

Chapter 5

Il modello standard oltre il livello "albero"

5.1 Introduzione

Nei processi considerati fino ad ora abbiamo usato ampiezze di transizione all'ordine perturbativo più basso (approssimazione di Born), rappresentate da grafici di Feynman "a livello albero" che non contengono, cioè, cammini chiusi. Se però vogliamo fare calcoli più precisi e determinare, per esempio, la sezione d'urto di un processo all'ordine n dello sviluppo perturbativo, dobbiamo considerare tutti i grafici di Feynman che possono contribuire fino a tale ordine e sommare le ampiezze da essi contribute. Se, per esempio, si tratta di un processo elettromagnetico, l'ampiezza invariante si presenterà nella forma

$$\mathfrak{M} = e^2 A_2 + e^3 A_3 + \dots + e^m A_m$$

dove $e^j A_j$ rappresenta la somma delle ampiezze di tutti i grafici con j vertici, dalle quali abbiamo enucleato la costante di accoppiamento e . Quando prenderemo il modulo quadro di \mathfrak{M} avremo

$$|\mathfrak{M}|^2 = e^4 A_2 A_2^* + e^5 (A_2 A_3^* + A_3 A_2^*) + e^6 (A_3 A_3^* + A_2 A_4^* + A_4 A_2^*) + \dots$$

così, per esempio, il calcolo al terzo ordine in α ($\alpha = e^2/4\pi$) richiederà il calcolo di tutti i grafici fino a 4 vertici (A_4); in particolare, quelli a 4 vertici entreranno in $|\mathfrak{M}|^2$ soltanto attraverso i termini di interferenza.

Nel calcolo di processi elettrodeboli, poiché le costanti di accoppiamento sono molto più piccole di 1, l'approssimazione di Born dà risultati abbastanza buoni, però, se vogliamo fare dei test significativi del modello standard attraverso un confronto tra risultati sperimentali e previsioni teoriche, è necessario includere nel calcolo teorico grafici di ordine superiore che costituiscono le cosiddette "*correzioni radiative*". Esse possono essere sia fotoniche, cioè di origine QED, che di origine elettrodebole. Giusto per avere un'idea di cosa stiamo parlando basta dare un'occhiata alle figure 5.1 e 5.2 ove sono riportati i grafici di Feynman al secondo ordine per $e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}$ con f per un qualunque fermione carico. Le correzioni fotoniche consistono nell'aggiunta di un fotone, sia reale (bremstrahlung) che virtuale (loop fotonico), ai termini di Born. Tali correzioni

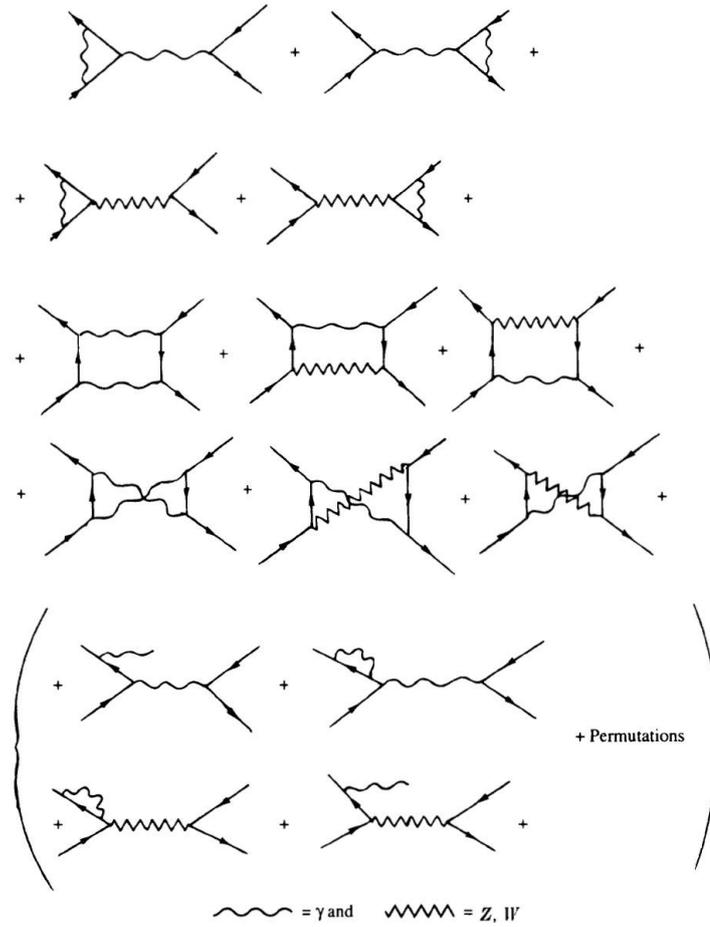


Figure 5.1: Grafici del secondo ordine per le correzioni radiative fotoniche a $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$. (figura da L&P)

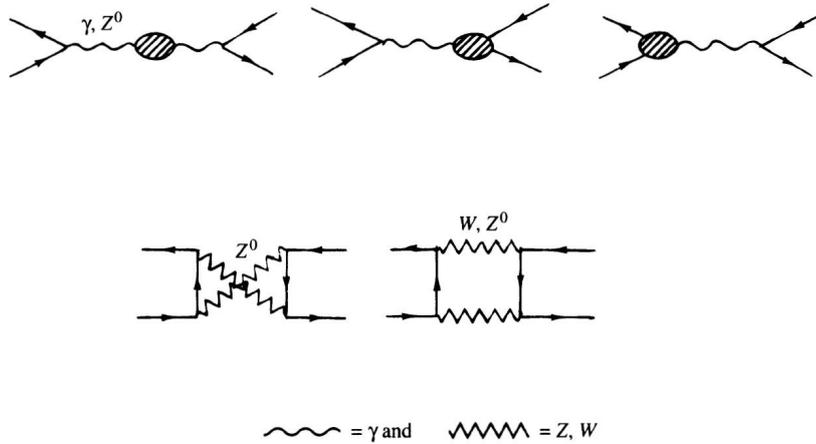


Figure 5.2: Grafici del secondo ordine per le correzioni radiative elettrodeboli a $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$. (Figura da L&P)

sono particolarmente importanti, per esempio, alle energie di LEP. Le correzioni elettrodeboli, a loro volta, consistono nelle correzioni ai propagatori dei bosoni vettoriali, ai vertici e nei diagrammi a "box". Qualitativamente i contributi più grandi provengono o da termini logaritmici piuttosto grandi¹ o da termini quadratici nella massa del top.

Il calcolo dei grafici di ordine più elevato si fa con le stesse regole di Feynman di quelli all'ordine più basso. Tuttavia i grafici contenenti cammini chiusi (*loops*) conducono a integrali divergenti. Infatti, nel caso di un "loop", la conservazione del quadrimomento ai vertici non vincola il quadrimomento delle particelle scambiate ma lascia completamente arbitrario un quadrimomento di loop, diciamolo k , sul quale bisogna integrare per determinare l'ampiezza corrispondente al grafico; è questa integrazione che conduce alle divergenze. Tali divergenze vengono regolate per mezzo di un processo teorico detto *rinormalizzazione*, con il quale i parametri della teoria (costanti di accoppiamento e masse) vengono *rinormalizzati*. In effetti, negli accoppiamenti da noi visti avremmo dovuto dire esplicitamente che entrano i cosiddetti parametri "nudi" ("*bare parameters*"), normalmente indicati con un indice 0: e_0 , g_0 , m_0 ecc.. Questi parametri non sono quelli effettivamente misurati. Per rendere la teoria finita si deve permettere che i parametri dipendano da un cut-off Λ introdotto temporaneamente nella teoria. Quando alla fine si fa tendere $\Lambda \rightarrow \infty$, molti parametri diventano infiniti. Cosa sia Λ dipende dal metodo di regolarizzazione adottato.

Consideriamo un generico parametro che chiamiamo g_0 . Esso è sostituito da uno sviluppo in serie di potenze di un parametro finito g , schematicamente della forma

$$g_0(\Lambda) = g[1 + ga_1(\Lambda) + \dots]$$

ove $a_1(\Lambda)$ può essere diviso in due parti

$$a_1(\Lambda) = a_1^{inf}(\Lambda) + a_1^{finito}(\Lambda)$$

¹Quali, per esempio, termini della forma $\left(\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{M_Z}{m_f}\right)^n$ ove f è un fermione leggero.

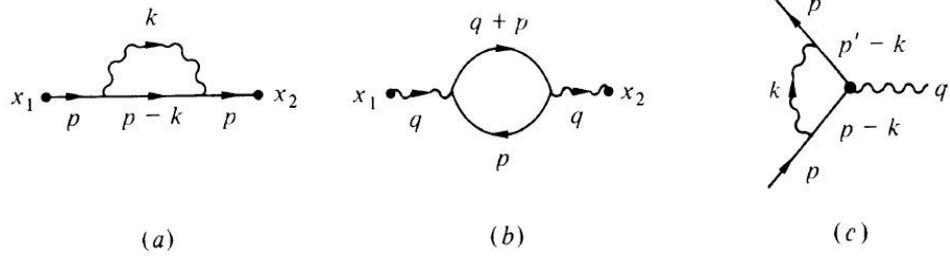


Figure 5.3: Loop divergenti in QED: il grafico a) è il grafico di autoenergia dell'elettrone, b) è quello di autoenergia del fotone e c) rappresenta un diagramma di correzione al vertice.

con

$$\begin{aligned} a_1^{inf}(\Lambda) &\rightarrow \infty & \text{per} & \Lambda \rightarrow \infty \\ a_1^{finito}(\Lambda) &\rightarrow a_1^F & \text{per} & \Lambda \rightarrow \infty \quad (\text{con } a_1^F \text{ finito}) \end{aligned}$$

In una teoria rinormalizzabile a_1^{inf} si cancella nel calcolo di qualunque osservabile fisico, il quale viene così a dipendere da

$$g [1 + ga_1^F + \dots]$$

Quando si lavora all'ordine più basso si trascura $ga_1^F + \dots$ e ciò è equivalente a sostituire g_0 con g nella lagrangiana. Il valore di g viene trovato confrontando la previsione all'ordine più basso per un determinato osservabile con il risultato sperimentale. Però, se si ripete questa operazione per diversi osservabili, ci aspettiamo risultati compatibili tra loro se la teoria rappresenta una vera descrizione della natura.

Occorre sottolineare che il processo di dividere $a_1(\Lambda)$ in una parte finita e una infinita **non è unico**. Esistono molti modi in cui questo può essere fatto; esistono, cioè, molti possibili modi di regolarizzazione degli infiniti, che, a priori, sono ugualmente buoni. In effetti è possibile usare diversi schemi di rinormalizzazione a patto, ovviamente, che i parametri da essi forniti siano accuratamente etichettati in modo da evitare confusione.

Per comprendere un pò meglio in cosa consista il processo di rinormalizzazione, nel prossimo paragrafo considereremo il caso specifico della QED ed in particolare la rinormalizzazione della carica.

5.2 Loops e rinormalizzazione in QED

In QED le divergenze si possono dividere in tre classi distinte rappresentate dai grafici in figura 5.3. Il grafico a) è il grafico di autoenergia dell'elettrone, b) è quello di autoenergia del fotone e c) rappresenta un diagramma di correzione al vertice. La discussione completa della trattazione delle divergenze che derivano da tali grafici va oltre il nostro scopo, per cui ci limiteremo ad una trattazione schematica del contributo del grafico b) al caso della diffusione elettrone-muone. In sostanza tratteremo della rinormalizzazione della carica elettrica e vedremo

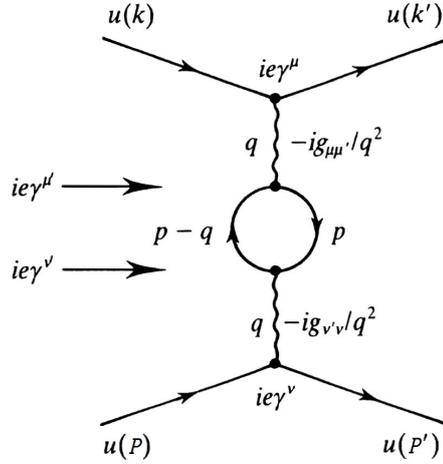


Figure 5.4: Grafico a un loop nel propagatore fotonico. (B&J)

come essa conduca all'introduzione di una costante di accoppiamento efficace o che corre, $\alpha(q^2)$, che dipende dal q^2 trasportato dalla linea del fotone quando si accoppia ad un fermione carico.

5.2.1 Correzione $\mathcal{O}(\alpha)$ al propagatore fotonico

La diffusione $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ è descritta all'ordine più basso dal grafico di scambio di un fotone che comporta una ampiezza

$$-i\mathfrak{M} = [ie\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right] [ie\bar{u}(p') \gamma^\nu u(p)] \quad (5.1)$$

proporzionale a e^2 , ovvero ad α , e che conduce alla sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{\alpha^2}{q^2}$$

Allo stesso processo contribuisce, però, anche il grafico ad un loop di elettroni (ordine α^2), riprodotto in figura 5.4, il quale corrisponde al caso in cui il fotone (virtuale) emesso da una delle due particelle converge in una coppia (virtuale) elettrone-positrone, la quale successivamente riannichila in un fotone (virtuale) il quale è, quindi, assorbito dall'altra particella. al quale corrisponde l'ampiezza

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{M} &= [ie\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \times \left[-i \frac{g_{\mu\mu'}}{q^2} \right] \\ &\times \frac{(-1)^1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left(ie\gamma^{\mu'} \right)_{\alpha\beta} \frac{i(\not{p} + m)_{\beta\lambda}}{p^2 - m^2} \left(ie\gamma^{\nu'} \right)_{\lambda\tau} \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)_{\tau\alpha}}{(p-q)^2 - m^2} \\ &\times \left[-i \frac{g_{\nu'\nu}}{q^2} \right] [ie\bar{u}(p') \gamma^\nu u(p)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

La seconda linea rappresenta il contributo del loop; i termini frazionari sono propagatori elettronici. Per scrivere quest'ampiezza abbiamo dovuto completare le regole di Feynman a noi note con quanto segue.

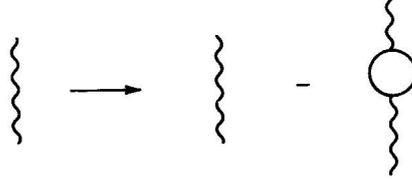


Figure 5.5: Correzione di $\mathcal{O}(\alpha)$ al propagatore fotonico.

- in presenza di n loop fermionici occorre inserire un fattore $(-1)^n$,
- occorre inserire l'integrazione in $d^4p/(2\pi)^4$ sul quadrimomento di loop p .

Quanto è stato aggiunto nella 5.2 rispetto alla 5.1 può essere visto come una modifica al propagatore fotonico

$$\begin{aligned} -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} &\longrightarrow -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \left(-i\frac{g_{\mu\mu'}}{q^2}\right) I^{\mu'\nu'}(q^2) \left(-i\frac{g_{\nu'\nu}}{q^2}\right) \\ &\longrightarrow -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{(-i)}{q^2} I_{\mu\nu}(q^2) \frac{(-i)}{q^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

dove

$$I_{\mu\nu}(q^2) = (-1)^1 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ (ie\gamma_\mu) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} (ie\gamma_\nu) \frac{i(\not{p} - q + m)}{(p - q)^2 - m^2} \right\}$$

E' evidente che questa correzione di $\mathcal{O}(\alpha)$ al propagatore fotonico può essere calcolata una volta per tutte e sostituita in ogni grafico di Feynman. Simbolicamente indichiamo questa correzione come nella figura 5.5. L'integrale $I_{\mu\nu}$, contenendo termini del tipo $|p|^3 dp/|p|^2$, diverge quando $p \rightarrow \infty$. Si potrebbe mostrare che²

$$I_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu}q^2 I(q^2) + \dots \quad (5.4)$$

con

$$I(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 - \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right] \quad (5.5)$$

ove m è la massa dell'elettrone e i puntini rappresentano termini proporzionali a $q_\mu q_\nu$ che danno contributo nullo quando il propagatore si accoppi con cariche o correnti esterne conservate. Inserendo la 5.4 nella 5.3, il propagatore fotonico modificato per tener conto della correzione di polarizzazione del vuoto a un loop, diventa

$$-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \longrightarrow -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [1 - I(q^2)] \quad (5.6)$$

e, quindi

$$-i\mathfrak{M} = [ie\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \times \left[-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right] [1 - I(q^2)] [ie\bar{u}(P') \gamma^\nu u(P)] \quad (5.7)$$

²Si veda, per esempio, Bjorken e Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill 1964.

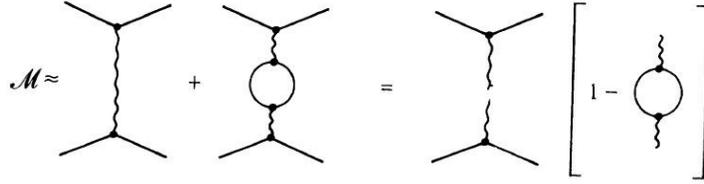


Figure 5.6: Rappresentazione simbolica dell'ampiezza di diffusione $e^- \mu^-$ all'ordine e^4 .

Come aspettato, $I(q^2)$ diverge, tuttavia l'infinito deriva dal primo integrale che è logicamente divergente ma indipendente da q^2 . Possiamo valutare questo integrale sostituendo il limite superiore con un cut-off finito Λ^2 e, poi, se necessario, mandare Λ all'infinito³. Valuteremo $I(q^2)$ nei due casi estremi corrispondenti a grandi e piccoli valori di $Q^2 = -q^2$. Consideriamo, per il momento, il caso dei piccoli valori di Q^2 ; vedremo nel prossimo paragrafo il caso $Q^2 \gg m^2$. Si ha

$$\ln \left[1 - \frac{q^2 x (1-x)}{m^2} \right] \simeq - \frac{q^2 x (1-x)}{m^2}$$

per cui

$$I(q^2) \simeq \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} \quad (5.8)$$

ove abbiamo introdotto il cut-off Λ^2 in sostituzione del limite superiore ∞ . Naturalmente, a meno che non possiamo eliminare in qualche modo la parte divergente dell'integrale, questo risultato continua a non avere significato fisico in quanto diverge per $\Lambda \rightarrow \infty$. Per dare ad esso un significato continuiamo a ragionare sulla diffusione elettrone-muone. Scriviamo l'ampiezza completa includendo il risultato dell'integrale sul loop per piccoli valori di Q^2 . Abbiamo

$$-i\mathfrak{M} = [ie\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} + \mathcal{O}(e^4) \right] [ie\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] \quad (5.9)$$

e possiamo rappresentare \mathfrak{M} simbolicamente come in figura 5.6. Possiamo riscrivere questa ampiezza come segue

$$-i\mathfrak{M} = [ie_R \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] \left[1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} \right] [ie_R \bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] \quad (5.10)$$

con

$$e_R = e \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right)^{1/2} \quad (5.11)$$

E' facile verificare che all'ordine $\mathcal{O}(e^4)$ la 5.9 e la 5.10 sono equivalenti. Ragioniamo un momento su questo risultato. Fino ad ora abbiamo considerato la costante e che compare nei vertici dei grafici come la carica dell'elettrone misurata, per esempio, con la diffusione Thomson o con qualunque altra interazione

³La sostituzione di ∞ con il cutoff Λ^2 (grande) equivale a sottrarre a $I(q^2)$, valutato alla massa dell'elettrone, un $I(q^2)$ valutato alla massa Λ ("ghost fermion loop").

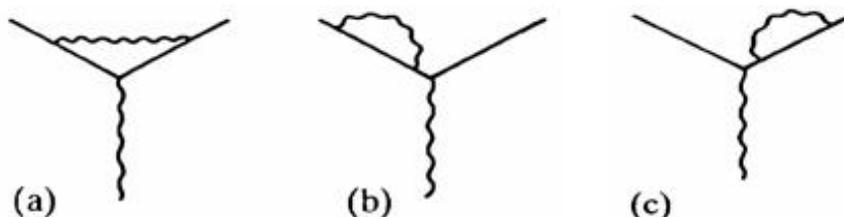


Figure 5.7: Ulteriori contributi $\mathcal{O}(\alpha)$ alla correzione della carica. Il contributo complessivo dei grafici (b) e (c) cancella esattamente quello di (a).

coulombiana di lungo raggio. Questo non è mai stato giustificato ed, infatti, non è vero. Supponiamo, pertanto, che e_R , come scritto nella 5.11, sia la carica elettrica che effettivamente misuriamo, cioè quella che dà $e_R^2/(4\pi) = 1/137$, allora l'ampiezza 5.10 è finita. L'infinito connesso a $\Lambda \rightarrow \infty$ è stato "assorbito" in e_R . E' questo il concetto base della *rinormalizzazione*. E' evidente che se e_R è finita, il parametro originale e da noi utilizzato risulta divergente quando mandiamo Λ all'infinito. D'altra parte le espressioni 5.9 e 5.10 rappresentano la stessa ampiezza, pertanto la divergenza esplicita nell'ampiezza in termini di e deve essere compensata dalla divergenza implicita in e .

La correzione di ordine $\mathcal{O}(\alpha)$, rappresentata dal grafico 5.4, non è l'unica ma ce ne sono altre rappresentate in figura 5.7 e comportano anch'esse integrali divergenti. Il calcolo delle ampiezze mostra che anche parti infinite dovute a questi grafici possono essere riassorbite con una ridefinizione della carica elettrica. La cosa rilevante, però, è che mentre il loop del propagatore dà un contributo indipendente dalla massa della particella diffusa (come ovviamente deve essere, in quanto la carica è sempre la stessa vuoi che la porti un elettrone o che la porti, per esempio, un muone), gli altri loop danno contributi dipendenti dalla massa della particella, in quanto essa entra direttamente nel calcolo del loop. Questo sarebbe un grande guaio; accade, però, che la modifica apportata alla carica dalla correzione di vertice (figura 5.7a) è esattamente cancellata da quella apportata dai grafici 5.7b) e 5.7c). Perciò solo la polarizzazione del vuoto modifica la carica e , quindi, la 5.11 rappresenta la risposta completa (all'ordine α) al problema. La suddetta cancellazione si ripete ad ogni ordine della teoria delle perturbazioni ed è un riflesso di una proprietà molto importante delle teorie di gauge nota come identità di Ward.

5.2.2 Rinormalizzazione

La 5.11 ha portato alla nostra attenzione un fatto molto importante: la quantità che noi abbiamo chiamato carica elettrica e che è apparsa nei grafici di Feynman all'ordine più basso viene cambiata dalle interazioni di ordine più elevato. Essa non è la carica che si misura sperimentalmente. Possiamo vedere questo in un altro modo. La carica è associata all'accoppiamento elettrone-fotone simbolicamente rappresentato come in figura 5.8. Però la carica non è solo questo ma anche, per esempio, quanto rappresentato in figura 5.9. In effetti sono tutte queste cose insieme che fanno la carica elettrica che si misura sperimentalmente. Chiamiamo perciò "carica nuda" (bare charge) e indichiamo con e_0 il parametro

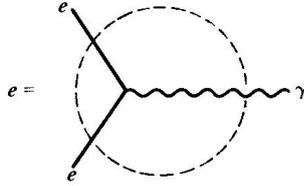


Figure 5.8: La carica è associata all'accoppiamento elettrone-fotone simbolicamente rappresentato dal vertice $e\gamma$.

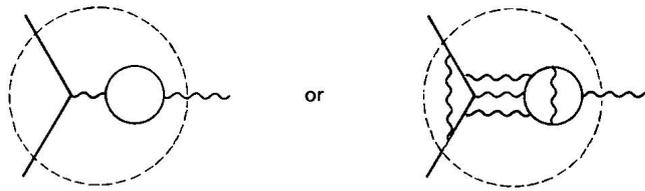


Figure 5.9: Altri contributi alla carica effettiva.

che abbiamo finora attribuito al vertice elettrone-fotone e riserviamo il simbolo e senza alcun indice alla carica effettiva, cioè quella che si misura sperimentalmente nella diffusione di bassa energia. Quanto abbiamo finora osservato per la diffusione $e^- \mu^-$ si riassume simbolicamente in quanto rappresentato nella figura 5.10. *La relazione tra e^2 e e_0^2 deve essere specificata ad un particolare valore del momento del fotone virtuale $q^2 = -Q^2 = -\mu^2$ appropriato all'esperimento.*

Tenendo presente la 5.6, all'ordine $\mathcal{O}(e_0^4)$ possiamo scrivere la relazione tra la carica e e la carica nuda e_0 come

$$e^2 = e_0^2 [1 - I(q^2 = -\mu^2) + \mathcal{O}(e_0^4)]$$

ovvero, estraendo la radice quadrata

$$e = e_0 \left[1 - \frac{1}{2} I(q^2 = -\mu^2) + \mathcal{O}(e_0^4) \right]$$

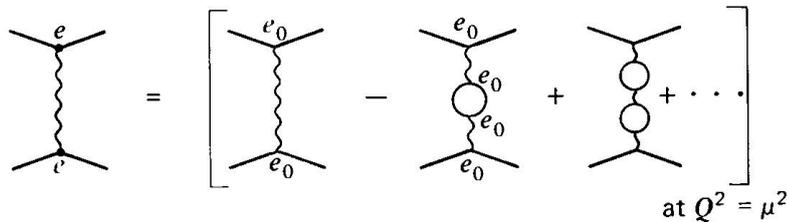


Figure 5.10: Rappresentazione della relazione tra e ed e_0 nella diffusione $e\mu$.

$I(q^2)$ è dato dalla 5.5. A tutti gli ordini avremo

$$e = e_0 \left[1 + e_0^2 A_1(Q^2) + e_0^4 A_2(Q^2) + \dots \right]_{a \ Q^2 = \mu^2}$$

Chiaramente $A_1(Q^2)$, che è direttamente legato a $I(-Q^2)$, è una quantità infinita e tali sono anche $A_2(Q^2)$ e tutti i coefficienti successivi.

Per $Q^2 = -q^2 \gg m^2$ abbiamo

$$\ln \left(1 - \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right) \simeq \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)$$

cosicché, usando ancora il cutoff Λ ,

$$I(q^2) = \frac{e_0^2}{12\pi^2} \int_{m^2}^{\Lambda} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{e_0^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) \quad (5.12)$$

$$= \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) = \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \quad (5.13)$$

e, quindi,

$$I(q^2 = -\mu^2) = \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \quad (5.14)$$

Allora

$$e^2 = e_0^2 \left[1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(e_0^4) \right]$$

ovvero (espandendo la radice)

$$e = e_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(e_0^4) \right]$$

Questa relazione può essere invertita ottenendo e_0 in funzione di e

$$e_0 = e \left[1 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(e^4) \right] \quad (5.15)$$

Possiamo usare questa espressione per sostituire la carica nuda nell'ampiezza invariante per la diffusione $e^- \mu^-$ ottenendo una espressione in funzione della carica effettiva misurata a $Q^2 = \mu^2$. Ricordiamo che $\mathfrak{M}(e_0)$ è data dalla 5.7

$$-i\mathfrak{M}(e_0) = [ie_0 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] [1 - I(q^2)] [ie_0 \bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] \quad (5.16)$$

ovvero, sostituendo $I(q^2)$ con la sua espressione per grandi valori di Q^2 ,

$$-i\mathfrak{M} = [ie_0 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] \left[1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right] [ie_0 \bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] \quad (5.17)$$

Quindi sostituendo la 5.15

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{M} &= e^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(e^4) \right]^2 [i\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] \times \\ &\quad \left\{ 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(e^4) \right]^2 \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right\} [i\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] \end{aligned}$$

da cui, trascurando termini $\mathcal{O}(e^4)$,

$$\begin{aligned}
-i\mathfrak{M}(e^2) &= e^2 \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(e^4) \right] [i\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] \times \\
&\quad \left\{ 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + \mathcal{O}(e^4) \right\} [i\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] \\
&= [ie\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] \left\{ 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + \mathcal{O}(e^4) \right\} \times \\
&\quad [ie\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] \\
&= [ie\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \left[-\frac{i}{q^2} \right] \left\{ 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{Q^2} + \mathcal{O}(e^4) \right\} \times \quad (5.18) \\
&\quad [ie\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)]
\end{aligned}$$

Questa espressione è formalmente analoga alla 5.17, soltanto ora essa è scritta in funzione della carica effettiva misurata a $-q^2 = \mu^2$ e non dipende più dal cutoff Λ^2 che possiamo mandare all'infinito. Notiamo che nella teoria è comparso un parametro μ con dimensioni di una massa (*massa di rinormalizzazione*) a causa della riparametrizzazione della carica. Differenti scelte di μ^2 , la massa quadra di rinormalizzazione, conducono a differenti sviluppi dell'ampiezza. Si dice che stiamo usando differenti *schemi di rinormalizzazione*. Naturalmente $|\mathfrak{M}|^2$ è un osservabile e, pertanto, deve essere indipendente dal valore scelto per μ . Considerando che la 5.18 è una espressione del tipo

$$-i\mathfrak{M}(e^2) = e^2 [F_1(Q^2, \mu^2) + e^2 F_2(Q^2, \mu^2) + \mathcal{O}(e^4)]$$

la dipendenza di \mathfrak{M} da μ , data dai coefficienti $F(Q^2, \mu^2)$, deve essere dunque cancellata dalla dipendenza da μ di $e(\mu^2)$. Questa richiesta può essere formulata imponendo che

$$\mu \frac{d\mathfrak{M}}{d\mu} = \left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_e + \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial e} \right] \mathfrak{M} = 0 \quad (5.19)$$

L'equazione 5.19 è detta *equazione del gruppo di rinormalizzazione*.

5.2.3 La costante di struttura fine che "corre"

Ora, se desideriamo calcolare il propagatore correttamente dobbiamo includere correzioni di loop a tutti gli ordini in α , cioè (si veda la figura 5.11 per una rappresentazione grafica)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_{Born} \left[1 - (loop) + (loop)^2 - (loop)^3 + \dots \right] \quad (5.20) \\
&= \mathfrak{M}_{Born} \left[\frac{1}{1 + (loop)} \right]
\end{aligned}$$

Così, a tutti gli ordini in α , l'elemento di matrice diventa

$$\mathfrak{M} \sim \left[\frac{\alpha_0}{1 + I(q^2)} \right] [\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \frac{1}{q^2} [e\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)]$$

e usando la 5.13

$$\mathfrak{M} \sim \left[\frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right)} \right] [\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \frac{1}{q^2} [e\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)]$$

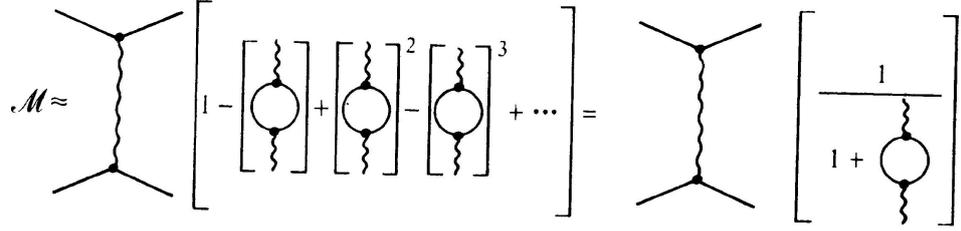


Figure 5.11: Rappresentazione grafica della serie e della sua somma. (B&J)

Allora, in termini della carica non rinormalizzata (α_0) si ha

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right)} \quad (5.21)$$

Così α dipende da Q^2 . Diciamo che otteniamo il valore $1/137$ ad un certo valore μ^2 di Q^2 . Allora

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)} \quad (5.22)$$

Osserviamo che

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda^2 \mu^2}{Q^2 \mu^2}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)$$

e, quindi, la 5.21 può essere scritta come

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) \right]} \quad (5.23)$$

Ora da 5.22 abbiamo

$$1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) = \frac{\alpha_0}{\alpha(\mu^2)}$$

per cui la 5.23 diviene

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln\frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (5.24)$$

Questa è la *costante di accoppiamento che corre della QED*. Come si vede è scomparsa la dipendenza dal cut-off Λ^2 e da α_0 ; così, $\alpha(Q^2)$ viene a dipendere unicamente da quantità misurate. L'equazione 5.24 mostra come la carica efficace dipenda da Q^2 o, equivalentemente, dalla distanza tra le due particelle cariche: al crescere di Q^2 (piccole distanze) $\alpha(Q^2)$ cresce mentre per piccoli valori di Q^2 $\alpha(Q^2) \rightarrow \alpha(\mu^2) = 1/137$.

A questo punto occorre osservare che ci sono ulteriori effetti che modificano $\alpha(Q^2)$ come data da 5.24. Infatti, noi abbiamo considerato solo loop di elettroni. Al crescere di Q^2 ci sono contributi di $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$ e $q\bar{q}$. In generale il termine di correzione, cioè il secondo termine nel denominatore della 5.24 dovrebbe essere moltiplicato per

$$z_f = n_l + 3\frac{4}{9}n_+ + 3\frac{1}{9}n_-$$

dove n_l è il numero di leptoni carichi, n_+ è il numero di quark con carica $+2/3$ e n_- è il numero di quark con carica $-1/3$ che partecipano al particolare valore di Q^2 (in pratica i fermioni con massa $m < |Q|$). In effetti, dunque,

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - z_f \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (5.25)$$

L'andamento di α in funzione di Q^2 è formalmente più semplice se lo riferiamo al reciproco di α . Si ha

$$\alpha^{-1}(Q^2) = \alpha^{-1}(\mu^2) - \frac{z_f}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$$

Si vede così che $\alpha^{-1}(Q^2)$ varia linearmente con $\ln(Q^2/\mu^2)$ per z_f fissato, cioè finché non venga attraversata la soglia di Q^2 per l'aggiunta del contributo di un ulteriore loop fermionico.

L'usuale costante di struttura fine corrisponde all'accoppiamento tra un fotone reale ($Q^2 = 0$) e un elettrone fisico. Il suo valore è misurato con altissima precisione con l'effetto Hall quantistico o con esperimenti di $g - 2$. (si veda il sottoparagrafo sul "momento magnetico anomalo" del successivo paragrafo 5.2.4) Si ha (PDG 2008)

$$\alpha^{-1} = 137,035.999.679 (94)$$

Ad alti impulsi trasferiti si scrive usualmente

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha(Q^2)} \simeq \alpha(1 + \Delta\alpha(Q^2)) \quad (5.26)$$

La scala più importante ai nostri fini è $Q^2 = M_Z^2$, perciò nel seguito abbrevieremo $\Delta\alpha(M_Z^2)$ semplicemente con $\Delta\alpha$. Dalle misure di precisione effettuate a LEP risulta

$$\alpha^{-1}(M_Z^2) = 128,936 \pm 0,046$$

e, quindi,

$$\Delta\alpha \simeq 0,063 \quad (5.27)$$

per cui

$$\alpha(M_Z^2) \simeq 1,063\alpha$$

5.2.4 Lamb shift e momento magnetico anomalo dell'elettrone

Diffusione di elettroni da una carica statica

Consideriamo la diffusione di elettroni da parte di una carica Ze considerata immobile. Il grafico all'ordine perturbativo più basso è rappresentato nella figura 5.12, ove la carica statica è stata rappresentata con una croce. L'ampiezza di transizione per questo processo è data da

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{fi}(x) A^\mu(x) \quad (5.28)$$

ove

$$j_\mu^{fi}(x) = -e_0 \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i)x} = -e_0 \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{-iq \cdot x}$$

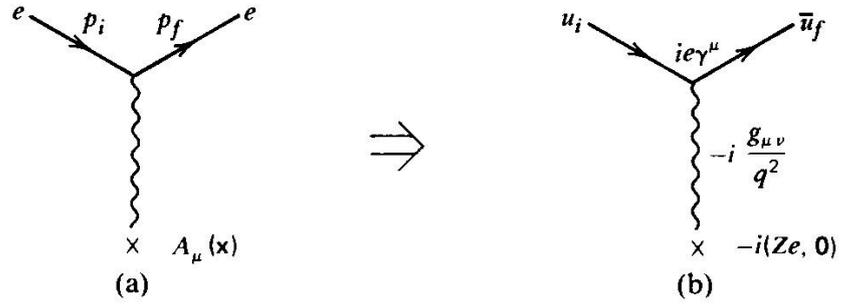


Figure 5.12: Grafico all'ordine più basso per la diffusione di un elettrone da parte di una carica statica Ze .

e $A_\mu(x)$ è il quadripotenziale associato alla carica statica, ovvero

$$A_\mu(x) \equiv \left(\frac{Ze_0}{4\pi|\mathbf{x}|}, 0, 0, 0 \right)$$

Allora

$$T_{fi} = \frac{iZe_0^2}{4\pi} \bar{u}_f \gamma^0 u_i \int e^{i(E_f - E_i)t} dt \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

ove

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$$

Ora

$$\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2}$$

per cui

$$T_{fi} = i(2\pi) \delta(E_f - E_i) \bar{u}_f \gamma^0 u_i \frac{Ze_0^2}{|\mathbf{q}|^2}$$

Poiché la carica è statica si ha $E_f = E_i$, ossia $q^0 = 0$, per cui

$$q^2 = -|\mathbf{q}|^2$$

e quindi

$$T_{fi} = -i(2\pi) \delta(E_f - E_i) \bar{u}_f \gamma^0 u_i \frac{Ze_0^2}{q^2} = -i(2\pi) \delta(E_f - E_i) \mathfrak{M}$$

con

$$\mathfrak{M} = \frac{Ze_0^2}{q^2} \bar{u}_f \gamma^0 u_i$$

o, anche,

$$-i\mathfrak{M} = [ie_0 \bar{u}_f \gamma^0 u_i] \left[-\frac{i}{q^2} \right] [-iZe_0]$$

Questa è l'ampiezza per la diffusione di Rutherford e da essa si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |\mathfrak{M}|^2 \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Il risultato ottenuto è all'ordine perturbativo più basso e dà la sezione d'urto all'ordine $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Un risultato meglio approssimato si ottiene aggiungendo al propagatore fotonico la correzione a un loop di elettroni. L'ampiezza modificata, in termini della carica rinormalizzata, è analoga alla 5.10

$$-i\mathfrak{M} = [ie\bar{u}_f\gamma^0 u_i] \left[-\frac{i}{q^2}\right] \left[1 - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2}\right] [-iZe] \quad (5.29)$$

Lamb shift

La 5.29 dà

$$\mathfrak{M} = (\bar{u}_f\gamma^0 u_i) \frac{Ze^2}{q^2} \left(1 - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2}\right) \propto \left(\frac{Ze^2}{q^2} - \frac{Ze^4}{60\pi^2 m^2}\right)$$

Ricordando come abbiamo introdotto T_{fi} , questa ampiezza, o equivalentemente \mathfrak{M} , rappresenta la trasformata di Fourier del potenziale. Allora il primo termine, che è proporzionale a $1/|\mathbf{q}|^2$ è associato con il potenziale coulombiano; infatti

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \frac{Ze^2}{q^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{Ze^2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{Ze^2}{4\pi r}$$

Il secondo termine è associato ad un potenziale ulteriore che deriva dall'effetto quantistico rappresentato dal loop e^+e^- virtuale

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \frac{Ze^4}{60\pi^2 m^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} &= -\frac{Ze^4}{60\pi^2 m^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\ &= -\frac{Ze^4}{60\pi^2 m^2} \delta(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Il potenziale complessivo è dunque

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r} - \frac{Ze^4}{60\pi^2 m^2} \delta(\mathbf{r}) \quad (5.30)$$

Il contributo aggiuntivo (compreso il segno) al potenziale coulombiano è determinato dall'effetto di schermo della carica del nucleo generato dalla coppia virtuale e^+e^- . Quando $q^2 \rightarrow 0$ l'elettrone sonda la carica del nucleo Ze da grande distanza e l'interazione è coulombiana, rappresentata cioè dal primo termine della 5.30. La carica e è allora, per definizione, la familiare carica dell'elettrone misurata in qualunque interazione e.m. di lunga distanza. Quando, invece, l'elettrone si avvicina al nucleo (cioè quando $-q^2$ cresce) esso penetra la nube di coppie virtuali che lo circondano e questo porta ad una crescita dell'interazione effettiva. Il secondo termine della 5.30 rappresenta un calcolo di questo effetto all'ordine più basso ovvero a livello di un solo loop. La presenza del loop conduce ad una forza attrattiva addizionale tra elettrone e nucleo. Naturalmente se tutto questo è vero, tale forza addizionale deve essere rivelabile. Per esempio, se la sorgente della forza è un protone ($Z = 1$), la 5.30 descrive il legame dell'atomo di idrogeno, incluso il termine addizionale. L'effetto addizionale rispetto alla forza coulombiana di lunga distanza, rappresentata all'ordine più basso dal potenziale $\delta(\mathbf{r})$, contribuisce ai livelli di energia E_{nl} dell'atomo di

idrogeno. Trattando il termine addizionale come una perturbazione, otteniamo il contributo al "Lamb shift"

$$\delta E_{nl} = -\frac{e^4}{60\pi^2 m^2} |\psi_{nl}(0)| \delta_{l0} = -\frac{8\alpha^2}{15\pi n^3} Ry \delta_{l0} \quad (5.31)$$

ove ψ_{nl} sono le funzioni d'onda dell'atomo di idrogeno e

$$Ry = \frac{m\alpha^2}{2}$$

è la costante di Rydberg. Il δ_{l0} compare perché il potenziale di tipo $\delta(\mathbf{r})$ perturba soltanto i livelli descritti da una funzione d'onda finita nell'origine e, quindi, i livelli di tipo S ($l = 0$).

Lamb e Retherford misurarono nel 1947 lo shift tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno. Questi livelli dovrebbero essere degeneri se non ci fosse il contributo aggiuntivo al potenziale coulombiano. Lamb e Retherford misurarono⁴

$$\delta E (2S_{1/2} - 2P_{1/2})_{\text{per}} = 1057,878 \pm 0,014 \text{ MHz} \quad (5.32)$$

L'equazione 5.31 contribuisce -27 MHz allo shift totale; un contributo piccolo corrispondente a $-1,122 \times 10^{-7} \text{ eV}^5$. Il contributo 5.31 insieme ad altri contributi da loop riproduce esattamente il Lamb shift misurato. Infatti, a fronte del valore misurato 5.32, la previsione teorica è⁶

$$\delta E (2S_{1/2} - 2P_{1/2})_{\text{teo}} = 1057,898 \pm 0,026 \text{ MHz}$$

Possiamo dunque concludere che i grafici con loop danno un contributo reale e, cosa ancora più importante, la nostra reinterpretazione della carica elettrica è confermata.

Il momento magnetico anomalo

Studiando l'equazione di Dirac trovammo il momento magnetico della particella di Dirac considerando la sua interazione con un campo magnetico. I grafici di ordine più elevato cambiano il momento magnetico rispetto al valore di Dirac corrispondente a $g = 2$. La differenza $g - 2$ è usualmente espressa come $a = (g - 2)/2$ ed è chiamata *momento magnetico anomalo*. Nel seguito discutiamo brevemente del valore di $g - 2$ per l'elettrone derivante dal contributo di grafici fino all'ordine $\mathcal{O}(e^4)$. Concettualmente il metodo da seguire dovrebbe consistere nel costruire l'elemento di matrice sommando il contributo di tutti i possibili grafici di interazione di un elettrone con un campo statico esterno e, quindi, identificare la parte dell'elemento di matrice che dà luogo al momento magnetico. Il set completo di grafici fino all'ordine $\mathcal{O}(e^4)$ per l'interazione di un elettrone con un campo statico esterno è riportato in figura 5.13. Come il grafico di polarizzazione del vuoto anche i grafici c), d) e e) hanno loop divergenti. Le divergenze possono essere riassorbite nella ridefinizione dei parametri della teoria

⁴Da B&J pag. 543.

⁵Questo particolare contributo fu calcolato per la prima volta da Uehling nel 1935 (E. A. Uehling, Phys. Rev. **48**, 55 (1935)). Osserviamo che l'effetto Uehling, mentre dà un contributo piccolo nell'atomo di idrogeno e negli atomi ordinari, domina le correzioni radiative negli atomi muonici a causa del fatto che la massa del muone è ~ 200 volte la massa dell'elettrone.

⁶Da B&J pag. 543.

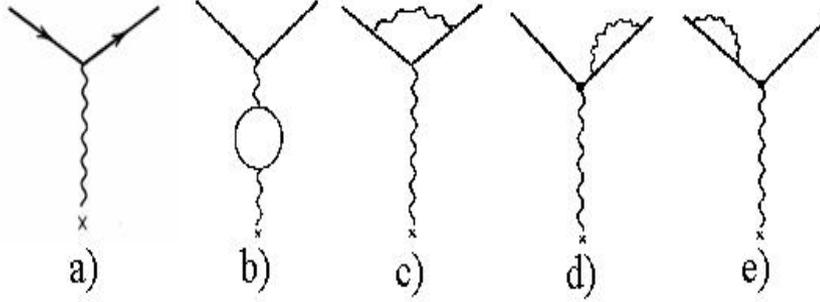


Figure 5.13: Grafici fino all'ordine $\mathcal{O}(e^4)$ per l'interazione di un elettrone con un campo statico esterno.

in modo analogo a quanto abbiamo visto per il loop e^+e^- . I grafici d) ed e) contribuiscono soltanto alla rinormalizzazione della carica e quindi non devono essere ulteriormente considerati. Il grafico c) modifica (il vertice) la corrente di transizione dell'elettrone. Si ha, infatti,

$$-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i \longrightarrow -e\bar{u}_f \left\{ \gamma_\mu \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{m_\gamma} - \frac{3}{8} \right) \right] - \left[\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{2m} i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \right\} u_i \quad (5.33)$$

Il primo termine in parentesi quadra dà un contributo addizionale al Lamb shift. Però compare un fatto nuovo: il loop diverge anche per piccoli momenti di loop (*divergenza infrarossa*). Nella 5.33 questo è stato evitato attribuendo in modo fittizio una piccola massa m_γ al fotone. Un aspetto importante della 5.33 è rappresentato dal secondo termine in parentesi quadra, le cui implicazioni si comprendono quando si consideri la cosiddetta decomposizione di Gordon della corrente vettoriale⁷

$$-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i = -\frac{e}{2m}\bar{u}_f \left[(p_f + p_i)_\mu - i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u_i \quad (5.34)$$

ove

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$$

La decomposizione di Gordon della corrente dell'elettrone separa, nel limite non relativistico, l'interazione dell'elettrone con un campo elettromagnetico A_μ in una parte derivante dalla carica elettrica $-e$ ed una parte dovuta al momento magnetico $-e/(2m)$. Infatti, il termine $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ rappresenta il momento magnetico dell'elettrone

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \quad (5.35)$$

ovvero

$$\boldsymbol{\mu} = -g\frac{e}{2m}\mathbf{s}$$

dove $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ e g è il rapporto giromagnetico $g = 2$. Il secondo termine della 5.33 rappresenta perciò un ulteriore termine di interazione di momento magnetico che

⁷Per la dimostrazione si veda, per esempio, P. Renton, "Electroweak Interactions", pag. 198.

si aggiunge a quello contenuto in γ_μ via la 5.34. In effetti, sostituendo la 5.34 nella 5.33 e usando la 5.35, troviamo che

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \boldsymbol{\sigma}$$

ovvero

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi}$$

L'elettrone ha, così (all'ordine $\mathcal{O}(e^4)$) un momento magnetico anomalo

$$a_e = \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

in aggiunta al momento magnetico di Dirac. Questa, però, è solo la correzione di ordine α^8 . Attualmente la relazione teorica tra a_e ed α è stata calcolata fino all'ordine in α^4 considerando diverse centinaia grafici di Feynman (fino a quattro loops)⁹. La migliore misura sperimentale¹⁰ ha portato ad un risultato con una precisione migliore di 0,7 su 10^{12} . Il confronto tra il risultato sperimentale e il calcolo teorico¹¹ ha permesso di determinare la costante di struttura fine a $Q^2 = 0$ con una precisione di 0,7 parti su 10^9

$$\alpha^{-1}(Q^2 = 0) = 137,035999710 \pm 0,000000096$$

E' opportuno a questo punto fare esplicitamente una osservazione importante. I test di una teoria si fanno confrontando le previsioni teoriche con i risultati sperimentali. Nel caso della QED il calcolo teorico di un osservabile richiede la conoscenza di α , che può essere ottenuta solo attraverso il confronto tra la previsione teorica e la misura sperimentale di un altro osservabile indipendente. Pertanto, il confronto tra QED ed esperimenti si riduce usualmente al confronto tra determinazioni indipendenti di α . L'accordo tra QED e risultati sperimentali trovato in questo modo è attualmente dell'ordine di una parte su 10^8 .

⁸L'espressione teorica di a_e è scritta come

$$a_e = a_e(QED) + a_e(weak) + a_e(had)$$

$$a_e(QED) = A_1 + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\tau}\right) + A_3 \left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_e}{m_\tau}\right)$$

Il termine A_1 è indipendente dalla massa, gli altri dipendono dai rapporti di massa indicati (la massa al numeratore è quella del leptone in considerazione, quella al denominatore è del leptone che compare nel loop di polarizzazione del vuoto). Ciascuno dei quattro termini a secondo membro è espresso come serie di potenze di α

$$A_i = A_i^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + A_i^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_i^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + A_i^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots$$

La costante di struttura fine è proporzionale al quadrato della carica elementare e per cui l'ordine del generico termine contenente $(\alpha/\pi)^n$ è $2n$ e il suo coefficiente è detto coefficiente di ordine $2n$. Il termine "leading" $A_1^{(2)}$ vale

$$A_1^{(2)} = \frac{1}{2}$$

$A_1^{(4)}$ viene da 7 grafici, $A_1^{(6)}$ da 72 grafici e $A_1^{(8)}$ da 891 grafici (si veda P. J. Mohr e B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. 77, 1 (2005) e referenze ivi riportate).

⁹T. Kinoshita e M. Nio, Phys. Rev. D73, 013003 (2006).

¹⁰B. Odom et al., Phys. Rev. Lett. 97, 030801 (2006).

¹¹G. Gabrielse et al., Phys. Rev. Lett. 99, 039902 (2007).

CPT predice $a_{l^-} = a_{l^+}$ questa predizione è stata verificata entro \sim una parte su 10^{11} per l'elettrone e \sim una parte su 10^8 per il muone.

All'ordine α la correzione al momento magnetico di Dirac di un fermione non dipende dalla massa della particella per cui, per esempio, a tale ordine il momento magnetico anomalo dell'elettrone e quello del muone sono uguali. I termini di ordine superiore comportano, però, correzioni dipendenti dalla massa per cui $a_e \neq a_\mu$. Nel calcolo del momento magnetico anomalo del muone per raggiungere elevate precisioni bisogna tener conto non soltanto del contributo QED ma anche del contributo adronico (dell'ordine di $6 \div 7$ parti su milione rispetto ad a_μ (QED)) e di quello elettrodebole (dell'ordine di 2 su 10^7). Il confronto tra previsione teorica e risultato sperimentale per il momento magnetico anomalo del muone è, però, particolarmente interessante al fine di evidenziare eventuali contributi di nuova fisica oltre il modello standard; infatti, tali contributi risulterebbero maggiori di un fattore $(m_\mu/m_e)^2 \approx 43.000$ rispetto a quelli eventualmente presenti in a_e .

5.3 Rinormalizzazione nella teoria elettrodebole

La lagrangiana elettrodebole dipende, come sappiamo, da un numero elevato di parametri; essi sono

- gli accoppiamenti di gauge g e g'
- i parametri del potenziale di Higgs λ e μ^2
- gli accoppiamenti di Yukawa Higgs-fermione g_f (5.36)
- gli angoli $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ e la fase (δ) della matrice CKM (si veda il cap. 10)
- gli angoli $(\theta_1^\nu, \theta_2^\nu, \theta_3^\nu)$ e la fase δ_{13}^ν della matrice PMNS

Gli angoli di mixing¹² e le masse dei fermioni possono essere separati dagli altri parametri, lasciando g , g' e una combinazione di λ e μ^2 (per esempio, il valore di vuoto v al tree-level). Questi tre parametri sono usualmente sostituiti nei calcoli da α , G_F e M_Z . Questi ultimi sono, naturalmente, legati a g , g' e v ; per esempio, al tree-level

$$\alpha = \frac{g^2 g'^2}{4\pi (g^2 + g'^2)} \quad (5.37)$$

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (5.38)$$

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2} v^2} \quad (5.39)$$

ma queste relazioni subiscono modifiche agli ordini più elevati. I parametri rinormalizzati "corrono" come visto in precedenza. Dopo la rinormalizzazione si possono derivare valori di quantità fisiche- espresse in termini dei parametri α , G_F e M_Z e della massa dello Higgs m_H - corretti per le correzioni radiative. Tuttavia bisogna specificare uno schema di rinormalizzazione a ciascun ordine finito (anche se, in pratica, le differenze sono molto piccole). Nel caso della QED c'è una procedura universalmente accettata. Non esiste, però, una

¹²La matrice PMNS è la matrice di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata per il mixing dei neutrini (considerati con massa diversa da zero) analoga alla matrice CKM.

situazione analoga per la teoria elettrodebole. Ci sono diversi schemi di rinormalizzazione, ognuno dei quali ha i suoi meriti ed i suoi difetti. In realtà non è molto importante quale schema sia usato, purché ovviamente la notazione indichi chiaramente cosa i parametri significhino, ed esistono formule che legano tra loro i parametri dei diversi schemi. Naturalmente all'ordine più basso i vari schemi sono equivalenti. Nel seguito, quando discuteremo le correzioni radiative, lavoreremo nei limiti del *modello standard minimale*, nel quale il meccanismo di Higgs minimale genera le masse e uno schema di rinormalizzazione concettualmente semplice è lo schema "on-shell".

Ne illustriamo i punti essenziali ricordando che dalla lagrangiana elettrodebole originale, nella quale poniamo ora l'indice 0 ai parametri per indicare che sono "bare", derivano la relazione (si veda la 3.28)

$$g_0 = \frac{e_0}{\sin \theta_W^0} = \frac{e_0}{\sqrt{1 - \frac{M_W^{02}}{M_Z^{02}}}} \quad (5.40)$$

e la (si vedano le 3.27 e 3.24)

$$g'_0 = g_0 \tan \theta_W^0 = e_0 \frac{M_Z^0}{M_W^0} \quad (5.41)$$

Queste relazioni definiscono il modello standard minimale e i parametri e_0 , M_Z^0 , M_W^0 sono presi come parametri fondamentali. La rinormalizzazione è fatta ponendo

$$e_0 = e \left(1 + \frac{\delta e}{e} \right) \quad (5.42)$$

$$M_W^{02} = M_W^2 \left(1 + \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} \right) \quad (5.43)$$

$$M_Z^{02} = M_Z^2 \left(1 + \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} \right) \quad (5.44)$$

dove abbiamo soppresso la dipendenza dal cut-off Λ . Lo schema di rinormalizzazione "on shell" è definito richiedendo che

$$\frac{e^2}{4\pi} = \text{usuale costante di struttura fine} \quad (5.45)$$

$$M_W \text{ e } M_Z = \text{masse fisiche di } W \text{ e } Z \quad (5.46)$$

e promuovendo la formula a livello albero 5.47

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad (5.47)$$

a definizione del valore rinormalizzato di $\sin^2 \theta_W^2$ a tutti gli ordini dello sviluppo perturbativo. Per sottolineare questo si usano i simboli s_W^2 e c_W^2 , per indicare

$\sin^2 \theta_W$ e $\cos^2 \theta_W$, e s_W^2 è per definizione¹³

$$s_W^2 = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad (5.48)$$

Queste richieste sono sufficienti per fissare δe , δM_W^2 , δM_Z^2 , cioè sono sufficienti a rimuovere l'ambiguità in a_1^F da noi discussa in precedenza. Le 5.40 e 5.41 fanno sì che g_0 e g'_0 non debbano essere rinormalizzate separatamente. L'uso delle 5.42, 5.43 e 5.44 permette di definire le costanti di accoppiamento rinormalizzate

$$\begin{aligned} g &= \frac{e}{s_W} \\ g' &= \frac{e}{c_W} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Tutto questo è solo apparentemente semplice. W e Z sono particelle instabili e cosa si intenda con le loro masse non è privo di ambiguità. Tuttavia, con le dovute attenzioni e tenuto conto, di volta in volta, del significato e dell'entità delle correzioni radiative, i problemi che sorgono possono essere superati.

5.4 Correzioni alla relazione tra G , α e M_W

G è storicamente definita utilizzando misure molto accurate della vita media del muone (per questo motivo è spesso indicata con G_μ) e confrontandole con le previsioni del modello di Fermi tenendo conto, però, delle correzioni e.m.. Si ha

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha(\mu^2)}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \right] \quad (5.50)$$

dove la funzione

$$f\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \equiv f(x) = 1 - 8x + 8x^2 - x^4 - 12x^2 \ln x$$

deriva dall'integrazione sullo spazio delle fasi. La 5.50 tiene conto delle correzioni fotoniche di QED all'ordine più basso dell'ampiezza di contatto alla Fermi (figura 5.14) mentre le principali correzioni del secondo ordine sono ottenute sostituendo la costante di struttura fine α con il valore della costante che corre calcolato alla massa del muone. L'ampiezza di transizione che porta alla 5.50 si può schematicamente scrivere come

$$\frac{G}{\sqrt{2}} [1 + \text{corr. fotoniche amp. Fermi}] \quad (5.51)$$

Nel calcolo della vita media del muone secondo il modello standard dobbiamo considerare i grafici in figura 5.15, ove al grafico al livello albero abbiamo aggiunto le correzioni al propagatore (b), quelle ai vertici (c,d) e le correzioni a "box" (e).

¹³Un altro schema è quello della "sottrazione minimale modificata (\overline{MS})" che introduce la quantità

$$\sin^2 \hat{\theta}_W(\mu) \equiv \frac{\hat{g}'^2(\mu)}{\hat{g}'^2(\mu) + \hat{g}^2(\mu)}$$

dove gli accoppiamenti \hat{g} e \hat{g}' sono definiti nello schema \overline{MS} e μ è scelta pari a M_Z per la maggior parte dei processi elettrodeboli. L'attenzione è poi focalizzata su $\hat{s}_Z^2 \equiv \sin^2 \hat{\theta}_W(M_Z)$.

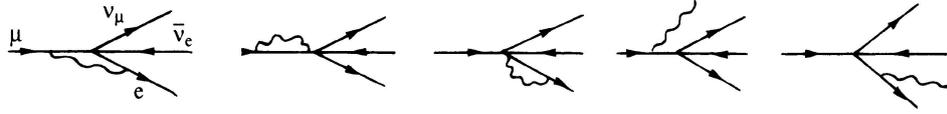


Figure 5.14: Correzioni fotoniche di QED all'ordine più basso dell'ampiezza di contatto alla Fermi per il decadimento del muone. (L&P)

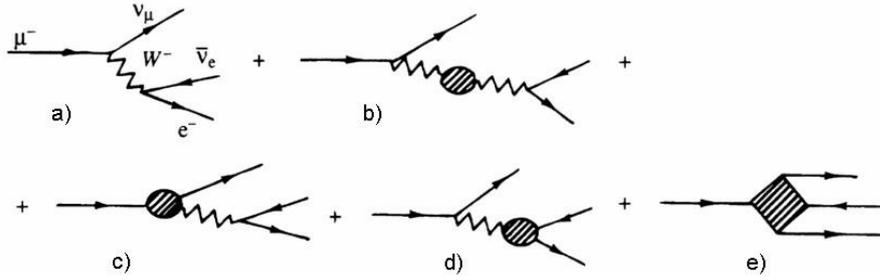


Figure 5.15: Grafici per il decadimento del muone. al grafico di ordine più basso sono state aggiunte le correzioni al propagatore (b), quelle ai vertici (c,d) e le correzioni a "box" (e). (L&P)

Tali correzioni, nell'approssimazione a un loop, sono dettagliate in figura 5.16. L'ampiezza di transizione corrispondente ai grafici specificati nelle figure 5.15 e 5.16 si può schematicamente scrivere

$$\frac{e^2}{8s_W^2 M_W^2} [1 + \text{correzioni a un loop}]$$

Uguagliando questa ampiezza con quella alla Fermi corretta otteniamo

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8s_W^2 M_W^2} [1 + \Delta r] \quad (5.52)$$

Δr così come definito include effetti di polarizzazione del vuoto e altre correzioni deboli che dipendono da tutti i parametri del modello compreso la massa dell'Higgs attualmente non nota. *I contributi più importanti vengono dal loop $f_1 \bar{f}_2$ nel propagatore e, sempre nel propagatore, dal termine di emissione e riassorbimento di H* (vedi figura 5.17). Nel primo caso i due fermioni sono quelli di un doppietto di isospin debole e la correzione è proporzionale a

$$m_{f_1}^2 - m_{f_2}^2$$

si vede, così, che il contributo più rilevante viene dal doppietto (t, b) a causa della grande differenza di massa tra i due quark e risulta *sostanzialmente proporzionale al quadrato della massa del top*

$$m_t^2 - m_b^2 \approx m_t^2$$

Questa è la ragione per cui alcune misure di precisione dei parametri elettrodeboli risultano sorprendentemente sensibili alla massa del top. Nel secondo

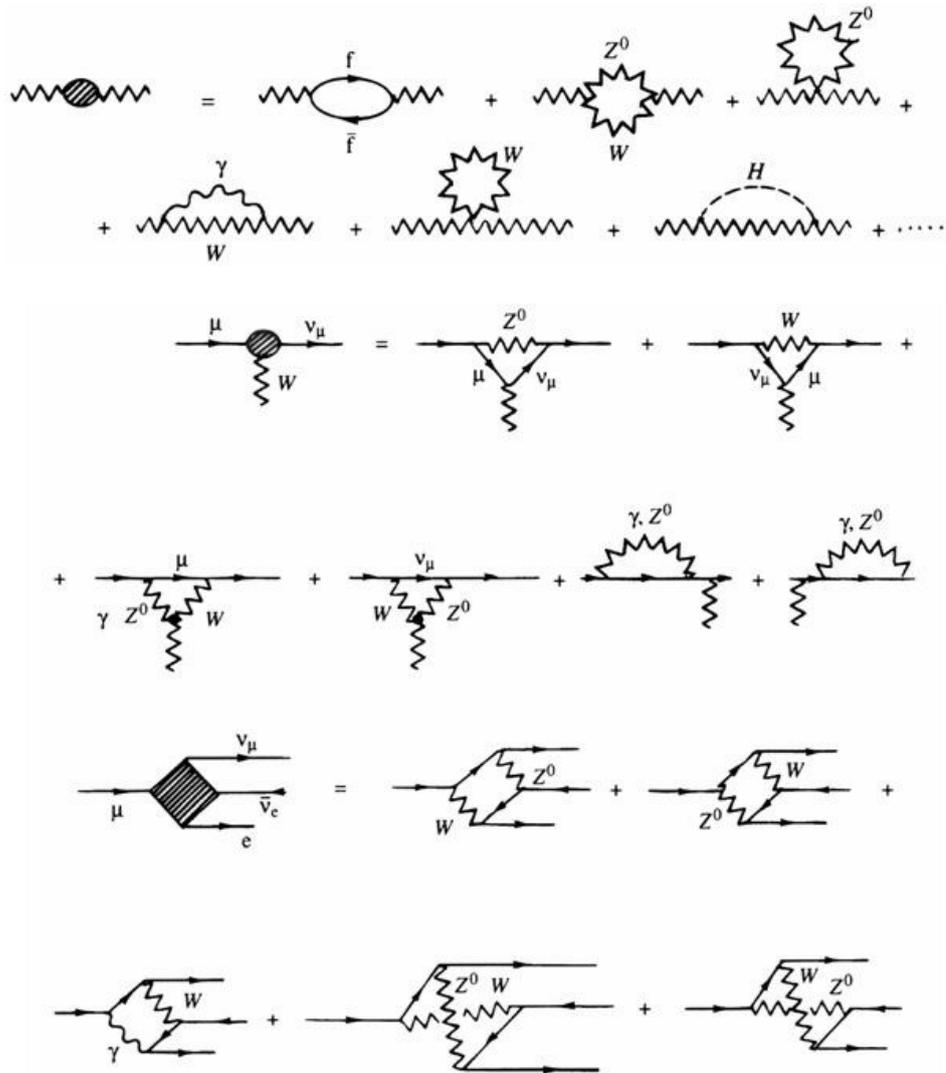


Figure 5.16: Dettaglio delle correzioni a un loop per il decadimento del muone. (L&P)

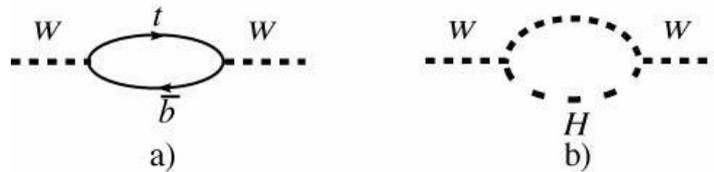


Figure 5.17: Contributi più importanti alla massa del W .

caso si ottiene un contributo che *dipende solo logicamente dalla massa dell'Higgs*¹⁴.

Correzioni di ordine più elevato conducono ad una relazione analoga alla 5.52 con la sostituzione di $1 + \Delta r$ con $1/(1 - \Delta r)$ per cui la 5.52 diventa

$$G = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_W^2 s_W^2} \frac{1}{1 - \Delta r} \quad (5.53)$$

Δr è dell'ordine del per cento (dipende, come già detto, seppure logicamente da M_H).

Si trova

$$\Delta r = \Delta r_0 - \frac{(1 - s_W^2)}{s_W^2} \Delta\rho + (\Delta r)_{rimanente} \quad (5.54)$$

Δr_0 è il contributo dovuto al running di α ed è semplicemente $\Delta\alpha$ (vedi 5.27)

$$\Delta r_0 = \Delta\alpha = 1 - \frac{\alpha}{\alpha(M_Z)} \simeq 0,063 \quad (5.55)$$

$\Delta\rho$ rappresenta le correzioni radiative al parametro ρ introdotto in precedenza, che è legato al rapporto tra l'intensità dei processi di corrente neutra e di quelli di corrente carica. Il contributo più rilevante, in accordo a quanto detto in precedenza, deriva dal loop $t - b$ per cui si ha

$$\Delta\rho \simeq \frac{3e^2}{64\pi^2 M_W^2 s_W^2} (m_t^2 - m_b^2) \quad (5.56)$$

La parte rimanente contiene un termine significativo dipendente da $\ln(m_t/M_W)$

$$(\Delta r)_{rimanente}^{top} = \frac{e^2}{64\pi^2 s_W^2} 2 \left(\frac{c_W^2}{s_W^2} - \frac{1}{3} \right) \ln \left(\frac{m_t^2}{M_W^2} \right)$$

e un contributo dal bosone di Higgs che (per $m_H \gg M_W$) è

$$(\Delta r)_{rimanente}^{Higgs} \simeq \frac{e^2}{64\pi^2 s_W^2} \frac{11}{3} \left[\ln \left(\frac{M_H^2}{M_W^2} \right) - \frac{5}{6} \right] \quad (5.57)$$

Per quanto riguarda la dipendenza da m_H nella 5.57, ci si sarebbe aspettato che questa fosse del tipo m_H^2 in base alla tipica divergenza generata da un loop di particella scalare. In questo caso Δr sarebbe stato molto sensibile alla massa dell'Higgs. Invece, la dipendenza è, come abbiamo visto, solo logica; infatti, le correzioni radiative a un loop agli osservabili elettrodeboli crescono al più come $\ln m_H^2$ per grandi valori di m_H . In realtà nel calcolo compaiono anche correzioni finite $\mathcal{O}(m_H^2)$ per $m_H^2 \ll M_{W,Z}^2$ e per $m_H^2 \gg M_{W,Z}^2$, però, questi termini si cancellano da tutte le quantità osservabili e rimane solo la dipendenza logica. Tutto questo spiega perché misure di precisione di osservabili elettrodeboli permisero di fare una previsione molto buona della massa del top prima ancora che esso fosse osservato sperimentalmente (si veda il paragrafo 8.1), mentre, invece, non riescono a fare altrettanto per la massa dell'Higgs, che risulta così largamente indeterminata.

¹⁴E' bene osservare che questi due contributi, che qui stiamo analizzando in un contesto specifico, sono correzioni al propagatore del W e, quindi, giocano un ruolo importante non soltanto nel decadimento del muone ma anche in altri processi deboli.

Fit dei dati attuali danno tipicamente m_H nella regione dei 100GeV al minimo di una curva di χ^2 ma l'errore è dell'ordine di 50GeV . Ricerche dirette escludono finora valori di m_H inferiori a $\sim 110\text{GeV}$, mentre un effetto osservato dagli esperimenti di LEP, prima della chiusura, dava $m_H \sim 115\text{GeV}$. La significanza statistica di tale effetto era, però, soltanto di ~ 2 deviazioni standard.

