono nel risultato finale; gli indici rimanenti devono avere la stessa lettera e la stessa posizione (alto o basso) a destra e a sinistra del segno di uguaglianza.

8 Operatori differenziali

- *Quadrigradiente.* Consideriamo uno scalare (quindi invariante) ϕ . Il quadrigradiente di ϕ è un 4-vettore:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right] \phi \equiv w_\mu \quad (46)$$

Il quadrigradiente è spesso indicato con la notazione abbreviata $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi \equiv \partial_\mu \phi$ (in Relatività Generale si usa anche $\phi_{, \mu}$)

Per convincersi della natura vettoriale di ∂_μ , consideriamo il differenziale di ϕ , anche esso scalare invariante:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (47)$$

che possiamo leggere come il prodotto scalare di $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi$ con il quadrivettore posizione dx^μ . Siamo quindi portati a concludere che il quadrigradiente ottenuto derivando rispetto ad una coordinata controvariante si comporti come un vettore covariante: $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$, e viceversa.

- *Quadrividivergenza.* Dalla considerazione precedente segue che, interpretando ∂_μ come un 4-vettore, la quantità

$$\partial_\mu B^\mu = \frac{1}{c} \partial_t B^0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \psi \quad (48)$$

è uno scalare. Abbiamo così definito la quadrividivergenza del vettore B^μ .

- *Dalembertiano.* Applicando successivamente il 4-gradiente e la 4-divergenza ad uno scalare ϕ , otteniamo un'altro scalare invariante, detto il Dalembertiano di ϕ , in quanto è soluzione dell'equazione di D'Alembert, o equazione della propagazione ondosa:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi \equiv \square \phi \quad (49)$$

9 Elettrodinamica relativistica

La quadricorrente e l'equazione di continuità

Iniziamo col considerare una quantità di carica dq contenuta in un dato volume d^3x . È un fatto sperimentalmente accertato e consistente con ogni teoria accettata che la carica elettrica sia una quantità conservata. Abbiamo dunque che $dq = \rho dx^1 dx^2 dx^3$, è invariante per qualunque trasformazione, ed in particolare per quelle di Lorentz. Confrontiamo questa relazione con la eq.(23) che stabiliva l'invarianza del 4-volume. Ne deduciamo che la densità di carica ρ si trasforma, sotto LT, come la coordinata x^0 . Facciamo ora una considerazione puramente dimensionale: se moltiplico la densità di carica ρ per c , ottengo $[C/m^3 \cdot m/s] = [C/m^2 s]$ le dimensioni fisiche della densità di corrente elettrica. Queste considerazioni ci inducono a costruire un 4-vettore in cui le componenti spaziali siano date dal vettore densità di corrente $\vec{J}$ e la componente temporale sia $c\rho$:

$$j^\mu = [c\rho, \vec{J}] \quad (50)$$

Ricordiamo ora l'equazione di continuità della carica elettrica: $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

È immediato notare che si può riscrivere come la 4-divergenza della 4-corrente; infatti, applicando la eq.(48) :

$$\frac{\partial}{\partial ct} c\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (51)$$

Questa equazione mostra che l'equazione di continuità è "covariante a vista", ossia si riconosce immediatamente la sua invarianza per LT.

I potenziali elettromagnetici

Ricordiamo che le quattro equazioni di Maxwell per i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ possono essere riformulate, in modo del tutto equivalente, in termini dei potenziali scalare V e vettore $\vec{A}$. Con la dovuta attenzione ai segni nel D'Alembertiano (eq.49), abbiamo:

$$\begin{aligned} \square V &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \square \vec{A} &= \mu_0 \vec{J}, \end{aligned} \quad (52)$$

insieme alle prescrizioni:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \dot{\vec{A}}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}; \quad (53)$$

ed alla condizione di gauge di Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{V} = 0$

Dividendo la prima equazione (52) per $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$, si nota che nei due secondi membri compaiono le componenti del 4-vettore corrente. Utilizzando la forma 4-vettoriale del dalembertiano $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ e definendo la quantità 4-dimensionale (ancora non sappiamo se 4-vettoriale !) $A^\nu = [V/c, \vec{A}]$, possiamo riscrivere le equazioni per i potenziali in forma compatta:

$$\square A^\lambda = \partial_\nu \partial^\nu A^\lambda = \mu_0 j^\lambda \quad (54)$$

Con considerazioni simili a quelle fatte per la 4-forza, possiamo convincerci che A^λ compare in un'equazione in cui tutti gli altri componenti sono invarianti (Dalembertiano, μ_0) o 4-vettori (j^ν)

per LT, ed è quindi anch'esso un quadrivettore. Notiamo anche che la Gauge di Lorentz si esprime, in maniera del tutto naturale, in modo covariante come la quadridivergenza del 4-potenziale:

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (55)$$

Il nostro obiettivo di partenza, ottenere delle equazioni per l'elettromagnetismo che non dipendessero dalla particolare LT scelta, può dirsi raggiunto. Merita notare che, mentre abbiamo dovuto modificare le leggi della dinamica con l'aggiunta di alcuni fattori $\gamma(u)$, le leggi dell'elettromagnetismo nascono (nella formulazione di Maxwell) perfettamente invarianti.

Il tensore elettromagnetico

Abbiamo visto che i potenziali elettromagnetici sono grandezze covarianti, e che quindi mantengono il loro significato fisico in ogni riferimento inerziale. Così non è per i campi elettromagnetici, che sono le quantità fisiche osservabili: basta pensare ad una carica puntiforme, che genera un campo elettrico nel riferimento in cui è in quiete, ma un campo magnetico in ogni altro, in cui è visto come una carica in moto, cioè una corrente. Esiste comunque un modo, anche se non immediatamente intuitivo, di esprimere le equazioni per i campi in forma covariante. Definiamo il tensore

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (56)$$

chiaramente antisimmetrico: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$; $F_{\mu\mu} = 0$ (no somma su j) $\forall$ elemento diagonale. E' immediato riconoscere che le equazioni per i campi (53), che esplicitiamo nelle componenti:

$$\frac{E_i}{c} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{V}{c} - \frac{\partial}{\partial x_0} A_i \quad (57)$$

$$B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \quad [i, j, k] = (1, 2, 3 \text{ e permutazioni cicliche}) \quad (58)$$

esprimono alcune componenti del tensore $F_{\mu\nu}$, ed in particolare: $F_{0i} = -E_i/c$; $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$. In definitiva:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

Se alziamo i due indici di $F_{\mu\nu}$, passando ad un tensore controvariante: $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\gamma} F_{\beta\gamma}$, troveremo che il vettore $\vec{B}$ rimane invariato (il che riflette la natura assiale del vettore campo magnetico) mentre $\vec{E}$ cambia di segno (vettore polare).

NOTAZIONE: Il tensore elettromagnetico qui calcolato differisce da quello riportato in Landau-Lifshitz (LL) per via delle differenti unità di misura (noi usiamo il SI). Differisce anche da quello riportato in ABP, per via delle differenti scelte di notazione:

- I nostri indici vanno da 0 a 3, e non da 1 a 4. Di conseguenza la matrice $F_{\mu\nu}$ ha righe e colonne in ordine diverso

- la nostra normalizzazione dei vettori differisce da quella di ABP per un fattore c : lì trovate, per esempio, $j^\nu = [\vec{J}/c, \rho]$, $A^\nu = [\vec{A}/c, V]$. Questo porta differenze anche in $F_{\mu\nu}$, dove le componenti risultano essere E_k e cB_k . Tutto ciò rientra nell'arbitrarietà delle definizioni (e nella mancanza di uno standard condiviso): quello che conta è che le equazioni che scriviamo con queste grandezze siano corrette.

Le equazioni per i campi elettrico e magnetico

Con il tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ le equazioni di Maxwell per i campi si possono scrivere:

$$\partial^\mu F_{\nu\lambda} + \partial^\nu F_{\mu\lambda} + \partial^\lambda F_{\mu\nu} = 0; \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu \quad (60)$$

Lasciamo come esercizio verificare che la prima relazione (che rappresenta solo 4 equazioni indipendenti) riproduce le 4 equazioni (una scalare ed una vettoriale) omogenee dell'elettromagnetismo, mentre la seconda porta alle 4 equazioni con sorgente. Non sono i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ad avere valore invariante, ma la loro combinazione nel tensore $F_{\mu\nu}$ che, sotto LT, ne mescola le componenti ma mantiene il carattere tensoriale e quindi covariante. Anche in questo caso, passare ad un grado di libertà maggiore (un tensore di rango due, al posto di due vettori, o tensori di rango uno), porta ad una semplificazione del problema.....o quanto meno ad una soluzione soddisfacente.

La forza di Lorentz

Una teoria di campo si compone delle equazioni che definiscono il campo (nel nostro caso le equazioni di Maxwell) e dall'equazione che definisce il moto di una particella nel campo suddetto: per il campo elettromagnetico è la seconda legge della dinamica (eq.39) dove la forza è quella di Lorentz. Esprimiamo quindi la forza di Lorentz in forma covariante:

$$f_{Lorentz}^\mu = q F^{\mu\nu} w_\nu \quad (61)$$

Per convincerci della correttezza di questa formulazione, consideriamo p.es. una coordinata spaziale:

$$f_{Lorentz}^1 = q[F^{10} \cdot c + F^{12} \cdot v_2 + F^{13} \cdot v_3]\gamma(u) \quad (62)$$

$$= \gamma(u)q[E^1 + v_2 B^3 - v_3 B^2] = \gamma(u)q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]_1 \quad (63)$$

avendo usato il fatto che $F^{11} = 0$.

Ne segue quindi che la legge del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico si scrive come:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} w_\nu \quad (64)$$

Equazione invariante senza bisogno di alcun ritocco.