

Chapter 10

La matrice CKM e la violazione di CP

10.1 Matrice CKM

Nel paragrafo 3.6.2 abbiamo visto che l'interazione debole di corrente carica dei quark è espressa dal termine

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}u_{L\alpha}V_{\alpha\beta}\gamma^\mu d_{L\beta}W_\mu + h.c.$$

della lagrangiana del modello standard (vedi 3.76, 3.77 e 3.78), dove V è la matrice unitaria *CKM* di mescolamento dei sapori (vedi 3.79)

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}$$

Quale matrice 3×3 complessa, la matrice CKM è scritta in termini di 2×3^2 parametri reali. La condizione di unitarietà

$$V^\dagger V = \hat{1} \quad (10.1)$$

fornisce nove relazioni fra gli elementi della matrice: tre sono ottenute uguagliando a 1 gli elementi della diagonale del prodotto, per esempio

$$|V_{ud}|^2 + |V_{cd}|^2 + |V_{td}|^2 = 1 \quad (10.2)$$

e sei uguagliando a zero gli elementi fuori diagonale, per esempio

$$V_{ub}^*V_{ud} + V_{cb}^*V_{cd} + V_{tb}^*V_{td} = 0 \quad (10.3)$$

Le sei relazioni ottenute uguagliando a zero gli elementi fuori diagonale del prodotto $V^\dagger V$ si possono rappresentare come triangoli nel piano complesso. Tali triangoli prendono il nome di *triangoli dell'unitarietà* e quello più comunemente usato si riferisce proprio alla relazione 10.3 (rappresentato nella figura 10.4).

Se tutti gli elementi della matrice fossero reali, essa sarebbe ortogonale ($V^T V = \hat{1}$) e potrebbe essere pensata come una rotazione parametrizzata da

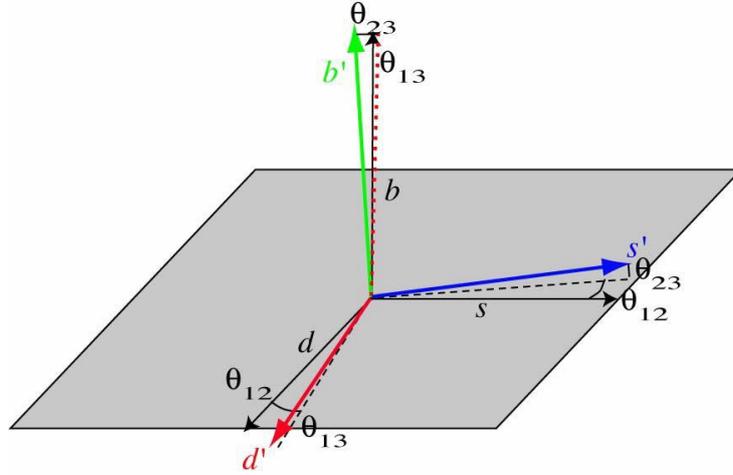


Figure 10.1: Angoli di rotazione per la matrice CKM.

tre numeri reali, corrispondenti a tre angoli di rotazione. I rimanenti sei parametri della matrice unitaria V sono, perciò, dei fattori di fase del tipo $e^{i\alpha}$. D'altra parte, la fase di ciascun campo di quark è arbitraria e può essere liberamente cambiata (purché q_L e q_R cambino nello stesso modo per mantenere reale i termini di massa nella 3.74). Questo sembrerebbe darci abbastanza libertà per cancellare sei fasi da V così come definita dalla 3.77. Tuttavia possiamo vedere che V è lasciata invariata se cambiamo tutti i campi di quark della stessa fase. Così ci sono realmente solo cinque fasi eliminabili e perciò, alla fine, V viene a dipendere da tre angoli di rotazione ed una fase. La parametrizzazione standard è

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

dove $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. I tre angoli di rotazione possono essere scelti tutti nel primo quadrante, così che

$$c_{ij}, s_{ij} \geq 0$$

Con questa parametrizzazione gli elementi V_{ud} , V_{us} , V_{cb} e V_{tb} sono reali.

Si perviene alla 10.4 considerando tre assi ortogonali, a ciascuno dei quali si fa corrispondere un quark del tipo down (figura 10.1), ed eseguendo tre successive rotazioni: la prima dell'angolo θ_{12} attorno all'asse z , la seconda dell'angolo θ_{13} attorno all'asse y e la terza dell'angolo θ_{23} attorno all'asse x . La rotazione complessiva è descritta da prodotto delle tre matrici di rotazione ortogonali

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bisogna, quindi, introdurre la fase. A priori ci sono diversi modi equivalenti;

quello che porta alla 10.4 è il seguente

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è valido se la matrice è effettivamente unitaria. Tale unitarietà deve essere verificata sperimentalmente.

La presenza di un fattore di fase diverso da zero nella matrice di mixing implica la violazione di CP. Infatti l'invarianza per CP richiede $V = V^*$. L'angolo di fase risulta essere piuttosto grande, anche se non è attualmente noto con grande precisione: $\delta \approx 60^\circ$. Una misura della violazione di CP, indipendente da ogni convenzione di fase, è rappresentata dal cosiddetto invariante di Jarlskog, J , definito da

$$\text{Im} [V_{ij}V_{kl}V_{il}^*V_{kj}^*] = J \sum_{m,n=1}^3 \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \quad (10.5)$$

ove ϵ_{ikm} è il tensore totalmente antisimmetrico. Una rappresentazione della 10.5 è, per esempio: $J = \text{Im} [V_{ud}V_{cs}V_{us}^*V_{cd}^*]$. Tutti i triangoli di unitarietà hanno aree uguali tra loro e pari a $J/2$.

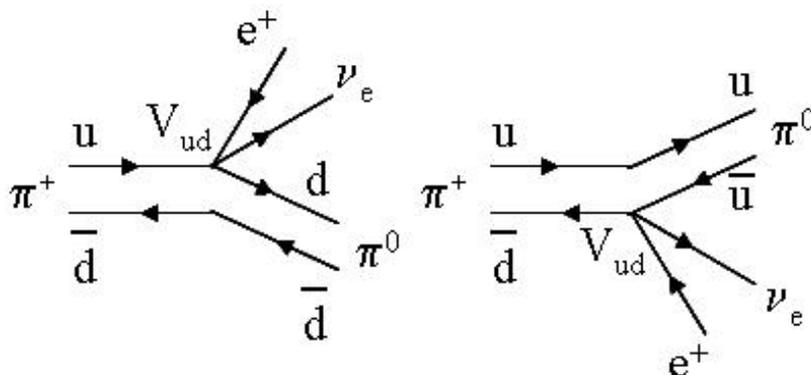
10.1.1 Determinazione degli elementi della matrice CKM

La determinazione degli elementi della matrice CKM è tutt'altro che banale in quanto essi non possono essere misurati direttamente ma emergono dal confronto tra i valori misurati di osservabili fisiche e le rispettive predizioni teoriche; queste ultime, però, non sono semplici da calcolare a causa della presenza di effetti di QCD.

Per esempio, $|V_{ud}|$, che è sostanzialmente il coseno dell'angolo di Cabibbo ($|V_{ud}| \approx \cos \theta_C$), è misurato nel decadimento β . Il metodo più accurato è quello che permette di estrarre $|V_{ud}|$ dalla misura delle vite medie dei decadimenti β nucleari superpermessi, che sono transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$ tra due membri dello stesso multipletto di isospin, con $\Delta I_3 = \pm 1$. Però $|V_{ud}|$ è anche estratta dal decadimento β del neutrone e da quello del pione carico, il cosiddetto decadimento π_{e3} del pione. I risultati delle diverse misure sono in accordo entro il permille. Il canale più chiaro dal punto di vista teorico è proprio π_{e3} , cioè

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$$

per il quale il MS prevede una frazione di decadimento dell'ordine di 10^{-8} , a causa del suo piccolo Q-valore ($\sim 4,6 MeV$). Questo canale non soffre, ovviamente, delle incertezze derivanti da effetti legati alla struttura nucleare, come nel caso del decadimento β , e l'elemento di matrice è particolarmente semplice. Presenta, però, un problema di statistica a causa del rapporto di decadimento molto piccolo. Per ottenere un errore statistico dell'ordine del permille su tale rapporto occorre raccogliere almeno 10^{14} decadimenti. A π_{e3} contribuiscono, a livello di quark, i due grafici in figura 10.2. Naturalmente i quark interessati non sono liberi, per cui il quark che non decade non si comporta come un semplice spettatore ma ha interazioni forti con il quark che decade, sia nello stato iniziale che nello stato finale, per di più non facilmente calcolabili in quanto in regime di QCD non perturbativa.

Figure 10.2: Grafici a livello quark per il decadimento $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$.

L'ampiezza di decadimento è molto bene approssimata dall'accoppiamento corrente-corrente della corrente leptonica con la corrente adronica associata alla transizione $\pi^+ \rightarrow \pi^0$. Detto p il quadrimomento del π^+ e p' il quadrimomento del π^0 , l'elemento di matrice della corrente adronica è costruito proprio come una funzione di questi due quadrivettori. Trattandosi di una transizione $0^- \rightarrow 0^-$ la corrente è vettoriale e, quindi, l'elemento di matrice adronico più generale possibile è del tipo

$$V_{ud} [f_1 (q^2) p_\mu + f_2 (q^2) p'_\mu]$$

I fattori di forma f_1 e f_2 sono, in generale, funzioni delle grandezze invarianti disponibili. Sono stati scritti in funzione del quadrato del quadrimomento trasferito

$$q^2 = (p - p')^2$$

in quanto esso è l'unico invariante non triviale. Usualmente l'elemento di matrice si scrive in funzione di due ulteriori fattori di forma, $f_+(q^2)$ e $f_-(q^2)$

$$V_{ud} [f_+(q^2) (p_\mu + p'_\mu) + f_-(q^2) (p_\mu - p'_\mu)]$$

Poiché il Q-valore del decadimento è molto piccolo, possiamo assumere $q^2 \approx 0$ e trascurare $f_-(q^2)$. Perciò l'ampiezza invariante completa diventa

$$\mathfrak{M} \simeq \frac{G}{\sqrt{2}} V_{ud} f_+(0) (p_\mu + p'_\mu) [\bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(k)]$$

avendo indicato con $k \equiv (E, \mathbf{k}_e)$ il quadrimpulso del positrone e $k' \equiv (E_\nu, \mathbf{k}_\nu)$ quello del neutrino. In prima approssimazione si può trascurare l'energia cinetica del π per cui

$$(p_\mu + p'_\mu) \equiv (2m_\pi, 0, 0, 0)$$

e, quindi,

$$\mathfrak{M} \simeq \sqrt{2} G V_{ud} f_+(0) m_\pi [\bar{u}(k') \gamma^0 (1 - \gamma^5) v(k)]$$

Trascurando la massa dell'elettrone si trova

$$|\mathfrak{M}|^2 = 16G^2 |V_{ud}|^2 f_+^2 m_\pi^2 [E_e E_\nu + \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{k}_\nu]$$

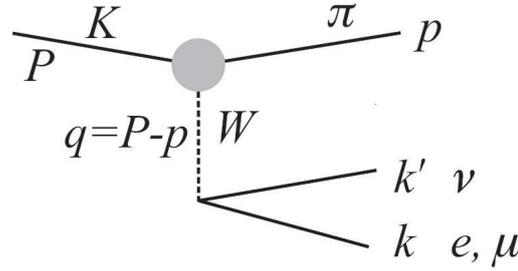


Figure 10.3: Ampiezza all'ordine più basso per $K \rightarrow \pi l \nu$. Il "blob" indica la struttura del vertice $K\pi W$.

Il termine $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{k}_\nu$ dà contributo nullo quando si integra su tutti gli angoli. Si trova, pertanto,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pi e 3}^0 &= \frac{G^2 |V_{ud}|^2 f_+^2}{(2\pi)^5} \int d^3 \mathbf{k}_e d^3 \mathbf{k}_\nu \delta(\Delta - E_e - E_\nu) \\ &= \frac{G^2 |V_{ud}|^2 f_+^2 \Delta^5}{60\pi^3} \end{aligned}$$

ove Δ è la differenza di massa tra il π^+ e il π^0

$$\Delta = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4,5936 \pm 0,0005 \text{ MeV}$$

f_+ può essere calcolato considerando che π^+ e π^0 appartengono allo stesso multipletto di isospin¹. Abbiamo messo un apice "0" a Γ per sottolineare che si tratta di un risultato all'ordine zero; una espressione più corretta di $\Gamma_{\pi e 3}$ si ottiene tenendo conto delle correzioni radiative² il cui contributo è dell'ordine di qualche percento. In definitiva l'incertezza teorica complessiva su $\Gamma_{\pi e 3}$ è piccola, risultando $\lesssim 10^{-3}$. L'esperimento PIBETA presso il PSI di Zurigo ha misurato³ $BR(\pi_{e3})$ con una incertezza dello 0,6%, ottenendo

$$BR(\pi_{e3}) = (1,036 \pm 0,006) \times 10^{-8}$$

e quota

$$|V_{ud}| = 0,9728 \pm 0,0030$$

in accordo con altri risultati più precisi.

Un ulteriore esempio della misura di parametri della matrice CKM è fornito dalla misura di $|V_{us}|$ ottenuto attraverso lo studio dei decadimenti semileptonici dei mesoni K (fig. 10.3), detti K_{l3} . In questo caso le complicazioni dovute alle interazioni forti sono più difficili da valutare che nel caso di π_{e3} . Intanto occorre tenere conto di tutti e due i fattori di forma f_+ e f_- nonché della loro dipendenza da q^2 , essendo, questa volta, piuttosto grande il Q-valore del

¹L'ipotesi CVC fornisce $f_+ = \sqrt{2}$. Si veda, per esempio, Renton par. 8.2.1.

²A. Sirlin, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 573.

³D. Pocanic et al., Phys. Rev: Lett. 93 (2004) 181803.

decadimento. L'espressione generale della larghezza di decadimento è

$$\Gamma(K_{l3}) = \frac{BR(K_{l3})}{\tau_K} = \frac{G^2 m_K^2}{192\pi^3} C_K^2 |V_{us}|^2 |f_+^{K\pi}(0)|^2 I_K^l S_{EW} \left(1 + \delta_{Kl}^{em} + \delta_K^{SU(2)}\right) \quad (10.6)$$

dove

- l'indice K denota la transizione $K^0 \rightarrow \pi^\pm$ o $K^\pm \rightarrow \pi^0$,
- C_K^2 è il fattore di isospin e vale $C_K = 1$ per K^0 e $C_K = 1/\sqrt{2}$ per K^\pm ,
- S_{EW} è la correzione radiativa elettrobole di breve distanza

$$S_{EW} = 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{M_Z}{m_K} \simeq 1,023$$

- δ_{Kl}^{em} è la correzione e.m. di lunga distanza ($\approx \%$) che dipende dalle cariche dei mesoni e dalle masse dei leptoni
- $\delta_K^{SU(2)}$ è la correzione per la rottura di $SU(2)$ che dipende dalla specie del K
- I_K^l è un integrale sullo spazio delle fasi che contiene anche la dipendenza da q^2 del fattore di forma,

Dalla 10.6 si estrae $|V_{us}|^2$ usando le seguenti grandezze misurate (oltre a G)

- frazioni di decadimento BR (inclusivi di radiazione)
- vita media dei K ($\Gamma = BR/\tau$)
- masse dei K
- I_K^l

nonché i seguenti input teorici

- $f_+(0)$ fattore di forma a zero momento trasferito
- le correzioni S_{EW} , $\delta_K^{SU(2)}$ e δ_K^{em} .

L'esperimento KLOE presso il collider e^+e^- ($DA\Phi NE$) dei Laboratori Nazionali di Frascati ha fatto la misura sia nel caso del decadimento del K^0 (K_L e K_S) che in quello del K carico. In particolare la misura con K carichi⁴ è stata fatta usando un campione di 600 milioni di eventi $\phi \rightarrow K^+K^-$, dal quale sono stati estratti ~ 225.000 eventi K_{e3}^\pm e ~ 154.000 eventi $K_{\mu 3}^\pm$, con cui è stata misurata la frazione di decadimento assoluto per i processi semileptonici

$$K^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu(\gamma) \quad \text{e} \quad K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \nu(\gamma)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} BR(K_{e3}) &= 0,04965 \pm 0,00038_{stat} \pm 0,00037_{sist} \\ BR(K_{\mu 3}) &= 0,03233 \pm 0,00029_{stat} \pm 0,00026_{sist} \end{aligned}$$

⁴F. Ambrosino et al., JHEP 0802:098,2008

Usando la vita media del K carico (PDG2006)

$$\tau = (1,2385 \pm 0,0024) \times 10^{-8} s$$

e il valore calcolato di $f_+(0)$ ⁵

$$f_+(0) = 0,961(8)$$

KLOE ha trovato

$$|V_{us}| = 0,2223(33)$$

Procedendo in modo simile a quanto sopra esemplificato, i moduli di sei elementi della matrice CKM sono stati estratti da misure dei rapporti di decadimento di adroni di diverso sapore e sono quelli di V_{ud} , V_{us} , V_{cd} , V_{cs} , V_{cb} e V_{ub} . Mediando opportunamente i vari risultati, si è trovato (PDG 2006)

$$\left(\begin{array}{ccc} |V_{ud}|^2 = (973,77 \pm 0,27) \times 10^{-3} & |V_{us}|^2 = (225,7 \pm 2,1) \times 10^{-3} & |V_{ub}|^2 = (4,31 \pm 0,30) \times 10^{-3} \\ |V_{cd}|^2 = (230 \pm 11) \times 10^{-3} & |V_{cs}|^2 = (957 \pm 95) \times 10^{-3} & |V_{cb}|^2 = (41,6 \pm 0,6) \times 10^{-3} \end{array} \right)$$

Questi valori sono consistenti, entro gli errori, con le condizioni di unitarietà.

$|V_{tb}|$ può essere determinato direttamente misurando la sezione d'urto di produzione di top singolo (si veda il paragrafo 8.2.2). Recentemente tale sezione d'urto è stata misurata dagli esperimenti CDF e D0 al Tevatron. Il valor medio dei risultati ottenuti per tale sezione d'urto è $(2,76^{+0,58}_{-0,74}) pb$ e da esso si ricava

$$|V_{tb}| = 0,88 \pm 0,07$$

Precedentemente gli stessi esperimenti avevano posto un limite superiore a $|V_{tb}|$ misurando la frazione di decadimento (si veda il paragrafo 8.3)

$$R_{tb} = \frac{BR(b \rightarrow Wb)}{BR(b \rightarrow Wq)} \quad (q = d, s, b)$$

$|V_{tb}|$ può anche essere ricavato da fit elettrodeboli su dati sperimentali nei quali pesa in particolar modo il contributo da loop di top a $\Gamma(Z^0 \rightarrow b\bar{b})$. Il PDG 2010 quota $|V_{tb}| = 0,77^{+0,18}_{-0,24}$.

$|V_{td}|$ e $|V_{ts}|$ non sono, invece, praticamente misurabili attraverso il decadimento del top. Però, dalla misura dei periodi delle oscillazioni delle coppie di mesoni $K^0\bar{K}^0$, $B^0\bar{B}^0$ e $B_s^0\bar{B}_s^0$ sono stati estratti rispettivamente i seguenti prodotti $|V_{ud}| |V_{us}|$, $|V_{td}| |V_{tb}|$ e $|V_{tb}| |V_{ts}|$.

Le parti immaginarie possono essere determinate attraverso lo studio di fenomeni di violazione di CP (vedi paragrafo 10.2.2).

Un fit globale usando tutti i valori misurati e imponendo l'unitarietà porta ai seguenti valori dei moduli degli elementi della matrice CKM (PDG 2006)

$$\left(\begin{array}{ccc} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 973,83^{+0,24}_{-0,23} & 227,2 \pm 1,0 & 3,96 \pm 0,09 \\ 227,1 \pm 1,0 & 972,96 \pm 0,24 & 42,21^{+0,10}_{-0,80} \\ 8,14^{+0,32}_{-0,64} & 41,61^{+0,12}_{-0,78} & 999,100^{+0,034}_{-0,004} \end{array} \right) \times 10^{-3} \quad (10.7)$$

⁵H. Leutwyler and M. Roos, Z. Phys. C25 (1984) 51

e ai seguenti valori dei seni dei tre angoli

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_{12} = 0,2229 \pm 0,0022 & \theta_{12} = 12,9^\circ \\ \sin \theta_{23} = 0,0412 \pm 0,0002 & \theta_{23} = 2,4^\circ \\ \sin \theta_{13} = 0,0036 \pm 0,0007 & \theta_{13} = 0,2^\circ \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

Da questi valori si vede che gli elementi diagonali della matrice sono molto prossimi a 1 e che gli angoli di mixing soddisfano la gerarchia

$$s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1 \quad (10.9)$$

In pratica questo significa che il decadimento semileptonico degli adroni coinvolge preferenzialmente famiglie prossime. Inoltre la submatrice

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix}$$

è quasi unitaria, l'angolo di Cabibbo è circa uguale a θ_{12} e $|V_{ud}| \simeq |V_{cs}| \simeq \cos \theta_C$ e $|V_{us}| \simeq |V_{cd}| \simeq \sin \theta_C$.

Se riguardiamo la 10.4 alla luce della 10.9, vediamo che tutti gli elementi nei quali compare il fattore di fase sono moltiplicati per s_{13} , il seno del più piccolo degli angoli di mescolamento dei sapori. Questo spiega perché gli effetti di violazione di CP siano così piccoli. Si vede anche che, nel caso di V_{cd} e V_{ts} , c'è un secondo seno a moltiplicare mentre, nel caso di V_{cs} , ce n'è addirittura un terzo. Questo fa sì che, con buona approssimazione, soltanto V_{ub} e V_{td} possano essere considerati complessi.

10.1.2 Rappresentazione di Wolfenstein e triangolo dell'unitarietà

Una parametrizzazione molto conveniente della matrice CKM è quella di Wolfenstein⁶, che recepisce la gerarchia 10.9. La matrice viene espressa in termini di quattro parametri reali λ , A , ρ e η , definiti dalle relazioni

$$s_{12} = \lambda = \frac{V_{us}}{\sqrt{V_{ud}^2 + V_{us}^2}} \simeq V_{us} \quad (10.10)$$

$$s_{23} = A\lambda^2 = \lambda \frac{V_{cb}}{V_{us}} \simeq V_{cb} \quad (10.11)$$

$$s_{13}e^{i\delta} = A\lambda^3(\rho + i\eta) = V_{ub}^* \quad (10.12)$$

Considerando la 10.7 si vede che

$$\lambda \approx 0,2, \quad A \approx 1 \quad \text{e} \quad |\rho - i\eta| \approx 0,5$$

λ funge da parametro di espansione degli elementi della matrice CKM, la quale, arrestandosi all'ordine λ^3 , diventa

$$V \simeq \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (10.13)$$

In particolare, η svolge il ruolo della fase per la violazione di CP (presente se $\eta \neq 0$). η determina l'altezza dei triangoli dell'unitarietà; infatti, se η fosse

⁶L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 1945.

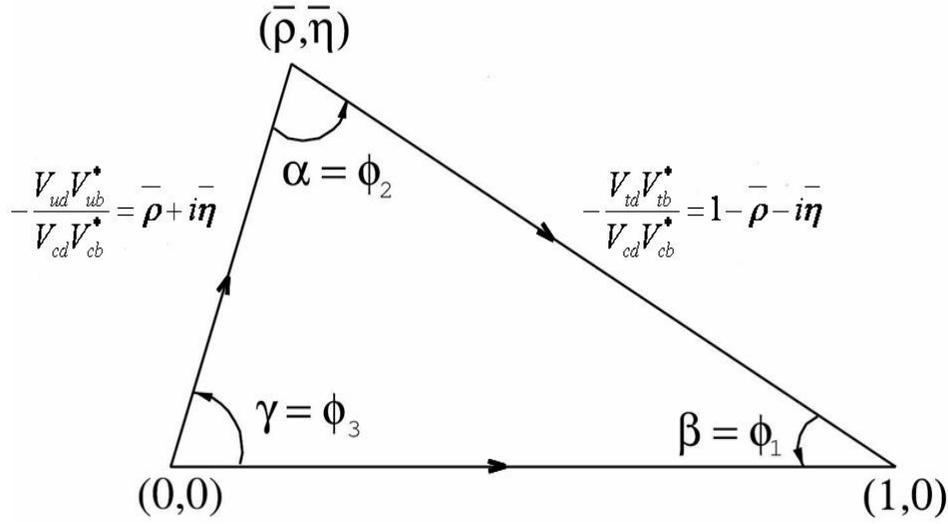


Figure 10.4: Triangolo dell'unitarietà.

nullo, tutti gli elementi della matrice CKM sarebbero reali e ogni triangolo dell'unitarietà si ridurrebbe ad un segmento lungo l'asse reale del piano complesso.

Invece di ρ ed η , molto spesso vengono usati i parametri $\bar{\rho}$ e $\bar{\eta}$ definiti da

$$\bar{\rho} + i\bar{\eta} = -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}$$

In termini di $\bar{\rho}$ e $\bar{\eta}$ si ha

$$\begin{aligned} s_{13}e^{i\delta} &= A\lambda^3(\rho - i\eta) = V_{ub}^* \\ &= \frac{A\lambda^3(\bar{\rho} + i\bar{\eta})\sqrt{1 - A^2\lambda^4}}{\sqrt{1 - \lambda^2}[1 - A^2\lambda^4(\bar{\rho} + i\bar{\eta})]} \end{aligned}$$

All'ordine λ^2

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \\ \bar{\eta} &= \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Come già detto in precedenza, il triangolo di unitarietà comunemente usato è quello relativo alla relazione 10.3, scritta come

$$\frac{V_{ub}^*V_{ud}}{V_{cb}^*V_{cd}} + \frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{cb}^*V_{cd}} + 1 = 0$$

ottenuta dividendo la lunghezza dei tre lati per quella meglio nota. I vertici di tale triangolo (figura 10.4) sono $(0,0)$, $(1,0)$ e $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$, mentre gli angoli sono

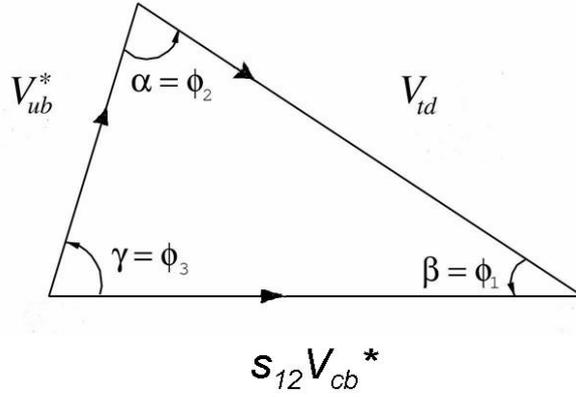


Figure 10.5: Triangolo dell'unitarietà con i lati riscalati per il fattore $V_{cb}^* V_{cd} \simeq s_{12} V_{cb}^*$.

definiti da

$$\begin{aligned}\gamma &= \arg\left(-\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}}\right) \\ \beta &= \arg\left(-\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}}\right) \\ \alpha &= \arg\left(-\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{ub}^* V_{ud}}\right)\end{aligned}$$

Considerando che $V_{ud} \simeq 1 \simeq V_{tb}$ (e $V_{cd} V_{cb}^*$ è reale), si vede che la relazione unitaria 10.3 diventa con buona approssimazione

$$V_{ub}^* + V_{td} \simeq -V_{cb}^* V_{cd}$$

ovvero

$$V_{ub}^* + V_{td} \simeq \lambda V_{cb}^* = s_{12} V_{cb}^*$$

Questa relazione rappresenta il triangolo dell'unitarietà con i lati riscalati per il fattore $V_{cb}^* V_{cd} \simeq s_{12} V_{cb}^*$ (vedi figura 10.5). Da esso si deduce (essendo $s_{12} V_{cb}^*$ praticamente reale) che gli angoli β e γ sono essenzialmente definiti da

$$V_{td} = |V_{td}| e^{-i\beta} \quad \text{e} \quad V_{ub} = |V_{ub}| e^{-i\gamma} \quad (10.14)$$

e quindi (vedi 10.12)

$$\gamma = \delta$$

Gli angoli del triangolo di unitarietà sono determinati da misure di violazione di CP e il contributo più rilevante viene dallo studio del sistema dei mesoni B neutri:

- $\sin 2\beta$ da $B_d \rightarrow J/\psi K_S, \phi K_S$

Mesone	Quark	m (MeV)	τ (s)
B^+	bu	5279, 2	$1,64 \times 10^{-12}$
B^0	$\bar{b}d$	5279, 2	$1,53 \times 10^{-12}$
B_s^0	$\bar{b}s$	5366, 3	$1,47 \times 10^{-12}$
B_c^+	bc	6276	$0,46 \times 10^{-12}$

Table 10.1: Mesoni pseudoscalari con beauty di massa più piccola.

- $\sin 2\alpha$ da $B_d \rightarrow \pi\pi, \rho\pi$
- $\sin(2\beta + \gamma)$ da $B_d \rightarrow D\pi$ e $B_s \rightarrow D_s K$
- γ da $B_d \rightarrow \pi\pi, B_d \rightarrow DK$.

I risultati attuali sono (PDG 2010)

$$\begin{aligned}\sin 2\beta &= 0,673 \pm 0,023 \\ \alpha &= (89,0_{-4,2}^{+4,4})^\circ \\ \gamma &= (73_{-25}^{+22})^\circ\end{aligned}$$

Nel paragrafo seguente vedremo come si perviene a $\sin 2\beta$ attraverso lo studio della violazione di CP nel decadimento del B^0 .

10.2 Oscillazioni e violazione di CP nel sistema B

Gli adroni con beauty di massa più piccola sono i mesoni pseudoscalari formati dal quark \bar{b} con uno dei quattro quark u, d, s e c . Si tratta di due mesoni carichi ($B^+ \equiv \bar{b}u$ e $B_c^+ \equiv \bar{b}c$) e due mesoni neutri ($B^0 \equiv \bar{b}d$ e $B_s^0 \equiv \bar{b}s$), ai quali si aggiungono le rispettive antiparticelle. Masse e vite medie di questi mesoni sono riportate nella tabella 10.1.

Il sistema dei B^0 (e B_s^0) ha comportamento simile al sistema dei K^0 . B^0 e \bar{B}^0 non sono autostati dell'interazione debole e, come nel caso dei K , tali autostati sono una combinazione lineare di ambedue. Diversamente dai K , però, poiché il Q-valore del decadimento è grande per entrambi gli autostati dell'interazione debole, le loro vite medie risultano uguali entro gli errori sperimentali, per cui è preferibile distinguere i due autostati in base alla loro massa. Li indicheremo con B_H e B_L intendendo con B_H quello con massa maggiore. In modo un po' diverso da quanto facemmo per i K , scriviamo i due autostati dell'interazione debole come

$$\begin{aligned}|B_L\rangle &= p|B^0\rangle + q|\bar{B}^0\rangle \\ |B_H\rangle &= p|B^0\rangle - q|\bar{B}^0\rangle\end{aligned}\tag{10.15}$$

Sperimentalmente risulta

$$|p/q| \simeq 1 \quad (\mathcal{O}(10^{-3}))$$

per cui la violazione aspettata di CP nel "mixing" è trascurabile.



Figure 10.6: Grafici a "box" per l'oscillazione di beauty.

L'ampiezza di transizione tra B^0 e \bar{B}^0 è data all'ordine più basso dai grafici "a box" rappresentati in figura 10.6.

Poiché il contributo del quark scambiato è proporzionale al quadrato della massa del quark stesso, i contributi dei quark u e c sono trascurabili rispetto a quello del top, il quale è, dunque, quello che determina l'ampiezza. Partendo dai grafici a box si può calcolare la differenza di massa

$$\Delta m_B = m_H - m_L \quad (10.16)$$

In particolare risulta che il prodotto $|V_{td}|^2 |V_{tb}|^2$ è proporzionale a Δm_B , per cui determinando sperimentalmente Δm_B dalle oscillazioni di "beauty" è possibile ricavare $|V_{td}|^2 |V_{tb}|^2$.

10.2.1 Oscillazioni di "beauty"

Invertendo le 10.15 abbiamo

$$\begin{aligned} |B^0\rangle &= \frac{1}{2p} (|B_L\rangle + |B_H\rangle) \\ |\bar{B}^0\rangle &= \frac{1}{2q} (|B_L\rangle - |B_H\rangle) \end{aligned} \quad (10.17)$$

Come abbiamo fatto a suo tempo per i K , scriviamo l'ampiezza al tempo proprio t di B_L e B_H come

$$\begin{aligned} |B_L(t)\rangle &= e^{-im_L t} e^{-\Gamma_L t/2} |B_L(0)\rangle \\ |B_H(t)\rangle &= e^{-im_H t} e^{-\Gamma_H t/2} |B_H(0)\rangle \end{aligned}$$

L'ampiezza $|B^0(t)\rangle$ di uno stato, che era stato prodotto al tempo $t = 0$ come un puro stato B^0 , sarà

$$|B^0(t)\rangle = \frac{1}{2p} \left\{ e^{-i(m_L - i\Gamma_L/2)t} |B_L(0)\rangle + e^{-i(m_H - i\Gamma_H/2)t} |B_H(0)\rangle \right\}$$

mentre quella di uno stato, prodotto al tempo $t = 0$ come un puro stato \bar{B}^0 , sarà

$$|\bar{B}^0(t)\rangle = \frac{1}{2q} \left\{ e^{-i(m_L - i\Gamma_L/2)t} |B_L(0)\rangle - e^{-i(m_H - i\Gamma_H/2)t} |B_H(0)\rangle \right\}$$

Sostituendo ancora le 10.17 in queste due equazioni troviamo

$$\begin{aligned} |B^0(t)\rangle &= f_+(t) |B^0(0)\rangle + \frac{q}{p} f_-(t) |\bar{B}^0(0)\rangle \\ |\bar{B}^0(t)\rangle &= \frac{p}{q} f_-(t) |B^0(0)\rangle + f_+(t) |\bar{B}^0(0)\rangle \end{aligned} \quad (10.18)$$

con

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \frac{1}{2} \left(e^{-i(m_L - i\Gamma_L/2)t} + e^{-i(m_H - i\Gamma_H/2)t} \right) \\ f_-(t) &= \frac{1}{2} \left(e^{-i(m_L - i\Gamma_L/2)t} - e^{-i(m_H - i\Gamma_H/2)t} \right) \end{aligned} \quad (10.19)$$

Considerando che le vite medie dei due stati sono praticamente uguali, poniamo

$$\Gamma = \Gamma_L = \Gamma_H$$

Ponendo, inoltre,

$$m = \frac{m_H + m_L}{2}$$

possiamo scrivere

$$m_L = m - \frac{\Delta m_B}{2} \quad \text{e} \quad m_H = m + \frac{\Delta m_B}{2}$$

per cui

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \frac{1}{2} e^{-i(m - i\Gamma/2)t} \left(e^{i\Delta m_B t/2} + e^{-i\Delta m_B t/2} \right) \\ &= e^{-i(m - i\Gamma/2)t} \cos \frac{\Delta m_B}{2} t \\ f_-(t) &= \frac{1}{2} e^{-i(m - i\Gamma/2)t} \left(e^{i\Delta m_B t/2} - e^{-i\Delta m_B t/2} \right) \\ &= i e^{-i(m - i\Gamma/2)t} \sin \frac{\Delta m_B}{2} t \end{aligned} \quad (10.20)$$

Partendo, allora, al tempo $t = 0$ con un puro stato B^0 , la probabilità di trovare ancora B^0 all'istante generico t è

$$|\langle B^0 | B^0(t) \rangle|^2 = |f_+(t)|^2 = e^{-\Gamma t} \cos^2 \frac{\Delta m_B}{2} t = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 + \cos \Delta m_B t) \quad (10.21)$$

e la probabilità di trovare \bar{B}^0 è

$$|\langle \bar{B}^0 | B^0(t) \rangle|^2 = \left| \frac{q}{p} \right|^2 |f_-(t)|^2 = e^{-\Gamma t} \sin^2 \frac{\Delta m_B}{2} t = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 - \cos \Delta m_B t) \quad (10.22)$$

essendo, come abbiamo detto in precedenza,

$$\left| \frac{q}{p} \right| \simeq 1 \quad (10.23)$$

Espressioni simili valgono quando lo stato iniziale è un puro stato \bar{B}^0 .

La differenza tra la probabilità di osservare al tempo t lo stesso sapore iniziale (P_{SS}) e la probabilità di osservare il sapore opposto (P_{SO}), divisa per la somma delle due probabilità, definisce la cosiddetta *asimmetria di sapore* A_S

$$A_S = \frac{P_{SS} - P_{SO}}{P_{SS} + P_{SO}} \propto \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} \cos \Delta m_B t \quad (10.24)$$

La misura di questa asimmetria in funzione del tempo permette di determinare Δm_B .

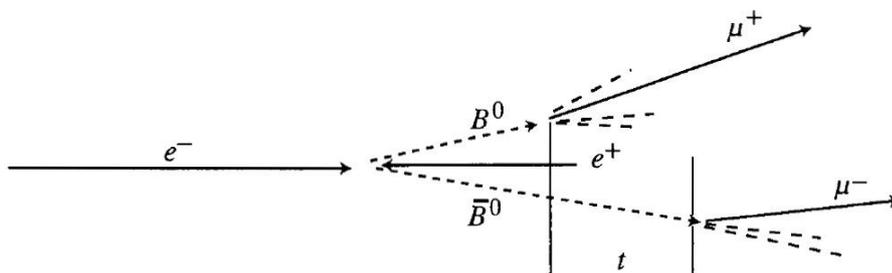


Figure 10.7: Rappresentazione schematica della cinematica del processo $e^+e^- \rightarrow \bar{B}^0 B^0$ seguito da $B^0 \rightarrow \mu^+ + \dots$ e $\bar{B}^0 \rightarrow \mu^- + \dots$ presso una B-factory.

Le misure più recenti e più accurate sono state effettuate presso le cosiddette "beauty factories". Si tratta di collisori e^+e^- ad alta luminosità, che operano all'energia nel CM di $10,6 \text{ GeV}$, corrispondente alla massa della risonanza $Y(4S)$, che decade quasi nel 100% dei casi in $\bar{B}B$. Tale energia è maggiore di sole alcune decine di MeV della soglia di produzione di una coppia $\bar{B}^0 B^0$. A causa di ciò la coppia $\bar{B}^0 B^0$ è prodotta quasi a riposo nel CM. Per motivi sperimentali è stato, allora, conveniente realizzare le "beauty factories" con fasci di energia diversa ("fasci asimmetrici") in modo che la coppia $\bar{B}^0 B^0$ fosse prodotta con un "boost" nel sistema del laboratorio. Sono state costruite due di queste fabbriche di mesoni B , una in Giappone (KEKB) e un'altra negli Stati Uniti (PEP2). KECB è realizzata con un fascio di elettroni di 8 GeV e uno di positroni di $3,5 \text{ GeV}$ mentre nel caso di PEP2 le energie sono 9 GeV e $3,1 \text{ GeV}$ rispettivamente. Il "boost" fa sì che la distanza media lungo la direzione dei fasci, percorsa dai mesoni B prima di decadere, sia dell'ordine di $200 \mu\text{m}$. Questa distanza consente una buona separazione del vertice di decadimento dal vertice di produzione, per mezzo dell'uso di rivelatori a microstrip di silicio, in grado di ricostruire vertici di tracce cariche con una risoluzione dell'ordine di $100 \mu\text{m}$ o meglio. Quando viene prodotta una coppia $\bar{B}^0 B^0$, si può risalire al sapore di ciascun mesone, in modo analogo a quanto visto nel caso dei K^0 , osservando i decadimenti semileptonici del quark b . Si ha infatti

$$\bar{b} \rightarrow \bar{c}l^+\nu_l \quad b \rightarrow cl^-\bar{\nu}_l$$

Così, ricostruendo il segno del leptone si può sapere se a decadere è stato un B^0 ($\bar{b}d$) o un \bar{B}^0 ($b\bar{d}$), per esempio, per mezzo dei processi

$$B^0 \rightarrow D^-l^+\nu_l \quad \bar{B}^0 \rightarrow D^+l^-\bar{\nu}_l$$

La cinematica del processo $e^+e^- \rightarrow \bar{B}^0 B^0$ seguito da $B^0 \rightarrow \mu^+ + \dots$ e $\bar{B}^0 \rightarrow \mu^- + \dots$ è rappresentata in figura 10.7. Il tempo di decadimento (rispetto al tempo di produzione) del B è ottenuto a partire dalla misura della distanza di decadimento usando la velocità del mesone, del quale viene ricostruito l'impulso a partire da quelli dei prodotti di decadimento.

Nella figura 10.8 è mostrata l'asimmetria di sapore misurata a KECB dall'esperimento BELLE⁷. Da tale curva è possibile ricavare Δm_B . Il valore attuale, ottenuto me-

⁷K. Abe et al., Phys. rev. D71 (2005) 072003.

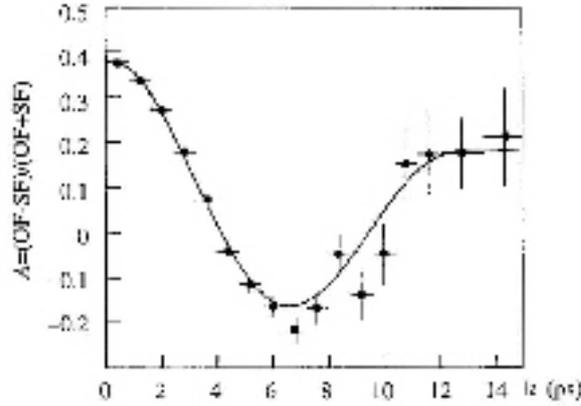


Figure 10.8: Asimmetria di sapore misurata da BELLE a KEKB.

diando opportunamente i risultati di tutti gli esperimenti che hanno effettuato la misura, è (PDG2010)

$$\Delta m_B = (0,3337 \pm 0,0033) \times 10^{-3} \text{ eV}$$

Da esso si ricava

$$|V_{td}| |V_{tb}| = (7,4 \pm 0,8) \times 10^{-8}$$

10.2.2 Violazione di CP

Abbiamo visto che l'evoluzione temporale di uno stato iniziale puro $|B^0\rangle$ è descritta dalle 10.18, ovvero, tenendo conto delle 10.20, da

$$\begin{aligned} |B^0(t)\rangle &= e^{-imt} e^{-\Gamma t/2} \left(\cos \frac{\Delta m_B}{2} t |B^0\rangle + i \frac{q}{p} \sin \frac{\Delta m_B}{2} t |\bar{B}^0\rangle \right) \\ |\bar{B}^0(t)\rangle &= e^{-imt} e^{-\Gamma t/2} \left(-i \frac{p}{q} \sin \frac{\Delta m_B}{2} t |B^0\rangle + \cos \frac{\Delta m_B}{2} t |\bar{B}^0\rangle \right) \end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso in cui B^0 e \bar{B}^0 decadono in un comune stato finale f . L'ampiezza per $B^0 \rightarrow f$ al tempo t è data da

$$\langle f|H|B^0(t)\rangle = e^{-imt} e^{-\Gamma t/2} \left(\langle f|H|B^0\rangle \cos \frac{\Delta m_B}{2} t + i \frac{q}{p} \langle f|H|\bar{B}^0\rangle \sin \frac{\Delta m_B}{2} t \right)$$

ovvero

$$\langle f|H|B^0(t)\rangle = e^{-imt} e^{-\Gamma t/2} A \left(\cos \frac{\Delta m_B}{2} t + i \frac{q}{p} \frac{\bar{A}}{A} \sin \frac{\Delta m_B}{2} t \right) \quad (10.25)$$

avendo definito le ampiezze

$$\begin{aligned} A &= \langle f|H|B^0\rangle \\ \bar{A} &= \langle f|H|\bar{B}^0\rangle \end{aligned}$$

Con un procedimento del tutto simile troviamo che l'ampiezza al tempo t per $\bar{B}^0 \rightarrow f$ è data da

$$\langle f | H | \bar{B}^0(t) \rangle = e^{-imt} e^{-\Gamma t/2} \frac{p}{q} A \left(i \sin \frac{\Delta m_B t}{2} + \frac{q \bar{A}}{p A} \cos \frac{\Delta m_B t}{2} \right) \quad (10.26)$$

Osserviamo che $A \neq \bar{A}$ implica la violazione di CP . Se $|A| \neq |\bar{A}|$ la violazione è osservabile come differenza nei due tassi di decadimento. Tuttavia, nel caso presente, i moduli delle due ampiezze risultano uguali per cui l'eventuale violazione di CP sarebbe dovuta ad una differenza di fase tra le due ampiezze. Pertanto, per osservare la violazione di CP bisogna trovare il modo di misurare tale differenza di fase. Essa è osservabile nel rapporto tra la differenza e la somma delle due ampiezze $\langle f | H | B^0(t) \rangle$ e $\langle f | H | \bar{B}^0(t) \rangle$. Prendendo il modulo quadro di 10.25 e 10.26 troviamo le probabilità di decadimento al tempo t

$$\begin{aligned} P(B^0 \rightarrow f)_t &= e^{-\Gamma t} |A|^2 \left[\frac{1}{2} (1 + |\lambda_f|^2) + \frac{1}{2} (1 - |\lambda_f|^2) \cos \Delta m_B t - \text{Im} \lambda_f \sin \Delta m_B t \right] \\ P(\bar{B}^0 \rightarrow f)_t &= e^{-\Gamma t} |A|^2 \left[\frac{p}{q} \right]^2 \left[\frac{1}{2} (1 + |\lambda_f|^2) - \frac{1}{2} (1 - |\lambda_f|^2) \cos \Delta m_B t + \text{Im} \lambda_f \sin \Delta m_B t \right] \end{aligned}$$

ove abbiamo definito λ_f come

$$\lambda_f = \frac{q \bar{A}}{p A}$$

Con tali probabilità costruiamo l'asimmetria

$$a_{fCP}(t) = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow f)_t - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow f)_t}{\Gamma(B^0 \rightarrow f)_t + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow f)_t}$$

Tenendo conto della 10.23 si trova che

$$a_{fCP}(t) = \frac{(1 - |\lambda_f|^2) \cos \Delta m_B t - 2 \text{Im} \lambda_f \sin \Delta m_B t}{1 + |\lambda_f|^2}$$

ovvero

$$a_{fCP}(t) = -\text{Im} \lambda_f \sin \Delta m_B t$$

quando si tenga conto anche del fatto che, nel nostro caso, $|A| = |\bar{A}|$ e, quindi

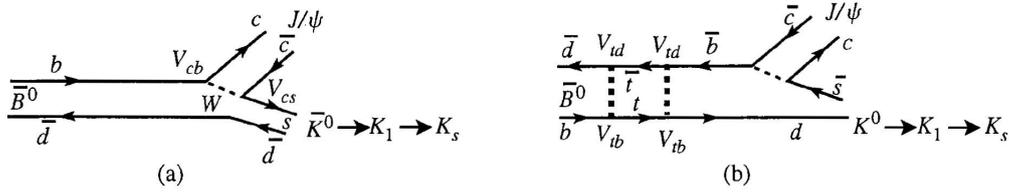
$$|\lambda_f| = \left| \frac{q}{p} \right| \left| \frac{\bar{A}}{A} \right| \simeq 1$$

Questa asimmetria è dunque funzione della parte immaginaria di λ_f e, quindi, della fase relativa tra p/q e A_f/\bar{A}_f . CP è violata se $\text{Im} \lambda_f \neq 0$ ⁸.

L'asimmetria $a_{fCP}(t)$ è stata misurata in diversi canali di decadimento del B^0 . Particolarmente chiari sono i due canali

$$f = J/\psi + K_S \quad \text{e} \quad f = J/\psi + K_L$$

⁸Questa violazione di CP è detta violazione di CP nell'interferenza tra mixing e decadimento.

Figure 10.9: Grafici di Feynman per $\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi + \bar{K}^0$ (a) e $\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi + K^0$ (b).

che sono con buona approssimazione autostati di CP ($K_S \simeq K_1$ e $K_L \simeq K_2$). Per questi stati il modello standard prevede

$$\begin{aligned}\lambda_{J/\psi+K_S} &= e^{-2i\beta} \\ \lambda_{J/\psi+K_L} &= -e^{-2i\beta}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\text{Im } \lambda_{J/\psi+K_S} &= -\sin(2\beta) \\ \text{Im } \lambda_{J/\psi+K_L} &= \sin(2\beta)\end{aligned}$$

Questo risultato può essere compreso qualitativamente in modo abbastanza semplice. Consideriamo per esempio il decadimento di \bar{B}^0 ; esso può avvenire direttamente in \bar{K}^0 secondo il grafico di figura 10.9 a) o può oscillare prima in B^0 e poi decadere in K^0 come da grafico 10.9 b). Le due ampiezze non interferiscono poiché nello stato finale c'è da una parte un \bar{K}^0 e dall'altra un K^0 . Successivamente, però, il K (sia esso K^0 o \bar{K}^0) evolve approssimativamente come autostato di CP , cioè K_1 (K_2)⁹. Abbiamo, quindi, due stati identici che interferiscono. Nei grafici di figura 10.9 sono indicati, accanto ad ogni vertice, gli appropriati elementi della matrice CKM. Con l'eccezione di V_{td} , sono tutti reali (compresi quelli non mostrati relativi alla transizione a K_1), inoltre $V_{tb} \simeq 1$. Poiché V_{td} appare due volte, esso entra al quadrato nell'ampiezza ed è questo il motivo per la comparsa del fattore $e^{2i\beta}$. In definitiva ci aspettiamo che le due asimmetrie, $a_{CP, J/\psi+K_S^0}$ e $a_{CP, J/\psi+K_L^0}$, varino nel tempo sinusoidalmente con lo stesso periodo ma con fase opposta. La figura 10.10 mostra i risultati dell'esperimento BABAR¹⁰ a PEP2 per questa asimmetria (si tratta di dati cosiddetti "raw" cioè non ancora corretti per effetti sperimentali quali fondi, risoluzione temporale, "mis-tagging"). La media dei valori finali ottenuti da BABAR e BELLE dà

$$\sin 2\beta = 0,685 \pm 0,032$$

Dal punto di vista sperimentale, la misura dell'oscillazione si fa etichettando gli eventi $B^0\bar{B}^0$ attraverso il riconoscimento di uno dei due stati per mezzo del decadimento semileptonico del b (o \bar{b}) e andando a cercare il decadimento dell'altro mesone in $J/\psi + K_{S/L}$. La cinematica di questo tipo di eventi è esemplificata nella figura 10.11.

⁹A questo livello qualitativo possiamo trascurare la piccola violazione di CP che differenzia il K_1 dal K_S (K_2 dal K_L).

¹⁰B. Auber et al., ICHEP06.

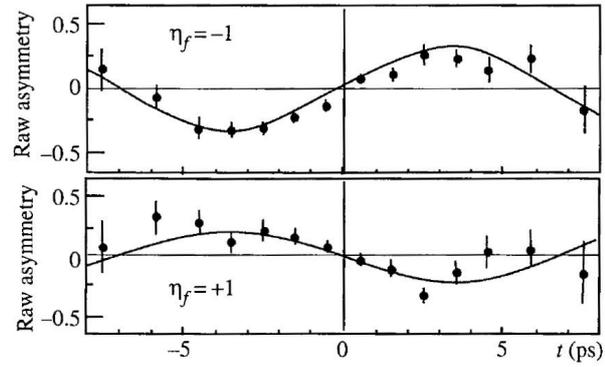


Figure 10.10: Asimmetria a_{CP} per $J/\psi + K_L$ (alto) e $J/\psi + K_S$ (basso), misurata da BABAR.

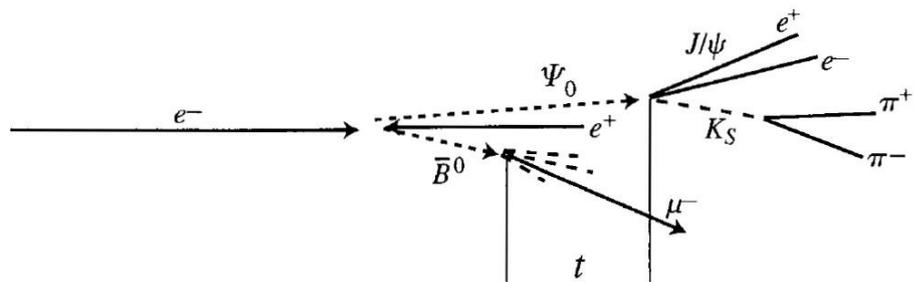


Figure 10.11: Rappresentazione schematica del processo $e^+e^- \rightarrow B^0\bar{B}^0$ con $B^0 \rightarrow J/\psi + K_S$ e $\bar{B}^0 \rightarrow \mu^- + \dots$

Chapter 11

**Fisica oltre il modello
standard (file
oltre_SM.pdf)**

.....