

Appunti di
Laboratorio di elettronica

(Corso del Prof. M. Bonori)

**Elaborazione numerica
dei segnali**

A. A. 1996-97

Raccolti dallo studente

Carmelo Astuto

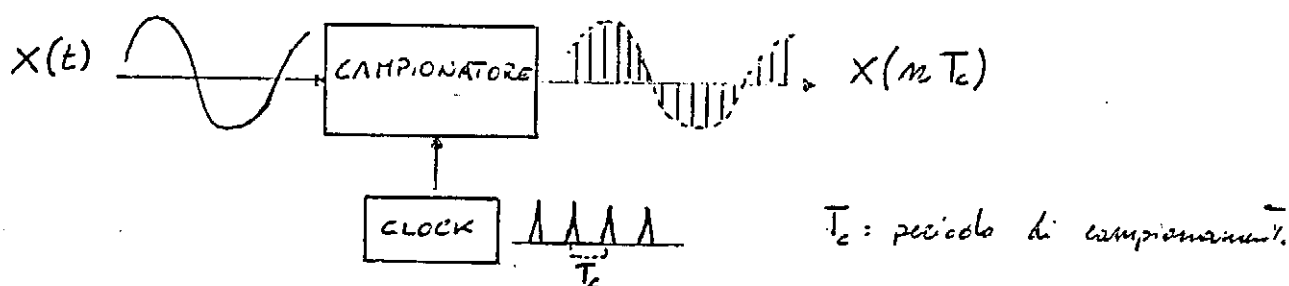
€ 1.39

71 2.700

ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI

L'elaborazione dei segnali è un concetto già presente nel mondo analogico, dove manipoliamo segnali. Tramite filtri, amplificatori, ecc... Quello che ci proponiamo di fare, è l'elaborazione di segnali analogici usufruendo però di tecniche numeriche.

La prima operazione che ci permette di andare dal mondo analogico al mondo numerico è il campionamento. Vediamo quindi cosa si intende per un campionatore ideale.



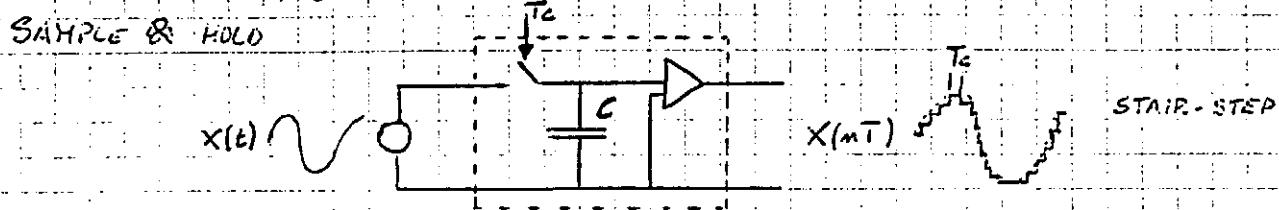
Il clock scandisce l'operazione di campionamento e fa sì che ad ogni impulso di clock venga prelevata l'ampiezza istantanea del segnale d'ingresso. Avremo quindi in uscita una sequenza di impulsi modulati del segnale d'ingresso.

A questo punto il segnale è ancora un segnale analogico, nel senso che i valori in uscita sono ancora numeri reali. Dobbiamo ora discretizzare non solo nel tempo ma anche nell'ampiezza del segnale.

Facciamo ora ancora qualche considerazione sul

periodo di clock. La frequenza di campionamento è il perno centrale dell'elaborazione numerica. Essa determina per i valori che può assumere, la classe dei processi che è possibile trattare.

Naturalmente in realtà il campionatore avrà caratteristiche peggiori che nel caso ideale,

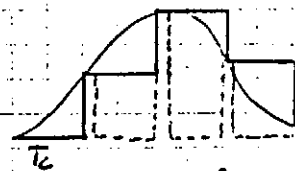


Questo è un tipico circuito reale di campionamento in cui i campioni prelevati mantengono il loro valore per tutto il periodo di campionamento.

Il segnale di uscita che viene fuori è abbastanza diverso da quello teorico, e quindi scrivendo delle relazioni teoriche bisognerà tener conto di questa differenza che esiste nella realtà.

In alcuni casi, l'holding del campione potrebbe non durare tutto il tempo T_c , ma essere minore; questo dipende naturalmente dal circuito campionatore: tanto più saranno stretti gli impulsi.

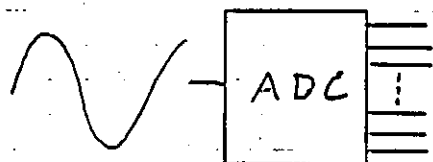
Tanto più ci avvicineremo al caso ideale.



Analizziamo ora il problema della discretizzazione in ampiezza del segnale.

Questo passaggio avviene ad opera di un convertitore analogico-digitale, ovvero un blocco che funzionalmente riceve al suo ingresso il segnale analogico.

ed in corrispondenza del clock T_c restituisce in uscita, su n linee il corrispondente codice numerico (o digitale)



Se il numero di uscite è n , è ovvio che il segnale di ingresso è stato discretizzato in 2^n parti, ed i valori analogici saranno approssimati di conseguenza, al livello più vicino. Si realizza cioè un Troncamento del valore reale. Questi errori di Troncamento sono un altro parametro che bisogna tenere a bada nel processo di elaborazione.

Il numero di bit vanno a definire quindi la risoluzione dell' ADC, e la dinamica di ampiezza

$$D = 20 \log_{10} 2^n$$

Questo numero indica la gamma di ampiezze che è possibile rappresentare. Un esempio esistico, se ho un'orchestra che suona, si ottiene un livello molto alto; se la dinamica non è molto ampia, per rappresentare la massima ampiezza rischierai di non poter rappresentare il suono molto più basso (in ampiezza) di un singolo strumento.

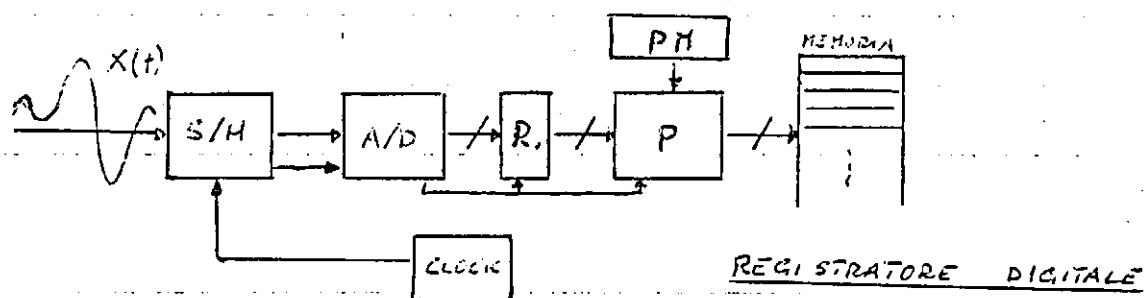
Con 16 bit si ha $D = 96 \text{ Db}$ che è già una buona dinamica. Per avere un'idea il decollo di un aeroplano possiede un livello sonoro di $\sim 120 \text{ Db}$.

3-2/a

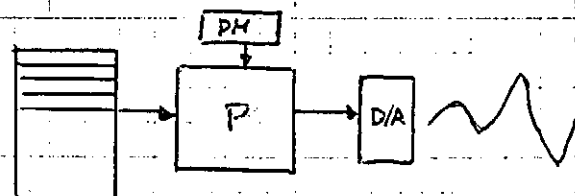
La necessità di premettere un S/H al convertitore AD dipende anche dal fatto che l'ADC impiega un certo Tempo (Tempo di conversione) e convertire il segnale, e per tutto questo Tempo è necessario mantenere il segnale stabile al suo ingresso.

Da un sistema reale, il Tempo di conversione diventa anche un limite superiore alle frequenze di campionamento.

Il prossimo anello della catena è costituito da un elaboratore numerico che sarà nella maggior parte dei casi una macchina ad hoc e non un comune personal computer.



Contrapposte alle registrazioni digitali c'è la riproduzione digitale in cui le memorie devono essere lette ordinatamente e riconvertite in analogico.



In questo caso non c'è una elaborazione del segnale, ma solo una memorizzazione e riletture.

Noi ci occuperemo invece delle manipolazioni che si possono fare sui segnali campionati, per esempio

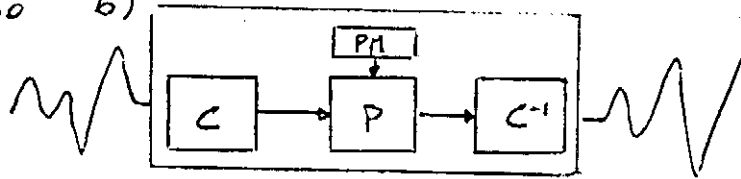
ripuliture da rumore, filtraggi ecc.

Esistono 2 approcci all'elaborazione dei segnali.

- a) ELABORAZIONE IN TEMPO DIFFERITO (OFF-LINE)
- b) ELABORAZIONE IN TEMPO REALE

Nell'esempio fatto si è nel caso a) in cui una volta memorizzati i campioni ci si può agire con calma, elaborarli e successivamente utilizzare il risultato ottenuto. Le 3 fasi di campionamento, elaborazione e riproduzione del segnale sono scollegate nel Tempo e questo implica che non c'è bisogno di grandi potenze di elaborazione.

Nel caso b)

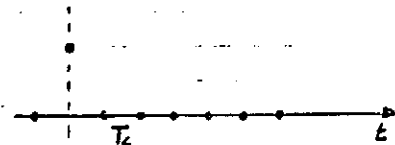


l'intero sistema, chiuso all'interno di una scatola non dovrebbe invece essere distinguibile da un sistema analogico.

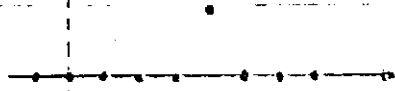
In questo caso naturalmente ci sarà un'alta componentistica, un'alta tecnologia ed un'alta classe di processi coinvolti.

Abbiamo già visto che dal processo di campionamento fuoriesce una sequenza di numeri (parole digitali) con una cadenza pari alle frequenze di campionamento.

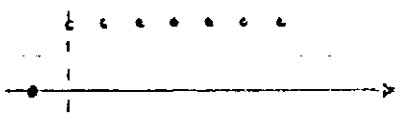
Definiamo le seguenti sequenze canoniche:



$$u_0(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{IMPULSO} \\ \text{UNITARIO} \end{array}$$



$$u_0(n-n_0) = \begin{cases} 1 & n=n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_0(n) = 1 & n \geq 0 \\ u_0(n) = 0 & n < 0 \end{cases}$$

GRADINO

UNITARIO

Queste sequenze saranno importanti come sequenze di test dei sistemi. Vedremo che in particolare la risposta di un sistema all'impulso unitario costituisce la parte d'identità del sistema stesso.

Le caratteristiche dei sistemi che prenderemo in considerazione saranno le seguenti:

a) SISTEMI LINEARI

b) SISTEMI CAUSALI

c) SISTEMI INVARIANTI ALLA TRASLAZIONE TEMPORALE

Vediamo cosa implicano queste proprietà:

- Supponiamo che il nostro sistema risponde all'impulso unitario, con una sequenza (che chiameremo risposta impulsiva) $h_0(n)$. $u_0(n) \Rightarrow h_0(n)$
 La proprietà c) ci dice che se l'impulso arriva al Tempo n_0 , allora anche la risposta sarà uguale, ma traslata di n_0 punti $u_0(n-n_0) \Rightarrow h_0(n-n_0)$
 Quindi l'effetto dell'impulso è sempre identico.
- Se produciamo una sequenza generica $x(n)$, per un impulso al Tempo n_0 $u(n-n_0)$, la risposta del sistema sarà allora $x(n) \cdot h(n-n_0)$

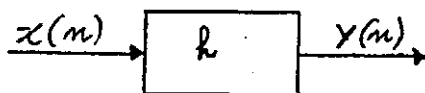
$$x(n) \cdot u(n-n_0) \Rightarrow x(n) \cdot h(n-n_0)$$

- Se abbiamo una funzione $x(n)$, allora

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) u_0(n-m)$$

ossia possiamo rappresentare $x(n)$ come la somma di $x(m)$ per gli impulsi unitari al Tempo m con m che varia da $-\infty$ a $+\infty$.

Se pensiamo allora al nostro sistema con risposta h , nel quale entra la sequenza d'ingresso $x(n)$



avremo che la risposta del sistema sarà

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot h[n-m]$$

Questa è una relazione fondamentale nella elaborazione numerica dei segnali, che si chiama somma di

convoluzione.

Riassumendo, un sistema che abbia le proprietà a), b), c) ammette una relazione, detta SOMMA DI CONVOLUZIONE,

Tra il segnale d'ingresso e la sequenza di uscite.

L'analogo di questo nel Tempo-contínuo è quello che si chiama INTEGRALE DI CONVOLUZIONE il quale non è molto usato in quanto c'è un integrale di mezzo che non è un'operazione comoda soprattutto se i segnali di ingresso e le risposte del sistema sono molto complicate.

Nel Tempo-discreto questa diventa un'operazione in Trasmissione in quanto si riduce ad una sommatoria di prodotti.

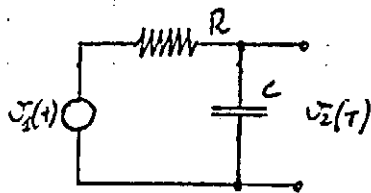
Nel Tempo-contínuo, tipicamente le risposte impulsive sono infinite e questo potrebbe portare a delle difficoltà in quanto bisognerebbe verificare che la somma converga, ma in alcuni casi si attengono delle semplificazioni accettando come risposte impulsive un' approssimazione ad un numero limitato di punti; e quel punto la sommatoria diventerebbe una somma di n prodotti.

L'altro strumento che si utilizza nel Tempo-contínuo sono le equazioni differenziali, le quali sebbene siano più usate degli integrali di convoluzione anche non sono il massimo della facilità d'uso. Nel dominio Tempo-discreto, le equazioni differenziali, non solo diventano una

strumento molto semplice ma addirittura $\checkmark$ il programma che viene implementato nelle macchine che sviluppano i sistemi numerici.

Questo strumento viene chiamato EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE

Per vedere come si passa dalle equazioni differenziali alle equazioni alle differenze finite facciamo un semplice esempio con un circuito RC



L'equazione che regole il circuito

$$\frac{u_2 - u_1}{R} + C \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u_2 + RC \frac{du_2}{dt} = u_1$$

Dobbiamo ora Trasformare u_1 e u_2 in sequenze, ossia dobbiamo passare dal dominio Tempo-continuo al dominio Tempo-discreto. Mentre la cosa è semplice per quanto riguarda u_1 e u_2 , mentre riflettere però su cose diventa la derivata.

È naturale che discretizzando il segnale, la derivata non può diventare altro che il rapporto incrementale

Tra 2 campioni successivi: ossia

$$\frac{du_2}{dt} \approx \frac{u_2(nT) - u_2[(n-1)T]}{T}$$

$$\text{per cui } u_2(nT) + \frac{RC}{T} u_2(nT) - \frac{RC}{T} u_2[(n-1)T] = u_1(nT)$$

$$u_2(nT) = \frac{1}{1 + \frac{RC}{T}} u_1(nT) + \frac{\frac{RC}{T}}{1 + \frac{RC}{T}} u_2[(n-1)T]$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2(nT) = a u_1(nT) + b u_2[(n-1)T]}$$

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE

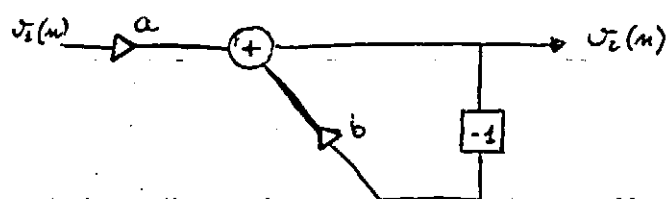
3-5/a

Cio vuol dire che il campione di uscita all'istante n è uguale al campione di ingresso all'istante n moltiplicato per a , più il campione di uscita all'istante precedente moltiplicato per la costante b .

Ve quindi mantenuto in memoria il campione di uscita per poi essere utilizzato al passo seguente.

Ne sistemi più grandi occorrerà mantenere più campioni, in particolare le unità di ritardo aumentano con l'ordine del sistema. Il sistema in esame è un sistema del 1° ordine e possiede una unità di ritardo.

Si può utilizzare un grafo di flusso per rappresentare l'espressione ottenuta, nel modo seguente,



FORMA CANONICA

L'espressione generale dell'equazione alle differenze finite può includere ritardi, non solo all'uscita ma anche all'ingresso

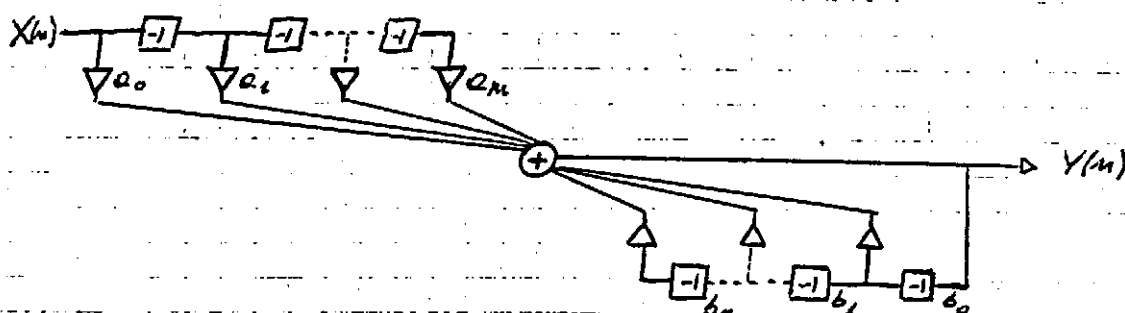
$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

di solito si preferisce avere $b_0 = 1$ per mettere in evidenza l'uscita del sistema, per cui

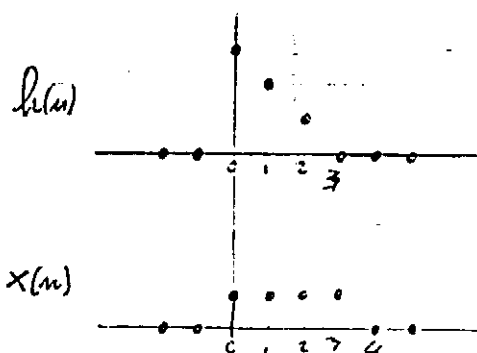
si ha

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$

Il grafo generale è quindi:



ES. Supponiamo che il nostro sistema abbia una risposta impulsiva $h(n)$



e diamo in ingresso la sequenza $x(n)$

La uscita avrà naturalmente la somma di convoluzione

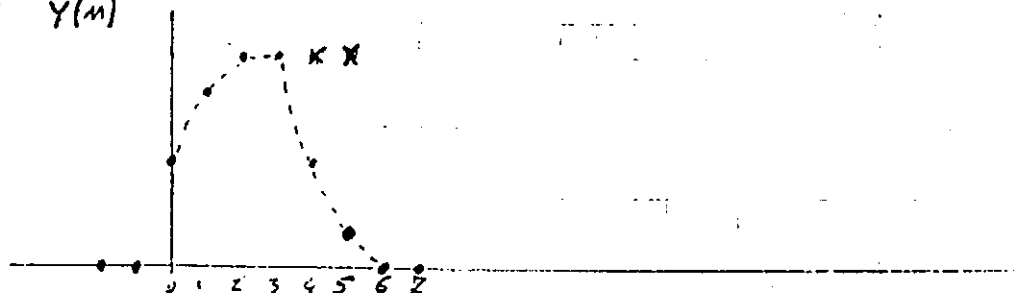
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n-m)$$

$$\Rightarrow y(0) = \sum_m x(m) \cdot h(0-m) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$y(1) = \sum_m x(m) \cdot h(1-m) = x(1)h(1) + x(0)h(0) = 5$$

$$y(2) = \sum_m x(m) \cdot h(2-m) = 3 + 2 + 1 = 6$$

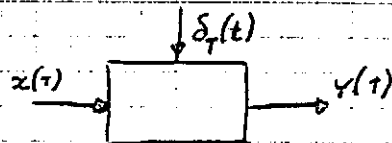
$\Rightarrow y(n)$



3-6-9

~~Il sistema~~ Vogliamo ora vedere qual'è l'effetto della discretizzazione del segnale nel dominio della frequenza, ovvero come viene modificata la risposta in frequenza del sistema, in cui viene introdotto un segnale discreto.

Un campionatore ideale si può schematizzare come segue



dove $\delta_T(t)$ è un treno di impulsi unitari distanziati T da un periodo T ovvero

$$\begin{cases} \delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT) \\ y(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT)$$

$\delta_T(t)$ è una funzione periodica e quindi sviluppabile in serie di Fourier, ossia

$$\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_K e^{jK\omega_c t}$$

$$\text{con } \omega_c = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_K = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta_T(t) e^{-jK\omega_c t} dt$$

$$\text{quindi } C_K = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT) e^{-jK\omega_c t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta(T - KT) e^{-jK\omega_c T} dt$$

per le proprietà della δ si ha che

$$C_K = \frac{1}{T}$$

per cui

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jK\omega_c t}$$

Tornando alla $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{jk\omega_c t}$$

Questa è la risposta del campionatore ideale

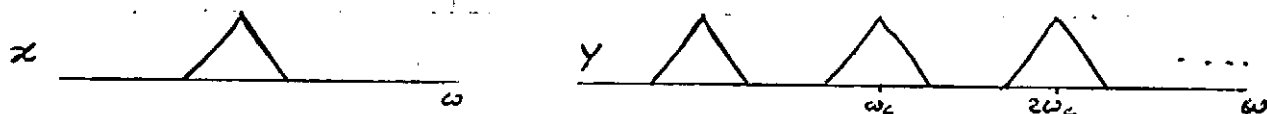
Per vedere il comportamento nel dominio delle frequenze occorre fare la Trasformata di Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s - jk\omega_c)$$

e facendo la Trsf. di Fourier

$$Y(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[j(\omega - k\omega_c)]$$

Questa espressione ci dice che se lo spettro originario del segnale $x(t)$ è $X(j\omega)$, il segnale campionato $y(t)$ ha uno spettro ripetuto infinite volte sull'asse delle frequenze con periodo ω_c

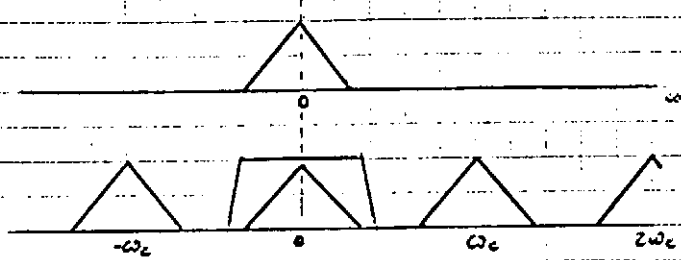


Il campionamento quindi, introduce una ripetizione dello spettro originario del segnale lungo tutto l'asse delle frequenze, dove ogni immagine dista ω_c dalle successive.

Qui si inizia ad intuire la risposta alla domanda iniziale su quanto dovesse essere la frequenza di campionamento.

Possiamo trovarci di fronte, infatti, a due situazioni:

- ① Supponiamo che lo spettro originario del segnale $x(t)$ sia il seguente



e la frequenza ω_c me-
Tale che il segnale campio-
nato abbia uno spettro
del tipo a lato,
in cui le immagini

risultano distanziate l'una dall'altra.

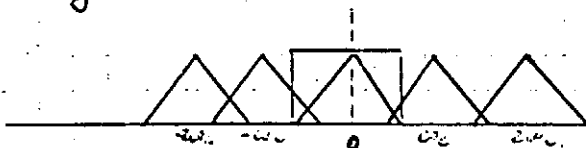
Per riportarlo nella forma originale, dovremo utilizzare un filtro analogico che prelevi lo spettro in banda base.

In questo caso la frequenza di campionamento è stata scelta in modo opportuno.

Nel nostro sistema di elaborazione basterà quindi postporre un filtro low-pass che tagli opportunamente le immagini per avere il segnale desiderato.

Si potrebbe avere però un secondo caso

- ② Se la frequenza di campionamento fosse troppo bassa, il risultato sarebbe quello di sovrapporre gli estremi delle immagini, dando vita al fenomeno dell'ALIASING



In questo caso è ormai impossibile recuperare il segnale originario, per quanto buono riusciamo a fare il filtro passa basso in uscita. Esso è irrimediabilmente distorto a causa della frequenza di campionamento troppo bassa.

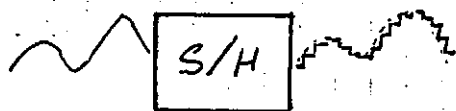
Dalle considerazioni appena fatte risulta chiaro che, a patto di riuscire a fare dei buoni filtri analogici, la frequenza di campionamento deve essere almeno il doppio della massima frequenza del segnale.

Il problema che nasce a questo punto, è come fare nel caso che il segnale di ingresso sia un segnale a spettro illimitato; come si fa ad imporre una ω_c doppia, rispetto alla frequenza massima del segnale se questa è illimitata?

La risposta è semplice: si limita la banda del segnale premettendo al circuito campionatore un filtro (detto ANTI-ALIAS) ancora di tipo passa-basso.

Per studiare i processi numerici ^{nel dominio della frequenza} V_z si utilizza uno strumento analogo alla Trasformata di Laplace detto TRASFORMATO Z.

Torniamo per un attimo alle forme d'onda che esce da un circuito S/H



e calcolandone la Trasformata di Laplace. Essendo una funzione composta da tratti costanti si ha

$$V_z(s) = \int_0^T V_z(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} V_z(t) e^{-st} dt + \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} V_z(t) e^{-st} dt + \dots$$

$$\Rightarrow V_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} V_z(nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} V_z(nT) \frac{e^{-s n T} - e^{-s(n+1)T}}{s}$$

3-8/9

$$\Rightarrow V_z(s) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} V_z(nT)}_{V(s)} \underbrace{e^{-snT} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)}_{H(s)}$$

$H(s)$ è l'effetto su tutto il processo che dà l'holding (e si chiama infatti funzione di holding) e non dà contributo quando si è in condizioni ideali.

La Trasformata che ci interessa è quindi la $V(s)$ che semplifichiamo effettuando la sostituzione

$$z = e^{sT}$$

$$\Rightarrow V_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_z(n) z^{-n}$$

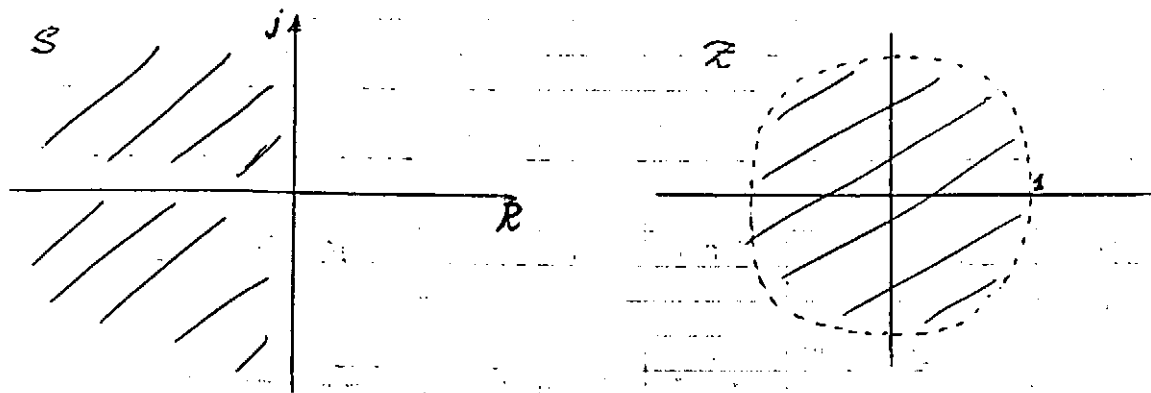
TRASFORMATTA z

Questa Trasformata ha la stessa operatività della Transf. di Laplace, soprattutto per quanto riguarda la funzione di trasferimento di un sistema.

Vediamo che tipo di dualità c'è tra dominio s e dominio z .

Vediamo innanzitutto che se $s = j\omega$, $z = e^{j\omega T}$:

- nel piano s , variando ω ci si muove sulle ordinate,
- nel piano z , variando ω , si varia la fase del vettore $e^{j\frac{2\pi F}{F_c}}$ di modulo 1.



- Inoltre il semipiano sinistro del piano s è contenuto all'interno della circonferenza di raggio 1 del piano z , in quanto se $s = -\alpha + j\omega \Rightarrow z = e^{-\alpha T} e^{j\omega T}$ con $e^{-\alpha T} < 1$
- Da qui deriva che un sistema stabile, ossia che ha i poli nel semipiano sinistro del piano s , avrà i poli all'interno della circonferenza unitaria nel piano z .

- Ricaviamo la Trasformata z di alcune sequenze

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \quad \Leftarrow \delta(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-n_0) z^{-n} = z^{-n_0} \quad \Leftarrow \delta(n-n_0)$$

Questo è un risultato importante perché ci dice che la Trasformata z di una funzione traslata di n_0 campioni è la Trasformata z delle stesse funzioni non traslate moltiplicate per z^{-n_0} .

Tornando all'equazione alle differenze finite per il filtro RC del 1° ordine

$$y(n) = a x(n) + b y(n-1)$$

la possiamo ora riscrivere in funzione di z

$$\Rightarrow Y(z) = a X(z) + b z^{-1} Y(z)$$

sfruttando la linearità della z -Trasformata e quindi

$$Y(z)(1 - b z^{-1}) = a X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{a}{1 - b z^{-1}}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO
DEL
FILTRO RC

3-9/01

Potremo ora fare dei controlli sulle $H(z)$

Trovata

$$H(z) = \frac{a}{1-bz^{-1}} = \frac{a \cdot z}{z-b}$$

Ponendoci sul piano z , abbiamo un polo ed uno zero disposti

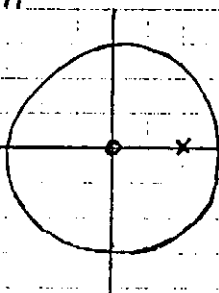
come in

figura:

avre lo

zero sull'origine

e il polo sul punto b che come sappiamo è minore di 1 ($b = \frac{z/r}{1+z/r}$)



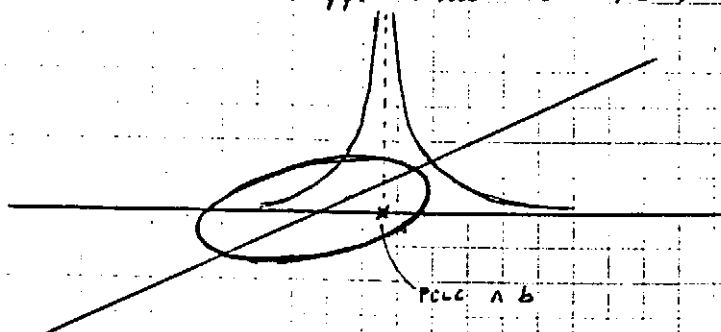
MAPPA POLI-ZERI
DI $H(z)$

Riflettiamo un attimo sul significato della distribuzione di poli e zeri trovata.

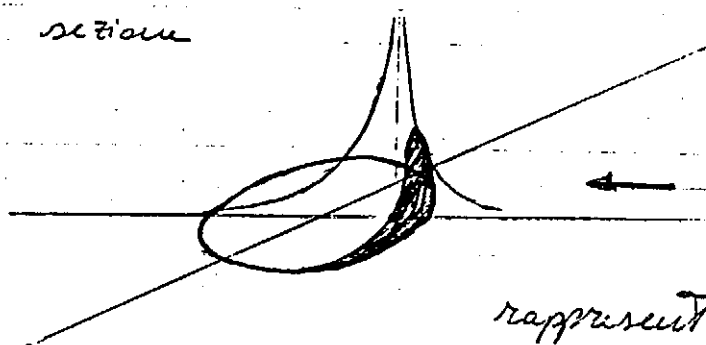
Dato la $H(z)$ è possibile ricavare la risposta in frequenza del sistema calcolando la Trasformata z lungo la circonferenza unitaria (e passando con un $j\omega$).

La Trasformata z è, matematicamente, una funzione complessa di variabile complessa. Definito il piano z , sia il modulo che la fase di $H(z)$ corrispondono a due superfici nello spazio.

La superficie relativa al modulo di $H(z)$ calcolate precedentemente sarebbe approssimativamente:



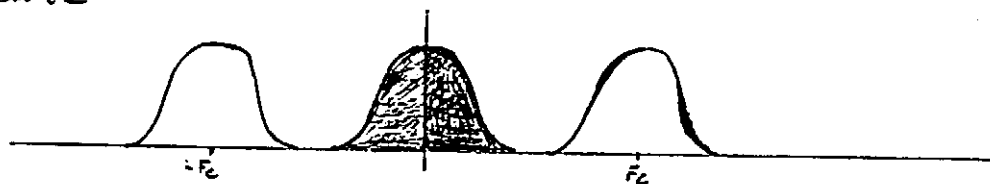
Calcolare la Trasformata z lungo la circonferenza unitaria, non vuol dire altro che sezionare la superficie ottenuta con un cilindro passante per la circonferenza unitaria. Si ottiene quindi la seguente sezione



che rappresenta il valore della z -Trasformata sulla circonferenza, ovvero la risposta in frequenza del sistema rappresentato (il modulo in questo caso). Se ora apro la circonferenza unitaria e la giro in direzione della freccia, ricordando che

$$z = e^{sT} = e^{j\omega T} = e^{j\frac{2\pi F}{f_c} T}$$

percorrendo la circonferenza ottengo l'immagine sdraiata delle curve, ovvero del modulo delle frequenze



Se consideriamo l'immagine in banda base sull'asse positive, otteniamo come ci aspettavamo un andamento di tipo passa-basso.

Osserviamo che la disposizione del polo (b) è determinante per la disposizione delle frequenze di taglio.

In tutto questo discorso non abbiamo considerato lo zero posto sull'origine. Il perché è semplice:

3-10/01

poli e zeri disposti sull'origine, restituiscono una costante sulla circonferenza unitaria, come non danno alcuna caratterizzazione al sistema.

Le caratteristiche del sistema sono date esclusivamente dai poli e dagli zeri generici.

Analiticamente, per calcolare la risposta in frequenza è sufficiente quindi operare la sostituzione

$$z = e^{j\omega T}$$

e quindi

$$H(j\omega) = \frac{a}{1 - b e^{-j\omega T}}$$

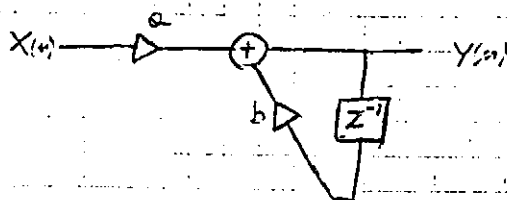
dopo di che sarà possibile isolare la parte reale ed immaginaria e calcolare modulo e fase di H .

Abbiamo visto i 4 strumenti che possiamo usare per l'analisi dei nostri sistemi

- EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE FINITE $y(n) = a x(n) + b y(n-1)$
- TRASFORMAZIONE DELLA F. DI T. $H(z) = \frac{a}{1 - b z^{-1}}$
- TRASFORMATA DI FOURIER DELLA F.D.T. $H(j\omega) = \frac{a}{1 - b e^{-j\omega T}}$
- MAPPA POLI E ZERI

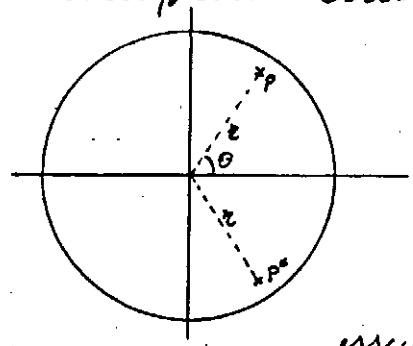


e qui si può appioppare il ramo di flusso dove ora possiamo ~~effettivamente~~ mettere z^{-1} al posto del ritardo



È da osservare che nel caso numerico, la risposta in frequenza non tende ad un infinito all'infinito, ma si ripete sempre uguale e si ripete. Quindi la risposta di un filtro digitale è caratterizzata solo tra $\pm \frac{F_c}{2}$. D'altro canto non andremo mai ad operare al di fuori di questo ambito di frequenze.

Analizziamo ora un sistema del 2° ordine, che quindi possiede solo una coppia di poli complessi e coniugati. Ora non partiremo più dal caso continuo in quanto è inutile ed anche meno semplice, ma partiremo direttamente dalla rappresentazione dei poli del sistema avendo cura di posizionarli in modo che siano effettivamente complessi coniugati.



Da cui la funzione di Trasferimento è

$$H(z) = \frac{K}{(z-p)(z-p^*)} = \frac{K}{z^2 + pp^* - z(p+p^*)}$$

essendo
$$\begin{cases} p = ze^{j\theta} \\ p^* = ze^{-j\theta} \end{cases} \quad \text{con } \theta = \omega T = \frac{2\pi F}{F_c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} pp^* = z^2 \\ p+p^* = z(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = z(\cos\theta + j\sin\theta + \cos\theta - j\sin\theta) = 2z\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{K}{z^2 + z^2 - 2z^2\cos\theta}$$

Ricorriamo ora l'equazione alle differenze finite; per far questo, occorrendoci i ritardi, conviene dividere l'espressione per z^{-2}

~~3.11/9~~ 3.11/9

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{K}{z^2 + e^{2j\theta} z - e^{j\theta}} = \frac{K z^{-2}}{1 + e^{2j\theta} z^{-1} - e^{j\theta} z^{-2}}$$

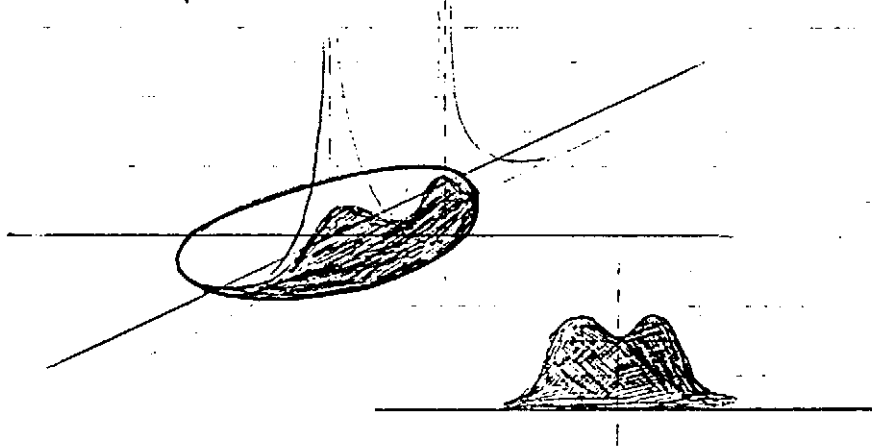
⇒ secondo l'anti trasformata z

$$Y(z) (z^2 z^{-2} - 2 \cos \theta z^{-1} + 1) = K z^{-2} \cdot X(z)$$

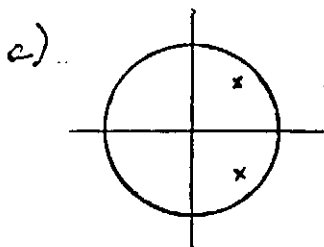
$$\Rightarrow z^2 y(n-2) - 2 \cos \theta y(n-1) + y(n) = K x(n-2)$$

$$\Rightarrow y(n) = K x(n-2) + 2 \cos \theta y(n-1) - z^2 y(n-2)$$

Vediamo se sul piano z ho effettivamente un comportamento passabanda

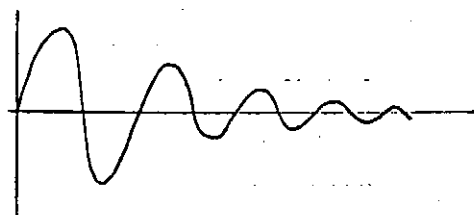


A seconda di come si spostano i poli complessi coniugati si ha che il sistema risponde in modo diverso: possiamo distinguere i 3 casi:

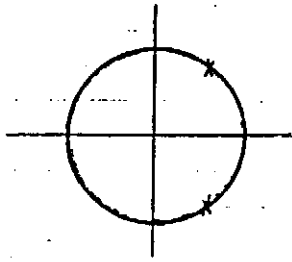


Se i poli sono interni alle circonferenze il sistema avrà una risposta impulsiva del

Tipo

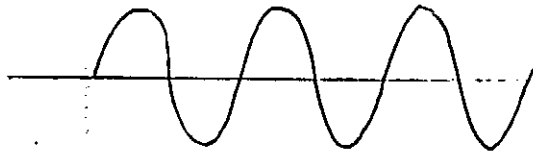


b)

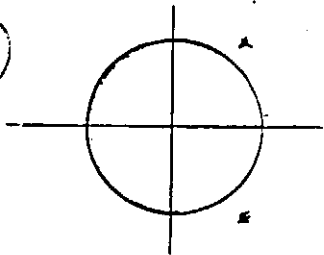


Se i poli sono sulla circonferenza si ha una situazione particolare in quanto in analogico, ciò corrisponde ad una instabilità.

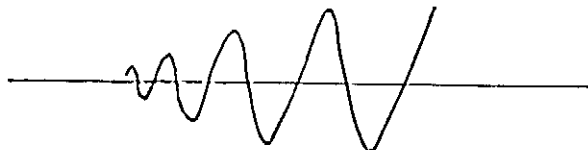
Si realizza un oscillatore che in analogico non sarebbe possibile in quanto non potremmo eliminare le perdite del sistema. La risposta impulsiva è quindi una sinusoidale.



c)



Se i poli sono esterni, la risposta impulsiva diverge in quanto il sistema è instabile.



La cosa particolare che si verifica è che in analogico il sistema satura immediatamente, mentre in numerico, si può controllare un po' alla volta anche le divergenze del sistema.

Adolirittura, mentre l'algoritmo gira si possono spostare i poli con l'effetto di modulare la risposta in ampiezza.

TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

La DFT è un altro strumento che si usa nello studio dei sistemi numerici. Esso nasce dalle considerazioni che tutte le grandezze, gli algoritmi che utilizziamo lavorano nel Tempo discreto; le uniche grandezze che non abbiamo ancora discretizzato sono le Trasformate, ovvero la Trasformata z , e la Trasformata di Fourier che sono ancora grandezze continue. Appare quindi chiaro che in una macchina che usiamo per fare calcoli, anche l'informazione nel dominio della frequenza non risulti discreta.

Definiamo la sequenza periodica $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$ dove N è la lunghezza della sequenza x e r un numero intero.

Definiamo inoltre il seguente esponenziale che ricorrerà sempre in futuro:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$$

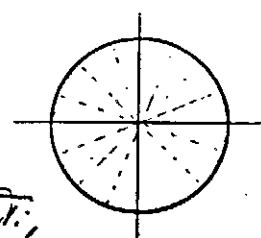
il termine $\frac{2\pi}{N}$ indica una divisione in N parti dell'angolo giro, mentre m, k sono 2 indici correlati,

che possono cioè variare, anche se solitamente variaziamo solo una per volta, in corrispondenza dell'operazione che facciamo.

Possiamo ora scrivere la sequenza periodica $\tilde{x}(n)$ come

$$\tilde{x}(n) = \sum_k X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

La sommatoria si estende all'infinito e volendo richiama l'espressione di uno sviluppo in serie di Fourier



3-13/a

in cui un segnale periodico è uguale alla somma, o sovrapposizione di infinite armoniche, moltiplicate per un coefficiente $X(k)$.

Resta ora da vedere che legame c'è tra $\tilde{x}(n)$ ed i coefficienti $X(k)$.

La prima cosa che si osserva è che l'esponenziale $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ subisce una periodicità, ossia si ripete ogni N punti e quindi tanto vale limitare la somma ad N punti ($0 \dots N-1$).

Questo ha una sua analogia con la ripetizione dello spettro del segnale campionato che abbiamo già osservato, ed è un risultato importante; infatti è molto diverso dalle serie di Fourier ^{nel caso continuo} dove c'è sì, la discretizzazione dello spettro, ma questo è esteso all'infinito: avendo discretizzato un segnale periodico, lo spettro non è solo discreto ma è anche periodico, e tanto vale considerare solo un periodo.

Ricaviamo ora i coefficienti $X(k)$.

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}m(m-k)}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}m(m-k)}$$

Si dimostra che

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}m(m-k)} = \begin{cases} N & \text{se } m=k \\ 0 & \text{se } m \neq k \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

TRASFORMATA DISCRETA
DI FOURIER
DFT

e quindi

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

TRASFORMATA DISCRETA INVERSA
DI FOURIER
IDFT

Abbiamo detto che la sezione della Trasformata Z lungo la circonferenza unitaria è la Trasformata di Fourier. Si può dimostrare che campionando la curva che si ottiene sezionando come detto la Trasformata Z , si ottengono i coefficienti della DFT. Infatti, presa la sequenza periodica $x(n)$, la sua Trasformata Z sarà

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

Campionando, ovvero dire prendendo i valori sulle circonferenze unitarie nei punti $z = e^{j \frac{2\pi}{N} k}$ con $k=0, \dots, N-1$

$$\Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

ed abbiamo così ottenuto la DFT.

Abbiamo quindi visto che lo spettro che deriva da un segnale discreto è discreto e periodico, per cui è possibile limitare il numero di righe spettrali da considerare, il quale è uguale al numero di campioni (N). Essendo però i campioni, presi sulla circonferenza unitaria, e quindi potenze complesse coniugate, l'informazione spettrale si riduce a $N/2$ righe spettrali.

3/14 a

Vista come strumento fine a se stesso, la DFT serve a calcolare lo spettro di un segnale discreto. Vedremo come però potrà servire anche ad altri scopi particolari.

PROPRIETÀ DELLA DFT.

• Se la sequenza è reale

$$\begin{cases} |X(k)| = |X(N-k)| \\ \varphi(k) = -\varphi(N-k) & k = 1 \dots \frac{N}{2}-1 \\ X(N-k) = X^*(k) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Se } \begin{cases} x_1(n) \rightarrow X_1(k) \\ x_2(n) \rightarrow X_2(k) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_m x_1(m) x_2(m-n) = X_1(k) \cdot X_2(k) \\ x_1(n) \cdot x_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) X_2(k-m) \end{cases}$$

Iniziamo ora a parlare del filtraggio digitale.

Esistono due tipi di filtri numerici

a) FILTRI IIR (filtri a risposta impulsiva illimitata)

b) FILTRI FIR (filtri a risposta impulsiva finita)

I filtri IIR sono molto vicini al modello analogico, mentre i filtri FIR non hanno una diretta controparte analogica. Quest'ultimi possono essere visti come una scomposizione in serie di un modello Troncato a N Termini; questo ovviamente non si può realizzare nel continuo, ma nel discreto si.

FILTRI IIR.

I filtri IIR sono una derivazione molto stretta dei modelli analogici. Ci occuperemo ora della modellizzazione e della sintesi di filtri numerici selettivi, ma che abbiano una risposta in frequenza di tipo selettivo. bisogna ^{per} tenere presente che possono esserci filtri particolari in cui la risposta non è selettiva (filtri equalizzatori).

Il punto di partenza per il progetto di un filtro IIR è il modello analogico. Questo è utile perché in questo modo è possibile sfruttare il Know-how già acquisito in campo analogico dove esistono modelli molto avanzati per lo sviluppo di filtri. Il problema si riduce a Trovare delle Trasformazioni dal dominio s al dominio z . Le Trasformazioni impiegate sono sostanzialmente 3:

- TRASFORMAZIONI z -STANDARD

- " BILINEARE

- " z -ADATTATA

3-15/a

Ciascuna di queste Trasformazioni ci fa pensare da s in z , ma ognuna richiede una forma particolare della funzione di Trasferimento.

TRASFORMAZIONE Z-STANDARD

La T. z-Standard è una Trasformazione che lascia invariata la risposta impulsiva.

Sappiamo che la funzione di Trasferimento è la Trasformata di Laplace della risposta impulsiva; allora quello che ci fa è costruire una $H(z)$ Tale che ~~con~~ da una sequenza, ovvero aut. Trasformata restituisca la risposta impulsiva del filtro analogico di partenza.

Facciamo delle considerazioni.

Supponiamo di partire da una $H(s)$ scomposta in somma di frazioni parziali

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s+s_i}$$

la sua risposta impulsiva è

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \sum_{i=1}^N A_i e^{-s_i t}$$

che campionata da

$$h(kT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-s_i kT}$$

da cui possiamo risalire alla Trasformata z .

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N A_i e^{-s_i kT} z^{-k} = \\ &= \sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s_i T} z^{-1})^k \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{-s_i T} z^{-1}}$$

Questo nel caso che la $H(s)$ sia scritta come somma di Termini ad un polo.

In generale

$$H(z) = \sum_{p=1}^P \frac{A_p}{B_p z^{-1} + 1} + \sum_{l=1}^L \frac{A_l z^{-1} + A_l^{(c)}}{B_l z^{-2} + B_l^{(c)} z^{-1} + 1}$$

nel caso ci siano anche termini di secondo ordine con poli complessi coniugati.

Una realizzazione di questo tipo presenta però un inconveniente: abbiamo visto che compinando un segnale continuo provochiamo una periodizzazione del suo spettro. Se lo spettro in questione è limitato, le sue immagini non si sovrappongono, altrimenti si avrà il fenomeno dell'aliasing. Il problema è che il nostro modello, per sua natura, dal momento che è costituito da somme di frequenze, è a spettro ampio e quindi ovvero sicuramente aliasing. Quindi bisogna ricorrere a dei compromessi, p.e. usare questo modello solo per filtri LP o BP, sicuramente non passa-alto altrimenti non avremo sicuramente una risposta aderente al modello analogico.

TRASFORMAZIONE BILINEARE

La T. bilineare è di fatto la più utilizzata nella realizzazione di filtri selettivi.

Ricordiamo che la Trasformazione da $s \rightarrow z$ non è assolutamente una T. lineare, infatti:

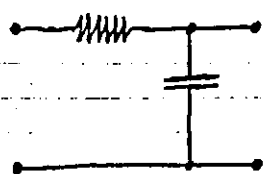
$$z = e^{sT} \Rightarrow s = \frac{1}{T} \ln z$$

Per linearizzarla, sviluppiamo $\ln z$ in serie di Taylor fermandoci al 1° Termine

$$\ln z \approx 2 \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow s \approx \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

3-16/01

Sviluppiamo in questo modo l'esercizio già fatto per il circuito RC per vedere di quanto si discosta il risultato.

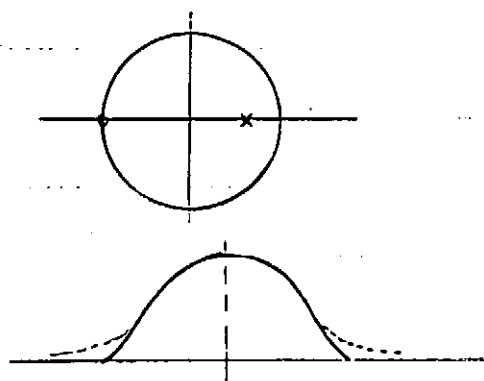


$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

$$\Rightarrow H(z) \approx \frac{1}{1 + \frac{\tau T}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \Rightarrow$$

$$H(z) \approx \frac{\frac{1}{1 + \frac{\tau T}{T}} + \frac{1}{1 + \frac{\tau T}{T}} z^{-1}}{1 + \frac{1 - \frac{\tau T}{T}}{1 + \frac{\tau T}{T}} z^{-1}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} = \frac{a_0(1+z)}{z + b_1}$$

La differenza con il precedente risultato è nell'aggiunta di uno zero nel punto -1 .



Questo, da come comportamento in frequenza un ventaglio in punto, obbliga le code delle curve ad andare a zero.

In effetti, le risposte di questo modello è più aderenti

Te alle specifiche progettuali di quanto non fosse il precedente metodo.

Purtroppo qualcosa si ripete per questo, ed è l'approssimazione che abbiamo fatto di cui si deve assolutamente tener conto, pena dei forti distorcimenti del modello analogico. Vediamo a questo punto

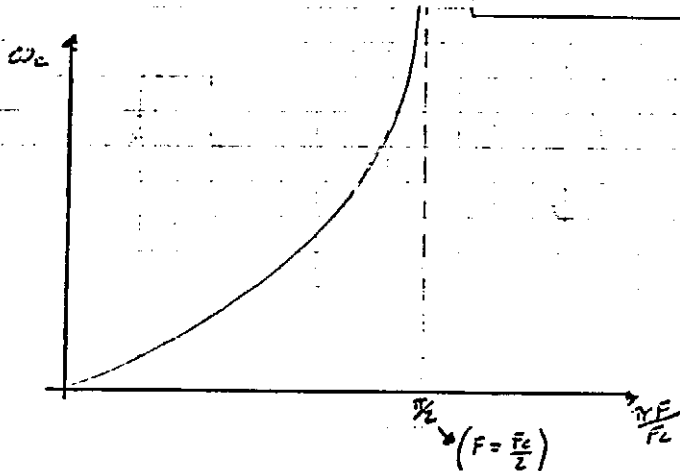
$$S = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow j\omega_a = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega_d T}}{1 + e^{-j\omega_d T}}$$

ovvero $\omega(\text{analogico})$ e $\omega(\text{digitale})$ non sono proprio

uguali per l'effetto dell'approssimazione.

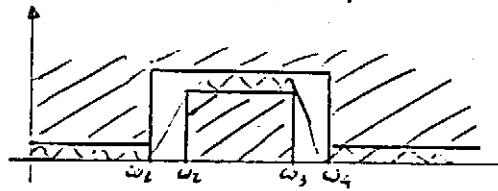
$$\Rightarrow j\omega_c = \frac{z}{T} \frac{e^{j\omega_c T/2} - e^{-j\omega_c T/2}}{e^{j\omega_c T/2} + e^{-j\omega_c T/2}} \Rightarrow j\omega_c = \frac{z}{T} jT \vartheta \frac{\omega_c T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{z}{T} T \vartheta \left(\frac{\pi F}{F_c} \right)}$$



Vediamo che la relazione va con la $T\vartheta$, ovvero non è assolutamente lineare.

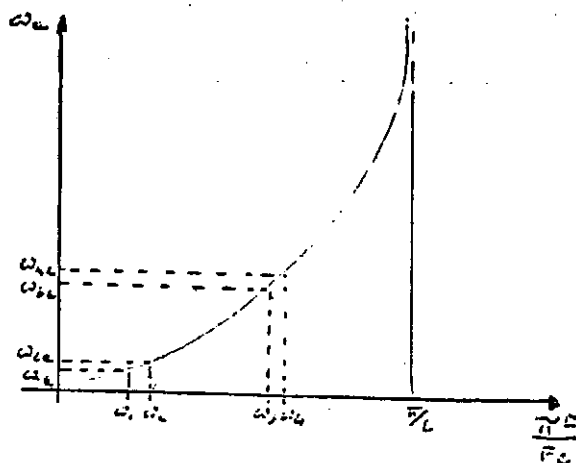
Quello che si fa allora è prevedere le PRE-DISTORSIONI sulla maschera di progetto del filtro.



Una volta stabilite le frequenze di banda

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, si

riportano queste sull'ascissa del grafico che riporta le distorsioni. Il perché di questo è semplice: noi vogliamo che le frequenze $\omega_1, \dots, \omega_4$ siano relative al modello digitale.



$\omega_1, \dots, \omega_4$ saranno le condizioni di progetto e il filtro analogico se vogliamo le frequenze $\omega_1, \dots, \omega_4$ di Tepla nel filtro digitale.

3.12/01

Ora, applicando la Trasformazione bilineare sul progetto analogico predistorto si ottiene il progetto digitale voluto.

TRASFORMAZIONE Z-ADATTATA

La T. z-adattata è forse la meno usata in questo momento per particolari caratteristiche. Essa parte dalla posizione di sostituire alla variabile $s \rightarrow e^{sT}$.

Ne deriva che

$$\left. \begin{aligned} s - a_i &\rightarrow 1 - z^{-1} e^{a_i T} \\ s + a_i &\rightarrow 1 - z^{-1} e^{-a_i T} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{per poli} \\ \text{simplici} \end{array}$$

$$\text{e} \quad 1 - 2z^{-1} e^{-b_j T} \cos(c_j T) + z^{-2} e^{-2b_j T} \quad \text{per coppie di}$$

poli complessi coniugati il cui modulo è $(s+b_j)^2 + c_j^2$.

Questa Trasformazione richiede che la f.d.T. sia nelle forme fattorizzate. L'espressione del filtro digitale è nella seguente forma

$$H(z^{-1}) = \frac{\prod_i (1 + A_i z^{-1}) \cdot \prod (1 + A_k z^{-1} + A_k z^{-2})}{\prod_k (1 + C_k z^{-1}) \cdot \prod (1 + D z^{-1} + E z^{-2})}$$

La particolarità è che abbiamo due prodotti in coseno di vari blocchi

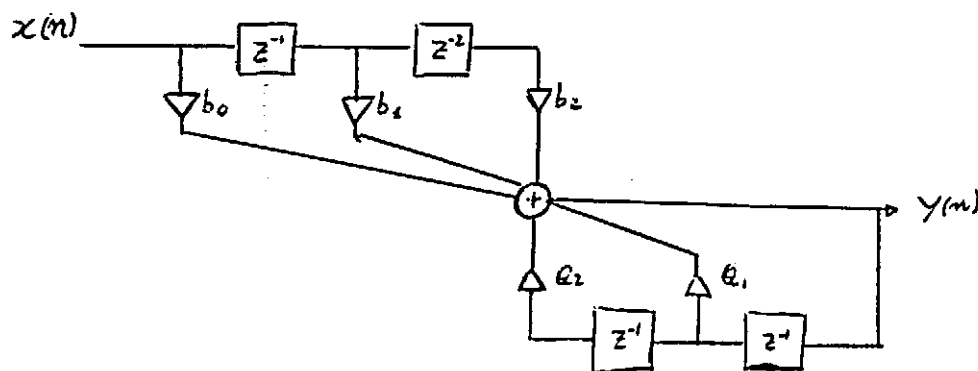


Vediamo ora, una volta ottenuto il modello di polo, alcune tecniche implementative del filtro numerico. Consideriamo la seguente espressione definita

CELLA BIQUADRATICA

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

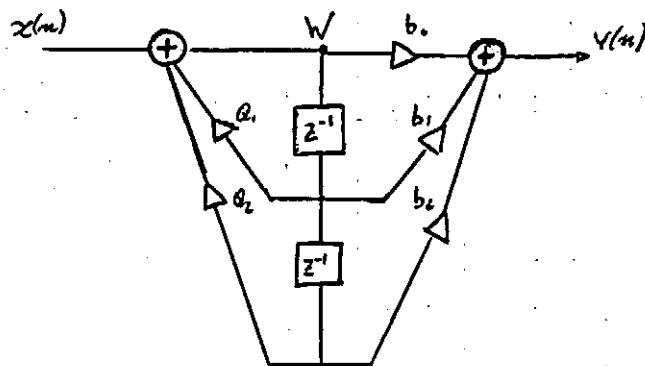
il suo diagramma di flusso, o FORMA DIRETTA



Tornando alle celle biquad

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W(z)Y(z)}{W(z)X(z)} \quad \text{T.c.} \quad \begin{cases} \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ \frac{Y(z)}{W(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \end{cases}$$

il diagramma di flusso diviso



nel quale si è compattate la struttura derivante dalle due espressioni ricevute. Questa struttura risulta meno soggetta agli errori di quantizzazione dei

coefficienti ed è valida anche per ordini diversi dal
secondo e meno di approssimare altri livelli uguali.

Una volta implementate le celle bipseudotriche, ordini
più elevati verranno implementati ponendo in
coscata più celle bipseudotriche ed eventualmente
una cella di ordine 1, anziché realizzare una
cella di ordine n .

Facciamo ora un esempio molto semplice ma che nasce dalle curiosità.

INTEGRATORE DIGITALE

- Il più semplice modo di realizzare un integratore è tramite la seguente equazione alle d.f.

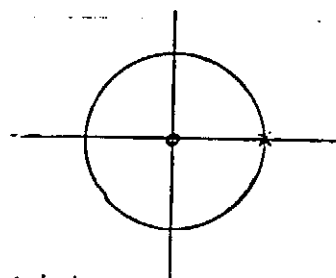
$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

RUNNING SUM
or ZERO-HOLD INTEGRATOR

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 1}$$

$\Rightarrow$



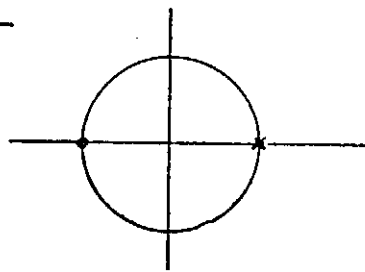
Ossia abbiamo uno zero all'origine ed un polo ad 1. Vediamo che queste equazioni si discostano quindi da quelle reali.

- Un metodo migliore è il seguente

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$$

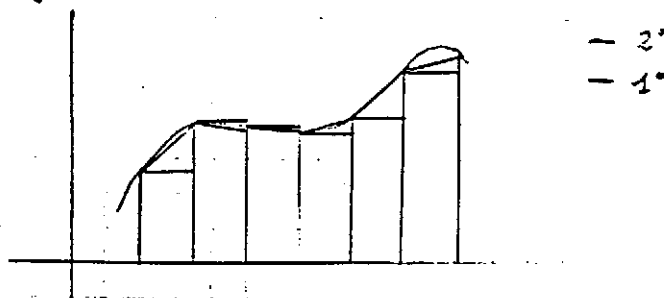
$$\Rightarrow H(z) = \frac{\frac{1}{2}(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1}} = \frac{z+1}{2(z-1)}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{e^{j\omega T} + 1}{2(e^{j\omega T} - 1)}$$



Questo metodo è migliore in quanto nella sua espressione riconosciamo innanzitutto una trasformazione bilineare (?!?), ma graficamente vediamo cosa succede nei due casi.

È ovvio che nel 2° caso commettiamo un errore minore.

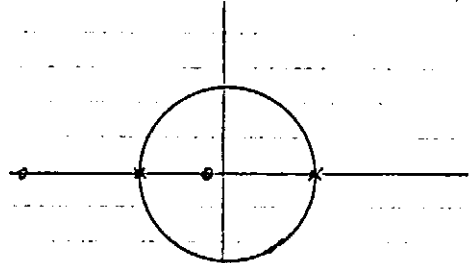


3-19 a

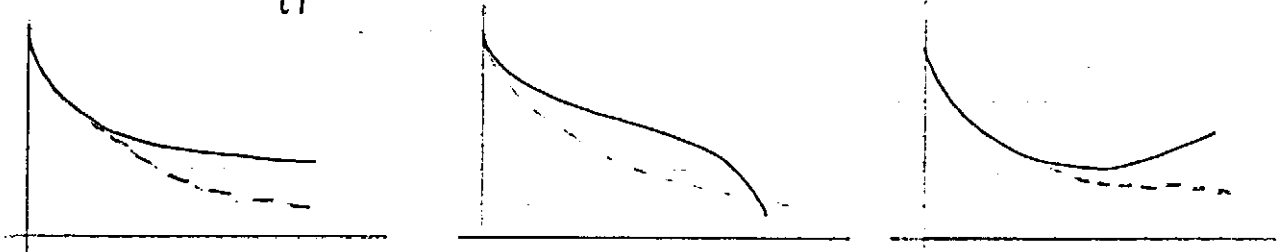
- Un Terzo metodo, detto di SIMPSON consiste di un' approssimazione del 2° ordine

$$y(n) = y(n-2) + \frac{1}{3}(x(n) + 4x(n-1) + x(n-2))$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 4z + 1}{3(z^2 - 1)}$$



Se confrontiamo le risposte in frequenza dei 3 sistemi otteniamo i 3 profili seguenti con la risposta ideale trapezzata



Tutti e 3 pecano alle alte frequenze, come è normale che sia. Tuttavia alle basse frequenze il 3° metodo è senz'altro migliore

Come i filtri analogici, anche i filtri IIR hanno i classici problemi dei filtri come la stabilità, la risposta in fase ecc. Sono tuttavia abbastanza imperfetti in quanto con funzioni di trasferimento relativamente semplici si hanno buone caratteristiche di selettività.

FILTRI FIR

Abbiamo detto che questo modello, può essere visto come il Troncamento di uno sviluppo in serie di potenze. Va da sé che più lo sviluppo è lungo e più ci avviciniamo alle caratteristiche desiderate e quindi ci sarà da fare sempre un compromesso. I filtri FIR comportano un maggior carico di lavoro in fase di progetto e realizzazione in termini di hardware, ma hanno delle loro parti le possibilità di una risposta in fase esattamente lineare.

Supponiamo di avere una risposta impulsiva nel dominio discreto $h(k)$, e di sollecitare questo sistema con il segnale $x(n) = e^{j\omega n}$.

• la risposta del sistema sarà naturalmente

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$$

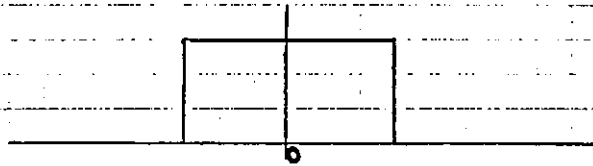
ovvero, la risposta del sistema è uguale al segnale di ingresso per la risposta in frequenza del sistema stesso. Questo proprio per la natura del segnale in ingresso.

Vediamo come entra questo concetto nell'introduzione di questo nuovo tipo di filtri.

3-20/a

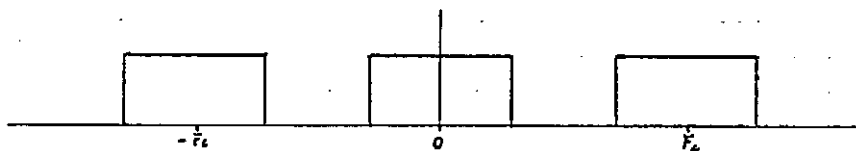
METODO DELLA SERIE DI FOURIER

Supponiamo di avere come dato di progetto la risposta in frequenza di un filtro passa-basso ideale.



Uno dei metodi che si utilizza per la sintesi di un modello di filtro FIR è quello di chiedersi: quale può essere la risposta impulsiva di un sistema che ha come Trasformata di Fourier la nostra maschera.

Naturalmente, dal momento che stiamo nel dominio Tempo-discreto dovremo considerare una risposta in frequenza periodica.

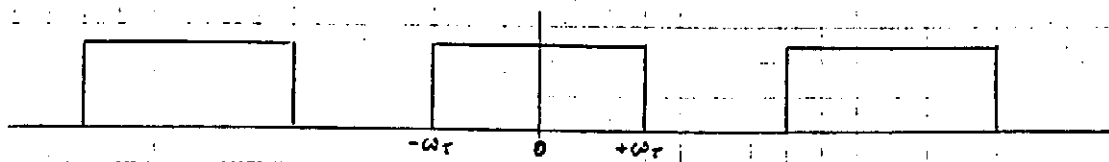


Scriviamo allora le sequent. espressioni, che rappresentano

$$\begin{cases} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} & \text{TRASF. DI FOURIER} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega & \text{ANTITRASF. DI FOURIER} \end{cases}$$

le Trasformate che ci servono per poter individuare la risposta impulsiva che cerchiamo.

Sviluppando infatti il nostro esempio si ha

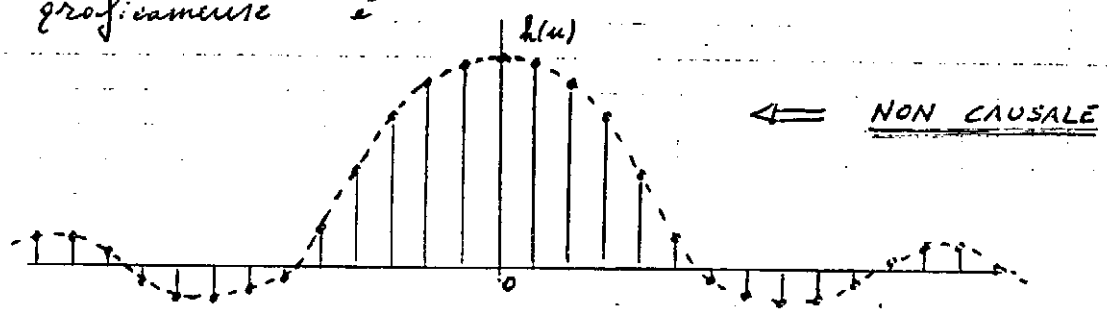


$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_r}^{\omega_r} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega n}}{jn} \right]_{-\omega_r}^{\omega_r} =$$

$$= \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_r n} - e^{-j\omega_r n}) = \frac{1}{2\pi jn} [(\cos \theta + j \sin \theta) - (\cos \theta - j \sin \theta)] =$$

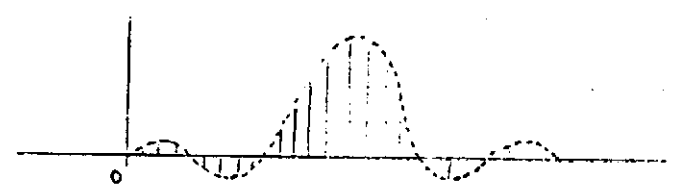
$$\Rightarrow \boxed{h(n) = \frac{1}{n\pi} \sin(n\omega_r)}$$

che graficamente è



una risposta impulsiva non causale in quanto ha valore per n negativo.

Quello che si deve fare allora è causalizzare la $h(n)$ traslando il set di punti di interesse di N posizioni.



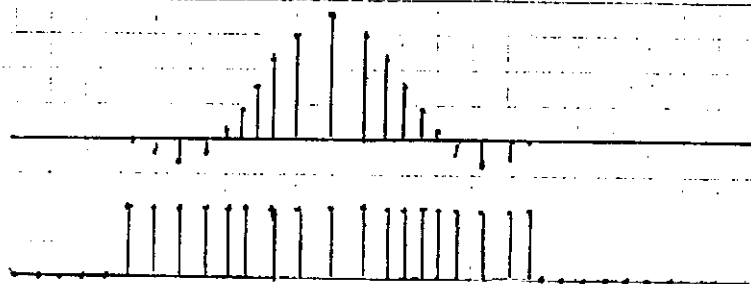
Il punto dolente è stabilire N , ovvero per avere la risposta in frequenza ideale occorre prendere $N \rightarrow +\infty$; un Troncamento della $h(n)$ implica l'accontentarsi di una risposta peggiore "a piacere". Meno campioni si prendono, più veloce sarà il tempo di calcolo e peggiore sarà la risposta.

- È importante notare inoltre che, la risposta non causale ha fase zero e, shiftandola, si altera la risposta in frequenza in termini di fase, linearmente. Questo non ci turba affatto, in quanto una distorsione in fase lineare con la frequenza

3-21/a

non altera la forma del segnale in quanto il ritardo di gruppo è costante.

Tornando alla risposta non causale, Troncare la risposta impulsiva ad n punti non vuol dire altro che moltiplicare la sequenza $h(n)$ per una finestra rettangolare di N punti.



Vediamo allora cosa implica applicare questa finestra rettangolare.

Supponiamo di avere la finestra rettangolare

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & -\frac{N-1}{2} > n > \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

la sua Trasformata di Fourier è

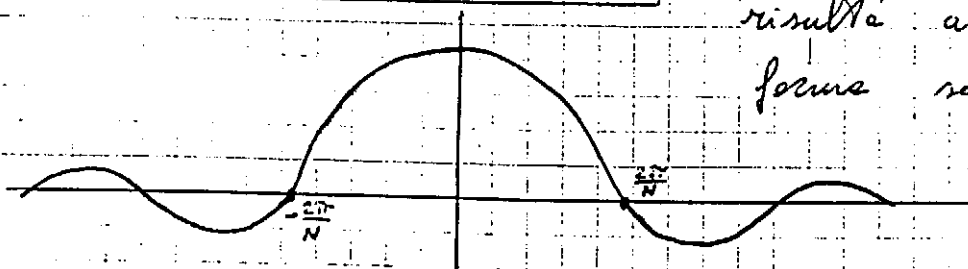
$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega \frac{N-1}{2}} - e^{-j\omega (\frac{N-1}{2} + 1)}}{1 - e^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} (e^{j\omega \frac{N-1}{2}} - e^{-j\omega (\frac{N-1}{2} + 1)})}{e^{j\frac{\omega}{2}} (1 - e^{-j\omega})} = \frac{e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=-M}^{M} q^k = \frac{q^{-M} - q^{M+1}}{1 - q}$$

$$\Rightarrow W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega \frac{N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

che graficamente risulta avere la forma seguente



Sappiamo che una sequenza $h(n)$ può essere espressa con la sua DFT

$$\begin{cases} h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} & \text{DFT} \\ H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} & \text{IDFT} \end{cases}$$

Inoltre abbiamo anche detto che la DFT non è altro che la Trasformata z campionata lungo la circonferenza unitaria

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad \text{e sostituiamo la } h(n)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \right] z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j \frac{2\pi}{N} k} z^{-1} \right)^n \Rightarrow$$

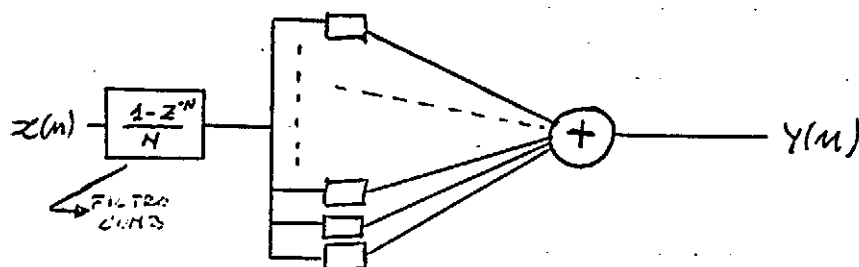
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \left[\frac{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} k} z^{-N}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} k} z^{-1}} \right]$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}}$$

essendo $e^{j \frac{2\pi}{N} k} = 1 \quad \forall k$
 $(e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j \sin 2\pi)$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-z^{-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k}}$$

Se andiamo a sintetizzare questo filtro otteniamo il seguente schema

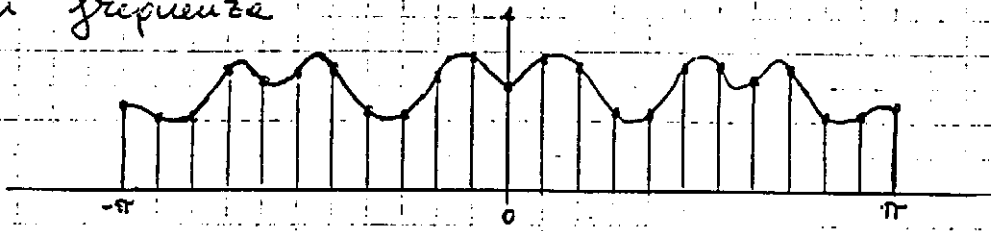


Esaminiamo i singoli blocchi

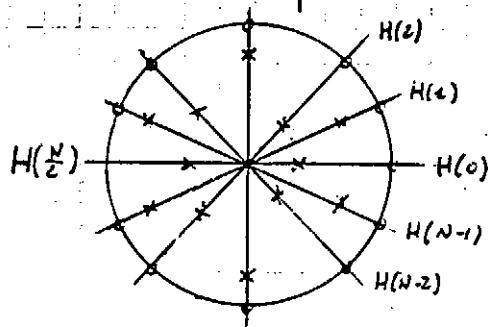
• $H(k)$ è il campionamento delle risposte

3.22/a

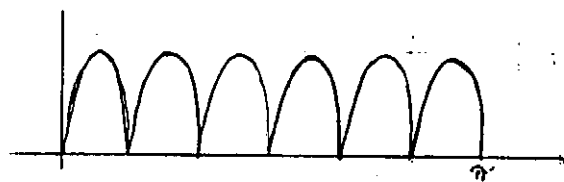
in frequenza



- $1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi K}{N}}$ è il polo complesso coniugato del campione n -esimo (e cui corrisponde il suo coniugato nella parte negativa dello spettro)



- $\frac{1 - z^{-N}}{N}$ è un filtro detto FILTRO COMB (PETTINE) costituito da N zeri equamente distribuiti lungo la circonferenza unitaria. Il risultato di questa distribuzione di zeri è un pettine come



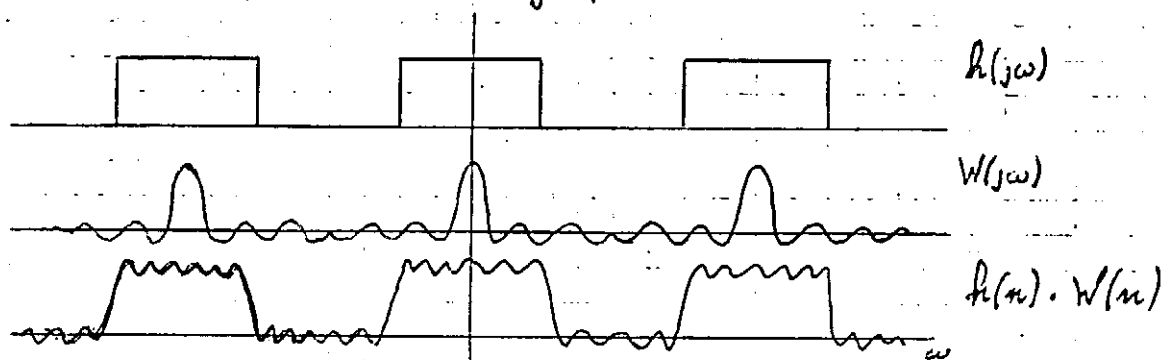
in figura

- Il risultato complessivo è quello di una distribuzione di zeri in cui ci sono dei poli che vanno a compensare nei punti ad hoc per realizzare il comportamento voluto.

Di fatto la risposta in frequenza da noi desiderata viene realizzata con un pettine i cui denti sono modulati dalle presenze dei poli

All'aumentare di N , il lobo centrale si restringe fino a diventare un impulso per $N \rightarrow \infty$.

Ricordando che per le proprietà della DFT, un prodotto nel dominio di n (Tempo-discreto) equivale alla convoluzione nel dominio delle frequenze e viceversa, e quindi il prodotto della $h(n)$ per la finestra rettangolare ha come risultato la convoluzione delle due risposte in frequenza.



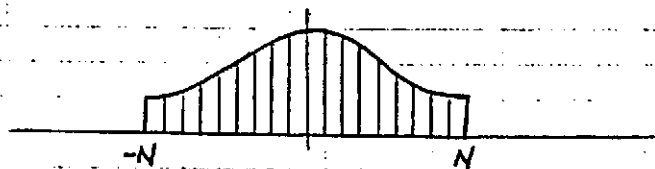
Se $N \rightarrow \infty$ il risultato della convoluzione è lo spettro originario (ideale) in quanto viene convoluto per una delta che lascia il tutto inalterato.

Sono state studiate altre finestre che restituiscono risultati migliori e sono le finestre di

- Hanning $w(n) = 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \quad -N \leq n \leq N$

- Hamming $w(n) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \quad -N \leq n \leq N$

che qualitativamente hanno le forme seguenti



Queste finestre hanno le caratteristiche di esaltare il lobo centrale rispetto ai lobi laterali, del loro spettro.

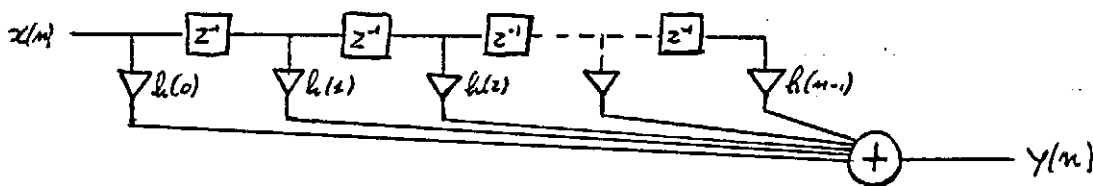
3/23/0

questo fa sì che il ripple sulla convoluzione diminuisce a seconda del Tipo delle finestre che si utilizza.

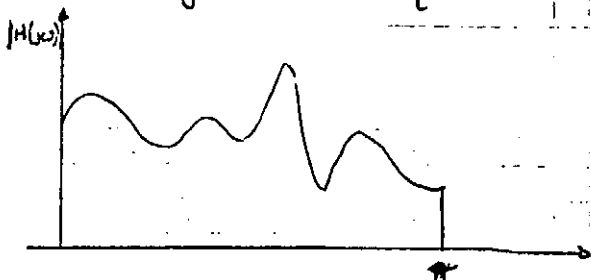
- A questo punto abbiamo ottenuto la risposta impulsiva FINITA del filtro che ci interessa e, calcolando la sua Trasformata z si ottiene un'espressione del Tipo

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

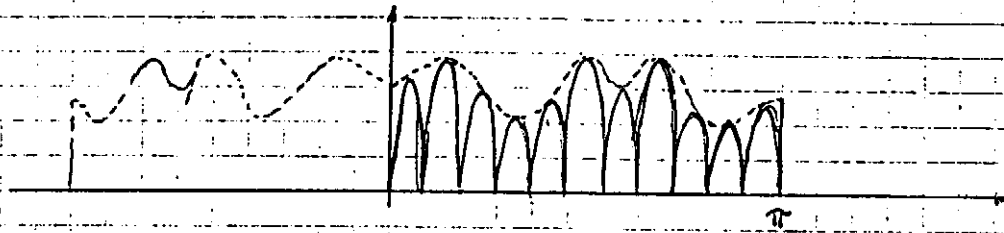
ovvero si ottiene un'espressione di soli zeri (e meglio, in cui i poli sono tutti sull'origine) e la sua implementazione diventa del Tipo seguente



Fino ad ora abbiamo considerato dei metodi per la realizzazione di filtri selettivi. Esistono dei filtri che non sono selettivi come gli equalizzatori; supponiamo ad esempio di voler realizzare un filtro che modifichi la nostra voce come se si sentisse all'interno di un ambiente particolare, come ad esempio una stanza con i suoi echi, rimbombi: vorremmo cioè riprodurre la risposta in frequenza della stanza. In questo caso, la risposta in frequenza è una funzione generica e non strettamente selettiva.



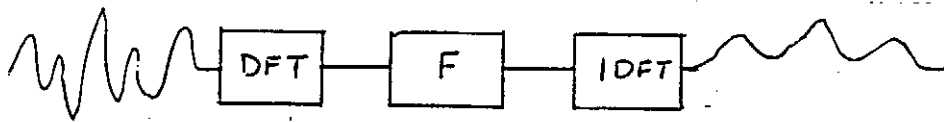
Esaminiamo ora un modello che ci consente la realizzazione di un filtro di questo tipo.



In termini di calcolo, la realizzazione di questo filtro è considerevole in quanto si devono organizzare $\frac{N}{2}$ filtri di 2° ordine in parallelo che sintetizzano i poli complessi coniugati, più la linea di ritardo iniziale (FILTRO COMB).

Un'altra risulta immediato che per avere buone ricostruzioni, N deve essere elevato.

Supponiamo ora la seguente situazione: abbiamo un segnale di ingresso, di cui vogliamo effettuare un determinato filtraggio. Anziché usare una delle tecniche illustrate precedentemente possiamo pensare di effettuare la DFT su tale segnale e calcolare il suo spettro di frequenza.



A questo punto posso semplicemente, nel blocco F , sopprimere le frequenze al di fuori della mia banda di interesse, e sulle sopravvissute applicare la IDFT per ricavarne il segnale di uscita.

Questo metodo è l'uovo di Colombo se non fosse per il fatto che la DFT e la IDFT costituiscono una mole di calcoli non molto differente, che sviluppare, p.e. in tempo reale

3-24/01

non è affatto semplice.

Per di più in un sistema del genere, si potrebbe pensare di spostare le bande passante in F in Tempo reale, in funzione di come cambia una situazione ambientale.

A questo proposito si è elaborato un metodo per velocizzare questi calcoli, chiamato

TRASFORMATA VELOCE DI FOURIER (FFT)

Consideriamo la Trasformata discreta di Fourier

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} n K}$$

il calcolo di queste comprende numerosi prodotti e somme, infatti.

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)e^{-j\frac{2\pi}{4}00} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}01} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4}02} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4}03} \\ X(1) &= x(0)e^{-j\frac{2\pi}{4}10} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}11} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4}12} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4}13} \\ X(2) &= x(0)e^{-j\frac{2\pi}{4}20} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}21} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4}22} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4}23} \\ X(3) &= x(0)e^{-j\frac{2\pi}{4}30} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}31} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4}32} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4}33} \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{pmatrix} X(K) = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ & \searrow & & \\ \vdots & & e^{-j\frac{2\pi}{N}nK} & \\ & \nearrow & & \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{pmatrix} x(n)$$

si hanno $O(N^2)$ operazioni da compiere; quando N è elevato, è difficile implementare questo algoritmo per applicazioni in Tempo reale.

Definiamo allora

$$\begin{cases} W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \\ W_N^{mK} = e^{-j\frac{2\pi}{N}mK} \end{cases} \Rightarrow W_N^{(m+M)(K+EN)} = W_N^{mK}$$

In questo modo la DFT si scrive come

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nK}$$

Definiamo ora le sottosequenze dei campioni pari e dispari

$$\begin{cases} x_1(m) = x(2m) \\ x_2(m) = x(2m+1) \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(k) &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_N^{k(2m)} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(m) W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(m) W_N^{k(2m)} \end{aligned}$$

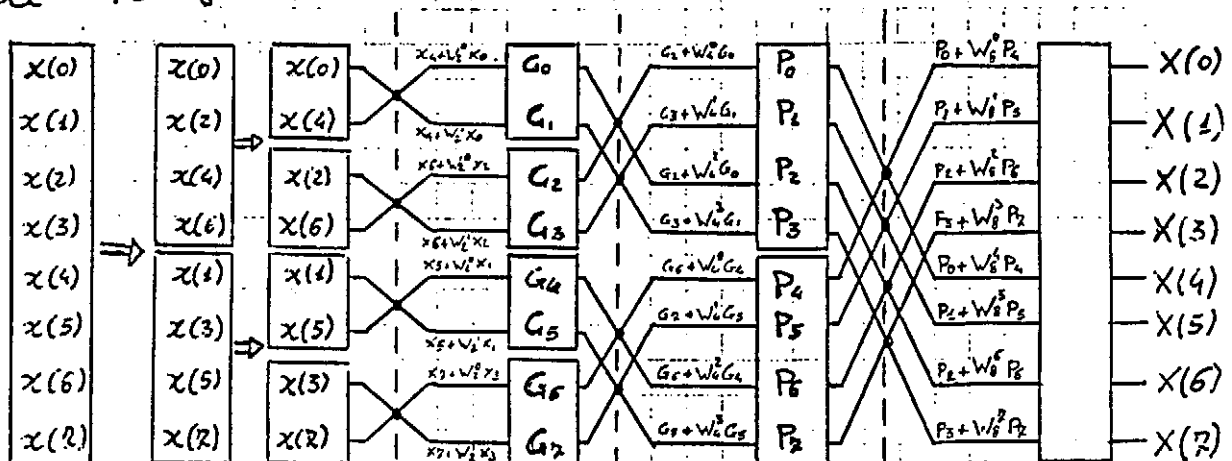
inoltre si ha che $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$

$$\Rightarrow X(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(m) W_{N/2}^{km}$$

Quello appena fatto è il PASSAGGIO FONDAMENTALE della FFT. Non abbiamo fatto altro che dividere il calcolo della DFT in 2 parti, ognuna delle quali è a sua volta una DFT di $\frac{N}{2}$ campioni.

Questo procedimento viene iterato fin quando le 2 sotto sequenze si riducono ad un singolo campione, dopo di che si ricombinano i risultati parziali moltiplicandoli per gli opportuni coefficienti W_N^k .

Vediamo come si ricombinano allora questi prodotti con $N=8$



3/25a

Come si vede nella 1° parte c'è un riordinamento dei campioni $x(n)$ che si realizza con una procedura detta BIT REVERSE molto semplice che consiste nell'inversione dei bit dell'indice che li individua.

n_{10}	$\rightarrow$	n_2	$\rightarrow$	z_2	$\rightarrow$	z_{10}
0		000	B	000		0
1		001	I	100		4
2		010		010		2
3		011	R	110		6
4		100	E	001		1
5		101	V	101		5
6		110	S	011		3
7		111	E	111		7

Nella 2° parte dello schema, ci sono 3 stadi composti da reti BUTTERFLY in cui, ad ogni incrocio c'è la ricombinazione dei coefficienti tramite il prodotto di uno dei 2 per W_N^b e quindi la loro somma. Complessivamente si effettuano $N \log_2 N$ operazioni contro le N^2 originarie (per $N=1024$ si ha un risparmio di calcoli del 99%).

Bisogna tener presente che gli W_N^b sono numeri complessi (r, i) , ma la architettura che si occupa di fare questi calcoli sono progettate a questo scopo.

- Il processo di calcolo complessivo, dovrà quindi seguire le seguenti fasi:
 - si dovrà innanzitutto fissare una finestra Temporale in cui viene prelevato il segnale di ingresso campionato;
 - si esegue la procedura bit reverse per riordinare i campioni;
 - si effettua la FFT tramite il calcolo delle serie Butterfly.

(NON VENDERE)