

Chapter 3

Il modello GWS delle interazioni elettrodeboli

3.1 Introduzione

Per la costruzione del modello i passi logici sono i seguenti

- si sceglie il gruppo di simmetria G e sappiamo che è $G = SU(2)_L \times U(1)_Y$;
- si scelgono i campi delle particelle elementari che si vogliono descrivere e le loro rappresentazioni, cioè come essi trasformano sotto G ;
- si scrive la lagrangiana libera;
- si impone alla lagrangiana la richiesta di simmetria locale di gauge sotto tale gruppo. Questo fa comparire quattro bosoni di gauge a massa nulla, tanti quanti sono i generatori del gruppo di simmetria (tre per $SU(2)$ e uno per $U(1)$);
- poiché dagli esperimenti si sa che tre dei quattro bosoni di gauge sono massivi, si aggiunge alla lagrangiana, che a questo stadio è ancora gauge-invariante, un numero di campi scalari almeno pari al numero dei campi di gauge che si vogliono rendere massivi più uno (scelta minimale);
- si procede per applicare i concetti della rottura spontanea di simmetria e del meccanismo di Higgs, ovvero
- si scelgono i parametri di accoppiamento dei campi scalari in modo che al minimo del potenziale i campi non siano nulli (in pratica si sceglie $-\mu^2 < 0$);
- si introducono nuovi campi scalari e si esprimono i campi scalari precedenti in termini di nuovi campi il cui valore al minimo è zero, scegliendo una gauge conveniente;
- si interpreta la lagrangiana (a questo punto non più invariante in quanto è stata fissata la gauge) come lagrangiana quantistica e si applicano le tecniche della teoria quantistica dei campi.
- Infine, si verifica che la lagrangiana sia rinormalizzabile.

3.2 "Building blocks" del modello GWS

Nel modello di GWS i fermioni fondamentali si presentano come doppietti della simmetria di isospin debole $SU(2)_L$

$$\begin{array}{l} t, t_3 = 1/2, +1/2 \\ t, t_3 = 1/2, -1/2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{l} t, t_3 = 1/2, +1/2 \\ t, t_3 = 1/2, -1/2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L \quad (3.2)$$

dove

$$f_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) f \quad (3.3)$$

e

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Così sotto $SU(2)_L$ abbiamo, per esempio

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}' = e^{-i\alpha \cdot \tau / 2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad (3.5)$$

Sono solo le componenti sinistrorse dei fermioni fondamentali che concorrono ai processi deboli di corrente carica. Le componenti destrorse dei fermioni carichi (i neutrini, nell'ipotesi di massa nulla sono sempre sinistrorsi) contribuiscono, però, ai processi di corrente neutra; esse sono singoletti di $SU(2)$.

$$t = 0 \quad e_R^-, \mu_R^-, \tau_R^-, d_R, u_R, s_R, c_R, b_R, t_R$$

Al fine di incorporare nella teoria le interazioni elettromagnetiche insieme a quelle deboli, al gruppo di simmetria $SU(2)_L$ è stato aggiunto un gruppo addizionale di simmetria di gauge locale $U(1)_Y$ associato alla "ipercarica debole" Y definita da

$$Q = t_3 + \frac{Y}{2} \quad (3.6)$$

per cui il gruppo di simmetria completo del modello GWS è $SU(2) \times U(1)$. Tutti i membri di un stesso multipletto di $SU(2)$ hanno la stessa ipercarica data da

$$Y_{multipletto} = 2\bar{Q} \quad (3.7)$$

ove \bar{Q} è la carica elettrica media del multipletto.

Alla simmetria $SU(2)_L$ corrisponde un tripletto di isospin di bosoni di Goldstone, $\mathbf{W}^\mu \equiv (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$, mentre a $U(1)$ corrisponde il singoletto B^μ . Questi, come vedremo tra breve, non sono i bosoni di gauge fisici che mediano le interazioni. Infatti, le interazioni deboli di corrente carica sono mediate dai bosoni W^\pm , i quali sono una combinazione lineare di W_1 e W_2 , mentre le interazioni e.m. e deboli di corrente neutra sono mediate dal fotone e da Z^0 , che sono combinazioni lineari di W_3 e B . La 3.7 ci dice che *i bosoni di gauge hanno tutti ipercarica nulla.*

	t	t_3	Y	Q	$c_{L(R)}$
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	1/2	+1/2	-1	0	1/2
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$	-	-	-	-	-
e_L, μ_L, τ_L	1/2	-1/2	-1	-1	$-1/2 + \sin^2 \theta_W^2$
e_R, μ_R, τ_R	0	0	-2	-1	$\sin^2 \theta_W^2$
u_L, c_L, t_L	1/2	+1/2	1/3	+2/3	$1/2 - (2/3) \sin^2 \theta_W^2$
u_R, c_R, t_R	0	0	4/3	+2/3	$-(2/3) \sin^2 \theta_W^2$
d'_L, s'_L, b'_L	1/2	-1/2	1/3	-1/3	$-1/2 + (1/3) \sin^2 \theta_W^2$
d'_R, s'_R, b'_R	0	0	-2/3	-1/3	$(1/3) \sin^2 \theta_W^2$

Table 3.1: Numeri quantici ed accoppiamenti dei campi fermionici.

	t	t_3	Y	Q	$c_{R(L)}$
$\bar{\nu}_{eR}, \bar{\nu}_{\mu R}, \bar{\nu}_{\tau R}$	1/2	-1/2	+1	0	-1/2
$\bar{\nu}_{eL}, \bar{\nu}_{\mu L}, \bar{\nu}_{\tau L}$	-	-	-	-	-
e_R^+, μ_R^+, τ_R^+	1/2	+1/2	+1	+1	$1/2 - \sin^2 \theta_W^2$
e_L^+, μ_L^+, τ_L^+	0	0	+2	+1	$-\sin^2 \theta_W^2$
$\bar{u}_R, \bar{c}_R, \bar{t}_R$	1/2	-1/2	-1/3	-2/3	$-1/2 + (2/3) \sin^2 \theta_W^2$
$\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L$	0	0	-4/3	-2/3	$(2/3) \sin^2 \theta_W^2$
$\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R$	1/2	+1/2	-1/3	+1/3	$1/2 - (1/3) \sin^2 \theta_W^2$
$\bar{d}'_L, \bar{s}'_L, \bar{b}'_L$	0	0	-2/3	+1/3	$-(1/3) \sin^2 \theta_W^2$

Table 3.2: Numeri quantici e accoppiamenti degli antifermioni.

Carica elettrica e ipercarica sono quantità assolutamente conservate. Per esempio, mentre il processo $W^- \rightarrow e_L^- + \bar{\nu}_{eR}$ ($0 = -1 + 1$) è permesso, la conservazione dell'ipercarica proibisce il processo $Z^0 \rightarrow \bar{u}_R + u_R$ ($0 \neq -1/3 + 4/3$). E', invece, permesso il processo $Z^0 \rightarrow \bar{u}_R + u_L$ ($0 = -1/3 + 1/3$).

Nella tabella 3.1 sono riassunti i numeri quantici dei campi fermionici. I numeri quantici degli antifermioni sono opposti e sono riassunti nella tabella 3.2. Alle correnti cariche partecipano soltanto le componenti destrorse degli antifermioni, raggruppate in doppietti di isospin debole

$$\begin{array}{l} t, t_3 = 1/2, +1/2 \\ t, t_3 = 1/2, -1/2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} \tau^+ \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}_R$$

$$\begin{array}{l} t, t_3 = 1/2, +1/2 \\ t, t_3 = 1/2, -1/2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ \bar{u} \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} \bar{s}' \\ \bar{c} \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} \bar{b}' \\ \bar{t} \end{pmatrix}_R$$

Le componenti sinistrorse degli antifermioni carichi (gli antineutrini, nell'ipotesi di massa nulla sono sempre destrorsi) sono singoletti di $SU(2)$ e contribuiscono ai processi di corrente neutra

$$t = 0 \quad e_L^+, \mu_L^+, \tau_L^+, \bar{d}_L, \bar{u}_L, \bar{s}_L, \bar{c}_L, \bar{b}_L, \bar{t}_L$$

3.3 Accoppiamento dei bosoni di gauge al campo di Higgs

3.3.1 Rottura spontanea di $SU(2) \times U(1)$

Come abbiamo anticipato, la richiesta che $SU(2)_L$ sia una invarianza locale porta all'introduzione di tre campi vettoriali di gauge, \mathbf{W}_J^μ , che costituiscono un tripletto di isospin debole mentre l'ulteriore richiesta di invarianza locale sotto $U(1)_Y$ porta all'introduzione di un ulteriore campo vettoriale di gauge, B^μ , che è un singoletto di isospin debole. La procedura per $SU(2)_L$ è del tutto analoga a quella vista nel paragrafo 1.6.2 ove eravamo partiti dalla lagrangiana libera di un doppietto fermionico di isospin, che ora invece scriviamo esplicitamente come somma dei contributi del doppietto sinistrorso ψ_L e del corrispondente singoletto destrorso

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad (3.8)$$

trascurando per il momento la massa in quanto il termine $m\bar{\psi}\psi$ non è invariante per $SU(2)_L$ (vedi paragrafo 3.6). Nel caso del modello standard, l'analoga lagrangiana contiene, ovviamente, la somma dei contributi di tutti i doppietti fermionici (più i rispettivi coniugati di carica per tener conto del contributo degli antifermioni). Noi continuiamo, però, a considerare per semplicità di scrittura un solo doppietto ed un solo singoletto. L'invarianza di gauge locale richiede che sotto trasformazioni infinitesime di $SU(2)_L \times U(1)_Y$ i campi fermionici trasformino secondo le seguenti trasformazioni

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} SU(2)_L \\ \psi_L \rightarrow \psi'_L = (1 - i\frac{1}{2}g\epsilon(x) \cdot \boldsymbol{\tau}) \psi_L \\ \psi_R \rightarrow \psi'_R = \psi_R \end{array} & \begin{array}{l} U(1)_Y \\ \psi_L \rightarrow \psi'_L = (1 - i\frac{1}{2}g'\delta(x)Y) \psi_L \\ \psi_R \rightarrow \psi'_R = (1 - i\frac{1}{2}g'\delta(x)Y) \psi_R \end{array} \end{array} \quad (3.9)$$

ove g e g' sono le costanti di accoppiamento per i gruppi $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, rispettivamente. La lagrangiana 3.8 è resa invariante sotto $SU(2) \times U(1)$ introducendo la derivazione covariante

$$\mathcal{D}_\mu^L = \partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \quad (3.10)$$

che agisce sui doppietti di isospin debole e la derivazione

$$\mathcal{D}_\mu^R = \partial_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \quad (3.11)$$

che agisce sui singoletti di isospin. A tali derivazioni devono corrispondere le seguenti trasformazioni dei campi di gauge

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} SU(2)_L \\ \mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu + \partial_\mu \boldsymbol{\epsilon}(x) + g\boldsymbol{\epsilon}(x) \times \mathbf{W}_\mu \\ B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu \end{array} & \begin{array}{l} U(1)_Y \\ \mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu \\ B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \delta(x) \end{array} \end{array} \quad (3.12)$$

3.3. ACCOPPIAMENTO DEI BOSONI DI GAUGE AL CAMPO DI HIGGS⁵⁵

La lagrangiana diventa

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^L \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^R \psi_R - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \quad (3.13) \\ &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu - g' \frac{Y}{2} B_\mu \right] \psi_L \\ &\quad + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g' \frac{Y}{2} B_\mu \right] \psi_R - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}\end{aligned}$$

ove abbiamo aggiunto i termini di energia cinetica dei campi di gauge definiti per mezzo di

$$C_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (3.14)$$

e

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \quad (3.15)$$

I campi di gauge sono tutti a massa nulla; per altro, come per i fermioni, l'inserzione "a mano" di un termine di massa del tipo $(1/2) m^2 B_\mu B^\mu$ romperebbe la simmetria di gauge. Per dare massa ai campi \mathbf{W} procediamo, allora, con la rottura della simmetria di gauge e il meccanismo di Higgs. Seguiamo la procedura vista nel paragrafo 1.7.3 considerando un doppietto di isospin di campi scalari complessi

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

ove il campo scalare complesso ϕ^+ *distrukge particelle cariche positive e crea particelle negative* mentre il campo scalare complesso ϕ^0 *distrukge particelle neutre e crea antiparticelle neutre*. La lagrangiana del settore campi di gauge + campo ϕ , dopo la richiesta di invarianza locale di gauge è

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \quad (3.17)$$

ove $\mathcal{D}_\mu \equiv \mathcal{D}_\mu^L$, $C_{\mu\nu}$ e $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ sono dati rispettivamente dalle 3.10, 3.14 e 3.15. Parametrizzando le fluttuazioni di ϕ attorno al vuoto

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

come

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H(x)) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

operiamo la rottura di simmetria, dopo la quale le parti quadratiche che derivano dalla 3.17 possono essere scritte (*nella gauge unitaria*) come

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{G\phi} &= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \mu^2 H^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_{1\nu} - \partial_\nu W_{1\mu}) (\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu) + \frac{1}{8} g^2 v^2 W_{1\mu} W_1^\mu \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_{2\nu} - \partial_\nu W_{2\mu}) (\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu) + \frac{1}{8} g^2 v^2 W_{2\mu} W_2^\mu \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_{3\nu} - \partial_\nu W_{3\mu}) (\partial^\mu W_3^\nu - \partial^\nu W_3^\mu) - \frac{1}{4} C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{8} v^2 (g W_{3\mu} - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu)\end{aligned}$$

La prima linea è la lagrangiana di un campo scalare, *il campo di Higgs*, di massa

$$m_H = \sqrt{2} |\mu| = \sqrt{2} \lambda v \quad (3.19)$$

Le successive due linee mostrano come i campi W_1^μ e W_2^μ del tripletto \mathbf{W}^μ abbiano acquistato massa

$$M_1 = M_2 = \frac{1}{2} g v \equiv M_W \quad (3.20)$$

Le ultime due linee mostrano che i campi W_3^μ e B^μ sono mescolati. Notando, però, che l'ultima linea riguarda la sola combinazione $gW_3^\mu - g'B^\mu$, la quale evidentemente acquista massa, possiamo riarrangiare le due linee sostituendo W_3^μ e B^μ con due nuovi campi Z^μ e A^μ ottenuti come combinazioni ortogonali dei precedenti

$$Z^\mu = W_3^\mu \cos \theta_W - B^\mu \sin \theta_W \quad (3.21)$$

$$A^\mu = W_3^\mu \sin \theta_W + B^\mu \cos \theta_W \quad (3.22)$$

con

$$\cos \theta_W = \frac{g}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \quad (3.23)$$

Il parametro θ_W , che deve essere determinato sperimentalmente, è l'*angolo di Weinberg*. In questo modo le ultime due linee diventano

$$-\frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \frac{1}{8} v^2 (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

con

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Vediamo, così, che il campo Z^μ ha massa

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \quad (3.24)$$

La lagrangiana del settore higgs+campi di gauge è allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{G\phi} = & \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \mu^2 H^2 \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_{1\nu} - \partial_\nu W_{1\mu}) (\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu) + \frac{1}{8} g^2 v^2 W_{1\mu} W_1^\mu \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_{2\nu} - \partial_\nu W_{2\mu}) (\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu) + \frac{1}{8} g^2 v^2 W_{2\mu} W_2^\mu \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \frac{1}{8} v^2 (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

I gradi di libertà sono dodici come prima della rottura di simmetria; infatti nove sono associati ai tre campi di gauge massivi, due al campo a massa nulla e uno al campo scalare di Higgs. Dei quattro bosoni di Goldstone esistenti nella lagrangiana prima della rottura di simmetria solo tre hanno acquistato massa. Il fatto che uno sia rimasto a massa nulla è dovuto alla nostra scelta del vuoto il

3.3. ACCOPPIAMENTO DEI BOSONI DI GAUGE AL CAMPO DI HIGGS 57

quale, come ci accingiamo a vedere, ha conservato una simmetria. Ricordiamo infatti che l'isospin debole e l'ipercarica debole sono legati dalla relazione

$$Q = t_3 + \frac{1}{2}Y$$

ovvero, in termini di operatori

$$Q = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)$$

Il doppietto di campi scalari 3.16 ha dunque $Y = 1$, avendo la componente $t_3 = +1/2$ carica elettrica $+1$ (in unità e) e quella con $t_3 = -1/2$ carica elettrica 0 . Ora le fluttuazioni intorno al vuoto corrispondono a emissione o assorbimento del bosone di Higgs e questo significa che ogni numero quantico portato dal bosone di Higgs può essere creato o annichilito spontaneamente. Pertanto la conservazione della carica elettrica forza a scegliere un valore non nullo del vuoto per la componente neutra del doppietto e non per la componente carica, in quanto un valore di aspettazione non nullo di ϕ^+ avrebbe implicato la non conservazione della carica. La scelta di ϕ^0 con $t_3 = -1/2$ e $Y = 1$ rompe sia $SU(2)_L$ che $U(1)_Y$ ma lascia il vuoto invariato sotto un sottogruppo di $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Infatti, se operiamo su ϕ^0 con l'operatore della carica elettrica Q , abbiamo

$$Q\phi^0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\phi^0 = 0$$

e questo significa che il vuoto è invariante sotto la trasformazione di gauge

$$\phi^0 \rightarrow \phi^{0'} = e^{i\alpha(x)Q}\phi^0 \quad (3.25)$$

il cui generatore è combinazione lineare dei generatori di $SU(2)_L \times U(1)_Y$. La trasformazione 3.25 è chiaramente una trasformazione $U(1)$ e, in particolare, è la $U(1)_{em}$. Conseguentemente il campo associato, il fotone, rimane senza massa. Ritorna ancora il fatto che è la conservazione della carica che comporta che il fotone non abbia massa ed è, ancora, la conservazione della carica che richiede che lo stato di vuoto prescelto per la rottura di simmetria sia neutro.

Se ora esprimiamo la derivazione covariante nella 3.17 sostituendo i campi W_μ^3 e B_μ in termini dei campi A_μ e Z_μ

$$\begin{aligned} W_\mu^3 &= Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W \\ B_\mu &= -Z_\mu \sin \theta_W + A_\mu \cos \theta_W \end{aligned} \quad (3.26)$$

e esprimiamo g' in termini di g

$$g' = g \tan \theta_W \quad (3.27)$$

troviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \phi &= \left\{ \partial_\mu + ig \frac{1}{2} [\tau_1 W_\mu^1 + \tau_2 W_\mu^2] + ig \sin \theta_W \frac{1}{2} (Y + \tau_3) A_\mu \right. \\ &\quad \left. + \frac{ig}{\cos \theta_W} \left[\frac{\tau_3}{2} - \sin^2 \theta_W \frac{1}{2} (Y + \tau_3) \right] Z^\mu \right\} \phi \\ &= \left\{ \partial_\mu + ig \frac{1}{2} [\tau_1 W_\mu^1 + \tau_2 W_\mu^2] \right. \\ &\quad \left. + ig \sin \theta_W Q A_\mu + \frac{ig}{\cos \theta_W} \left[\frac{\tau_3}{2} - \sin^2 \theta_W Q \right] Z^\mu \right\} \phi \end{aligned}$$

Veendiamo, allora, che al fine di ottenere il corretto \mathcal{D}_μ elettromagnetico dobbiamo fare l'identificazione

$$e = g \sin \theta_W \quad (3.28)$$

Inoltre, considerando la parte in W_μ^1 e W_μ^2 , abbiamo

$$ig \frac{1}{2} [\tau_1 W_\mu^1 + \tau_2 W_\mu^2] \phi = i \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\tau_+ \frac{(W_1^\mu - iW_2^\mu)}{\sqrt{2}} + \tau_- \frac{(W_1^\mu + iW_2^\mu)}{\sqrt{2}} \right] \phi \quad (3.29)$$

con

$$\tau_\pm = \frac{\tau_1 \pm i\tau_2}{2}$$

Possiamo, così, interpretare le due combinazioni

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (3.30)$$

come i campi associati ai bosoni fisici W^\pm . In particolare W_μ^+ *distrugge un W^+ o crea W^-* mentre W_μ^- fa il contrario: *distrugge un W^- o crea un W^+* .

Quanto abbiamo finora sviluppato in questo paragrafo è il cosiddetto "settore Higgs" del modello standard. Vogliamo sottolineare ancora una volta che l'abbiamo fatto nella gauge unitaria. In particolare sottolineiamo che l'importante relazione 3.28, che *traduce l'unificazione elettrodebole*, è valida in tale forma proprio nella detta gauge

Le regole di Feynman per i propagatori (nella gauge unitaria) e per gli accoppiamenti dei bosoni vettoriali e per l'accoppiamento di Higgs sono lette dalla lagrangiana 3.17.

3.4 Accoppiamento dei leptoni ai bosoni di gauge

Come al solito, l'accoppiamento dei leptoni ai campi di gauge deriva dalla lagrangiana libera nella quale, per il principio di gauge, la derivazione ∂^μ è sostituita dalla derivazione covariante

$$\mathcal{D}^{(L)\mu} = \partial^\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}^\mu + ig' \frac{Y}{2} B^\mu \quad \text{su doppietti L di } SU(2) \quad (3.31)$$

$$\mathcal{D}^{(R)\mu} = \partial^\mu + ig' \frac{Y}{2} B^\mu \quad \text{su singoletti R di } SU(2) \quad (3.32)$$

Considerando, per semplicità di scrittura, un solo doppietto di leptoni

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L$$

ed il singoletto l_R ad esso associato, tale lagrangiana è (non considerando per il momento i termini di massa dei leptoni)

$$\mathcal{L} = \bar{\chi}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^{(L)} \chi_L + \bar{l}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^{(R)} l_R \quad (3.33)$$

La lagrangiana completa per i leptoni si otterrà, ovviamente, sommando la 3.33 sui tre doppietti ed i rispettivi singoletti.

Esplicitando la derivazione covariante, dalla 3.33 deriva la lagrangiana d'interazione tra leptoni e campi di gauge data da

$$\mathcal{L}' = -g\bar{\chi}_L\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\mathbf{W}_\mu\chi_L - \frac{g'}{2}\bar{\chi}_L\gamma^\mu Y B_\mu\chi_L - \frac{g'}{2}\bar{l}_R\gamma^\mu Y B_\mu l_R$$

ovvero

$$\mathcal{L}' = -gJ_\mu^1 W_1^\mu - gJ_\mu^2 W_2^\mu - gJ_\mu^3 W_3^\mu - \frac{g'}{2}j_\mu^Y B^\mu \quad (3.34)$$

ove

$$J_\mu^i = \bar{\chi}_L\gamma_\mu\frac{\tau_i}{2}\chi_L \quad \text{e} \quad j_\mu^Y = \bar{\chi}_L\gamma^\mu Y\chi_L + \bar{l}_R\gamma_\mu Y l_R$$

sono, rispettivamente, il tripletto di isospin di correnti deboli e la corrente di ipercarica debole introdotte nel paragrafo 2.5.1.

3.4.1 Correnti cariche leptoniche

Dai primi due termini della 3.34 derivano i termini della lagrangiana relativi all'accoppiamento delle correnti deboli cariche j_μ^\pm e ai campi W^\pm . Infatti:

$$\begin{aligned} gJ_\mu^1 W_1^\mu + gJ_\mu^2 W_2^\mu &= g\bar{\chi}_L\gamma_\mu\left[\frac{\tau_1}{2}W_1^\mu + \frac{\tau_2}{2}W_2^\mu\right]\chi_L \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\chi}_L\gamma_\mu[\tau_+ W^{+\mu} + \tau_- W^{-\mu}]\chi_L \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{L}'_{lept}{}^{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[j_\mu^+ W^{+\mu} + j_\mu^- W^{-\mu}] \quad (3.35)$$

con W^\pm dati dalla 3.30.

Dalla 3.35 leggiamo gli accoppiamenti (cioè i fattori di vertice dei grafici di Feynman) dei leptoni ai bosoni di gauge. Essi sono dati, come abbiamo detto nel paragrafo 1.1, dai coefficienti dei termini in $i\mathcal{L}'$ contenenti i campi interagenti¹. Esplicitando la 3.35, si ha

$$i\mathcal{L}'_{lept}{}^{CC} = -i\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_l\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)lW_\mu^+ - i\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{l}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu_l W_\mu^-$$

E' evidente che il primo termine estrae il processo²

$$l^- \rightarrow \nu_e + W^-$$

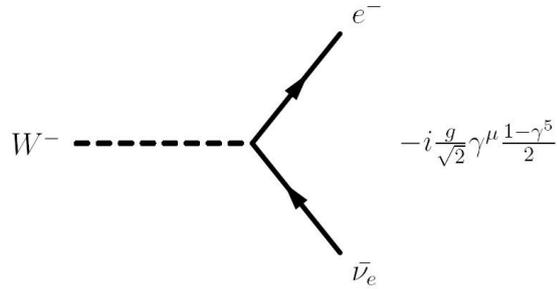
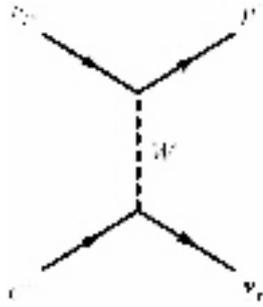
con il risultato che il corrispondente vertice è dato da

$$-\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5) \quad (3.36)$$

Il fatto che si abbia una unica costante di accoppiamento g (per il gruppo $SU(2)_L$), assicura che lo stesso vertice valga per tutti i doppietti di leptoni (*universalità*).

¹Il fattore di vertice V_μ si estrae tenendo presente che il contributo alla lagrangiana \mathcal{L}' dell'interazione tra un fermione e un campo di gauge F^μ è del tipo $-i\bar{u}V_\mu u F^\mu$.

²Ricordiamo che W_μ^+ distrugge un bosone W^+ o crea un bosone W^- .

Figure 3.1: Vertice $e - \nu - W$.Figure 3.2: Scambio di W nella diffusione $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$.

Così l'ampiezza per $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$, rappresentata dal grafico in figura 3.2, è data da

$$\left[-\frac{ig}{\sqrt{2}} \bar{u}(\mu) \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u(\nu_\mu) \right] \times \frac{i(-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \times \left[-\frac{ig}{\sqrt{2}} \bar{u}(\nu_e) \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u(e) \right]$$

e, per $q^2 \ll M_W^2$,

$$-i\mathfrak{M} = -\frac{ig^2}{8M_W^2} [\bar{u}(\mu) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(\nu_\mu)] [\bar{u}(\nu_e) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(e)] \quad (3.37)$$

Confrontando questa ampiezza con la corrispondente "alla Fermi"

$$\mathfrak{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(\mu) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(\nu_\mu)] [\bar{u}(\nu_e) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(e)]$$

otteniamo

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (3.38)$$

Questa relazione crea una connessione tra il contenuto di bassa energia del MS (almeno all'ordine più basso) e la teoria di Fermi.

Ora (3.20)

$$M_W = \frac{gv}{2}$$

quindi

$$v^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_F}$$

da cui

$$v \simeq 246 \text{ GeV}$$

o, alternativamente (per il valore del vuoto di Higgs),

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 174 \text{ GeV}$$

In definitiva la parte della lagrangiana che cambia la carica del leptone può essere scritta come

$$\mathcal{L}'_{lept}{}^{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \mu + \bar{\nu}_\tau \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \tau \right\} W_\mu + h.c. \quad (3.39)$$

ove

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^\mu - iW_2^\mu)$$

La 3.39 ha la forma (incluso, ora, la costante di accoppiamento nella definizione della corrente)

$$-j_{CC}^\mu (\text{leptoni}) W_\mu - j_{CC}^{\dagger\mu} (\text{leptoni}) W_\mu^\dagger$$

Le correnti sono quelle da noi già viste nel modello corrente-corrente; cioè, le correnti di simmetria dinamica della teoria di gauge $SU(2)_L$ conducono esattamente a quelle fenomenologiche scritte a suo tempo.

3.4.2 Correnti neutre leptoniche

Dai secondi due termini della 3.34 derivano i termini della lagrangiana relativi all'accoppiamento delle correnti neutre elettromagnetica e debole. Infatti, tenendo conto delle 3.26 si ha

$$gJ_\mu^3 W_3^\mu + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu = \left(g \cos \theta_W J_\mu^3 - \frac{g'}{2} \sin \theta_W j_\mu^Y \right) Z^\mu \quad (3.40) \\ + \left(g \sin \theta_W J_\mu^3 + \frac{g'}{2} \cos \theta_W j_\mu^Y \right) A^\mu$$

Considerando che (vedi 2.39)

$$ej_\mu^{em} = e \left(J_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y \right)$$

si vede che il secondo termine a secondo membro della 3.40 è riconducibile a

$$ej_\mu^{em} A^\mu = e \bar{l} \gamma_\mu Q l A^\mu$$

purché

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$$

coerentemente con quanto visto in precedenza (3.28).

A sua volta il primo termine a secondo membro della 3.40 rappresenta l'accoppiamento della corrente debole neutra al campo Z^μ

$$\begin{aligned} \left(g \cos \theta_W J_\mu^3 + \frac{g'}{2} \sin \theta_W j_\mu^Y \right) Z^\mu &= \left[g \cos \theta_W J_\mu^3 - \frac{g \sin^2 \theta_W}{2 \cos \theta_W} (2j_m^{em} - 2J_\mu^3) \right] Z^\mu \\ &= \frac{g}{\cos \theta_W} [J_\mu^3 - j_\mu^{em} \sin^2 \theta_W] = \frac{g}{\cos \theta_W} j_\mu^{NC} Z^\mu \end{aligned}$$

Dunque

$$j_\mu^{NC} = J_\mu^3 - j_\mu^{em} \sin^2 \theta_W = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\tau_3}{2} \chi_L - \sin^2 \theta_W \bar{l} \gamma_\mu Q_l$$

Si vede, così, che la corrente debole neutra per il generico leptone ($\nu_e, e^-, \nu_\mu, \mu^-, \nu_\tau, \tau^-$), chi indichiamo con il campo ψ_l , si scrive come (a meno, ancora per ora, della costante di accoppiamento)

$$j_\mu^{NC} = \bar{\psi}_l \gamma_\mu \left[t_3^l \frac{1 - \gamma^5}{2} - Q_l \sin^2 \theta_W \right] \psi_l$$

Tale corrente si accoppia con costante $\frac{g}{\cos \theta_W}$ al campo Z^μ .

D'ora in avanti includeremo la costante di accoppiamento nell'espressione della corrente, per cui la corrente debole neutra risulta espressa da

$$j_\mu^{NC} = \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{\psi}_l \gamma_\mu \left[t_3^l \frac{1 - \gamma^5}{2} - Q_l \sin^2 \theta_W \right] \psi_l \quad (3.41)$$

Ancora una volta è testimoniata l'*universalità leptonica*; infatti, l'accoppiamento è indipendente dal sapore del leptone. La corrente neutra, però, può anche essere espressa in termini delle sue parti "left" e "right" da

$$j_\mu^{NC} = \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{\psi}_l \gamma_\mu \left[c_L^l \frac{1 - \gamma^5}{2} + c_R^l \frac{1 + \gamma^5}{2} \right] \psi_l \quad (3.42)$$

per cui, dal confronto delle 3.41 e 3.42, si vede che

$$\begin{aligned} c_L^l &= t_3^l - Q_l \sin^2 \theta_W \\ c_R^l &= -Q_l \sin^2 \theta_W \end{aligned} \quad (3.43)$$

Una notazione alternativa per la corrente neutra è

$$j_\mu^{NC} = \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{\psi}_l \gamma_\mu \frac{1}{2} [g_V^l - g_A^l \gamma^5] \psi_l \quad (3.44)$$

ove

$$\begin{aligned} g_V^l &= c_L^l + c_R^l = t_3^l - 2Q_l \sin^2 \theta_W \\ g_A^l &= c_L^l - c_R^l = t_3^l \end{aligned} \quad (3.45)$$

sono gli *accoppiamenti vettoriale* ed *assiale*, rispettivamente.

Per i neutrini ($Q_\nu = 0, t_3 = +1/2$) si ha, dunque

$$\begin{aligned} c_L^\nu &= +\frac{1}{2} & c_R^\nu &= 0 \\ g_V^\nu &= g_A^\nu = +\frac{1}{2} \end{aligned}$$

mentre per i leptoni carichi ($Q_l = -1$, $t_3 = -1/2$)

$$\begin{aligned} c_L^- &= -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & c_R^- &= \sin^2 \theta_W \\ g_V^- &= -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W & g_A^- &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Osserviamo che g_V^l si annulla per $\sin^2 \theta_W = 0, 25$.

In definitiva

$$j_\mu^{NC}(\text{leptoni carichi}) = \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_l \bar{l} \gamma_\mu \frac{1}{2} (g_V^l - g_A^l \gamma^5) l \quad (l = e, \mu, \tau) \quad (3.46)$$

mentre

$$j_\mu^{NC}(\text{neutrini}) = \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_l \bar{\nu}_l \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu_l \quad (l = e, \mu, \tau) \quad (3.47)$$

essendo $g_V^\nu = g_A^\nu = 1/2$.

Considerando, ora, come in precedenza per la corrente carica, $i\mathcal{L}'_{lept}{}^{NC} = -i - ij_\mu^{NC} Z^\mu$, vediamo che per il vertice Z-leptone carico si ha

$$\frac{-ig}{\cos \theta_W} \gamma^\mu \frac{1}{2} (g_V^l - g_A^l \gamma^5) \quad (3.48)$$

e per quello Z-neutrino

$$\frac{-ig}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \quad (3.49)$$

Come nel caso della corrente carica, un processo mediato dallo scambio di Z^0 si riduce alla forma corrente-corrente per piccoli valori del quadrimomento trasferito. Per esempio, l'ampiezza (tree-level) per la diffusione $e^- \mu^-$ mediata dallo scambio di Z^0

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{M} &= \left\{ \frac{-ig}{\cos \theta_W} \bar{u}(e) \gamma^\mu \frac{1}{2} (g_V^l - g_A^l \gamma^5) u(e) \right\} \quad (3.50) \\ &\times \left\{ \frac{i[-g_{\mu\nu} + q_\mu p_\nu / M_Z^2]}{q^2 - M_Z^2} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{-ig}{\cos \theta_W} \bar{u}(\mu) \gamma^\mu \frac{1}{2} (g_V^l - g_A^l \gamma^5) u(\mu) \right\} \end{aligned}$$

per piccoli quadrimomenti trasferiti diventa

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{M} &= \frac{-ig^2}{4 \cos^2 \theta_W M_Z^2} [\bar{u}(e) \gamma^\mu (g_V^l - g_A^l \gamma^5) u(e)] \times \quad (3.51) \\ &[\bar{u}(\mu) \gamma^\mu (g_V^l - g_A^l \gamma^5) u(\mu)] \end{aligned}$$

Usualmente si definisce il parametro

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W}$$

che a livello albero vale 1 (si veda la 3.24). Confrontando la 3.51 con la 3.37, si vede che ρ è legato al rapporto tra l'intensità della corrente neutra e quella della corrente carica. Infatti, il rapporto tra i coefficienti che sono davanti alle espressioni $\bar{u} \dots u$ della 3.51 e della 3.37 vale esattamente 2ρ .

3.5 Accoppiamento dei quark ai bosoni di gauge

Le correnti cariche dei quark sono perfettamente analoghe a quelle dei leptoni carichi con l'avvertenza che la componente bassa ($t_3 = -1/2$) del doppietto di isospin debole sia identificata con gli stati a sapore mescolato che si ottengono con la matrice CKM (si veda il paragrafo 3.6.2)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix}_L &= \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}_L \\ j_{CC}^\mu(\text{quark}) &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} d' + \bar{c}\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} s' + \bar{t}\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} b' \right\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

La corrente neutra, a sua volta risulta diagonale nel sapore grazie all'unitarietà della matrice CKM. Si ha

$$j_{NC}^\mu(\text{quark}) = \frac{g}{\cos\theta_W} \sum_q \bar{q}\gamma^\mu \left[c_L^q \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) + c_R^q \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \right] q \quad (3.53)$$

con

$$c_L^q = t_3^q - \sin^2\theta_W Q_q \quad (3.54)$$

$$c_R^q = -\sin^2\theta_W Q_q \quad (3.55)$$

Alternativamente

$$j_{NC}^\mu(\text{quark}) = \frac{g}{\cos\theta_W} \sum_q \bar{q}\gamma^\mu \frac{1}{2} (g_V^q - g_A^q \gamma^5) q \quad (3.56)$$

con

$$g_V^q = t_3^q - 2\sin^2\theta_W Q_q \quad g_A^q = t_3^q \quad (3.57)$$

3.6 Masse dei fermioni

3.6.1 Leptoni

Con riferimento alle masse, quanto abbiamo finora introdotto è il cosiddetto "settore Higgs" del modello standard senza, però, alcun accoppiamento ai fermioni. Tuttavia generare le masse dei bosoni di gauge non è l'unico lavoro che il settore Higgs fa nel MS; esso genera anche le masse dei fermioni anche se il discorso è molto più problematico. Ricordiamo innanzitutto il modo in cui il MS introduce le interazioni dei campi di gauge con i campi di materia. Lo fa tramite la derivazione covariante; così per campi \mathbf{W}^μ di $SU(2)$ che agiscono su doppietti ($t = 1/2$) si ha

$$\partial^\mu \longrightarrow \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^\mu}{2}$$

E' semplice esercizio verificare che la parte ordinaria di energia cinetica di un fermione di Dirac libero non mescola la componente R con la componente L del campo

$$\bar{\psi}\not{\partial}\psi = \bar{\psi}_L\not{\partial}\psi_L + \bar{\psi}_R\not{\partial}\psi_R \quad (3.58)$$

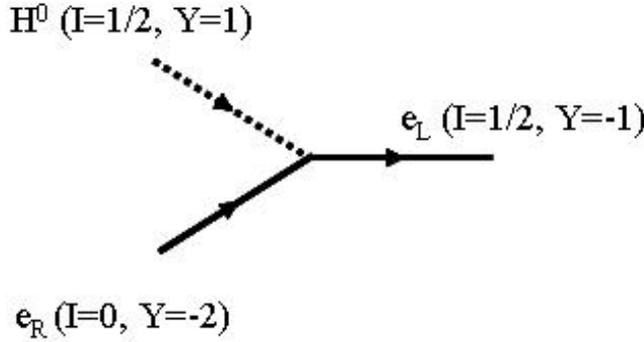


Figure 3.3: Il bosone di Higgs ha proprio i numeri quantici che gli permettono di accoppiarsi a e_L e e_R .

così, in linea di principio, è possibile "gauge-are" (cioè fare la sostituzione $\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu$ appropriata) le componenti L ed R in modo diverso. In QCD la sostituzione $\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu$ è fatta nello stesso modo in ciascuno dei termini a secondo membro della 3.58 perché la QCD conserva la parità per cui le componenti L e R devono essere trattate nello stesso modo. Le interazioni deboli, al contrario, violano la parità e la derivazione covariante $SU(2)_L$ agisce solo sul primo termine. Tuttavia un termine di massa alla Dirac ha la forma

$$-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) \quad (3.59)$$

ed accoppia le componenti L ed R del campo fermionico³, così se soltanto ψ_L è soggetto a una trasformazione di gauge del gruppo $SU(2)$ la 3.59 non è invariante. Perciò, termini di massa alla Dirac rompono specificamente la simmetria $SU(2)_L$. Tuttavia in una teoria con simmetria spontaneamente rotta non è necessario introdurre esplicitamente termini di massa nella lagrangiana ma si può dar massa ai fermioni accoppiandoli ad un campo scalare (tramite un accoppiamento tipo Yukawa⁴) che acquista un valore di aspettazione sul vuoto. Concentriamoci nel seguito sulla prima generazione di leptoni ricordando quali sono i loro numeri quantici di isospin ed ipercarica deboli

	t	t_3	Y
ν_e	1/2	+1/2	-1
e_L	1/2	-1/2	-1
e_R	0	0	-2

Il bosone di Higgs ha proprio i numeri quantici che gli permettono di accoppiarsi a e_L e e_R come in in figura 3.3. Introduciamo allora nella lagrangiana un accoppiamento alla Yukawa tra il doppietto di $SU(2)$

$$l_{eL} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$$

³ $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(P_R + P_L)\psi = \bar{\psi}P_R\psi + \bar{\psi}P_L\psi = \bar{\psi}P_R^2\psi + \bar{\psi}P_L^2\psi = \bar{\psi}P_R\psi_R + \bar{\psi}P_L\psi_L = \psi^\dagger\gamma^0 P_R\psi_R + \psi^\dagger\gamma^0 P_L\psi_L = \psi^\dagger P_L\gamma^0\psi_R + \psi^\dagger P_R\gamma^0\psi_L = (P_L\psi)^\dagger\gamma^0\psi_R + (P_R\psi)^\dagger\gamma^0\psi_L = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$.

⁴In generale una interazione alla Yukawa è l'interazione tra un campo scalare ϕ e un campo di Dirac ψ senza massa del tipo $g\bar{\psi}\phi\psi$ o $g\bar{\psi}\gamma^5\phi\psi$.

il doppietto di Higgs

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

e la componente R del campo dell'elettrone

$$\mathcal{L}^e = -g_e \left(\bar{l}_{eL} \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger l_{eL} \right) \quad (3.60)$$

La lagrangiana 3.60 è invariante per $SU(2)_L$ in quanto in ciascun termine (il secondo è l'hermitiano coniugato del primo) i due doppietti sono moltiplicati tra loro in modo da formare uno scalare di $SU(2)_L$ che moltiplica la componente R che è anch'essa uno scalare di $SU(2)_L$. Inserendo ora nella 3.60 il valore di vuoto di ϕ troviamo il risultato

$$\mathcal{L}^e(vuoto) = -g_e \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (3.61)$$

che è proprio un termine di massa alla Dirac della forma 3.59, che ci permette di identificare

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}} \quad (3.62)$$

Quando, poi, si considerano oscillazioni intorno al valore di vuoto attraverso la sostituzione della 3.18, la lagrangiana 3.60 genera un accoppiamento tra l'elettrone e i campi di Higgs della forma

$$\begin{aligned} -\frac{g_e \bar{e} e H}{\sqrt{2}} &= -\frac{m_e}{v} \bar{e} e H \\ &= -\frac{g m_e}{2M_W} \bar{e} e H \end{aligned} \quad (3.63)$$

Potrebbe sembrare che questa tecnica è buona solo per dar massa alla componente $t_3 = -1/2$ del doppietto a causa della forma di $\langle 0 | \phi | 0 \rangle$ (che ha uguale a zero l'elemento alto del doppietto). In realtà, poiché in $SU(2)$ il doppietto coniugato trasforma esattamente nello stesso modo del doppietto, e il doppietto coniugato di ϕ è

$$\phi_C = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_3 - i\phi_4) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

nella lagrangiana del settore $\nu_e - e$ si può introdurre, insieme a 3.60, un secondo accoppiamento invariante sotto $SU(2)_L$, dato da

$$-g_{\nu_e} \left(\bar{l}_{eL} \phi_C \nu_{eR} + \bar{\nu}_{eR} \phi_C^\dagger l_{eL} \right) \quad (3.65)$$

assumendo ora l'esistenza di una componente R del campo ν_e . Nel vuoto di Higgs la 3.65 dà

$$-\frac{g_{\nu_e} v}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{eL} \nu_{eR} + \bar{\nu}_{eR} \nu_{eL}) \quad (3.66)$$

che è precisamente un termine di massa (alla Dirac) per il neutrino. E', quindi, evidente che questo unico meccanismo permette di dare massa a tutti i fermioni, leptoni e quark. Tuttavia occorre dire che questa è forse la parte meno

soddisfacente del modello GWS. Infatti bisogna postulare uno specifico accoppiamento g_f per ciascuna interazione fermione-Higgs, per altro accoppiamenti che differiscono enormemente tra loro, considerata la grande differenza tra le massa dei fermioni, che vanno da $m_{\nu_e} < 1eV$ fino ai $174GeV$ del top. Questo sembra proprio una indicazione che più che una teoria il modello GWS sia un modello fenomenologico.

3.6.2 Quark

E' evidente che il meccanismo utilizzato per dare massa ai leptoni si trasporta in modo del tutto simile ai quark. Infatti, la lagrangiana ottenuta sommando la 3.60 e la 3.65

$$\mathcal{L} = -g_e \bar{l}_{eL} \phi e_R - g_{\nu_e} \bar{l}_{eL} \phi_C \nu_{eR} + h.c.$$

può essere scritta in modo del tutto equivalente per un doppietto L di quark di tipo u e d e dei rispettivi singoletti R semplicemente operando le sostituzioni $\nu_e \rightarrow u$ e $e \rightarrow d$ ovvero scrivendo

$$\mathcal{L} = -g_d \bar{q}_L \phi d_R - g_u \bar{q}_L \phi_C u_R + h.c. \quad (3.67)$$

ove

$$q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

La procedura è, però, più articolata dal punto di vista formale in quanto bisogna tener conto del mixing di sapori.

Scriviamo i doppietti sinistrorsi

$$q_{L1} = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ d_{L1} \end{pmatrix} \quad q_{L2} = \begin{pmatrix} u_{L2} \\ d_{L2} \end{pmatrix} \quad q_{L3} = \begin{pmatrix} u_{L3} \\ d_{L3} \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

e i singoletti destrorsi

$$u_{R1} \quad d_{R1} \quad u_{R2} \quad d_{R2} \quad u_{R3} \quad d_{R3} \quad (3.69)$$

La generalizzazione della 3.67 è (sommando sugli indici ripetuti)

$$\mathcal{L}_{\psi\phi} = b_{ij} \bar{q}_{Li} \phi d_{Rj} + a_{ij} \bar{q}_{Li} \phi_C u_{Rj} + h.c. \quad (3.70)$$

dove i e j sono indici di famiglia e ϕ_C è il coniugato di carica di ϕ (vedi 3.64). Nella 3.70 non c'è alcuna richiesta di essere diagonali nell'indice di famiglia. Dopo la rottura di simmetria, ottenuta ponendo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix}$$

si trova

$$\mathcal{L}_{f\phi} = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) [\bar{u}_{Li} m_{ij}^u u_{Rj} + \bar{d}_{Li} m_{ij}^d d_{Rj} + h.c.] \quad (3.71)$$

ove le "matrici di massa" sono

$$m_{ij}^u = -\frac{v}{\sqrt{2}} a_{ij} \quad m_{ij}^d = -\frac{v}{\sqrt{2}} b_{ij} \quad (3.72)$$

Le matrici m^u e m^d possono essere rese hermitiane e diagonali facendo quattro diverse trasformazioni unitarie sui "tripletti di famiglie"

$$u_L = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \end{pmatrix} \quad d_L = \begin{pmatrix} d_{L1} \\ d_{L2} \\ d_{L3} \end{pmatrix} \quad u_R = \begin{pmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \\ u_{R3} \end{pmatrix} \quad d_R = \begin{pmatrix} d_{R1} \\ d_{R2} \\ d_{R3} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

per mezzo di

$$(u_{L\alpha} = (U_L^u)_{\alpha i} u_{Li} \quad u_{R\alpha} = (U_R^u)_{\alpha i} u_{Ri}) \quad (3.74)$$

$$(d_{L\alpha} = (U_L^d)_{\alpha i} d_{Li} \quad d_{R\alpha} = (U_R^d)_{\alpha i} d_{Ri}) \quad (3.75)$$

In questa notazione α è l'indice sulla base diagonale nella massa e i quello sulla base di interazioni deboli. La 3.71 diventa

$$\mathcal{L}_{qH} = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) [m_u \bar{u}u + \dots + m_b \bar{b}b] \quad (3.76)$$

E' un fatto notevole che possiamo continuare a operare con un unico campo di Higgs. Esso si accoppia a ciascun fermione con una intensità proporzionale alla massa del fermione diviso M_W (si veda la 3.63).

Se consideriamo ora la parte dell'interazione invariante sotto la gauge $SU(2) \times U(1)$, possiamo giustificare quanto scritto nel paragrafo 3.5 a proposito della corrente carica dei quark. Scritta in termini di campi di "interazione debole" $u_{L,Ri}$ e $d_{L,Ri}$ la lagrangiana è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,W,B} = & \sum_j i (\bar{u}_{Lj}, \bar{d}_{Lj}) \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu}{2} + ig' \frac{Y B_\mu}{2} \right) \begin{pmatrix} u_{Lj} \\ d_{Lj} \end{pmatrix} \\ & i \bar{u}_{Rj} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig' \frac{Y B_\mu}{2} \right) u_{Rj} + i \bar{d}_{Rj} \left(\partial_\mu + ig' \frac{Y B_\mu}{2} \right) d_{Rj} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Questa lagrangiana deve essere ora "girata" in termini di autostati di massa $u_{L,R\alpha}$ e $d_{L,R\alpha}$. La parte di corrente neutra torna diagonale nella base della massa purché le matrici U delle 3.74 e 3.75 siano unitarie. I processi di corrente carica invece coinvolgono le matrici non diagonali τ_1 e τ_2 . Usando la

$$\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tau_+ \frac{(W_1^\mu - iW_2^\mu)}{\sqrt{2}} + \tau_- \frac{(W_1^\mu + iW_2^\mu)}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{\tau_3}{2} W_3^\mu$$

troviamo, per la parte di correnti cariche,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{Lj}, \bar{d}_{Lj}) \gamma^\mu \tau_+ W_\mu \begin{pmatrix} u_{Lj} \\ d_{Lj} \end{pmatrix} + h.c. \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Lj} \gamma^\mu d_{Lj} W_\mu + h.c. \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{L\alpha} \left[(U_L^u)_{\alpha j} (U_L^d)_{j\beta}^\dagger \right] \gamma^\mu d_{L\beta} W_\mu + h.c. \end{aligned} \quad (3.78)$$

dove

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^\mu - iW_2^\mu)$$

e la matrice

$$V_{\alpha\beta} = [U_L^u U_L^d]_{\alpha\beta} \quad (3.79)$$

è unitaria ma non diagonale. V è la ben nota matrice CKM. L'interazione 3.78 ha allora la forma

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{u}_L \gamma^\mu d'_L + \bar{c}_L \gamma^\mu s'_L + \bar{t}_L \gamma^\mu b'_L] W_\mu + h.c. = -j_{quark}^\mu W_\mu + h.c. \quad (3.80)$$

ove

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Riprenderemo la discussione della matrice CKM nel capitolo 10.

3.7 Relazioni notevoli

Riportiamo, per comodità d'uso, alcune relazioni notevoli emerse nel corso del capitolo.

- costanti di accoppiamento

$$\begin{aligned} \cos \theta_W &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} & \sin \theta_W &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ e &= g \sin \theta_W & g' &= g \tan \theta_W \end{aligned}$$

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad \left(\sqrt{\frac{G}{\sqrt{2}}} = \frac{e}{2\sqrt{2}M_W \sin \theta_W} \right)$$

- masse bosoni

$$\begin{aligned} m_H &= \sqrt{2} |\mu| = v\sqrt{2\lambda} \\ M_W &= \frac{1}{2}gv & M_Z &= \frac{M_W}{\cos \theta_W} \end{aligned}$$

- inoltre

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W}$$

