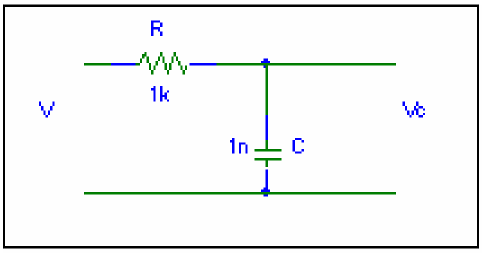
Sistemi LTI descrivibile mediante SDE (Equazioni alle Differenze Standard)

Nella classe dei sistemi LTI una sottoclasse è quella dei sistemi definiti da Equazioni Standard alle Differenze Finite (SDE), dette così in quanto a partire da una equazione integro-differenziale che descrive un determinato fenomeno fisico, integrali e derivate, legate ad incrementi infinitesimi sono sostituiti da differenze calcolate ad incrementi di tempo finiti; esse coinvolgono un numero finito di campioni dell'ingresso e dell' uscita, combinati mediante semplici operazioni di somma e prodotto:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Le equazioni alle differenze finite costituiscono dunque la versione discreta delle equazioni differenziali e ne rappresentano, sotto certe ipotesi, una approssimazione che si può spingere a piacere. Dall'avvento del calcolo digitale esse hanno ormai sostituito, dal punto di vista computazionale le equazioni integro-differenziali, mandando del tutto in soffitta i vecchi calcolatori analogici. La teoria delle equazioni differenziali naturalmente continua ad essere sviluppata, ma nel momento in cui occorre fare delle simulazioni ovvero risolvere un problema dal punto di vista numerico, occorre necessariamente ricorre alla discretizzazione ed al cosiddetto calcolo agli elementi finiti, di cui le equazioni SDE sono un esempio.

Per illustrare il principio su cui è basato il passaggio dal continuo al discreto, analizziamo un caso semplice.
Consideriamo un circuito elettrico RC serie, in cui V è la tensione di ingresso e Vc quella di uscita, ai capi del condensatore:



Le equazioni del circuito, detta i la corrente in ingresso, ed assumendo che l'uscita non carichi il circuito cioè non derivi corrente, sono:

$V = R \cdot i + V_c$	equazione della maglia
$q = C \cdot V_c$	relazione tra tensione e carica nel condensatore
$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV_c}{dt}$	relazione tra carica e corrente nel condensatore

Si ricava quindi l'equazione differenziale del circuito RC:

$$V = R \cdot \frac{dq}{dt} + V_c = R \cdot C \frac{dV_c}{dt} + V_c$$

Se ora approssimiamo l'intervallo infinitesimo dt con un intervallo finito ma piccolo $?t$, molto minore di quella che sappiamo essere la costante di tempo del circuito $t=RC$, approssimeremo allo stesso modo l'infinitesimo dV_c con l'incremento finito $?V_c$.
L'equazione differenziale diventa così una equazione alle differenze; se quindi V_n e V_{n+1} sono i valori della tensione in ingresso all'istante t e $t+?t$ e Vc_n e Vc_{n-1} quelli della tensione in uscita, l'equazione sarà:

$$V_n = R \cdot C \frac{Vc_n - Vc_{n-1}}{\Delta t} + Vc_n$$

Usando la simbologia usuale fino ad ora, con le sostituzioni $V_n \rightarrow x_n$ e $Vc_n \rightarrow y_n$, l'equazione diventa:

$$x_n = R \cdot C \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} + y_n$$

Se ora poniamo $a = \frac{R \cdot C}{\Delta t} >> 1$ avremo

$$x_n = a(y_n - y_{n-1}) + y_n = ay_n - ay_{n-1} + y_n = (1+a)y_n - ay_{n-1}$$

$$(1+a)y_n = x_n + ay_{n-1}$$

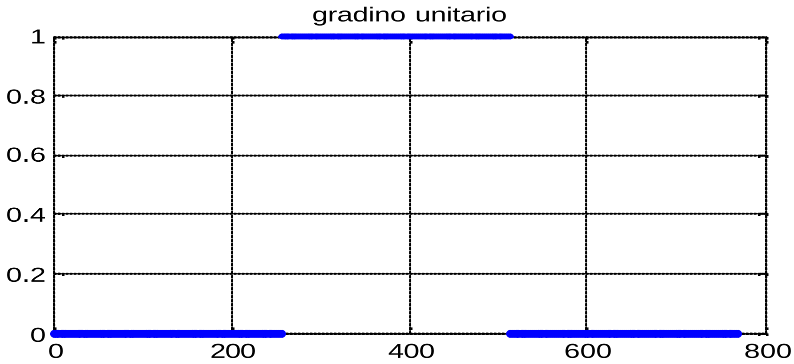
$$y_n = \frac{1}{1+a} x_n + \frac{a}{1+a} y_{n-1}$$

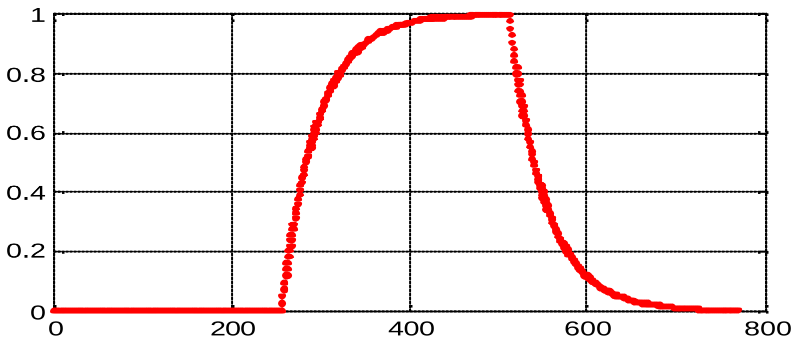
$$y_n = ax_n + by_{n-1} \quad \text{con } a = \frac{1}{1+a} \text{ e } b = \frac{a}{1+a}$$

Una semplice funzione Matlab per simulare il sistema $x_n \rightarrow y_n$ è la seguente:

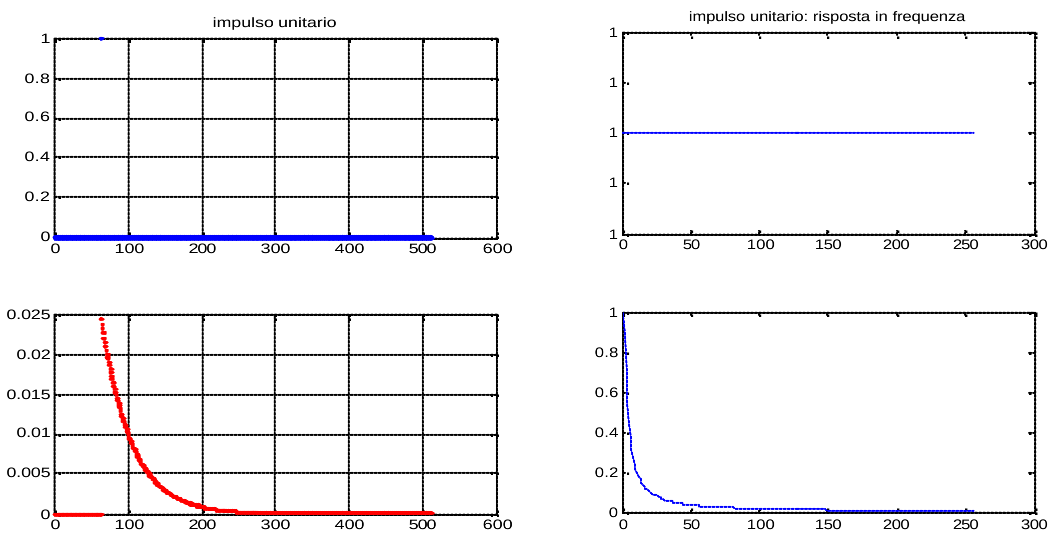
```
% RC filter alfa=RC/dt;
function y=rc_filter(x,alfa)
a=1/(1+alfa);
b=alfa/(1+alfa);
y=zeros(1,length(x));
for n=2:length(x)
        y(n)=a*x(n)+b*y(n-1);
end
```

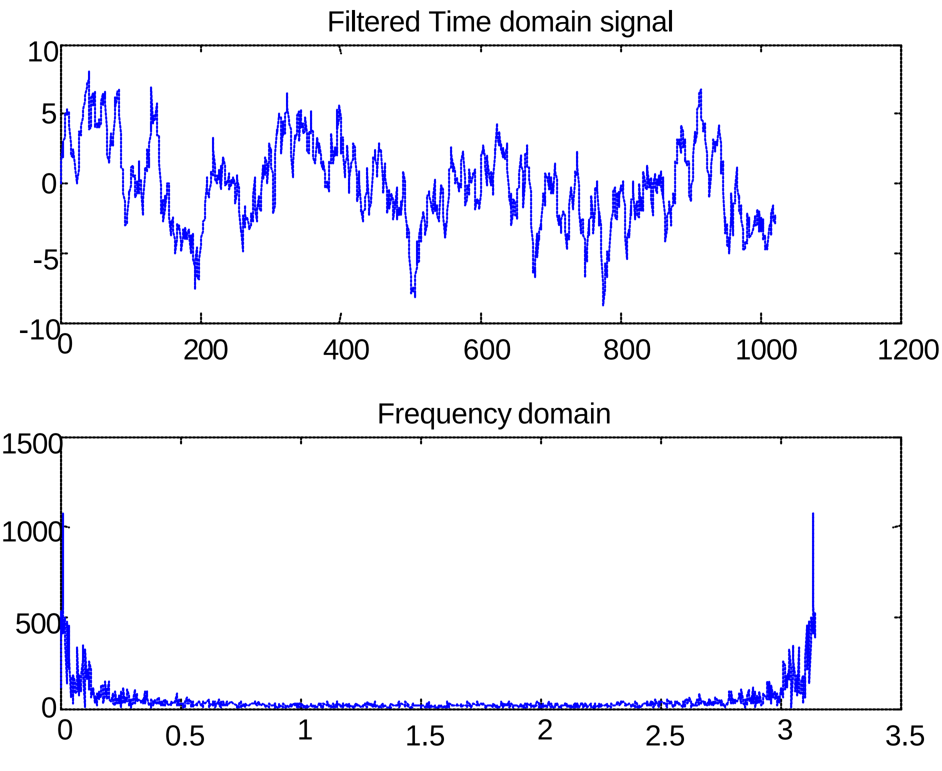
Se si danno in ingresso al filtro vari tipi di segnale si ottengono le uscite riportate nelle figure seguenti; sono anche riportati gli spettri dei segnali prodotti per verificare che tipo di filtraggio in frequenza viene realizzato dal sistema.





La riposta in figura è la tipica risposta al gradino unitario di un partitore RC, cioè la carica del condensatore, seguita dalla sua scarica quando la tensione in ingresso vienne portata a zero.
Di seguito viene riportata la simulazione relativa ad un segnale in ingresso costituito da rumore bianco. Questo nel dominio della frequenza ha uno spettro praticamente piatto; il segnale in uscita invece ha chiaramente un andamento passa-basso; questo si può verificare acusticamente ascoltando il segnale prodotto.
Infine se applichiamo un impulso unitario in ingresso, otterremo in uscita la risposta all'impulso unitario che come sappiamo, nell'ipotesi LTI che verificheremo valida in questo caso, descrive completamente il sistema e permette di calcolare per convoluzione l'uscita del sistema per qualsiasi segnale d'ingresso.
Lo spettro di Fourier dell'ingresso è uno spettro piatto (contiene tutte le frequenze), mentre la risposta all'impulso ha l'aspetto di un filtro passa-basso. Il nostro sistema è quindi un filtro passa-basso.


impulso unitario
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 100 200 300 400 500 600
impulso unitario: risposta in frequenza
1
1
1
1
1
0 50 100 150 200 250 300
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0 100 200 300 400 500 600
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 50 100 150 200 250 300


Filtered Time domain signal
10
5
0
-5
-10
0 200 400 600 800 1000 1200
Frequency domain
1500
1000
500
0
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5

Se ora consideriamo l'equazione alle differenze che descrive il sistema

$$y_n = \frac{1}{1+a} x_n + \frac{a}{1+a} y_{n-1}$$

possiamo osservare che la costante $\frac{1}{1+a}$ che moltiplica x_n è una semplice costante di proporzionalità; considerando allora una copia scalata del segnale d'ingresso (o d'uscita) l'equazione si può più semplicemente riscrivere nella forma

$$y_n = x_n + by_{n-1}$$

in cui appare evidente che, scritta direttamente nel dominio discreto, il parametro in gioco per il semplice sistema in esame è soltanto la costante b.
Inoltre si può verificare che risolvendo l'equazione a partire da n=0 con ingresso d[n] e supponendo che $y_{-1}=0$ si avrà la seguente risposta impulsiva:

$y_0=1$
$y_1=b$
$y_2=b^2$
….
…..
$y_n=b^n$
….

Evidentemente la risposta impulsiva $h_n=b^n$ ha durata infinita.

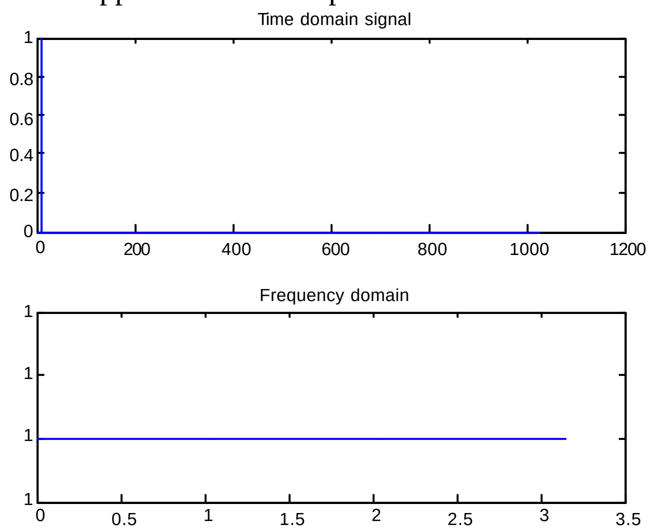
Per tale motivo questo sistema e la classe a cui appartiene si dice a risposta Impulsiva Infinita (IIR Infinite Impulse Response) a differenza dei sistemi in cui la risposta impulsiva è invece di durata finita (FIR). Inoltre in generale i sistemi ricorsivi sono di tipo IIR cioè hanno risposta impulsiva infinita, mentre quelli non ricorsivi sono di tipo FIR.

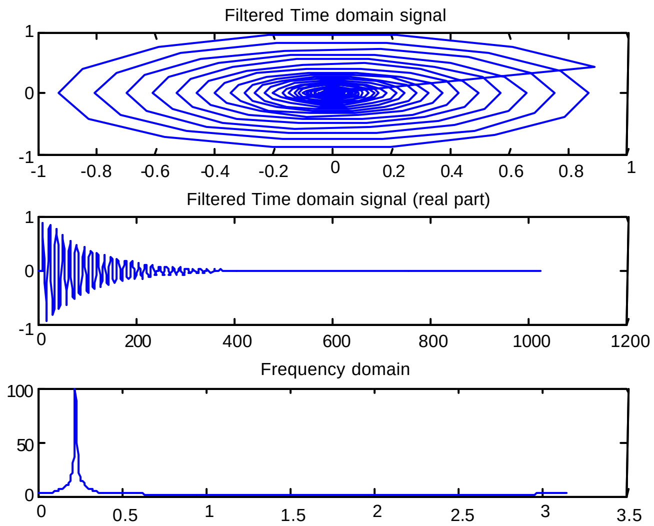
Da fare: Studiare il comportamento di questo sistema al variare di b sia reale che immaginario

Nel caso in cui il coefficiente b è negativo si può verificare che la risposta è passa-alto.

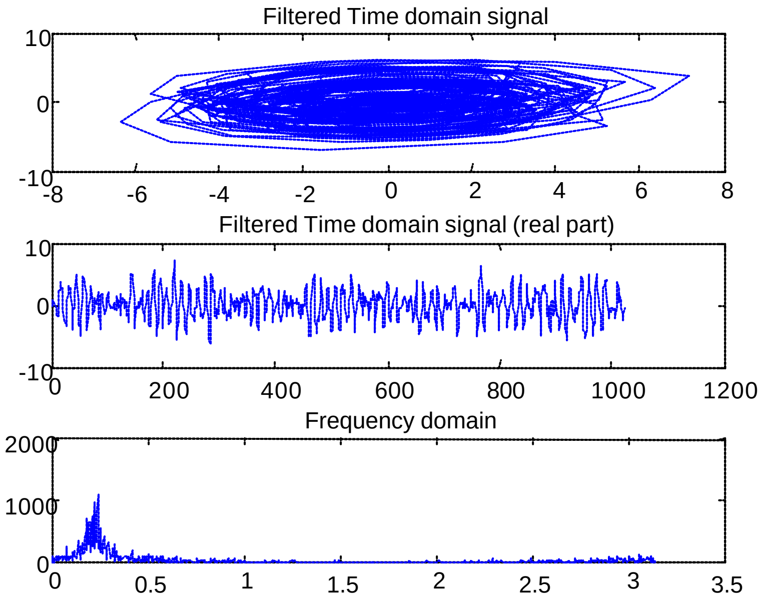
Studiare il comportamento di questo sistema

Nel caso in cui il coefficiente b è complesso si ottengono i risultati che seguono.
Nel caso di impulso unitario la risposta $y_n=b^n$ ricade nella tipologia di sequenze esponenziali già viste; essa è rappresentata nella figura seguente: si osserva che si tratta di una risposta complessa ed oscillante con una pulsazione che dipende dall'angolo del coefficiente complesso *b*.
Poiché il segnale in uscita dal filtro a coefficienti complessi è complesso, il seganle nel piano complesso ovvero ne rappresenteremo la parte reale.

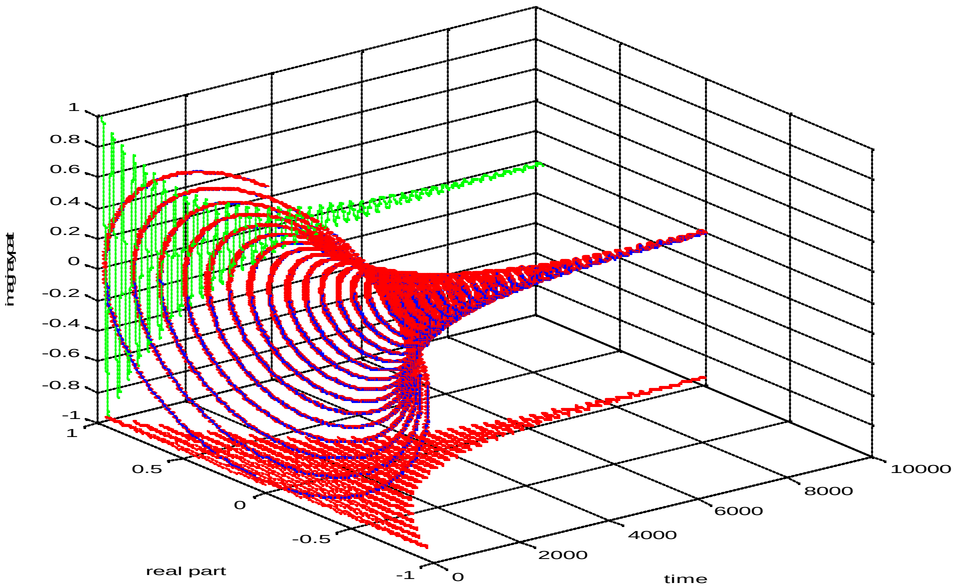




Se poi mettiamo in ingresso del rumore bianco osserviamo che esso viene filtrato lasciando passare una banda di fequenze intorno alla frequenze centrale che caratterizza la risposta impulsiva e quindi il sistema.

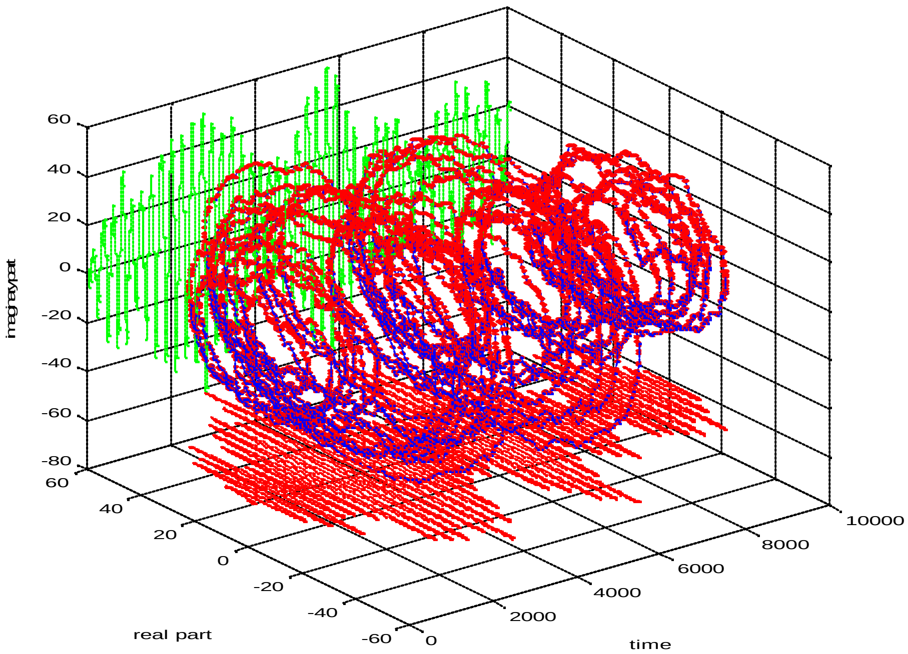


Il comportamento quindi è quello di un filtro accordato, cioè un filtro che lascia passare una banda più o meno ampia intorno alla sua frequenza di accordo ed attenua le frequenze al di fuori di questa banda, come si vedrà più compiutamente nels eguito.



Nel caso complesso una rappresentazione tridimensionale dà meglio conto del segnale filtrato; nel caso della risposta impulsiva con parametro b complesso pari a b=0.9995*exp(j*?$_0$) ?$_0$=pi/118; al crescere di ?$_0$ aumenta la frequenza delle oscillazioni del segnale, così come si puiò verificare che al crescere del modulo fino al valore unitario l'attenuazione relativa al decadimento dell'oscillazione diminuisce; nelcaso *|b|=1* l'oscillazione si sostiene infinitamente, mentre nel caso *|b|=1* il sistema non è più stabile e la risposta diverge.

Nel caso di un ingresso costituito da rumore bianco avremo la seguente figura



Si osservi anche che la risposta in frequenza non è antisimmetrica rispetto a p; questo è dovuto al fatto che stiamo trasformando in frequenza un segnale complesso: la simmetria per il modulo e l'antisimmetria per la fase, valgono solo per segnali reali.

Le figure sono state ottenuta con ck_iir1.m

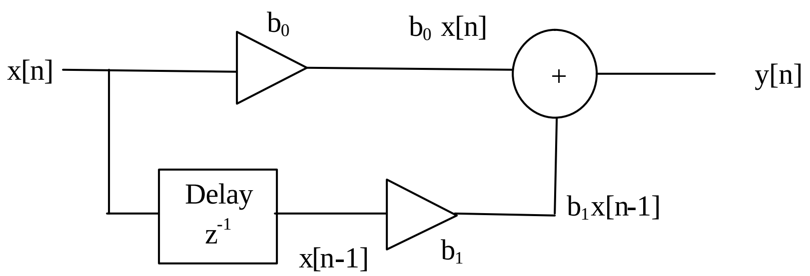
Si può qui vedere come accoppiando due sezioni con b complessi coniugati il segnale diventa reale ed abbiamo la coppia di poli complessi coniugati.

Verificare cosa accade se in ingresso al sistema si mette un rumore bianco

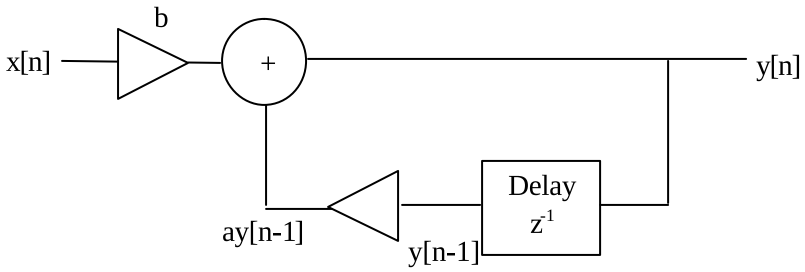
Il sistema visto è un filtro ricorsivo nel senso che per il calcolo di un campione utilizza non soltanto campioni di ingresso ma anche campioni precedenti dell'uscita; un filtro non ricorsivo invece utilizza soltanto campioni dell'ingresso, al tempo n o a tempi precedenti; è questo il caso della media, retta dall'equazione:

$$y_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}$$

Una descrizione a blocchi dei due sistemi del primo ordine rende chiare le differenze:



Struttura non ricorsiva



Struttura ricorsiva

Dalla simulazione diretta dei due filtri si osserva che nel caso del filtro ricorsivo la risposta impulsiva ha durata infinita, che se nel caso in esame tende asintoticamente a zero.
Nel casi non ricorsivo, invece, la risposta impulsiva è h[n]=d[n]+d[n-1] ed ha quindi durata finita.
Questa caratteristica della durata della risposta impulsiva come vedremo vale in generale per tutte le strutture ricorsive/non ricorsive

Caso FIR
Caso FIR bidimensionale: media iterata N+S+E+W

Si anticipa qui una considerazione che sarà siluppata in seguito ma che è bene tenere presente fin d'ora. Le Equazioni alle differenze finite sono importanti perché la loro "trasformata" (che verrà definita in dettaglio più avanti) è una funzione razionale, particolarmente semplice da trattare; inoltre questa circostanza permette di ricavare immediatamente una implementazione del sistema sottostante con operazioni elementari nel dominio digitale che sono somme, prodotti e ritardi, le stesse appunto che compaiono in una SDE.
Dato un segnale discreto x[n] si definisce la trasformata Z di questo segnale moltiplicando l'equazione della convoluzione per z^{-n} *e sommando per* $-\infty < n < \infty$.

$$x[n] \to X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Si verificherà che vale la proprietà del ritardo

$$x[n-n_0] \to z^{-n_0} X(z)$$

e che dato un sistema LTI retto quindi dall'equazione della convoluzione $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$, *tra le trasformate nel dominio complesso z vale la seguente semplice proprietà moltiplicativa:*
:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

e quindi: $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

Se ora H(z) è una funzione razionale, cioè un rapporto tra due polinomi nella variabile z^{-1} *razionale, si può antitrasformare e procedendo all'inverso si ottiene una equazione SDE, in cui quindi sono coinvolti un numero finito di campioni dell'ingresso e dell'uscita . Data dunque una funzione di trasferimento desiderata, in forma razionale, basta invertirla per ricavare l'equazione alle differenze con cui si può semplicemente implementare esattamente il sistema con la risposta desiderata, mediante appunto somme, prodotti e ritardi.*
Le due condizioni Trasformata razionale e possibilità di descriverlo nel tempo mediante equazioni alle differenze, con un numero finito di termini, sono equivalenti.
L'equazione alle differenze finite difatti potrebbe in generale coinvolgere un numero infinito di campioni di ingresso o di uscita e entrambe e non risultare di conseguenza passibile di una implementazione esatta. Questo sarà il caso in cui la H(z) che caratterizza la risposta in frequenza del sistema non è una funzione razionale; un esempio è quello della funzione $H(z) = e^{z}$. *In tal caso non essendo possibile una formulazione della H(z) in termini di rapporto tra polinomi, non sarà nemmeno possibile implementare il relativo filtraggio mediante una equazione alle differenze finite, cioè mediante semplici ritardi somme e moltplicazioni; occorrerà per fare questo implementare una approssimazione razionale (rapporto tra polinomi) della H(z) con risultati quindi che saranno anche loro approssimati.*

Es. accumulatore $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

In questa equazione compaiono un numero infinito di campioni; ciò nonostante la relazione di ingresso/uscita per questo sistema si può riscrivere nella forma equivalente $y[n] = xn + y[n-1]$, da cui appare chiaro che si tratta di un equazione di tipo SDE, con un numero quindi finito di termini, realizzabile dunque al finito, esattamente. Del resto si può verificare che la relazione ingresso/uscita nella variabile z è $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

La SDE può vedersi come una eguaglianza tra convoluzioni di durata finita
Esistono diverse forme di equazioni alle differenze equivalenti come si vedrà più avanti nel caso del sistema media (moving average)

Caratteristiche delle Equazioni alle Differenze Standard (SDE Standard Difference Equation)

1. **Non definiscono un solo sistema (condizioni iniziali). Difatti se $y_p[n]$ è soluzione dell'equazione e $y_0[n]$ dell'omogenea associata anche $y_p[n]+y_0[n]$ è soluzione**
2. **Non garantiscono la linearità (in particolare la omogeneita').eg.** $\mathrm{y[n]-y[n-1]=k}$
3. **Garantiscono l'additivita'**
4. **Non garantiscono l'invarianza temporale.** Nel caso $y_p[n]+y_0[n]$, per ingresso $x[n]$, per ingresso $x[n-n_0]$ la componente $y_0[n]$ dell'uscita rimarrà immutata
5. **Possono essere causali o non**
6. **Possono essere stabili o non**
7. **Tutto dipende dalle condizioni iniziali, a partire dalle quali, assegnato un ingresso si può ricavare univocamente l'uscita mediante ricorrenza in avanti ed all'indietro.**
8. **Scelte le condizioni iniziali per l'omogeneità e l'invarianza temporale, il sistema diventa causale se e solo se le condizioni iniziali sono nulle**
9. **Il sistema così definito può essere stabile o instabile. Questo è spesso definito in base alla causalità: eg un sistema può essere causale ed instabile ovvero anticausale ma stabile.**

Proprietà delle SDE

- **Additività**
- **Omogeneità: va garantita con le condizioni iniziali**
- **Invarianza nel tempo: va garantita con le condizioni iniziali**

Data la SDE

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

si può ricavare esplicitamente y[n]

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$

in generale l'uscita dipende sia dall'ingresso che dalle uscite precedenti.
Se N=0 sarà

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

e, confrontando con la formula della convoluzione:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h\ [n-k] = (x * h)[n]$$

si ricava:

$$h[n] = \frac{b_n}{a_0}, \qquad n = 0....M$$

come si può ottenere anche per simulazione diretta, cioè risposta impulsiva finita FIR. (In tal caso non occorre definire condizioni iniziali)
Nell'altro caso la risposta impulsiva è infinita (IIR Infinite Impulse Response) ed occorrono condizioni iniziali per specificarla.

Sistemi LTI descritti da equazioni alle differenze: esempi

Media $y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$

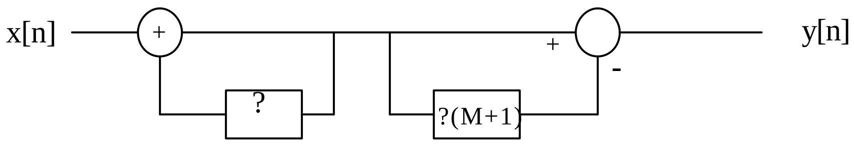
Risposta impulsiva finita $h[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} d[n-k]$

Trascurando il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2M+1}$ si ha:

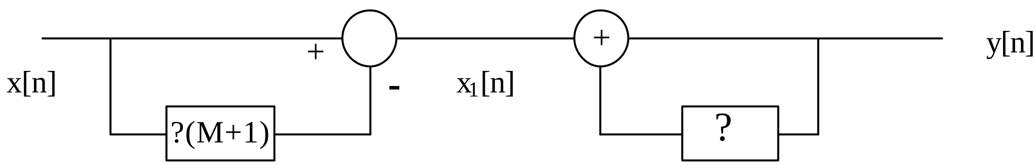
$$h[n] = u[n] - u[n-2M-1] = u[n] \otimes \left(d[n] - d[n-2M-1]\right)$$

Il sistema si può realizzare con la cascata dei due sistemi

$u[n]$ e $\left(d[n] - d[n-M-1]\right)$



Facendo commutare i due blocchi:



$x_1[n] = x[n]-x[n-M-1]$

$y[n] = x_1[n]-y[n-1]$

$x_1[n] = x[n]-x[n-M-1]$

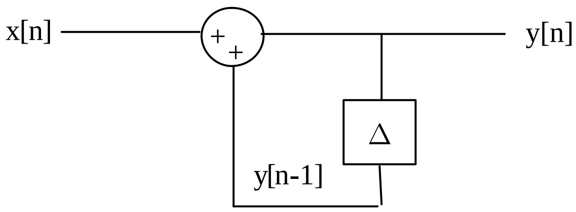
$y[n] + y[n-1] = x[n]-x[n-M-1]$

Questa versione dell'equazione traduce in formule l'algoritmo di calcolo della media "running" che consiste nel calcolare la media la passo *n* utilizzando la media al passo *n*-.*1* sottraendo il conrtributo del termine più lontano e sommando il contributo del termine n-mo, con il vantaggio di eseguire un minor numero di operazioni.

In generale quindi vi sono diverse forme distinte di equazione alle differenze per lo stesso sistema.

Il sistema **accumulatore** come si è visto è retto dall'eq.

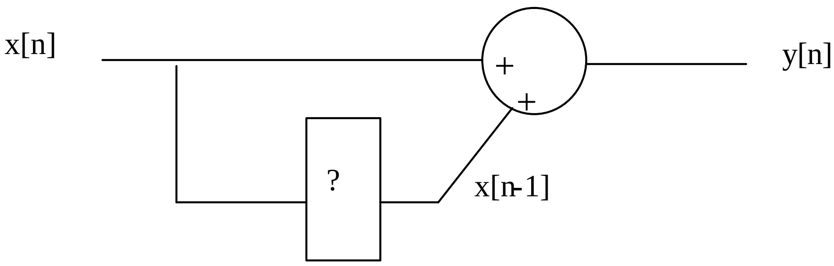
$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$



La risposta impulsiva ha durata infinita: $h[n] = u[n]$
Il sistema inverso

$y[n] = x[n] - x[n-1]$

ha risposta impulsiva: $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, con durata finita ed è quindi un FIR.



L'equazione del primo ordine ricorsiva

Per affrontare il problema generale delle equazioni alla differenze finite, della ricerca delle soluzioni e la relazione con i sistemi Lineari Tempo Invarianti cioè per verificare quali condizioni garantiscono che una equazione alle differenze finite rappresenti un sistema LTI, partiremo dalla semplice equazione del primo ordine; supponiamo di volerla risolvere nel caso particolare in cui il segnale di ingresso è l'impulso unitario; verificheremo che occorre definire anche un valore iniziale dell'uscita per calcolare il segnale d'ingresso:
L'equazione

$$y[k] = x[k] + by[k-1]$$

possiamo riscriverla nel nostro caso come:
$y[k] = by[k-1] + \delta[k]$ scritta per k= 0,1,2…….
Naturalmente occorrerà conoscere il valore di $y[-1]$, quindi il valore iniziale dell'uscita, che supporremo pari ad a

$y[0] = by[-1] + \delta[0] = ba + 1$ per k=0

$y[1] = by[0] + \delta[1] = by[0] + 0 = b(ba+1) = b^2 a + b$ per k=1

$y[2] = by[1] + \delta[2] = b^3 a + b^2$ per k=2

$y[3] = by[2] = b^4 a + b^3$ per k=3

……………………………………

$y[k] = b^{k+1} a + b^k$ per k qualsiasi positivo

Per completare la definizione di una soluzione particolare dell'equazione alle differenze occorre risolvere l'equazione di ricorrenza anche per i valori nell'intervallo [-inf -1].
L'equazione $y[k] = x[k] + by[k-1]$ verrà riscritta nella forma:

$by[k-1] = y[k] - \delta[k]$

$y[k-1] = \frac{1}{b} y[k] - \frac{1}{b} \delta[k]$

$y[-2] = \frac{1}{b} y[-1] - \frac{1}{b} \delta[-1] = \frac{a}{b} = ab^{-1}$ per k=-1

$y[-3] = \frac{1}{b} y[-2] = \frac{a}{b^2} = ab^{-2}$ per k=-2

…………………………

$y[k] = \frac{1}{b} y[k] = ab^{k+1}$ per k negativo qualsiasi

Le due formule trovate per k positivo e negativo sono:

$y[k] = b^{k+1} a + b^k = b \cdot (b^k + 1)$ k>=0

$y[k-1] = ab^{k+1}$ k<0

Mettendole insieme avremo un'unica formula per la *y[k]* che in realtà è la risposta all'impulso unitario *h[k]*:

$$h[k] = u[k]b^k + b^{k+1}a$$

A partire da questa soluzione in cui compare un parametro a possiamo imporre le varie condizioni.

1) Linearità:
considerando di nuovo l'equazione di partenza $y[k] = x[k] + by[k-1]$ se l'ingresso x[k] è identicamente nullo avremo $y[k] = by[k-1]$ e la risposta del sistema all'ingresso nullo sarebbe $y[k] = b^{k+1}y[-1]$. Poiché l'ipotesi di linearità richiede che l'uscita sia nulla per ingresso nullo, sarà necessariamente *y[-1] = 0*;

2) Causalità: poiché la parte $u[k]b^k$ è già nulla per k<0 occorrerà porre a<0 per rendere nulla anche $b^{k+1}a$. Anche questo comporta condizione iniziale *y[-1]* nulla).
2) Stabilità**:** la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità nel caso causale è che $\sum_{k=0}^{k=\infty} |h[k]| < \infty$ cioè $\sum_{k=0}^{k=\infty} |b^k| < \infty$; dalla teoria delle serie di potenza ricordiamo che per la somma parziale vale la formula:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \qquad \forall\alpha \; complesso \neq 1$$

$$= N \qquad se \quad \alpha = 1$$

e, passando al limite per N->∞

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \forall\alpha : |\alpha| < 1$$

http://mathworld.wolfram.com/GeometricSeries.html

Occorrerà di conseguenza per la stabilità che sia |b|<1**.**

Queste considerazioni si possono estendere a sistemi di ordine superiore: la causalità, che è una condizione soddisfatta in tutti i sistemi di interesse è garantita da condizioni iniziali nulle. Queste garantiscono in ogni caso linearità e invarianza nel tempo.

La soluzione di una Equazione Standard alle Differenze Finite SDE

Il problema delle soluzioni di una Equazione Standard alle Differenze Finite SDE può essere affrontato in termini generali per qualsiasi ordine, in modo sistematico, e con tecniche analoghe a quelle utilizzate nella soluzione delle equazioni differenziali.
La soluzione si può ottenere in forma chiusa, e si può dimostrare che la classe delle soluzioni costituiscono una opportuna famiglia famiglia. Dall'equazione alle differenze si ricava infatti l'equazione omogenea associata, in cui il segnale in ingresso è identicamente nullo e si dimostra agevolmente il risultato seguente.

> ***Detta*** $y_p[n]$ ***una soluzione particolare della SDE ed*** $y_o[n]$ ***una soluzione dell'omogenea associata, anche*** $y_p[n]+y_o[n]$ ***sarà soluzione dell'equazione.***

Per l'equazione di partenza vale la:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

per l'equazione omogenea si ha:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_0[n-k] = 0$$

e sommando membro a membro:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (y_p + y_0)[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Analogamente,

> ***Se*** $y_1[n]$ ***e*** $y_2[n]$ ***sono soluzioni dell'SDE,*** $y_1[n]-y_2[n]$ ***è una soluzione dell'omogenea associata.***

come si può verificare sottraendo membro a membro le equazioni relative alle due soluzioni.

Di conseguenza si ha che:

> **Per ottenere tutte le soluzioni dell'SDE basta trovare una soluzione particolare** $y_p[n]$ **e la classe di tutte le soluzioni dell'omogenea** $\left\{y_i^o[n]\right\}_{i=0....}$ **. La famiglia delle soluzioni sarà** $\left\{y_p[n]+y_i^o[n]\right\}_{i=0....}$ **.**

Per caratterizzare la classe delle soluzioni dell'omogenea associata di una determinata SDE $y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + ... + a_n y_{k-n} = 0$ si definisce il polinomio caratteristico $p(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_n z^{-n} = 0$

Questo polinomio avrà, per il teorema fondamentale dell'algebra, n radici; di queste alcune possono essere coincidenti e quindi con molteplicità maggiore di uno.

Si può verificare che:

Per le radici di molteplicità 1 λ_i la sequenza $y[k] = \lambda_i^k$ è soluzione dell'omogenea associata, per le radici di molteplicità 2 λ_i lo è la sequenza $y[k] = k\lambda_i^{k-1}$, per le radici di molteplicità 3 λ_i lo è la sequenza $y[k] = (k-1)\lambda_i^{k-2}$, e così via.

Per rendersene conto si moltiplichi il polinomio caratteristico per z^k :

$z^k p(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + ... + a_n z^{k-n} = 0$ e per $z = \lambda$

$l^k p(l) = l^k + a_1 l^{k-1} + a_2 l^{k-2} + ... + a_n l^{k-n} = 0$ ma questo, posto $y[k] = \lambda^k$ e quindi $y[k-1] = \lambda^{k-1}$, $y[k-2] = \lambda^{k-2}$ etc. corrisponde alla eguaglianza:

$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + ... + a_n y_{k-n} = 0$ cioè $y[k] = \lambda^k$ è soluzione dell'equazione di partenza. In modo simile si può ragionare per le radici di molteplicità >1.

Dette $y_i[k]$ queste n sequenze, si ha che ogni loro combinazione lineare è ancora soluzione dell'omogenea associata

$$y_o[k] = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i[k]$$

Si può poi dimostrare che tutte le soluzioni si trovano in tal modo.

Le soluzioni dell'omogenea associata formano uno spazio lineare di dimensione *n* di cui la famiglia $\{y_i[k]\}_{i=0...:n}$ costituisce una base.

Basti pensare che fissando n condizioni iniziali (n punti per cui passa la sequenza) questa è univocamente determinata costruttivamente operando la ricorrenza per n crescente e decrescente.

Viceversa fissando n-1 punti la sequenza non è determinata univocamente.

C'è corrispondenza biunivoca tra n-ple di punti (condizioni) iniziali ed i coefficienti c_i dell'equazione

$$y_o[k] = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i[k]$$

Per verificare in pratica questo procedimento generale, che porta a definire la famiglia delle soluzioni di una SDE in forma chiusa, possiamo analizzare dei casi semplici.

Il caso dell'equazione del primo ordine

Consideriamo il caso di equazione del primo ordine:

$$y[k]-ay[k-1]=x[k]$$

il polinomio caratteristico è $p(z)=1-az^{-1}$ e l'equazione caratteristica è $p(z)=1-az^{-1}=0$

Essa avrà una sola radice $z=a$; in tal caso la sequenza quindi $y[k]=a^k$ sarà una soluzione dell'omogenea associata:

$$y[k]-ay[k-1]=0.$$

Questo risultato, già dimostrato nel caso generale per ricorrenze di grado arbitrario può essere verificato direttamente a partire dall'equazione: basta osservare che vale la seguente uguaglianza:

$a^k-aa^{k-1}=0$

Naturalmente anche la sequenza $y_c[k]=ca^k$ è soluzione della omogenea per qualsiasi valore di c, quindi.

Per ogni c saranno soluzioni dell'omogenea associata tutte e solo le sequenze

$$y_c[k]=ca^k$$

Fissata una condizione iniziale (un punto y_0 per cui passa la sequenza ad un tempo fissato k_0) questa è univocamente determinata: infatti sarà $y_0=ca^{k_0}$ e da questa possiamo ricavarne il valore della costante *c*.

$$c=\frac{y_0}{a^{k_0}}$$

Per ottenere ora la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze con eccitazione x[n] non nulla occorre trovare una sua soluzione particolare y_p.
Se in particolare vogliamo caratterizzare la risposta impulsiva useremo come ingresso al sistema l'impulso unitario d[n], l'equazione cioè sarà

$y[k]-ay[k-1]=\delta[k]$

Possiamo risolvere direttamente l'equazione alle differenze nelle due direzioni n>=0 ed n<0.
Per i termini da n=0 in poi avremo dall'equazione generale $y[k]-ay[k-1]=\delta[k]$ scritta per k= 0,1,2…….

$y_p[0]-ay_p[-1]=\delta[0]=1$

$y_p[1]-ay_p[0]=\delta[1]=0$

$y_p[2]-ay_p[1]=0$

$y_p[3] - a y_p[2] = 0$

…………………………..

$y_p[n] - a y_p[n-1] = 0$

Queste equazioni diventano, nel caso $y_p[-1] = 0$, valore iniziale nullo

$y_p[0] = 1$

$y_p[1] = a y_p[0] = a$

$y_p[2] = a y_p[1] = a^2$

$y_p[3] = a y_p[2] = a^3$

…………………………………..

$y_p[n] = a y_p[1-] = a^n$

Per completare la definizione della soluzione particolare occorre risolvere l'equazione di ricorrenza anche per i valori nell'intervallo [-inf -1].
Converrà scrivere la ricorrenza nella forma:

$a y[k-1] = y[k] - \delta[k]$

$y[k-1] = \frac{1}{a} y[k] - \frac{1}{a} \delta[k]$

per k=-1 $y[-2] = \frac{1}{a} y[-1] - \frac{1}{a} \delta[-1] = 0$

per k=-2 $y[-3] = \frac{1}{a} y[-2] = 0$

La soluzione particolare scelta dunque è nulla per k<0 e si può scrivere come:

$$y_p[k] = u[k] a^k$$

La famiglia completa delle soluzioni dell'equazione alle differenze finite del primo ordine si può ottenere dalla somma della soluzione particolare dell'equazione completa e della famiglia delle soluzioni dell'omogenea associata; si tratta quindi di una famiglia indicizzata dal parametro *c*:

$$y_c[k] = u[k] a^k + c a^k$$

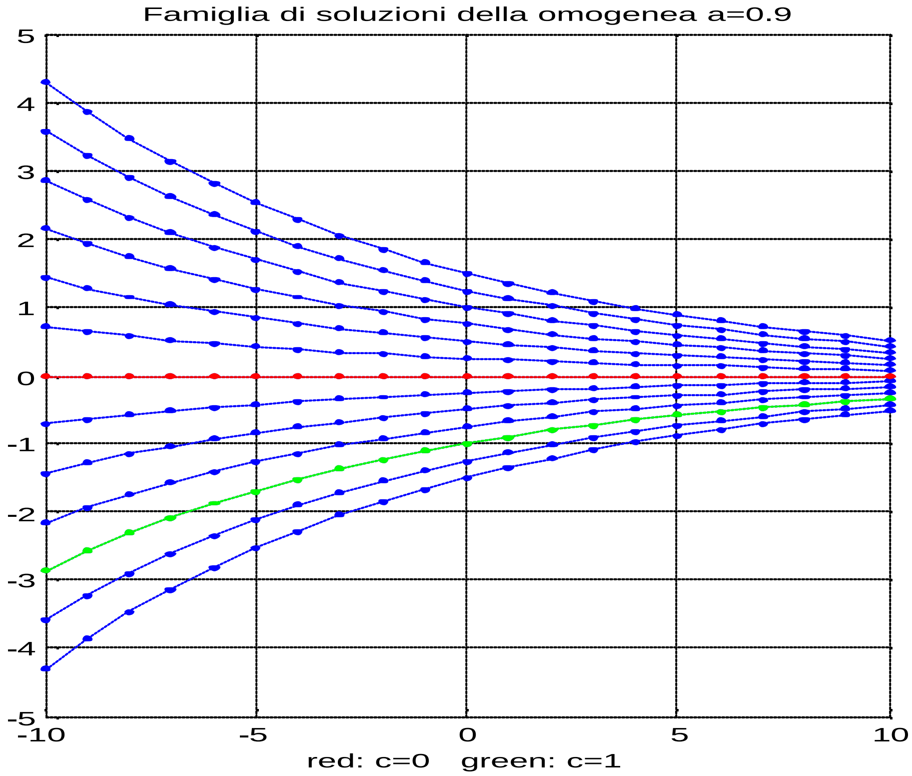
L'equazione alle differenze ammette dunque una intera classe di soluzioni.

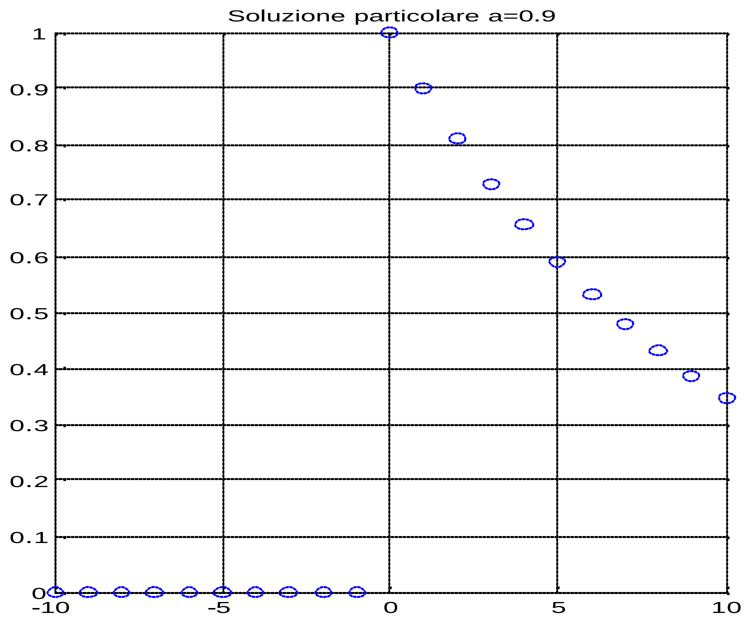
Possiamo restringere questa familgia imponendo ulteriori condizioni restrittive.

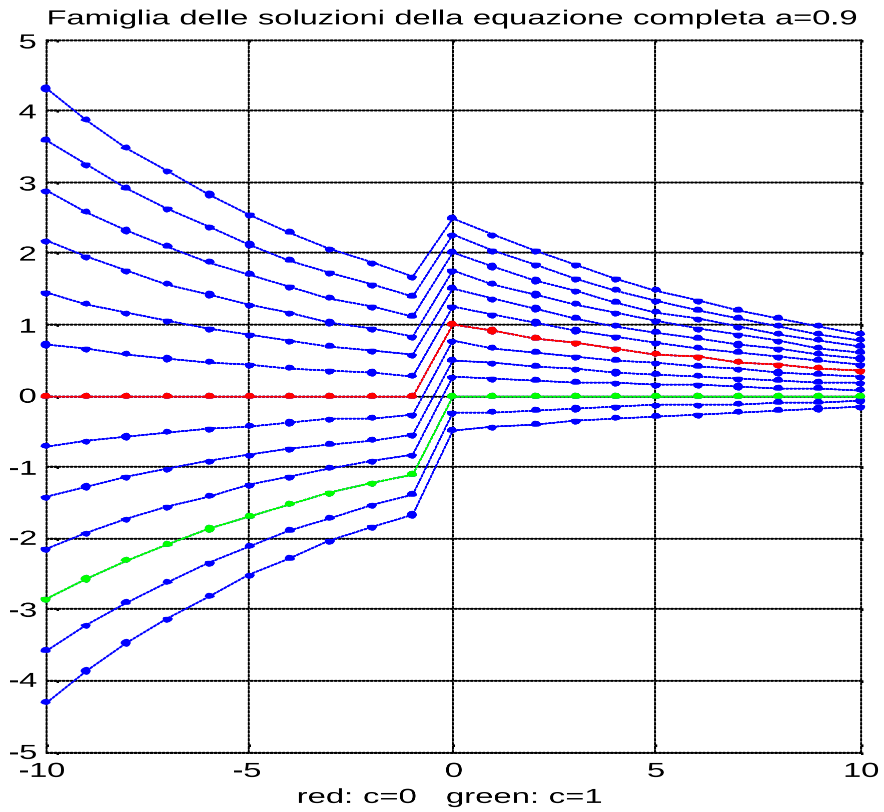
Se la soluzione ricercata è causale si avrà $y_{-1}=0$ quindi sarà c=0 e la soluzione sarà $y[k] = u[k] a^k$.
Se in aggiunta ricerchiamo una soluzione stabile dovrà essere anche |a|<1.

Si ritrovano dunque i risultati già trovati mediante soluzione iterata della relazione di ricorrenza. Esaminaiamo ora i due casi a<1 ed a>1

1) caso a<1

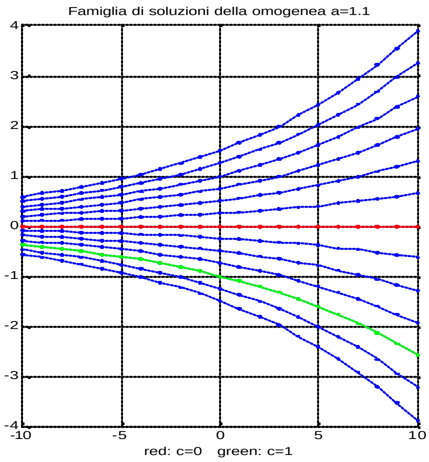


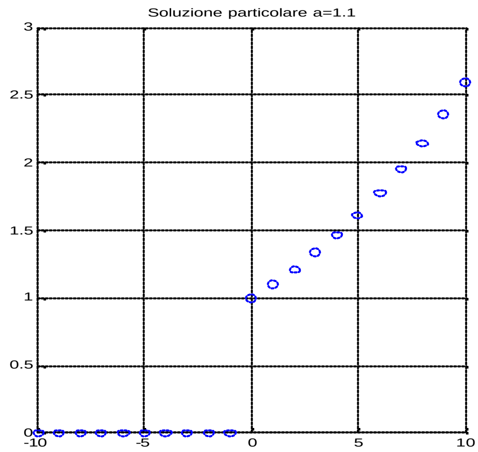


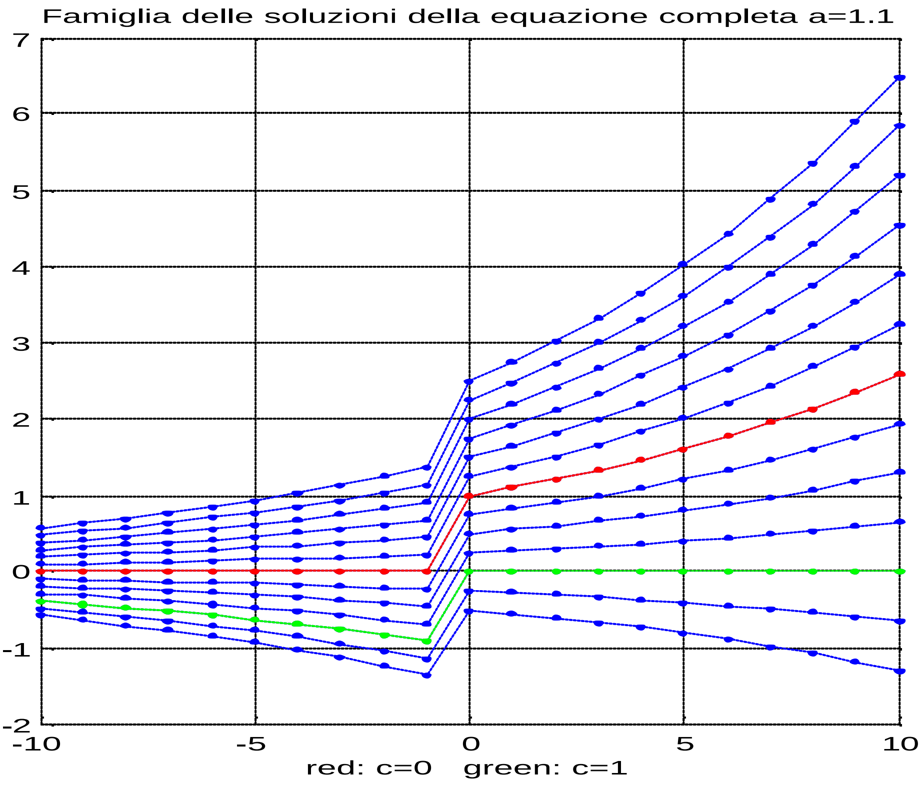


Dalla figure risulta chiaro che la soluzione causale in questo caso cioè a<1 è quella per c=0, che è anche stabile (curva in rosso).
La soluzione anticausale con c= -1 (curva in verde) evidentemente non è stabile. Tutte le altre non sono né causali né anticausali e sono instabili.

2) caso a>1







Dalla figure risulta chiaro che la soluzione causale in questo caso cioè a>1 è quella per c=0, che non è stabile.
La soluzione stabile è quella anticausale con c=-1.

Le figure sono state ottenute con FamigliaPrimoOrdine.m

Scelta delle costanti dell'omogenea

L'equazione standard alle differenze ammette, una volta fissato la sequenza d'ingresso x[n], una famiglia di soluzioni, espressa come $\left\{y_p[n]+y_C^o[n]\right\}_{C\ldots}$ dove il $C\in R^N$ è il set di parametri ci dell'espansione nella base $\left\{y_i^o[n]\right\}_{i=0\ldots.}$.
Il set C di costanti si può determinare in base ad alcuni criteri:

- causalità
- stabilità
- entrambi

Ad esempio nel caso visto
$y[k]-ay[k-1]=x[k]$

$y_c[n]=a^n u[n]+ca^n$

c=0 se a<1 si ha anche la stabilità, se a>1 la soluzione non è stabile;
c=-1 se a>1 si ha anche la stabilità, se a<1 la soluzione non è stabile;

si osservi che a<1 e causalità garantiscono convergenza: siamo nel caso in cui lo zero a del polinomio caratteristico è interno al cerchio unitario.

Ricapitolando

$$y_c[k] = u[k]a^k + ca^k$$

L'equazione alle differenze ammette dunque una intera classe di soluzioni.

Se la soluzione ricercata è causale si avrà y_{-1}=0 e la soluzione sarà $y[k] = a^k$.

Se in aggiunta ricerchiamo una soluzione stabile dovrà essere anche |a|<1.

Naturalmente il caso visto di a reale si può generalizzare al caso a negativo ed al caso a complesso. Riferendosi al modello di partenza del circuito elettrico questo corrisponderebbe allo studio del circuito LR o di quello oscillante RLC.

In conclusione nel caso usuale di causalità e stabilità avremo che:

La soluzione dell'equazione alle differenze finite del primo ordine, con |a|<1, a eventualmente complesso:

$$y[k] - ay[k-1] = \delta[k]$$

sarà

$$y[k] = a^k \text{ per } k>0$$

La risposta dell'equazione alle differenze ad un esponenziale complesso

Data l'equazione del primo ordine:

$$y[k]-ay[k-1]=x[k]$$

è possibile caratterizzare la risposta ad una sequenza oscillante, ad esempio ad un esponenziale complesso di ampiezza unitaria $x[n]=e^{j\omega_0 n}$; per ampiezza diversa la linearità del sistema ci permetterà di ottenere semplicemente la risposta relativa.
A questo fine supponiamo che l'uscita del sistema sia un esponenziale complesso $y[n]=e^{j\omega_0 n}$; sostituendo avremo:

$$e^{j\omega_0 n}-ae^{j\omega_0 (n-1)}=x[n]$$

$$\left(1-ae^{-j\omega_0}\right)e^{j\omega_0 n}=x[n]$$

$$\left(1-ae^{-j\omega_0}\right)y[n]=x[n]$$

$$y[n]=\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}}x[n]$$

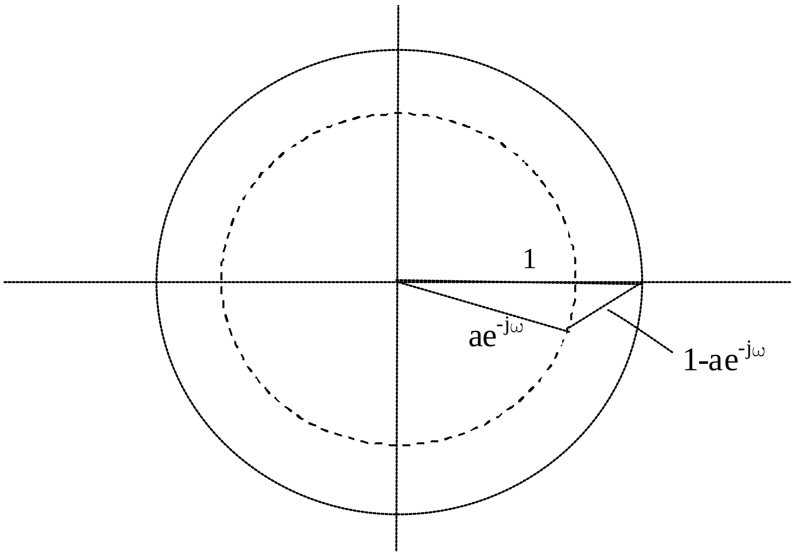
Sia la sequenza di ingresso che quella di uscita sono dunque esponenziali complessi. Moltiplicando per $\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}}$ avremo

$$y[n]=\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}}e^{j\omega_0 n}$$

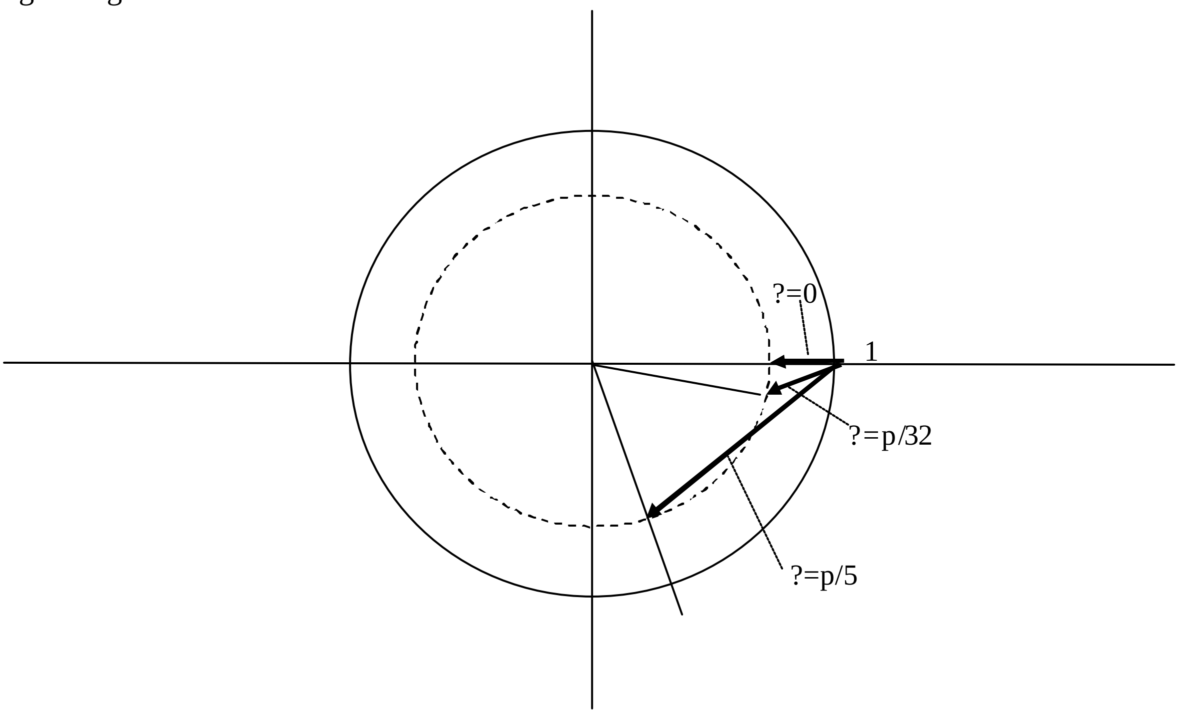
Dunque per ingresso esponenziale complesso l'uscita sarà un esponenziale complesso di ampiezza $\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}}$**,** dipendente dalla pulsazione **.**
Questa funzione, detta $H(w)$ caratterizza dunque il sistema rispetto agli ingressi di tipo esponenziale complesso**.** Se poi l'ingresso è una sinusoide o cosinusoide reale, avendo presente la relazione $\cos(\omega n)=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega n}+e^{-j\omega n}\right)$ e la linearità del sistema si può immediatamente ottenere il risultato corrispondente.
Per conoscere il comportamento del sistema al variare della pulsazione *?*, basterà studiare questa funzione di trasferimento:

$$H(\omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

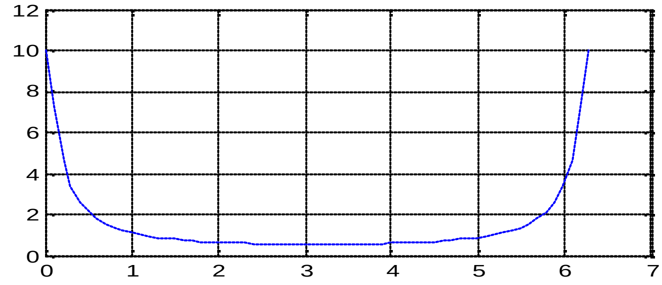
Oltre che analiticamente si può valutare qualitativamente, facendo riferimento alla seguente figura in cui sono tracciati i vettori $ae^{-j?}$, 1 e la differenza 1- $ae^{-j?}$

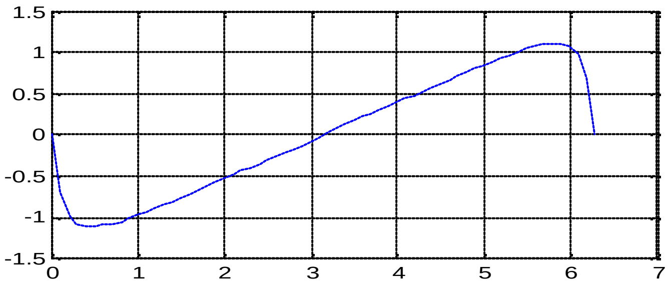


Il valore che ci interessa è il modulo di $\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$. Si osserva che al variare di ω l'andamento del modulo di questo vettore è crescente, a partire da un minimo per ω=0; il suo inverso quindi risulterò decrescente, ed avrà un massimo proprio per ω=0, come risulta dalla figura seguente.

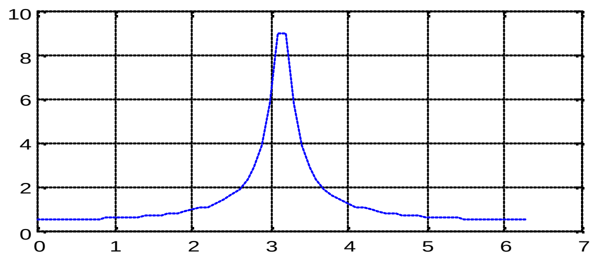


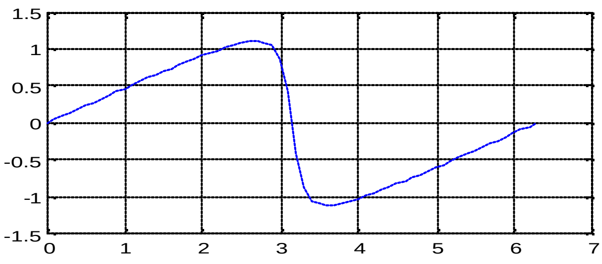
Sono di seguito riportati modulo e fase della risposta in frequenza.





Si osserva che la risposta del sistema è simmetrica in modulo rispetto a p/2 ed antisimmetrica nella fase.
Per questo motivo è sufficiente descrivere il comportamento del sistema ed il suo spettro per valori della pulsazione ? compresi nell'intervallo [0 p].
Per valori negativi del coefficiente *a* il filtro risultante è passa alto, come si può verificare ragionando sul cerchio unitario come nel caso precedente.:





Nel caso poi che il coefficiente a sia complesso, con modulo a e fase ?$_0$, avremo come risposta ad un esponenziale complesso di pulsazione ?

$$Y(\omega)=\frac{1}{1-ae^{j\omega_0}e^{-j\omega}}=\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\omega_0)}}$$

ma si verifica che $Y(\omega)=X(\omega-\omega_0)$, quindi coincide con la risposta in frequenza già vista ma shiftata in frequenza di ? $_0$; il massimo dunque invece che per il valore ?=0 si avrà per il valore ?=? $_0$, dando così luogo ad una risposta in frequenza accordata ad ? $_0$.

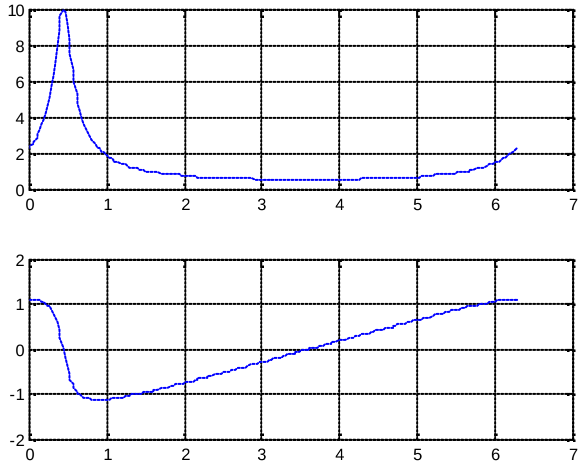
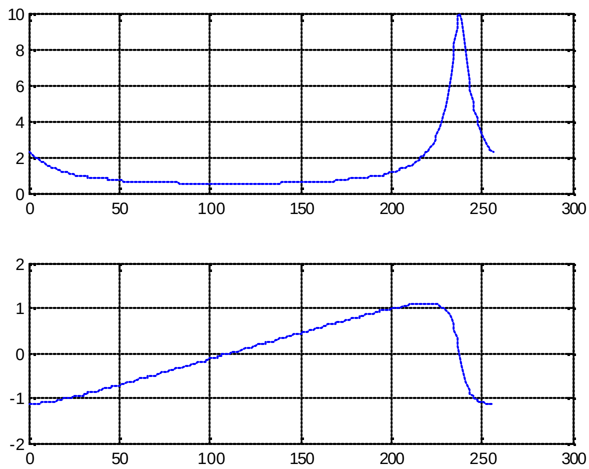


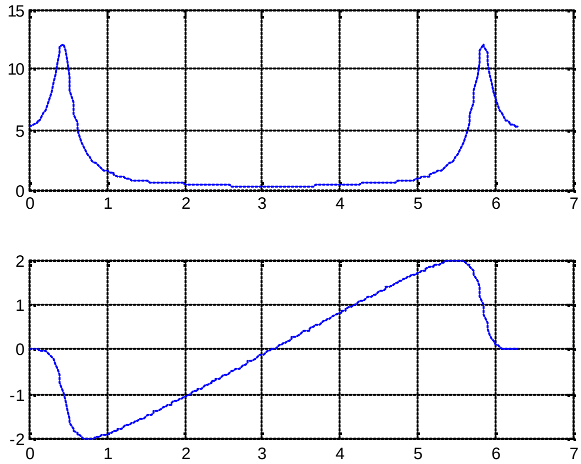
figure ottenute con plot_iir1_response.m

Il caso a negativo può ricondursi a questo avendo presente che per a negativo si può scrivere $a=-|a|=|a|e^{j\pi}$ da cui è chiara la traslazione di p nella risposta in frequenza già osservata



Per quanto riguarda la risposta impulsiva sempre nel caso a<0 essa si ottiene semplicemente moltiplicando la risposta impulsiva del caso a>0 e cioè $|a|^k$ per la

sequenza $(-1)^k$. Vedremo che questo risultato si ottiene per qualsiasi sequenza: moltiplicando una risposta impulsiva per questa sequenza a segni alternati la risposta in frequenza risulta traslata di p; di conseguenza un filtro passa basso viene trasformato nella sua versione passa alto e viceversa.
Infine la cascata di due sistemi risonanti con coefficienti complessi a ed $\overline{a}$ darà una risposta che risulta dal prodotto di quelle già viste, con il risultato finale seguente:



Si osserva che la risposta ha riacquistato la simmetria rispetto a π a cui siamo abituati; inoltre in tal caso l'equazione corrispondente è diventata a coefficienti reali.

La funzione di trasferimento sul cerchio unitario

I risultati visti possono essere ricavati studiando il comportamento della funzione di trasferimento *H(?)*, in particolare il suo modulo e la sua fase sul cerchio complesso.

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j(\omega-\omega_0)}}$$

$$|H(\omega)| = H(\omega)\overline{H(\omega)} = \frac{1}{1 - ae^{-j(\omega-\omega_0)}}\,\frac{1}{1 - ae^{+j(\omega-\omega_0)}} \quad \text{e posto } e^{j(\omega-\omega_0)} = e^{j\alpha}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{1 - ae^{-j\alpha}}\,\frac{1}{1 - ae^{+j\alpha}} = \frac{1}{1 - a\left(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}\right) + a^2} = \frac{1}{1 - 2a\cos(\omega-\omega_0) + a^2}$$

Nel caso a reale, cioè $?_0$=0 avremo:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

Se a>0 il massimo della funzione si avrà quando il denominatore è minimo cioè quando cos? =1 quindi ? =0 pe vale $\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1-2a+a^2} = \frac{1}{(1-a)^2}$ cioè $\left|H(\omega)\right| = \frac{1}{(1-a)}$.

Al crescere di a, cioè al suo avvicinarsi al cerchio unitario (sempre sull'asse reale) questo massimo aumenta (in particolare diverge per a->1):

Il valore minimo si avrà quando cos? =-1 per ? =p; e varrà:

$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+2a+a^2} = \frac{1}{(1+a)^2}$ cioè $\left|H(\omega)\right| = \frac{1}{(1+a)}$

si tratta dunque di un filtro passa basso che appunto alla pulsazione ? =0 ha il suo massimo.

Se invece a<0 massimo e minimo si invertono ed il filtro da passa basso diventa passa alto.

Nel caso a complesso la funzione sarà simile a quella passa basso, ma riferita alla variabile ?- ? $_0$, quindi semplicemente shiftata di ?$_0$, ed avrà il massimo per il valore della pulsazione ? = ? $_0$.

Si può dimostrare che la larghezza di banda vale approssimativamente $B = 2(1-a)$.

La risposta dell'equazione alle differenze ad una sequenza z^n con z complesso.

Nel caso di un ingresso del **tipo z^n con z complesso si può ragionare in modo simile a quello già visto per l'esponenziale complesso.**

Data l'equazione del primo ordine:

$$y[k] - ay[k-1] = x[k]$$

è possibile caratterizzare la risposta ad una sequenza di tipo oscillante ma con ampiezza variabile nel tempo; una sequenza di questo tipo, complessa, ha la forma z^n con z complesso. Denotando z nella sua forma esponenziale $z_0=r_0e^{j?_0 n}$ la sequenza osclillante avrà modulo variabile con n: $\left|r_0^n e^{j\omega_0 n}\right| = \left|r_0^n\right|$ con i comportamenti già visti in funzione dei valori di r positivi o negativi e maggiori o minori di 1.

A questo fine supponiamo che l'uscita del sistema sia una sequenza esponenziale complessa $y[n] = z^n$; sostituendo nell'equazione della ricorrenza avremo:

$$z^n - az^{n-1} = x[n]$$
$$\left(1 - az^{-1}\right) \cdot z^n = x[n]$$
$$\left(1 - az^{n-1}\right) y[n] = x[n]$$
$$y[n] = \frac{1}{1-az^{-1}} x[n]$$

Relazione valida soltanto per sequenze di ingresso del tipo $x[n] = z^n$ per le quali esiste una semplice proporzionalità tra ingresso ed uscita. Sia la sequenza di ingresso che quella di uscita sono dunque esponenziali complessi con la stessa frequenza, stesso decay, fase diversa

e modulo diversi dipendenti dalla costante $H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$ (frequenze diverse vengono attenuate o amplificate in modo diverso – azione di filtraggio-).
Possiamo rendercene conto usando la notazione esponenziale $H(z)=|H(z)|e^{\varphi_H(z)}$
Dunque per ingresso esponenziale complesso l'uscita sarà un esponenziale complesso di ampiezza $\frac{1}{1-az^{-1}}$**,** dipendente dal modulo |z| e dalla sua pulsazione ? .
Queste sequenze che passano "immutate" nel sistema in esame, cioè conservando frequenza e caratteristiche di decadimento, a meno di un fattore di scala $H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$ costante complessa si dicono autofunzioni del sistema e la costante $H(z)$ corrispondenete all'autofunzione (meglio autosequenza) si dice autovalore dell'autofunzione relativa.
$H(z)$ caratterizza dunque il sistema rispetto agli ingressi di tipo esponenziale complesso**.** Se poi l'ingresso è una sinusoide o cosinusoide reale con coefficiente r^n, avendo presente la relazione $r^n\cos(\omega n)=\frac{1}{2}r^n\left(e^{j\omega n}+e^{-j\omega n}\right)$ e la linearità del sistema, si può immediatamente ottenere il risultato corrispondente. (trovarlo esplicitamente).

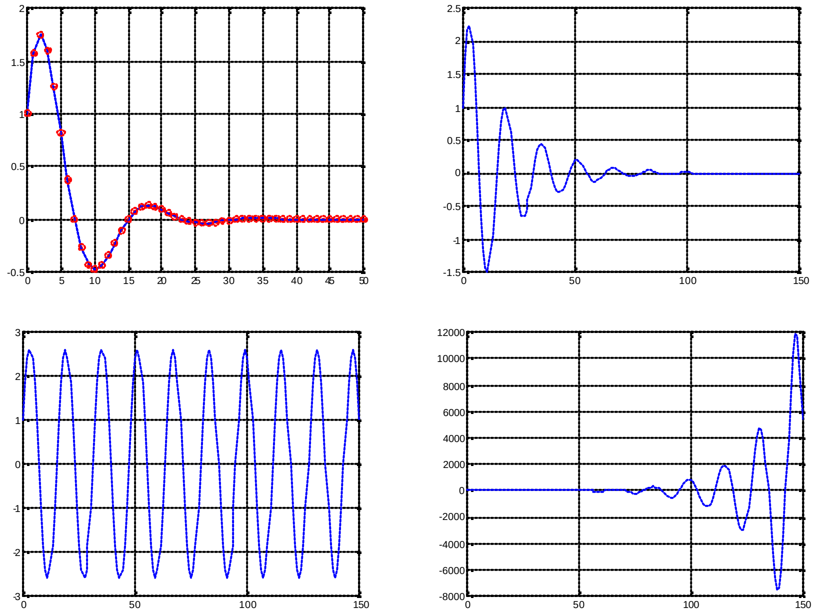
Per conoscere il comportamento del sistema al variare di z nel piano complesso , basterà dunque studiare la funzione di trasferimento:

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

La risposta in modulo è rappresentata alla fine di questo paragrafo.

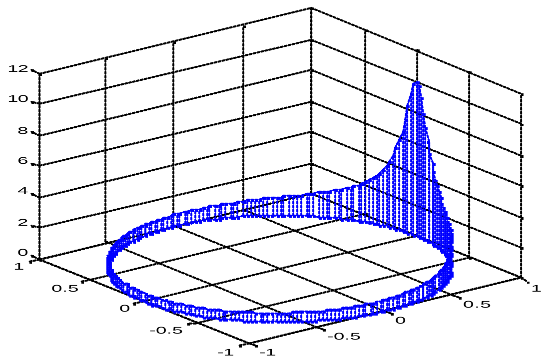
La risposta impulsiva del sistema del primo ordine

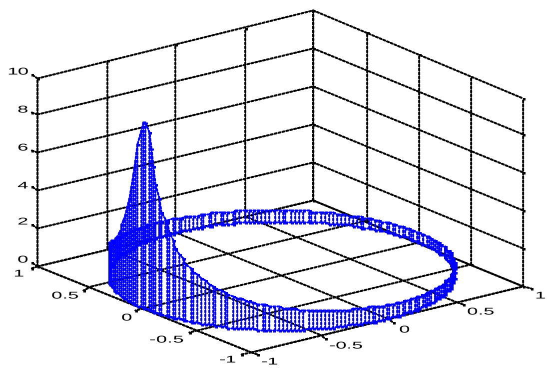
La risposta impulsiva, nel caso causale è, come già visto, $y[k]=u[k]a^k$ **ed ha l'andamento già visto delle sequenze esponenziali complesse; la sua componente reale è riportata nelle figure seguenti** per diversi valori di a sia modulo che fase: la fase dà conto della frequenza delle oscillazioni, mentre per il modulo si osserva che all'avvicinarsi di |a| ad 1 la risposta impulsiva decade meno rapidamente e, per |a|=1 diventa una oscillazione ad ampiezza costante; in tal caso il sistema, avendo una risposta che non decade nel tempo (quindi non aassolutamente sommabile) è instabile; a maggior ragione questo accade nel caso |a|>1. *Rifare le figure con oscillazione 3D e componenti reale ed immaginaria*



.

Nelle figure che seguono il modulo è rappresentato come quota della curva di risposta lungo il cerchio unitario: i tre casi sono, passa basso, passa alto, accordato.





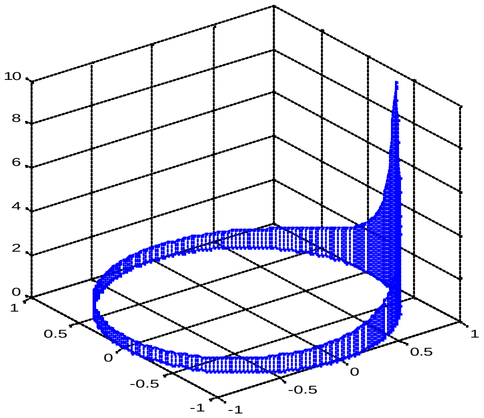


Figure ottenute con H_omega_3D.m

Questa rappresentazione suggerisce una estensione della funzione H(?) definita soltanto per $e^{j\omega}$ $\omega \in [0\ 2\pi]$ cioè per valori sul cerchio complesso, a valori arbitrari del piano complesso sia interni che esterni al cerchio unitario oltre che appartenenti ad esso. E' quello che, come vedremo, viene fatto mediante definizione della trasformata Z, come è illustrato nella figure seguente, in cui la funzione viene calcolata e rappresentata su cerchi di raggio sia minore che maggiore dell'unità..

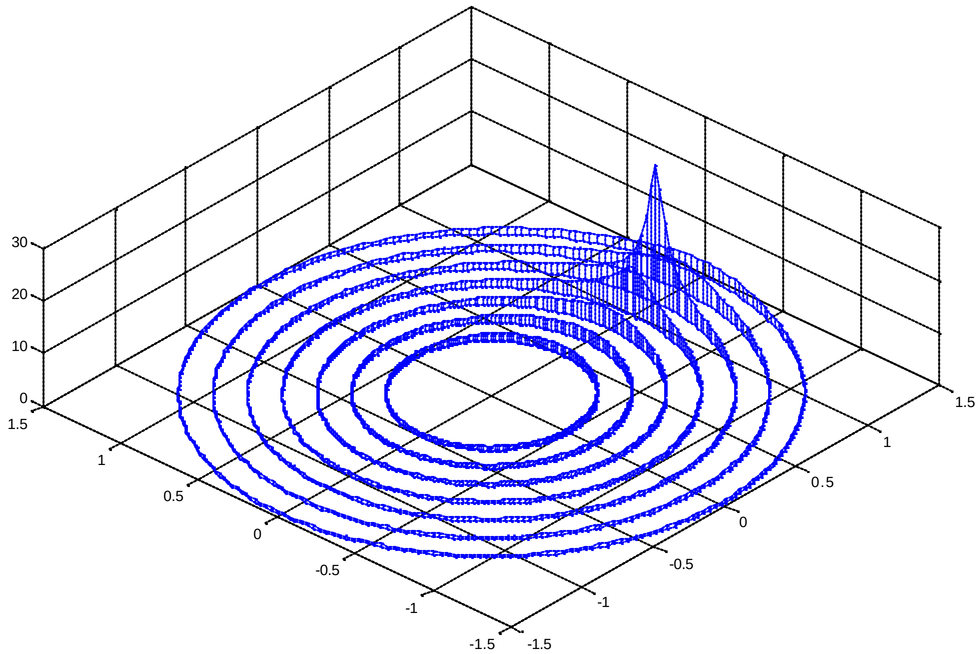


figure ottenuta con H_omega_3D_not_unit_circle.m

La risposta impulsiva dall'equazione alle differenze

Data l'equazione

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

cioè, nel caso $a_0 = 1$

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots a_N\, y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots b_M\, x[n-M]$$

per ottenere la risposta all'impulso unitario occorre fare l'ipotesi di causalità o anticausalità: eg:

$$y[n] + a_1 y[n\text{-}1] = b_0 x[n] + b_1 x[n\text{-}1]$$

per n=0… e $x[n] = \delta[n]$

si ha

$$h[n] + a_1 h[n\text{-}1] = b_0 + b_1 0$$

occorre quindi conoscere $h[n\text{-}1]$ o supporre la causalità.
In tal caso dall'equazione generale della PDE si possono ricavare i campioni $h[n]$ per n=0….M, supposto che $h[n] = 0$ per $n<0$:

$$h[0] + a_1 0 + \ldots\ldots = b_0 \delta[0] + b_1 * 0 + \ldots\ldots \quad quindi\ h[0] = b_0]$$

$$h[1] + a_1 h[0] + \ldots\ldots = b_0 \delta[-1] + b_1 \delta[0] + b_2 \delta[1] + \ldots b \quad quindi\ \ h[1] = b_1 - a_1 h_0$$

e così via; per n=M

$$a_0 h[M] + a_1 h[M-1] + \ldots a_N h[M-N] = b_0 \delta[M] + b_1 \delta[M-1] + \ldots b_M \delta[0] = b_M$$

da cui si può ricavare h[M] a partire dagli h precedentemente calcolati.
Continuando in tal modo si calcolano tutti i valori, ricorsivamente.

Ricavare in forma chiusa la risposta impulsiva dall'equazione alle differenze

Continuando a scrivere l'equazione alle differenze, a partire valore n>M si ha che

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] + \ldots a_N h[n-N] = b_0 0 + b_1 0 + \ldots b_M 0 = 0$$

cioè l'equazione è omogenea; la soluzione quindi coinciderà con una opportuna omogenea; poiché l'omogenea associata appartiene alla classe

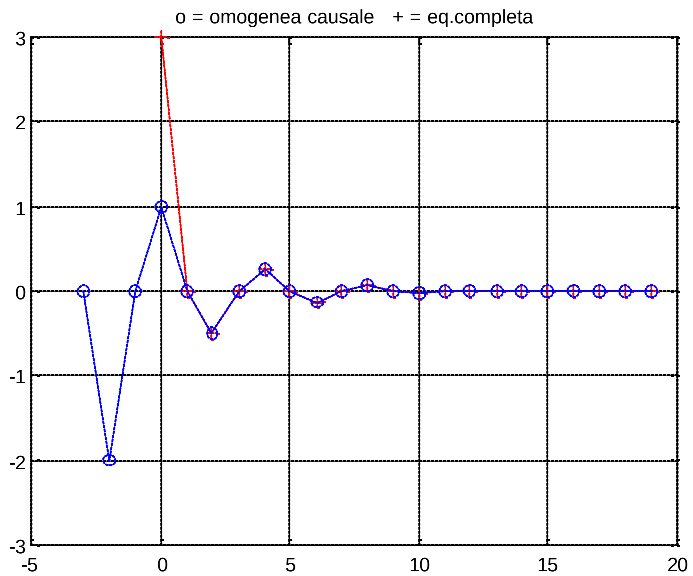
$$y_o[k] = \sum_{i=1}^{N} c_i\, y_i[k]$$

e poiché c'è una corrispondenza biunivoca tra le costanti c_i e una N-pla di valori iniziali, possiamo trovare il valore delle costanti che fanno passare l'omogenea per gli N punti calcolati.
In definitiva:
La risposta impulsiva causale h[0],h[1], h[2],….h[N], la omogenea passa per h[1], h[2],….h[N], ma non per h[0] per cui la relazione non e' omogenea. Le due coincidono da h[1] in poi.

Esempio:

$y[n]+\frac{1}{2}y[n-2]=3x[n]+x[n-2]$ soluzione causale (risulta stabile)

se 1/2 → 2 la soluzione causale non è stabile, e' stabile la non causale.



L’equazione … sta impulsiva come outpu…

$$h[n]+\frac{1}{2}h[n-2]=3\delta[n]+\delta[n-2]$$

L’equazione caratteristica è:

$$p(z)=z^2+\frac{1}{2}z \text{ con soluzioni : } \lambda=\pm j\sqrt{\frac{1}{2}}$$

la famiglia delle risposte all’impulso unitario è quindi:

$$h[k]=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k$$

Per calcolare le due costanti c1 e c1 occorre imporre altre condizioni derivanti dalla condizione di causalità (h[n]=0 per n<0) e dalle condizioni che si ottengono dalla ricorrenza per k=0,1,2:

k=0 : $h[0]+h[-2]=3\delta[n]+\delta[n-2]$ $\qquad h[0]=3\delta[n]=3$

k=1: $h[1]+\frac{1}{2}h[-1]=3\delta[1]+\delta[-1]$ $\qquad h[1]=0$

k=0: $h[2]+\frac{1}{2}h[0]=3\delta[2]+\delta[0]$ $\qquad h[2]+\frac{1}{2}3=\delta[0]$ $\qquad h[2]=-\frac{1}{2}$

Della famiglia di soluzioni di sopra rispondono al requisito della causalità le soluzioni con costanti tali che:

$$h[1]=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=0$$

$h[1] = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = -\frac{1}{2}$

Questo sistema dà c1 =1 c2 =0. La risposta impulsiva è quindi

$$h[k] = \begin{cases} k < 0 & 0 \\ k = 0 & 3 \\ k > 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cos\frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

Vale la seguente proprietà:

Se yo[n] è soluzione dell'omogenea, anche y_o[n-M] per qualsiasi M è soluzione.

Esempio:

$y[n] + \frac{1}{2}y[n-2] = 3x[n] + x[n-2]$ soluzione causale stabile

$y[n] + 2y[n-2] = 3x[n] + x[n-2]$ soluzione anticausale stabile

Esempio : numeri di Fibonacci: formula di Binet: $y[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

Risposta impulsiva delle equazioni alle differenze: introduzione euristica

La risposta impulsiva dell'equazione alle differenze finite del primo ordine, $y[k]-ay[k-1]=\delta[k]$ con |a|<1, eventualmente complesso, soluzione quindi dell'equazione: $h[k]-ah[k-1]=\delta[k]$ è $h[k]=a^k$.
Questo risultato si può vedere da un altro punto di vista: consideriamo il polinomio detto caratteristico $p(z)=1-az^{-1}$ e l'equazione $p(z)=0$
ricavato dall'equazione alle differenze sostituendo formalmente ai ritardi le potenze negative di z. (y[k]->z^0 y[k-1]->z^{-1})
La soluzione di questa equazione è $z=a$.
Ebbene soluzione dell'equazione di partenza è la sequenza

$h_k=a^k$

Il risultato può essere generalizzato ad equazioni alle differenze di ordine qualsiasi.
Si chiama polinomio caratteristico dell'SDE $y_k+a_1y_{k-1}+a_2y_{k-2}+.........+a_ny_{k-n}=0$ il polinomio $p(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+.........+a_nz^{-n}=0$
Questo polinomio avrà, per il teorema fondamentale dell'algebra, n radici; di queste alcune possono essere coincidenti e quindi con molteplicità maggiore di uno.
Si può verificare che:

Per le radici di molteplicità 1 l_i la sequenza $y[k]=l_i^{\,k}$ è soluzione dell'omogenea associata, per le radici di molteplicità 2 l_i lo è la sequenza $y[k]=k\,l_i^{\,k-1}$, per le radici di molteplicità 3 l_i lo è la sequenza $y[k]=(k-1)\,l_i^{\,k-2}$, e così via.

Dette $y_i[k]$ queste n sequenze, si ha che ogni loro combinazione lineare è ancora soluzione dell'omogenea associata

$$y_o[k]=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i[k]$$

Si può poi dimostrare che tutte le soluzioni si trovano in tal modo.

Le soluzioni dell'omogenea associata formano uno spazio lineare di dimensione *n* di cui la famiglia $\{y_i[k]\}_{i=0...:n}$ costituisce una base.

Sezione del secondo ordine: risposta impulsiva.

Consideriamo la SDE del secondo ordine.

$$y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]=b\ x[n]+b_1 x[n-1]+b_2 x[n-2]$$

Il polinomio caratteristico è

$$1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}$$

<u>Caso di soluzioni distinte</u>: l_1, l_2: le soluzioni dell'omogenea sono:

$$y_1^o[n]=\lambda_1^n \quad \text{e} \quad y_2^o[n]=\lambda_2^n\,;$$

la famiglia di soluzioni è:

$$y_c^o[n]=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n\,.$$

Dati i valori iniziali y_1 e y_2, imponendo che la soluzione passi per questi punti si ha:

$$y_1=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2 \qquad \text{per } k=1$$

$$y_2=c_1\lambda_1^2+c_2\lambda_2^2 \qquad \text{per } k=2$$

Le due costanti si determinano univocamente poichè:

$$D=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2\end{Vmatrix}=\lambda_1\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2\neq 0 \quad \text{poiché } \lambda_1\neq\lambda_2\,.$$

<u>Caso di soluzioni coincidenti</u>: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$: le soluzioni dell'omogenea sono:

$$y_1^o[n]=\lambda^n \quad \text{e;} \quad y_1^o[n]=n\lambda^{n-1}$$

la famiglia di soluzioni è:

$$y_c^o[n]=c_1\lambda^n+c_2 n\lambda^{n-1}\,.$$

Dati i valori iniziali y_1 e y_2, imponendo che la soluzione passi per questi punti si ha:

$$y_1=c_1\lambda+c_2 \qquad \text{per } k=1$$

$$y_2=c_1\lambda^2+c_2 2\lambda \qquad \text{per } k=2$$

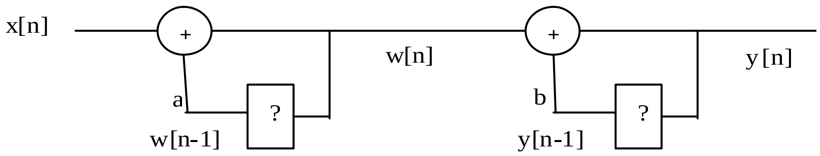
Le due costanti si determinano univocamente poichè:

$$D=\begin{Vmatrix}\lambda & 1\\ \lambda^2 & 2\lambda\end{Vmatrix}=\lambda^2\neq 0$$ altrimenti l'equazione SDE mancherebbe del termine per y[n].

Anche in questo caso il sistema è di Cramer.

Sezione del secondo ordine: polinomio caratteristico e fattorizzazione

Consideriamo la cascata di due sezioni del primo ordine:



$$w[n]-aw[n-1]=x[n]$$
$$y[n]-by[n-1]=w[n]$$

Riscrivendo la seconda equazione per *n -> n-1* sarà

$$y[n-1]-by[n-2]=w[n-1]$$

e sostituendo nella prima equazione il valore di *w[n]* della seconda *e w[n-1]* dell'ultima equazione avremo la segunete relazione relativa al sistema risultante dalla serie dei due:

$$y[n]-by[n-1]-ay[n-1]+aby[n-2]=x[n]$$

quindi:

$$y[n]-(a+b)y[n-1]+aby[n-2]=x[n]$$

Il polinomio caratteristico è:

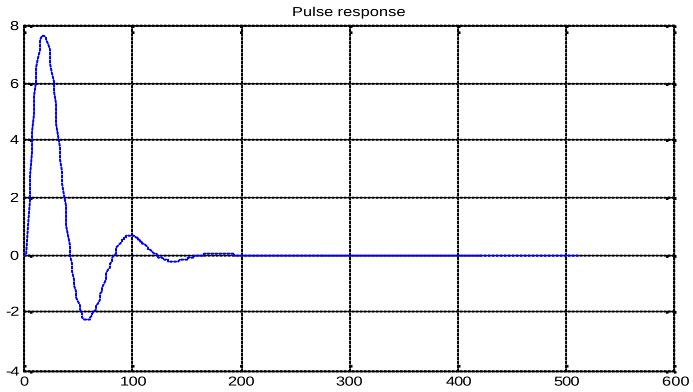
$$1-(a+b)z^{-1}+abz^{-2}$$

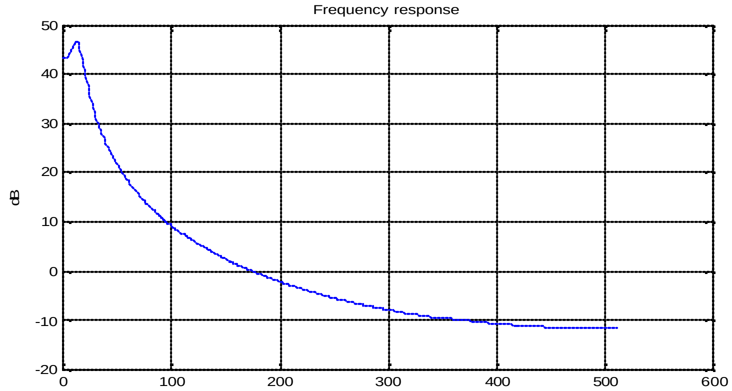
che risulta essere il prodotto dei due polinomi caratteristici delle sezioni del primo ordine.

$$(1-az^{-1})\cdot(1-bz^{-1}).$$

Nel dominio del tempo, quindi, è possibile fattorizzare l'equazione alle differenze del secondo ordine nella cascata di due sezioni del primo ordine, fattorizzando il suo polinomio caratteristico.

Il polinomio caratteristico $1-(a+b)z^{-1}+abz^{-2}$ avrà coefficienti reali pur essendo a e b immaginari se e solo se $a+b$ e ab sono reali; ma questo accade se e solo se a e b sono complessi coniugati: $b=\overline{a}$; in tal caso sarà $a+b=a+\overline{a}=real(a)$ e $a\cdot b=a\cdot\overline{a}=|a|$.
Nel caso dunque della sezione del primo ordine con coefficiente complesso del termine ricorsivo si può, mettendo in cascata due sezioni del primo ordine con coefficienti complessi coniugati , ottenere un filtro del secondo ordine a coefficienti reali. La risposta in frequenza sarà accordata come sulle frequenze corrispondente all'angolo dei due coefficienti complessi coniugati ?$_0$ e -?$_0$ (equivalente quest'ultimo a 2p- ?$_0$).
E' riportata di seguito la simulazione numerica di un sistema del secondo ordine di questo tipo, nel caso stabile e causale, con $|a|<1$.
I diagrammi sono ottenuti con la funzione *iir2.m*


Pulse response
8
6
4
2
0
-2
-4
0
100
200
300
400
500
600


Frequency response
dB
50
40
30
20
10
0
-10
-20
0
100
200
300
400
500
600

La risposta impulsiva di un sistema del secondo ordine

La risposta impulsiva si può trovare a partire dalla risposta delle singole sezioni del primo ordine considerando la cascata di due sezioni del primo ordine.
Per sistemi in cascata, lavorando nel dominio del tempo, la risposta è data dalla convoluzione delle due risposte. Se dunque i due poli delle due sezioni sono a e b avremo:

$h[n]=u[n]a^n$ e $g[n]=u[n]b^n$. La risposta impulsive della cascata dei due filtri sarà:

$$hg[n]=h[n]*g[n]=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} u[k]a^k u[n-k]b^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k}$$

$$hg[n]=b^n \sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{-k} b^n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Ricordando poi che $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \quad \forall\alpha \ complesso \neq 1 \quad = N \ se \, \alpha = 1$ sarà

$hg[n]=b^n \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}}$ sempre che $\frac{a}{b} \neq 1$ cioè $a \neq b$.

Nel caso b=a la somma parziale della serie è *n+1* e la risposta è

$hg[n]=(n+1)b^n$;

Nel caso a e b complessi coniugati $a = re^{j\omega_0}$ e $b = re^{-j\omega_0}$ manipolando il risultato ricavato sopra si può ricavare la seguente formula da cui risulta che la risposta è reale:

$$hg[n]=b^n \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}} = u[n]r^n \frac{\sin((n+1)\omega_0)}{\sin \omega_0} = u[n]r^n \frac{\sin(n\omega_0+\omega_0)}{\sin \omega_0}$$

Si osserva che la risposta converge se e solo se r<1; la verifica dei risultati teorici mediante simulazione è fatta nel file *cascata_primo_ordine.m* .

Analogamente a quanto fatto per il sistema del primo ordine possiamo verificare che tipo di ingresso fornisce in uscita un segnale esponenziale complesso nell'equazione del secondo ordine $y[n]-(a+b)y[n-1]+aby[n-2]=x[n]$;

se è $y[n]=e^{j\omega n}$, grazie alle proprietà dell'esponenziale sarà:

$$e^{j\omega n}-(a+b)e^{j\omega(n-1)}+abe^{j\omega(n-2)}=x[n]$$
$$e^{j\omega n}-(a+b)e^{j\omega n}e^{-j\omega}+abe^{j\omega n}e^{-j2\omega}=x[n]$$
$$e^{j\omega n}\left[1-(a+b)e^{-j\omega}+abe^{-j2\omega}\right]=x[n]$$

Si ricava dunque che anche x[n] deve essere sinusoidale; se poi esso ha ampiezza unitaria, cioè $x[n]=e^{j\omega n}$ sarà;

$$y[n]=e^{j\omega n}\frac{1}{1-(a+b)e^{-j\omega}+abe^{-j2\omega}}$$

I due segnali differiscono per ampiezza e fase, in dipendenza dalla pulsazione ? in base alla funzione di trasferimento che caratterizza il rapporto tra uscita ed ingresso esponenziali:

$$H(\omega)=\frac{y[n]}{x[n]}=\frac{1}{1-(a+b)e^{-j\omega}+abe^{-j2\omega}}$$

La $H(?)$ ammette la fattorizzazione seguente:

$H(\omega)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}\dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}$ che mette in evidenza che il risultato finale, che nel tempo è determinato dalla cascata di due sezioni del primo ordine, nel dominio della variabile ? è determinato dal prodotto delle funzioni di trasferimento di due sezioni del primo ordine. Abbiamo dunque verificato in un caso particolare un risultato generale:

Per sistemi in cascata: la convoluzione nel dominio del tempo si traduce in prodotto delle trasformate nel dominio della frequenza e viceversa.

Naturalmente l'operazione di prodotto è più semplice di quella di convoluzione: questo giustifica l'adozione in molti casi dell'elaborazione nel dominio della frequenza in sostituzione di quella nel dominio del tempo.

Nel caso in cui, a e b sono complessi coniugati, $a=\overline{b}$ il polinomio di secondo grado ha radici complesse coniugate ma l'equazione alle differenze ha coefficienti reali.

Poiché in tal caso le due sezioni sono entrambe passa-banda sulla stessa frequenza di accordo, anche il sistema finale sarà di tale tipo.

Guardando al funzione di trasferimento nella variabile ?, si osserva che gli zeri del numeratore sono poli della funzione di trasferimento, cioè sono punti in cui la risposta in frequenza diverge.

In definitiva, per un sistema del secondo ordine a coefficienti reali si possono distinguere i seguenti casi:

1) il polinomio caratteristico ha una sola radice, di molteplicità 2. In tal caso si avrà la cascata di due sezioni passa-basso o passa alto a seconda del segno della radice del polinomio. La cascata sarà ancora dello stesso tipo.
2) il polinomio caratteristico ha due radici distinte, ma reali. In base al segno dei due zeri le due sezioni saranno P.A. o P.B. e la loro cascata avrà la risposta corrispondente al prodotto
3) il polinomio caratteristico ha due radici complesse coniugate.

In quest'ultimo caso, posto $a = r \cdot e^{j\omega_0}$ e $b = r \cdot e^{-j\omega_0}$ sarà:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - 2r\cos(\omega_0)e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$

Questa funzione di trasferimento si può studiare graficamente o analiticamente. Essa ha una risposta che assume il massimo alla pulsazione ?$_0$. Si può dimostrare che la larghezza di banda vale approssimativamente $B = 2(1 - r)$. Come già visto la risposta impulsiva è:

$$h[n] = u[n]\frac{r^n}{\sin(\omega_0)}\sin(\omega_0 n + \omega_0)$$

Esercizio: Tracciare la famiglia di curve corrispondenti a diversi valori dei due parametri.

Scomposizione di un sistema descritto da un’equazione alle differenze in una cascata di sistemi di ordine inferiore.

Il risultato visto per la sezione del secondo ordine, si può generalizzare al caso di ordine qualsiasi. Si può cioè spezzare il sistema in sottosistemi di ordine inferiore che, collegati in cascata, costituiscono una realizzazione del sistema completo.
Viene qui in aiuto il teorema fondamentale dlel’algebra che afferma che un polinomio di grado n ha nel campo complesso esattamente n soluzioni, che possono essere eventualmente coincidenti (in tal caso si parla di molteplicità pari al numero degli zeri coincidenti). In ogni caso possono esistere coppie di zeri complessi coniugati in modo tale che l’equazione del secondo ordine corrispondente abbia coefficienti reali.

$$p(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots\dots\dots + a_n z^{-n}$$

$$p(z) = a_n (z^{-1} - \alpha_1)(z^{-1} - \alpha_2)(z^{-1} - \alpha_3)\dots\dots(z^{-1} - \alpha_n)$$

Poiché poi questi zeri, come visto, sono i poli della funzione di trasferimento questi saranno reali ovvero se complessi posssono essere soltanto coppie di complessi coniugati. Le coppie di complessi coniugati danno luogo a sistemi reali del secondo ordine, i poli reali danno luogo a sezioni (reali) del primo ordine. Questa fattorizzazione in sezioni di ordine inferiore (primo e secondo ordine) unita alla proprietà della cascata dei sistemi LTI permettono di studiare sistemi di ordine qualsiasi combinando l’effetto in frequenza delle varie sezioni.

Verificare in MATLAB come si esegue la fattorizzazione, utilizzando le funzioni relative ai polinomi.

Aggiungere sezione passatutto del secondo ordine.