

## Chapter 2

# Int. deboli: limiti del modello corrente-corrente

### 2.1 Richiami sul modello corrente-corrente

La teoria di Fermi del decadimento beta e sviluppi successivi, avvenuti essenzialmente negli anni '50, condussero ad una descrizione fenomenologica delle interazioni deboli determinata dalla lagrangiana corrente-corrente ("alla Fermi")

$$\mathcal{L}_F = \frac{G}{\sqrt{2}} J^{\dagger\mu}(x) J_{\mu}(x) \quad (2.1)$$

ove  $G$  è la costante di Fermi

$$G \simeq 1,03 \times 10^{-5} m_p^{-2} \quad (2.2)$$

La *corrente debole*  $J^{\mu}(x)$  (analogo alla corrente em) è la somma di una corrente debole leptonica,  $l^{\mu}(x)$ , e di una corrente debole adronica,  $h^{\mu}(x)$ ,

$$J^{\mu}(x) = l^{\mu}(x) + h^{\mu}(x)$$

Pertanto le interazioni deboli sono di tre tipi:

1. leptoniche (es.:  $\mu^{-} \rightarrow e^{-} + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu}$ )

$$\frac{G}{\sqrt{2}} l_{\mu}^{\dagger}(x) l^{\mu}(x)$$

2. semileptoniche (es.:  $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$ )

$$\frac{G}{\sqrt{2}} [l_{\mu}^{\dagger}(x) h^{\mu}(x) + h_{\mu}^{\dagger}(x) l^{\mu}(x)]$$

adroniche (es.:  $\Lambda \rightarrow p + \pi^{-}$ )

$$\frac{G}{\sqrt{2}} h_{\mu}^{\dagger}(x) h^{\mu}(x)$$

Sono tutte interazioni di "contatto", cioè quando avvengono tutte le particelle coinvolte sono nello stesso punto. La struttura vettoriale e di spin della corrente leptonica è puramente  $V - A$

$$l^\mu(x) = \bar{e}(x)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu_e(x) + \bar{\mu}(x)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu_\mu(x) + \bar{\tau}(x)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu_\tau(x) \quad (2.3)$$

$e(x), \nu_e(x), \mu(x), \dots$  sono gli operatori di campo per l'elettrone, il suo neutrino, il muone, ... Quando prendiamo l'elemento di matrice di  $l^\mu(x)$  tra uno stato, per esempio, di elettrone ed uno di neutrino elettronico, gli operatori di campo possono essere considerati come operatori di campo libero per cui

$$\langle e | l^\mu(x) | \nu_e \rangle \longrightarrow \bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\nu \quad (2.4)$$

ove  $u_e$  e  $u_\nu$  sono spinori di Dirac. Osserviamo esplicitamente che  $l^\mu$  conserva il numero leptonic elettronico, muonico e tauonico.

La struttura della corrente debole adronica non è, invece, puramente V-A ed è molto difficile da esplicitare. D'altra parte anche se ne fossimo capaci, non potremmo, in generale, calcolare gli elementi di matrice di  $h^\mu(x)$  tra stati adronici, poiché gli adroni, essendo soggetti a interazioni forti, sono ben lontani dal poter essere considerati come particelle puntiformi libere. Tuttavia, il decadimento beta nucleare e quello del neutrone sono ben descritti da elementi di matrice del tipo

$$\langle p | h^\mu(x) | n \rangle \longrightarrow \bar{u}_p \gamma^\mu (G_V - G_A \gamma^5) u_n \quad (2.5)$$

con

$$G_V \simeq 1 \quad \text{e} \quad G_A \simeq 1,26$$

Il fatto che  $G_V \simeq 1$  è spiegato dall'ipotesi *CVC* ("conserved vector current") secondo la quale la parte vettoriale,  $V^\mu(x)$ , di  $h^\mu(x)$  appartiene ad un tripletto di correnti conservate associate alla conservazione dell'isospin nei processi forti. Abbiamo, infatti, visto nel paragrafo 1.3 che leggi di conservazione implicano sempre l'esistenza di correnti conservate. La conservazione dell'isospin implica l'esistenza di tre correnti (quanti sono i generatori di  $SU(2)$ ) conservate  $V_j^\mu(x)$

$$\partial_\mu V_j^\mu(x) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Limitandoci al caso del doppietto dei nucleoni, che indichiamo con

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

il tripletto di correnti  $V_j^\mu(x)$  è espresso da

$$V_j^\mu(x) = \bar{N}(x) \gamma^\mu \left( \frac{\tau_j}{2} \right) N(x) \quad (2.6)$$

ove le  $\tau_j$  sono le matrici di Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se ora *assumiamo* che la parte vettoriale  $V^\mu$  della corrente debole adronica  $h^\mu$  abbia la forma (relativamente al doppietto dei nucleoni)

$$V^\mu(x) = \bar{p}(x) \gamma^\mu n(x) = \bar{N}(x) \gamma^\mu \left( \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \right) N(x)$$

allora, la 2.6 ci dice che

$$V^\mu = V_1^\mu + iV_2^\mu \quad (2.7)$$

Postuliamo che la 2.7 sia valida per l'intera parte vettoriale della corrente debole adronica e non soltanto per il contributo del nucleone; perciò  $V^\mu$  è una corrente conservata (essendo tali  $V_1^\mu$  e  $V_2^\mu$ ). Proprio perché è conservata si può mostrare che i suoi elementi di matrice non sono influenzati dalle interazioni forti<sup>1</sup>. Ed è così che per il nucleone si ha

$$\langle p | V^\mu | n \rangle = \bar{u}_p \gamma^\mu u_n \quad (2.8)$$

in accordo (con buona approssimazione) con il risultato fenomenologico espresso dalla 2.5 con  $G_V \simeq 1$ .

Osserviamo esplicitamente che, mentre la corrente em induce transizioni tra stati di uguale carica, la corrente debole (carica) sia leptonica che adronica induce transizioni tra stati che differiscono di una unità  $e$  di carica. Normalmente per i processi deboli semileptonici si parla di transizioni deboli con  $\Delta Q = \pm 1$  ove  $\Delta Q$  è la differenza tra la carica della parte adronica finale e di quella iniziale. Analogamente si parla di processi deboli senza variazione di stranezza e quelli con variazione di stranezza  $\Delta S^2$ , ove  $\Delta S$  è la differenza tra la stranezza della parte adronica finale e di quella iniziale. Esempi

$$\begin{array}{lll} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e & \Delta Q = 1 & \Delta S = 0 \\ \Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e & \Delta Q = 1 & \Delta S = 1 \\ \Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e & \Delta Q = 1 & \Delta S = 1 \end{array} \quad (2.9)$$

Nella 2.5  $G_V$  non è esattamente uguale a 1,

$$G_V \simeq 0,98$$

per cui la 2.7 è solo approssimativamente valida. Inoltre le ampiezze (sperimentali) dei processi 2.9 con  $\Delta S = 1$  (e di altri simili) risultano considerevolmente più piccole di quelle analoghe (decadimento beta del neutrone) con  $\Delta S = 0$ . La stessa cosa accade, per esempio, confrontando le ampiezze di  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  e  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ . Questo motivò N. Cabibbo (1963) nel suggerire che la parte vettoriale  $V^\mu$  della corrente debole adronica  $h^\mu$  potesse essere scritta come

$$V^\mu = \cos \theta_C V^\mu (\Delta S = 0) + \sin \theta_C V^\mu (\Delta S = 1)$$

ove le correnti  $V^\mu (\Delta S = 0)$  e  $V^\mu (\Delta S = 1)$  sono correnti conservate con proprietà analoghe alla 2.8. Allora

$$\begin{aligned} \langle p | V^\mu | n \rangle &= \cos \theta_C \langle p | V^\mu (\Delta S = 0) | n \rangle \rightarrow \cos \theta_C \bar{u}_p \gamma^\mu u_n \\ \langle p | V^\mu | \Lambda \rangle &= \sin \theta_C \langle p | V^\mu (\Delta S = 1) | n \rangle \rightarrow \sin \theta_C \bar{u}_p \gamma^\mu u_\Lambda \end{aligned}$$

così che

$$\begin{aligned} G_V &= \cos \theta_C \\ G_V^{\Delta S=1} &= \sin \theta_C \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Vedi App. 3 di L&P vol.1.

<sup>2</sup>Questi richiami riguardano la fisica degli anni 60. Gli adroni noti erano soltanto quelli composti dai quark u, d, s.

Poichè si sapeva che le interazioni forti erano approssimativamente invarianti sotto  $SU(3)_f$  e  $SU(3)$  ha otto generatori, c'è un ottetto di correnti conservate  $V_j^\mu(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) le prime tre delle quali costituiscono il tripletto di isospin precedente. La corrente  $V_4^\mu + iV_5^\mu$ , che innalza la stranezza e la carica di una unità<sup>3</sup>, causa le transizioni con  $\Delta S = 1$  e  $\Delta Q = 1$  ed è pertanto identificabile con  $V^\mu$  ( $\Delta S = 1$ ). Si ha perciò

$$V^\mu = \cos \theta_C (V_1^\mu + iV_2^\mu) + \sin \theta_C (V_4^\mu + iV_5^\mu) \quad (2.10)$$

Cabibbo propose anche l'esistenza di un ottetto di correnti assiali  $A_j^\mu(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) con le quali è possibile esprimere la parte assiale  $A^\mu$  della corrente debole adronica  $h^\mu$ . Le correnti  $A_j^\mu(x)$  non possono essere esattamente conservate poiché la simmetria che dovrebbe esserne responsabile, la *simmetria chirale* (si veda il paragrafo 9.5), sarebbe valida solo se le particelle avessero tutte massa nulla (si veda il paragrafo 9.5). In definitiva nella teoria di Cabibbo la corrente debole adronica è espressa come

$$h^\mu(x) = V^\mu(x) + A^\mu(x)$$

con  $V^\mu$  data dalla 2.10 e

$$A^\mu = \cos \theta_C (A_1^\mu + iA_2^\mu) + \sin \theta_C (A_4^\mu + iA_5^\mu)$$

Ora sappiamo che il contenuto fisico di quanto sopra riportato emerge in modo semplice quando si scriva la parte adronica della corrente debole in termini dei campi del tripletto di  $SU(3)_f$  dei quark  $u$ ,  $d$  e  $s$ , ovvero

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

Infatti gli ottetti di correnti di  $SU(3)$  diventano

$$\begin{aligned} V_j^\mu(x) &= \bar{q}(x) \gamma^\mu \left( \frac{\lambda_j}{2} \right) q(x) \\ A_j^\mu(x) &= -\bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \left( \frac{\lambda_j}{2} \right) q(x) \end{aligned}$$

ove  $\lambda_j$  sono le matrici di Gell-Mann (generatori di  $SU(3)$ ). Scritta in termini dei campi dei quark, la corrente adronica si riduce semplicemente a

$$h^\mu = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\cos \theta_C d + \sin \theta_C s)$$

I processi deboli degli adroni sono dunque visti, a livello fondamentale, come aventi origine dalle interazioni deboli tra i costituenti degli adroni. Osservando che nella corrente adronica (carica) i campi  $d$  ed  $s$  entrano solo nella combinazione

$$d_C = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s$$

<sup>3</sup>Si ricordi l'operatore a gradino di  $SU(3)$  relativo al V-spin:  $V_\pm = F_4 \pm iF_5$ . Ricordando anche la relazione di Gell-Mann e Nishijima  $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$  e gli operatori diagonali di  $I_3 = F_3$  e  $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$ , si vede altresì che, in termini delle correnti dell'ottetto, la corrente e.m. è espressa da  $J_{em}^\mu = V_3^\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}V_8^\mu$ .

la corrente adronica (carica) può essere scritta in un modo denso di significato per i successivi sviluppi del modello standard

$$h^\mu = \bar{u}\gamma^\mu (1 - \gamma^5) d_C \quad (2.11)$$

Si vede così che essa ha una struttura  $V - A$  esattamente analoga a quella della corrente (carica) leptonica 2.3. Allora, se pensiamo ai quark  $u$  e  $d_C$  come a un doppietto di quark

$$\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}$$

diventa abbastanza evidente - e gli sviluppi successivi lo confermeranno - il fatto che leptoni e quark partecipano in modo "universale" alle interazioni deboli (di corrente carica) come doppietti  $\left(\begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}\right)$  di una simmetria  $SU(2)$  che diciamo di *isospin debole* (vedi paragrafo 2.5.1). Gli sviluppi successivi mostreranno anche - come sappiamo - che, così come esistono tre diversi doppietti di leptoni, esistono altrettanti doppietti di quark, che possiamo indicare con

$$\begin{pmatrix} u_j \\ d'_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3)$$

ove

$$u_1 \equiv u, \quad u_2 \equiv c, \quad u_3 \equiv t$$

e

$$d'_j = \sum_{i=1}^3 V_{ij} d_i$$

con

$$d_1 \equiv d, \quad d_2 \equiv s, \quad d_3 \equiv b$$

e  $V_{ij}$  matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ( $V_{CKM}$ ).

## 2.2 Struttura di spin

### 2.2.1 Elicità e chiralità

Gli autostati di  $\gamma^5$  si dicono "*stati chirali*". Quello con autovalore  $+1$ , cioè a *chiralità positiva*, viene indicato con l'indice  $R$  ("right" o "destrorso") e quello con autovalore  $-1$ , cioè a *chiralità negativa*, viene indicato con l'indice  $L$  ("left" o "sinistorsso")<sup>4</sup>. Abbiamo cioè

$$\gamma^5 u_R = u_R \quad \text{e} \quad \gamma^5 u_L = -u_L$$

E' evidente che la combinazione  $(1 - \gamma^5) u$  è autostato di  $\gamma^5$  con autovalore  $-1$ . Infatti

$$\gamma^5 (1 - \gamma^5) u = (\gamma^5 - 1) u = -(1 - \gamma^5) u$$

avendo usato  $\gamma^5 \gamma^5 = 1$ . E' anche evidente che  $(1 + \gamma^5) u$  è autostato di  $\gamma^5$  con autovalore  $+1$ .

<sup>4</sup>Capiremo tra poco l'origine di questi nomi.

Introduciamo i proiettori

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \text{e} \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

che soddisfano le relazioni

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_R + P_L = 1$$

Abbiamo

$$u_L = P_L u \quad \text{e} \quad u_R = P_R u$$

qualunque sia  $u = u_R + u_L$ ; cioè  $P_L$  proietta la componente "left" di  $u$  e  $P_R$  proietta la componente "right" di  $u$ .

Prendiamo in considerazione la corrente debole (carica) che, come abbiamo visto, ha struttura  $V - A$ ; è, cioè, del tipo

$$\bar{f} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) i$$

dove abbiamo indicato con  $i$  e  $f$  gli spinori del fermione iniziale e del fermione finale rispettivamente. Usando le proprietà della matrice  $\gamma^5$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{f} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) i &= \bar{f} \gamma^\mu P_L i = \bar{f} \gamma^\mu P_L^2 i \\ &= \bar{f} \gamma^\mu P_L i_L = \bar{f} P_R \gamma^\mu i_L \\ &= f^\dagger \gamma^0 P_R \gamma^\mu i_L = f^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu i_L \\ &= (P_L f)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu i_L = f_L^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu i_L = \bar{f}_L \gamma^\mu i_L \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si vede così che *nelle interazioni deboli (di corrente carica) entrano soltanto le componenti con chiralità negativa degli spinori  $u$* . Si osservi che la struttura vettoriale (in termini degli spinori chirali) della 2.12 è la stessa della corrente em; la differenza è che mentre nella corrente debole (carica) entrano soltanto gli spinori "left", in quella elettromagnetica entrano sia le componenti "right" che "left" degli spinori ( $u_R + u_L = u$ ).

Per capire meglio il contenuto e le conseguenze fisiche di questo conviene scrivere gli spinori  $u$  in termini dei soliti due spinori a due componenti  $\chi$  e  $\phi$ , ottenuti come soluzione dell'equazione

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

ovvero

$$(\gamma^0 E - \gamma^0 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - m) \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} (E - \gamma^0 m) \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E - m & 0 \\ 0 & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \phi \\ \phi &= \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi \end{aligned}$$

In termini di  $\chi$  e  $\phi$  si ha

$$u_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi - \phi \\ \phi - \chi \end{pmatrix}$$

Consideriamo la componente superiore ( $\chi - \phi$ ) che descrive particelle di energia positiva. Abbiamo

$$\frac{1}{2} (\chi - \phi) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \right) \chi$$

Lo stato  $\chi$  è la sovrapposizione di due stati  $\chi_+$  e  $\chi_-$ , uno ( $\chi_+$ ) autostato dell'elicità (cioè dell'operatore  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ ) con autovalore  $\lambda = +1$  e l'altro ( $\chi_-$ ) autostato dell'elicità con autovalore  $\lambda = -1$ . Scegliamo l'asse  $z$  nella direzione del moto; allora,  $\frac{1}{2} (\chi - \phi)$  può essere scritto come

$$\frac{1}{2} (\chi - \phi) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p_z}{E + m} \right) \chi_+ + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_z}{E + m} \right) \chi_- \quad (2.14)$$

Si vede così che  $\frac{1}{2} (\chi - \phi)$  non è autostato dell'elicità ma contiene ambedue le componenti di elicità definita con ampiezze che dipendono, ovviamente, dal sistema di riferimento. Si vede anche che nel limite di massa nulla del fermione, avendosi  $E = p_z$ ,  $\frac{1}{2} (\chi - \phi)$  diventa autostato dell'elicità con autovalore  $\lambda = -1$ ; infatti, per  $m \rightarrow 0$

$$\frac{1}{2} (\chi - \phi) \longrightarrow \chi_-$$

Analogamente si può vedere che la componente bassa di  $u_L$ , cioè  $\frac{1}{2} (\phi - \chi)$ , che descrive un fermione di energia negativa e, quindi, un antifermione di energia positiva, è

$$\frac{1}{2} (\phi - \chi) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \right) \phi = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p_z}{E - m} \right) \phi_+ + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_z}{E - m} \right) \phi_-$$

Essa, per  $m \rightarrow 0$ , diventa autostato dell'elicità con autovalore  $\lambda = +1$ ; infatti, per  $m \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow -p_z$  e

$$\frac{1}{2} (\phi - \chi) \longrightarrow \phi_+$$

Dunque nel caso  $m = 0$  lo spinore "left"  $u_L$  descrive particelle con elicità  $-1$  e antiparticelle con elicità  $+1$ . È anche evidente che, nel caso  $m \neq 0$ , in  $u_L$  la componente con elicità "errata" (cioè positiva per particelle e negativa per antiparticelle) diventa sempre più trascurabile al crescere di  $E$  rispetto a  $m$ . Anzi, si può facilmente vedere che la componente di elicità "errata" è soppressa per un fattore  $\sim m/2E$ . Consideriamo infatti la 2.14, vediamo che per  $E \gg m$  si ha

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p_z}{E + m} \right) \simeq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{m}{E}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{m}{E}} \frac{m}{E} \simeq \frac{m}{2E}$$

Ci chiediamo ora cosa troveremmo se misurassimo l'elicità di un fermione con massa  $m \neq 0$ . È evidente che possiamo trovare sia l'uno che l'altro valore. L'ampiezza di probabilità per  $\lambda = +1$  è fornita dal coefficiente di  $\chi_+$  nella 2.14 mentre quella per  $\lambda = -1$  è fornita dal coefficiente di  $\chi_-$ . Pertanto, supponendo di poter ripetere sullo stesso fermione nelle stesse condizioni dinamiche,

la misura un numero di volte molto grande troveremmo il valore medio

$$\begin{aligned}\langle \lambda \rangle &= \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p}{E+m} \right) \right]^2 - \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p}{E+m} \right) \right]^2}{\left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p}{E+m} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p}{E+m} \right) \right]^2} \\ &= \frac{(E+m-p)^2 - (E+m+p)^2}{(E+m-p)^2 + (E+m+p)^2} = -\frac{p}{E} = -\beta\end{aligned}$$

(Questo è proprio quanto risultò dall'esperimento di Wu et al.).

Riassumendo,  $u_L$  e  $u_R$  sono autostati di  $\gamma^5$  con autovalori  $-1$  e  $+1$  rispettivamente. Analogamente considerando spinori di antiparticella si ha

$$\gamma^5 v_R = -v_R \quad \text{e} \quad \gamma^5 v_L = +v_L$$

Questo significa che alla corrente debole (carica) contribuiscono solo  $u_L$  e  $v_L$ . Nel limite di massa nulla (ovvero per  $E \gg m$ ) a  $u_L$  corrisponde un fermione sinistrorso e a  $v_L$  un antifermione destrorso.

### 2.2.2 Conservazione dell'elicità

Si può facilmente verificare che

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}_R\gamma^\mu u_R + \bar{u}_L\gamma^\mu u_L$$

e

$$\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 u = \bar{u}_R\gamma^\mu\gamma^5 u_R + \bar{u}_L\gamma^\mu\gamma^5 u_L$$

Pertanto, nel limite di massa nulla (ovvero per  $E \gg m$ ) quando chiralità ed elicità coincidono, *gli accoppiamenti vettoriale e assiale (e, quindi, anche di tipo  $V-A$ ) conservano l'elicità dei fermioni diffusi.*

1. Consideriamo un processo di scattering

$$A + \dots \rightarrow B + \dots$$

Se le particelle  $A$  e  $B$  hanno elicità  $\lambda_A$  e  $\lambda_B$  e provengono dallo stesso vertice e l'accoppiamento è vettoriale o assiale, o qualche combinazione di entrambi, allora  $\lambda_A$  deve essere uguale a  $\lambda_B$ ; così

$$\bar{u}_{\lambda_B}\gamma^\mu (G_V - G_A\gamma^5) u_{\lambda_A} \propto \delta_{\lambda_A, \lambda_B}$$

2. In un processo di annichilazione

$$A + \bar{B} \rightarrow \dots$$

o in un processo di creazione

$$\dots \rightarrow A + \bar{B}$$

se  $A$  e  $\bar{B}$  provengono dallo stesso vertice con una qualche combinazione di accoppiamenti vettoriale e assiale, allora la reazione si ha solo se  $A$  e  $\bar{B}$  hanno elicità opposte; così

$$\bar{v}_{\lambda_B}\gamma^\mu (G_V - G_A\gamma^5) u_{\lambda_A} \propto \delta_{\lambda_A, -\lambda_B}$$

e

$$\bar{u}_{\lambda_A}\gamma^\mu (G_V - G_A\gamma^5) v_{\lambda_B} = \delta_{\lambda_A, -\lambda_B}$$

## 2.3 I bosoni vettoriali intermedi

### 2.3.1 Sezione d'urto di corrente carica $\nu e$

L'ampiezza invariante per la diffusione di corrente carica  $\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e$  nel modello corrente-corrente è data da

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} [(\bar{u}_\nu(k') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_e(p)) (\bar{u}_e(p') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\nu(k))]$$

Da essa, sommando sugli stati di spin finali e mediando su quelli iniziali, otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{|\mathfrak{M}|^2} &= \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathfrak{M}|^2 \\ &= \frac{G^2}{4} Tr [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}' \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{k}'] Tr [\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \not{p}] \\ &= 64G^2 (k \cdot p) (k' \cdot p') = 16G^2 s^2 \end{aligned}$$

avendo usato il teorema

$$Tr [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}' \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{k}'] Tr [\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \not{p}] = 256 (k \cdot p) (k' \cdot p')$$

e trascurato la massa dei fermioni carichi, per cui

$$s = (k + p)^2 = (k' + p')^2 = 2k \cdot p = 2k' \cdot p'$$

Con questa ampiezza si calcola la sezione d'urto differenziale nel CM applicando la relazione

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} \overline{|\mathfrak{M}|^2}$$

con  $p_f = p_i$ . Si trova

$$\frac{d\sigma(\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e)}{d\Omega_{CM}} = \frac{G^2 s}{4\pi^2} \quad (2.15)$$

da cui la sezione d'urto totale

$$\sigma(\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e) = \frac{G^2 s}{\pi} = \frac{4G^2 k^2}{\pi} \quad (2.16)$$

Possiamo ricavare la sezione d'urto di corrente carica per il processo  $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$  semplicemente applicando il crossing a  $\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e$ :

$$\begin{array}{cccccccc} \nu_e & + & e^- & \rightarrow & e^- & + & \nu_e & \implies & \bar{\nu}_e & + & e^- & \rightarrow & e^- & + & \bar{\nu}_e \\ k & & p & & p' & & k' & & -k' & & p & & p' & & -k \end{array}$$

Occorre scambiare  $k$  con  $-k'$  ovvero scambiare  $s$  con  $t$  in  $\overline{|\mathfrak{M}|^2}$ . Otteniamo

$$\left\{ \overline{|\mathfrak{M}|^2} \right\}_{\bar{\nu}_e e^-}^{CC} = 16G^2 t^2 = 4G^2 s^2 (1 - \cos\theta)^2$$

essendo

$$t = -2k^2(1 - \cos\theta) = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta)$$

ove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione del neutrino entrante e quella dell'elettrone uscente. Si ha

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{d\Omega_{CM}} = \frac{G^2 s}{16\pi^2} (1 - \cos\theta)^2 \quad (2.17)$$

e, integrando,

$$\sigma(\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e) = \frac{G^2 s}{3\pi}$$

La sezione d'urto per  $\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e$  è isotropa (come, per altro, quella per  $\bar{\nu}_e + e^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e$ ) mentre la sezione d'urto per  $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$  (o, anche,  $\nu_e + e^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ ) non lo è e si annulla per  $\theta = 0$ , ovvero per la diffusione all'indietro del neutrino. E', infatti, la conservazione dell'elicità unita alla conservazione del momento angolare che impedisce la diffusione all'indietro dell'antiparicella sulla particella (e viceversa). Questa è anche la ragione del rapporto<sup>5</sup>

$$\frac{\sigma(\bar{\nu}_e e)}{\sigma(\nu_e e)} = \frac{1}{3}$$

### 2.3.2 Violazione del limite di unitarietà

L'interazione di contatto alla Fermi per i processi di alta energia va incontro a gravi problemi. Si vede, per esempio, che la sezione d'urto  $\sigma(\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e)$  (2.16) cresce come il quadrato dell'energia totale nel CM.

Consideriamo, ora, l'analisi in onde parziali del processo di scattering. Ricordiamo che, nel caso di particelle senza spin, l'unitarietà pone come limite massimo della sezione d'urto per la  $l$ -esima onda parziale il valore

$$\sigma_{el}^{\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1)$$

Nel caso di interazione di contatto  $l = 0$ , quindi

$$\sigma_{el}^{\max} = \frac{4\pi}{k^2} \quad (2.18)$$

cioè,  $\sigma_{el}^{\max}$  decresce al crescere di  $k^2$ . Questo risultato è chiaramente in contrasto con la 2.16 che dà una sezione d'urto divergente al crescere dell'energia. Dunque la sezione d'urto alla Fermi comporta una violazione del limite dell'unitarietà a partire da una certa energia. Tenendo nel dovuto conto gli spin delle particelle si trova che si viola l'unitarietà per  $\sqrt{s} \gtrsim G^{-\frac{1}{2}} \sim 300 GeV$ . Questo problema è direttamente legato al fatto che la costante di Fermi non è adimensionale<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>Si osservi che se l'interazione fosse stata di tipo  $V + A$  invece di  $V - A$  sarebbe risultato  $\sigma(\bar{\nu}_e e) = \sigma(\nu_e e)$ .

<sup>6</sup>Questo problema non si manifesta in elettrodinamica quantistica. Infatti, se consideriamo, per esempio, la sezione d'urto del processo  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , abbiamo già visto che (trascurando le masse)

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

e questa sezione d'urto decresce con l'energia come vuole l'unitarietà.

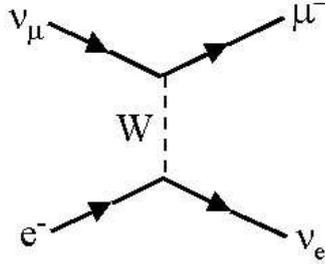


Figure 2.1: Grafico di scambio di un  $W$  per il processo  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$ .

Infatti, il fatto che  $\sigma \propto G^2 s$  si può dedurre anche con un semplice argomento dimensionale. La sezione d'urto (in unità naturali) ha dimensioni  $[E]^{-2}$  e deve necessariamente dipendere da  $G^2$  che ha dimensioni  $[E]^{-4}$ . Inoltre, essa deve essere relativisticamente invariante per cui  $G^2$  deve essere moltiplicato per un invariante relativistico, che permetta di ottenere le corrette dimensioni per  $\sigma$ . Ad energie ben al di sopra delle masse dei leptoni l'unico invariante disponibile è  $s$ .

Il comportamento divergente della sezione d'urto appena visto può essere evitato se si perfeziona l'analogia con l'interazione elettromagnetica introducendo una costante di accoppiamento adimensionale e un bosone vettoriale intermedio, analogo al fotone, che sia il mediatore dell'interazione debole. Il grafico di Feynman per lo scattering  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$  sarebbe, dunque, quello in figura 2.1. Il bosone intermedio, però, contrariamente al fotone, deve possedere carica elettrica e deve essere massivo. Infatti, le interazioni deboli, quali il decadimento  $\beta$  e lo scattering  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$ , implicano l'esistenza di correnti deboli sia adroniche che leptoniche che comportano una variazione di carica elettrica. Poiché la carica può sia aumentare che diminuire, i *bosoni vettoriali intermedi* (BVI) devono essere almeno due, uno con carica positiva, che chiamiamo  $W^+$ , e l'altro con carica negativa che chiamiamo  $W^-$  (vedremo che esiste anche un BVI neutro, lo  $Z^0$ ). Sappiamo, poi, che le interazioni deboli sono a corto raggio, perciò, come per la forza di Yukawa, dobbiamo assumere che i mediatori della forza debole abbiano una massa dell'ordine di  $\frac{1}{R}$ . I BVI devono poi avere parità indefinita al fine di consentire la struttura  $V - A$  dell'interazione.

La lagrangiana 2.1 deve essere allora sostituita da una nuova lagrangiana

$$\mathcal{L}_W = -g_W J^\mu(x) W_\mu(x) + h.c. \quad (2.19)$$

dove  $W_\mu(x)$  è il campo del bosone vettoriale, che deve essere analogo al campo del fotone  $A_\mu(x)$ ,  $g_W$  è la costante di accoppiamento adimensionale e  $h.c.$  sta ad indicare il termine hermitiano coniugato.

Il grafico 2.1 conduce alla sezione d'urto nel CM (trascurando le masse dei leptoni)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2g_W^4 k^2}{\pi^2 (q^2 - M_W^2)^2} \quad (2.20)$$

ove  $M_W$  è la massa del bosone  $W$  e  $q$  è il quadrimomento trasferito

$$q^2 = t \simeq -2k^2 (1 - \cos \theta)$$

L'equazione 2.20 si riduce al risultato del modello corrente-corrente "alla Fermi" 2.15 per  $q^2 \rightarrow 0$ , purché

$$\frac{g_W^2}{M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} \quad (2.21)$$

Naturalmente l'interazione non è più di contatto e la dipendenza angolare della 2.20 mostra che intervengono altre onde parziali e non più la sola onda S. La sezione d'urto totale è ora

$$\sigma = \frac{4G^2 k^2}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{4k^2}{M_W^2}}$$

e si vede che tende ad una costante per  $k \rightarrow \infty$ <sup>7</sup>

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma = \frac{G^2 M_W^2}{\pi} = \text{cost.}$$

Ci sono, però, ulteriori problemi che derivano dall'esistenza di stati di polarizzazione longitudinale ( $\lambda = 0$ ) del bosone  $W$ . Consideriamo, infatti, il processo illustrato dal grafico in figura 2.2, il quale pur essendo impossibile da realizzarsi sperimentalmente è, tuttavia, concepibile. Gli stati di polarizzazione del  $W$  sono descritti, nel suo sistema di riposo, dai vettori

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= (0100) \\ \epsilon_y &= (0010) \end{aligned}$$

che si riferiscono allo stato trasverso ( $\epsilon_T$ ) e da

$$\epsilon_z = (0001)$$

che si riferisce allo stato di polarizzazione longitudinale ( $\epsilon_L$ ). Applicando un boost lungo l'asse  $z$  che porti il  $W$  ad acquisire il momento  $k^\mu \equiv (k^0, 0, 0, k)$ , i vettori di polarizzazione diventano

$$\begin{aligned} \epsilon_T(\mathbf{k}) &= \epsilon(0) \\ \epsilon_L(\mathbf{k}) &\equiv \left( \frac{|\mathbf{k}|}{M_W}, 0, 0, \frac{k^0}{M_W} \right) = \frac{k^\mu}{M_W} + 0 \left( \frac{M_W}{k^0} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Allora il grafico 2.2 dà

$$\sigma(\nu\bar{\nu} \rightarrow W_T^+ W_T^-) \xrightarrow{k^2 \rightarrow \infty} \text{costante}$$

<sup>7</sup> Sebbene la situazione sia notevolmente migliorata, l'unitarietà per le onde parziali è ancora violata seppure marginalmente. Infatti, l'ampiezza in onda S è ora

$$a_0 = \frac{GM_W^2}{\sqrt{2}\pi} \log \left( 1 + \frac{4k^2}{M_W^2} \right)$$

e la violazione dell'unitarietà, cioè  $a_0 > 1$ , avviene ad una energia enormemente elevata, cioè

$$k \simeq \frac{M_W}{2} e^{\pi/(\sqrt{2}GM_W^2)}$$

Usando la 2.2 e ponendo  $M_W \simeq 100 \text{ GeV}$ , si ha  $k \simeq 2,2 \times 10^{11} \text{ GeV}$ .

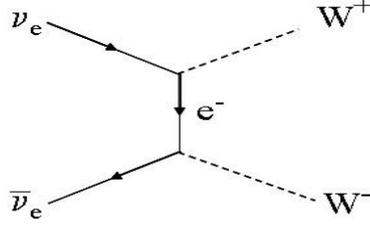


Figure 2.2: Produzione di una coppia  $W^+W^-$  dall'annichilazione neutrino-antineutrino.

mentre

$$\sigma(\nu\bar{\nu} \rightarrow W_L^+W_L^-) \xrightarrow{k^2 \rightarrow \infty} \left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 k^2$$

e questo risultato mostra che l'unitarietà è violata dal processo  $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$  quando i due  $W$  sono prodotti ambedue nello stato di polarizzazione longitudinale. Un sintomo equivalente si ritrova nel propagatore di  $W$

$$\frac{\sum_{\text{polarizzazioni}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu}{k^2 - M_W^2} = \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / M_W^2}{k^2 - M_W^2}$$

che tende ad una costante per  $k \rightarrow \infty$  dando luogo così a un integrale divergente nel caso di grafici di Feynman contenenti loop chiusi. Un problema simile non si riscontra in QED per gli stati di polarizzazione longitudinale del fotone virtuale. La ragione sta nel fatto che l'invarianza di gauge implica che gli elementi di matrice  $S$  siano invarianti sotto la sostituzione

$$\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \Lambda k_\mu$$

per qualunque valore di  $\Lambda$  e questo assicura che i termini in  $\epsilon_\mu$  proporzionali a  $k_\mu$  (vedi 2.22) siano innocui. Questo suggerisce l'interesse di estendere l'invarianza di gauge anche al caso presente di bosoni di campo massivi e magari scoprire, come abbiamo già anticipato in passato e vedremo meglio inseguito, che interazioni deboli ed elettromagnetiche sono unificate. Per questa unificazione ci aspettiamo  $g_W \sim e$ . Questo insieme alla 2.21 fa sì che ci aspettiamo

$$M_W = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g_W^2}{G}} \sim \sqrt{\frac{\sqrt{2}e^2}{G}} = \sqrt{\frac{\sqrt{24}\pi\alpha}{G}} \simeq 106 \text{ GeV}$$

## 2.4 Necessità di una corrente neutra

Abbiamo visto che l'introduzione dei bosoni intermedi  $W$  pur andando nella giusta direzione non rimuove del tutto i problemi della lagrangiana debole corrente-corrente. Per cancellare il comportamento divergente di  $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$  è necessario introdurre altri contributi che operino allo stesso ordine perturbativo, cioè all'ordine più basso. Introducendo un bosone di gauge neutro,  $Z^0$ , che renda possibile la produzione di coppie  $W^+W^-$  secondo il grafico 2.3 si raggiunge lo scopo. Infatti, anche questo grafico dà una sezione d'urto divergente

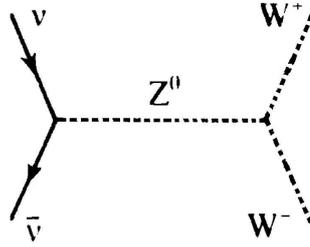


Figure 2.3: Produzione di una coppia  $W^+W^-$  dall'annichilazione  $\nu\bar{\nu}$  in uno  $Z^0$  virtuale.

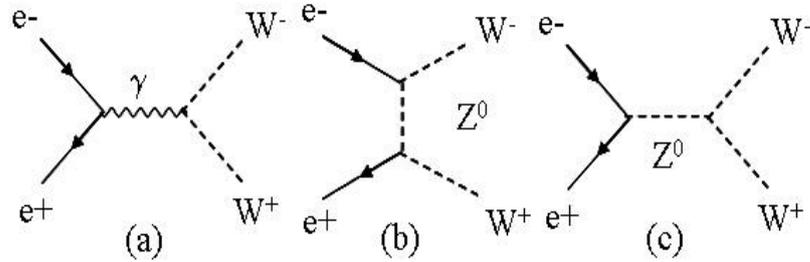
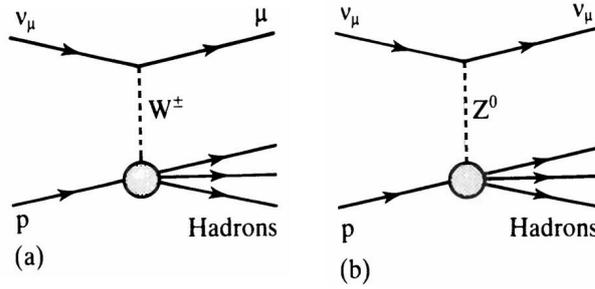


Figure 2.4: Lo scambio di  $Z^0$  nel canale  $t$  (b) e nel canale  $s$  (c) cura la divergenza della produzione della coppia  $W^+W^-$  nell'annichilazione  $e^+e^-$  in un fotone virtuale (a).

ad alta energia, tuttavia la somma dei due grafici 2.2 e 2.3 cura il problema. In sé questo fatto potrebbe essere ritenuto non sufficiente per l'introduzione di  $Z^0$ , però l'ipotesi è rafforzata dal fatto che lo stesso bosone neutro permette la cancellazione del comportamento divergente del processo di produzione di  $W^+W^-$  attraverso l'annichilazione di  $e^+e^-$  in un fotone virtuale (figura 2.4a). La cura si ottiene con l'aggiunta dei grafici 2.4b e 2.4c che danno la produzione di  $W^+W^-$  attraverso lo scambio di uno  $Z^0$  nel canale  $t$  e nel canale  $s$ . La condizione affinché i descritti comportamenti divergenti siano cancellati è che *gli accoppiamenti dei bosoni di gauge  $\gamma$ ,  $W^\pm$  e  $Z^0$  ai leptoni abbiano grandezze confrontabili. E' questa l'essenza dell'unificazione elettrodebole.* Questa unificazione richiede, come abbiamo già visto in precedenza, che i bosoni  $W$  e  $Z^0$  abbiano masse dell'ordine di  $100\text{GeV}$ .

Una conseguenza importante dell'unificazione delle interazioni elettrodeboli è la necessità dell'esistenza di interazioni di corrente debole neutra dei neutrini analoghe a quelle di corrente carica. Così deve esistere il processo di corrente neutra in figura 2.5b analogo a quello di corrente carica 2.5a come pure il processo di corrente neutra  $\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e$ . Tali processi furono osservati per la prima volta al CERN nel 1973 con la camera a bolle a liquido pesante Gargamelle.

Figure 2.5: Interazioni  $\nu_\mu p$  di corrente carica (a) e di corrente neutra (b).

## 2.5 La struttura della corrente neutra

Le correnti cariche deboli dei quark e dei leptoni hanno la stessa struttura  $V - A$  (vedi 2.3 e 2.11) e, nel limite di massa nulla (ovvero ad energie molto più grandi delle masse in gioco) accoppiano solo particelle sinistrorse (ad elicità negativa) e antiparticelle destrorse (ad elicità positiva). Le sezioni d'urto  $\nu q \rightarrow l^- q'$  e  $\bar{\nu} q \rightarrow l^+ q'$  sono le stesse di quelle di  $\nu_e e^- \rightarrow e^- \nu_e$  e  $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$  rispettivamente (?? e ??). Le sezioni d'urto differenziali particella-particella (e antiparticella-antiparticella) sono isotrope mentre le sezioni d'urto particella-antiparticella sono anisotrope.

Con riferimento alla diffusione di corrente carica dei neutrini muonici si ha

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u)}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2}$$

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d)}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{16\pi^2} (1 + \cos\theta)$$

ove, ora,  $\theta$  è l'angolo di diffusione ossia l'angolo fatto dalla direzione del muone uscente con quella del neutrino entrante. Usualmente queste sezioni d'urto vengono espresse in termini della variabile adimensionale  $y$  (invariante relativistico) definita da

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = 1 - \frac{p \cdot k'}{p \cdot k}$$

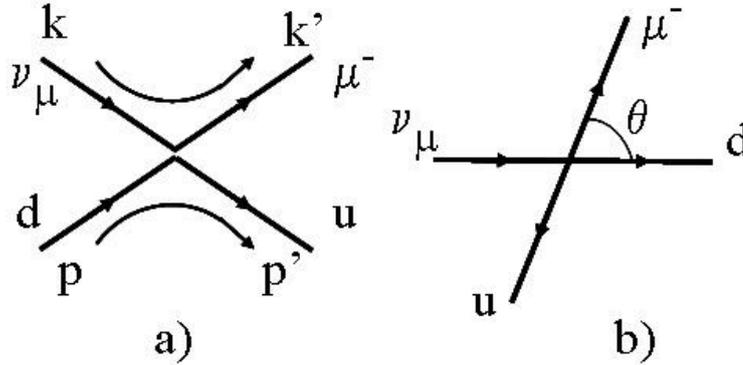
ove  $k$  e  $p$  sono i quadrimomenti del neutrino e del quark entranti rispettivamente, mentre  $q$  è il quadrimomento trasferito  $q = k - k' = p' - p$  (si veda la figura 2.6). Si vede facilmente che nel sistema del laboratorio  $y$  è la frazione di energia del neutrino trasferita al muone

$$y = \frac{\nu}{\omega} = \frac{\omega' - \omega}{\omega} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

mentre nel sistema del CM

$$y = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta)$$

Per mettere in luce l'elicità delle particelle coinvolte riscriviamo le sezioni d'urto differenziali di corrente carica aggiungendo il pedice  $L$  o  $R$  per indicare


 Figure 2.6: a) Grafico "di contatto" per  $\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u$ . b)  $\theta$  è l'angolo di diffusione

particelle sinistrorse o destrorse

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy}(\nu_{\mu L} q_L \rightarrow \mu_L q'_L) &= \frac{d\sigma}{dy}(\bar{\nu}_{\mu R} \bar{q}_R \rightarrow \bar{\mu}_R \bar{q}'_R) = \frac{G^2 s}{\pi} \\ \frac{d\sigma}{dy}(\nu_{\mu L} \bar{q}_R \rightarrow \mu_L \bar{q}'_R) &= \frac{d\sigma}{dy}(\bar{\nu}_{\mu R} q_L \rightarrow \bar{\mu}_R q'_L) = \frac{G^2 s}{\pi} (1-y)^2 \end{aligned}$$

Il neutrino si accoppia con corrente carica solo ai quark di carica  $-1/3$  (tipo  $d$ ) ed agli antiquark di carica  $-2/3$  (tipo  $\bar{u}$ ) mentre per l'antineutrino vale il viceversa. Le sezioni d'urto elementari  $V - A$  sono dunque

$$\frac{d\sigma}{dy}(\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u) = \frac{d\sigma}{dy}(\bar{\nu}_\mu \bar{d} \rightarrow \mu^+ \bar{u}) = \frac{G^2 s}{\pi} \quad (2.23)$$

$$\frac{d\sigma}{dy}(\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d) = \frac{d\sigma}{dy}(\nu_\mu \bar{u} \rightarrow \mu^- \bar{d}) = \frac{G^2 s}{\pi} (1-y)^2 \quad (2.24)$$

Per un confronto con i risultati sperimentali abbiamo bisogno delle sezioni d'urto inclusive su nucleone che sono date da

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy}(\nu N \rightarrow \mu X) = \sum_i f_i(x) \left( \frac{d\sigma_i}{dy} \right)_{\hat{s}=xs} \quad (2.25)$$

ove la somma è estesa al contributo di tutti i quark e antiquark,  $x$  è la frazione di momento del nucleone trasportata dal quark  $q_i$ ,  $\hat{s} = xs$  è il quadrato dell'energia nel CM  $\nu q$ . Il confronto dei risultati sperimentali con le previsioni è più semplice quando l'interazione del neutrino avviene con un bersaglio isoscalare, nel quale i nuclei contengono un ugual numero di protoni e di neutroni. Indichiamo con  $d(x)$  e  $u(x)$  le funzioni di distribuzione dei quark  $d$  e  $u$  rispettivamente. Essendo il protone e il neutrone un doppietto di isospin ci aspettiamo

$$\begin{aligned} d^n(x) &= u^p(x) \\ u^n(x) &= d^p(x) \end{aligned}$$

Poiché il neutrino interagisce solo con  $d$  e  $\bar{u}$  esso misura

$$\begin{aligned} d^p(x) + d^n(x) &= d(x) + u(x) = Q(x) \\ \bar{u}^p(x) + \bar{u}^n(x) &= \bar{u}(x) + \bar{d}(x) = \bar{Q}(x) \end{aligned}$$

e l'antineutrino, interagendo con  $u$  e  $\bar{d}$ , fa altrettanto. Sostituendo, allora, le 2.23 e 2.24 nella 2.25 troviamo che le sezioni d'urto su nucleone sono date da

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sigma}{dxdy}(\nu_\mu N \rightarrow \mu^- X) &= \frac{G^2xs}{2\pi} [Q(x) + (1-y)^2 \bar{Q}(x)] \\ \frac{d^2\sigma}{dxdy}(\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \mu^+ X) &= \frac{G^2xs}{2\pi} [\bar{Q}(x) + (1-y)^2 Q(x)]\end{aligned}$$

Integrando su  $x$  si perviene alle sezioni d'urto differenziali di corrente carica

$$\frac{d\sigma^{CC}(\nu)}{dy} = \frac{G^2s}{2\pi} [Q + (1-y)^2 \bar{Q}] \quad \text{per } \nu_\mu \rightarrow \mu^- \quad (2.26)$$

$$\frac{d\sigma^{CC}(\bar{\nu})}{dy} = \frac{G^2s}{2\pi} [\bar{Q} + (1-y)^2 Q] \quad \text{per } \bar{\nu}_\mu \rightarrow \mu^+ \quad (2.27)$$

dove

$$Q = \int xQ(x) dx = \int x[u(x) + d(x)] dx \quad (2.28)$$

$$\bar{Q} = \int x\bar{Q}(x) dx = \int x[\bar{u}(x) + \bar{d}(x)] dx \quad (2.29)$$

avendo trascurato il contributo al nucleone dei quark diversi da  $u$  e  $d$ .

Ora non c'è nessuna ragione a priori perché la corrente neutra abbia la stessa struttura di elicità della corrente carica. Invero, come abbiamo già notato in precedenza, la corrente elettromagnetica, che è neutra, accoppia stati fermionici di ambedue le chiralità,  $L$  e  $R$ , e alla luce della possibile esistenza di una interazione elettrodebole unificata, ci si potrebbe aspettare che la corrente debole neutra, analogamente a quella elettromagnetica, accoppi anch'essa stati fermionici sia  $L$  che  $R$ . La conservazione dell'elicità unita alla conservazione del momento angolare proibisce la diffusione a  $180^\circ$  di un neutrino sinistrorso su un quark destrorso: la sezione d'urto differenziale  $\frac{d\sigma}{dy}(\nu_L q_R \rightarrow \nu_L q_R)$  sarebbe così proporzionale a  $(1-y)^2$ . Al contrario non è proibito lo scattering a  $180^\circ$  di  $\nu_L \bar{q}_L$  e la sezione d'urto  $\frac{d\sigma}{dy}(\nu_L \bar{q}_L \rightarrow \nu_L \bar{q}_L)$  è isotropa. Allora, ammettendo l'accoppiamento della corrente neutra sia a fermioni sinistrorsi che destrorsi con costanti di accoppiamento relative  $c_L$  e  $c_R$ , un calcolo con il modello a partoni simile a quello per i processi di corrente carica, porta alle seguenti sezioni d'urto differenziali inclusive di corrente neutra

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\nu N \rightarrow \nu X)}{dxdy} &= \frac{G^2xs}{2\pi} \left\{ c_L^2 [Q(x) + (1-y)^2 \bar{Q}(x)] + c_R^2 [\bar{Q}(x) + (1-y)^2 Q(x)] \right\} \\ \frac{d\sigma(\bar{\nu} N \rightarrow \bar{\nu} X)}{dxdy} &= \frac{G^2xs}{2\pi} \left\{ c_L^2 [\bar{Q}(x) + (1-y)^2 Q(x)] + c_R^2 [Q(x) + (1-y)^2 \bar{Q}(x)] \right\}\end{aligned}$$

Le costanti  $c_L$  e  $c_R$  possono essere determinate sperimentalmente.

Se ammettiamo che nel nucleone ci siano solo quark  $u$ ,  $d$  e  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$ , allora

$$c_L^2 = (c_L^u)^2 + (c_L^d)^2 \quad \text{e} \quad c_R^2 = (c_R^u)^2 + (c_R^d)^2$$

e, con le definizioni di  $Q$  e  $\bar{Q}$  date dalle 2.28 e 2.29, le sezioni d'urto differenziali

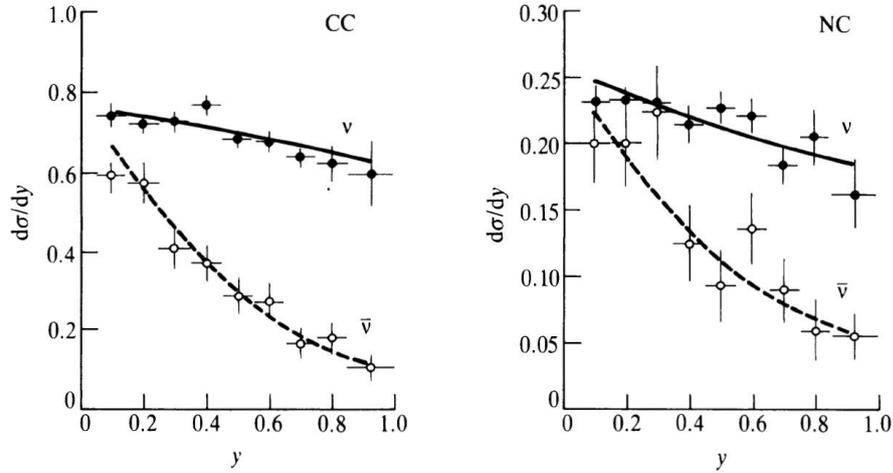


Figure 2.7: Sezioni d'urto differenziali inclusive per nucleone di CC e NC indotte da neutrino e antineutrino (Allaby et al. Z. Phys. C36 (611) 1987) (figura da B&J)

di corrente neutra, per nucleone, su bersaglio isoscalare diventano

$$\frac{d\sigma^{NC}(\nu N \rightarrow \nu X)}{dy} = \frac{G^2 s}{2\pi} \left\{ c_L^2 \left[ Q + (1-y)^2 \bar{Q} \right] + c_R^2 \left[ \bar{Q} + (1-y)^2 Q \right] \right\} \quad (2.30)$$

$$\frac{d\sigma^{NC}(\bar{\nu} N \rightarrow \bar{\nu} X)}{dy} = \frac{G^2 s}{2\pi} \left\{ c_L^2 \left[ \bar{Q} + (1-y)^2 Q \right] + c_R^2 \left[ Q + (1-y)^2 \bar{Q} \right] \right\} \quad (2.31)$$

Queste sezioni d'urto possono essere collegate a quelle di corrente carica usando le 2.26 e 2.27 ottenendo

$$\frac{d\sigma^{NC}(\nu)}{dy} = c_L^2 \frac{d\sigma^{CC}(\nu)}{dy} + c_R^2 \frac{d\sigma^{CC}(\bar{\nu})}{dy} \quad (2.32)$$

$$\frac{d\sigma^{NC}(\bar{\nu})}{dy} = c_L^2 \frac{d\sigma^{CC}(\bar{\nu})}{dy} + c_R^2 \frac{d\sigma^{CC}(\nu)}{dy} \quad (2.33)$$

Queste relazioni tra sezioni d'urto di NC e CC (furono derivate da Llewellyn Smith e) costituiscono la base per la determinazione di  $c_L$  e  $c_R$ . Nella figura 2.7 sono riportati i risultati dell'esperimento CHARM. Un fit fatto usando le 2.32 e 2.33 porta a

$$c_L^2 = 0,287 \pm 0,008 \quad \text{e} \quad c_R^2 = 0,042 \pm 0,010$$

Il fatto che  $c_R^2 \neq 0$  dimostra che la corrente debole neutra si accoppia non soltanto a quark sinistrorsi ma anche a quark destrorsi e, quindi, non è puramente  $V - A$ .

Usualmente la corrente neutra si scrive

$$j_\mu^{f,NC} = \bar{f} \gamma_\mu \frac{1}{2} \left( g_V^f - g_A^f \gamma^5 \right) f$$

ove  $f$  è il generico fermione e  $g_V^f$  e  $g_A^f$  sono le costanti di accoppiamento vettoriale e assiale per il fermione  $f$ . Considerando che  $j_\mu^{f,NC}$  è anche

$$j_\mu^{f,NC} = \bar{f} \gamma_\mu \left[ c_L^f \frac{(1 - \gamma^5)}{2} + c_R^f \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right] f$$

si ha

$$\begin{aligned} c_L^f &= \frac{1}{2} (g_V^f + g_A^f) \\ c_A^f &= \frac{1}{2} (g_V^f - g_A^f) \end{aligned}$$

Ovviamente, per il neutrino che è (si può considerare) puramente sinistrorso sia ha

$$g_V^\nu = g_A^\nu = \frac{1}{2}$$

e

$$j_\mu^{\nu,NC} = \frac{1}{2} \left[ \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu \right]$$

Vedremo tra breve che nel modello standard queste costanti di accoppiamento sono tutte espresse in termini di un solo parametro: l'angolo di Weinberg  $\theta_W$ .

### 2.5.1 Isospin e ipercarica debole

Abbiamo visto (2.12) che la corrente debole carica accoppia stati fermionici di chiralità "left"<sup>8</sup>. Così, per esempio, per la transizione  $e^- \rightarrow \nu_e$  si ha

$$j_\mu^+ (e^- \rightarrow \nu_e) = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L \quad (2.34)$$

Scritta in questo modo la corrente carica  $j_\mu^+$  può essere vista come una corrente puramente vettoriale che accoppia, però, stati chirali sinistrorsi. In questo senso essa è puramente vettoriale come lo è la corrente elettromagnetica (vedi 1.24)

<sup>8</sup>Possiamo rivederlo con una notazione diversa usando le proprietà delle matrici gamma. Partiamo da

$$j_\mu^+ = \bar{f} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) i$$

e usiamo il fatto che

$$\gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5)$$

Allora

$$j_\mu^+ = \bar{f} \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) i = \bar{f}_L \gamma_\mu i_L$$

essendo

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u & e & \quad v_L = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) v \\ u_R &= \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) u & e & \quad v_R = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) v \\ \bar{u}_L &= \bar{u} \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) & e & \quad \bar{v}_L = \bar{v} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \\ u_R &= \bar{u} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) & e & \quad \bar{v}_R = \bar{v} \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \end{aligned}$$

che, però, accoppia sia stati sinistrorsi che destrorsi. Consideriamo, ora, anche  $j_\mu^-$

$$j_\mu^- (\nu_e \rightarrow e^-) = \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L \quad (2.35)$$

Le due correnti,  $j^+$  e  $j^-$ , possono essere scritte in forma compatta introducendo il doppietto sinistrorso

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$$

e usando gli operatori a gradino

$$\tau^\pm = \frac{1}{2} (\tau_1 \pm i\tau_2)$$

ovvero

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui

$$j_\mu^\pm = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau^\pm \chi_L$$

La somiglianza matematica di  $\tau^+$  e  $\tau^-$  con gli operatori a gradino dell'isospin, induce a definire  $\chi_L$  come un *doppietto di isospin debole* e sembra suggerire il fatto che le correnti deboli costituiscano un tripletto di isospin debole nel quale alle due correnti cariche

$$J_\mu^1(x) = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\tau_1}{2} \chi_L$$

$$J_\mu^2(x) = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\tau_2}{2} \chi_L$$

sia associata la corrente neutra

$$J_\mu^3(x) = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\tau_3}{2} \chi_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L \quad (2.36)$$

Le "cariche" corrispondenti a queste tre correnti

$$t^i = \int J_0^i(x) d^3\mathbf{x} \quad (i = 1, 2, 3)$$

generano l'algebra

$$[t^i, t^j] = i\epsilon_{i,j,k} t^k$$

del *gruppo di simmetria di isospin debole*  $SU(2)_L$ , che indichiamo con l'indice  $L$  per ricordarci che le correnti di isospin debole accoppiano fermioni sinistrorsi. Ora, mentre

$$j_\mu^\pm(x) = J_\mu^1(x) \pm iJ_\mu^2(x)$$

si vede, però, che  $J_\mu^3$  non può essere identificata con la corrente neutra  $j_\mu^{NC}$ , da noi già incontrata, la quale ha una componente destrorsa in aggiunta a quella sinistrorsa. Per altro, poiché il neutrino è solo sinistrorso (nell'ipotesi di massa nulla), tale componente riguarda soltanto l'elettrone  $e$ , in particolare, la parte destrorsa dell'elettrone

$$e_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} e$$

che è, quindi, un *singoletto di*  $SU(2)$  ( $t_3 = 0$ ). D'altra parte la corrente elettromagnetica

$$j_\mu^{em} = \bar{\psi} \gamma_\mu Q \psi \quad (2.37)$$

che scriviamo omettendo anche per essa la costante di accoppiamento<sup>9</sup>, contiene con uguale peso una componente sinistrorsa ed una destrorsa. Così, nel caso dell'elettrone

$$j_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e = -\bar{e}_L\gamma_\mu e_L - \bar{e}_R\gamma_\mu e_R \quad (2.38)$$

Allora, con l'idea di unificare le interazioni elettromagnetiche e deboli nell'interazione elettrodebole, possiamo pensare di dare significato a  $J_\mu^3$  scrivendo la corrente elettromagnetica come una combinazione lineare di  $J_\mu^3$  e di una nuova corrente  $j_\mu^Y$ , che chiamiamo *corrente di ipercarica debole* e che risulta definita dalla relazione

$$j_\mu^{em} = J_\mu^3 + \frac{1}{2}j_\mu^Y \quad (2.39)$$

dalla quale è visibile l'analogia con l'isospin e l'ipercarica forte che ha suggerito il nome di *ipercarica debole*<sup>10</sup>. Tale corrente deve essere interpretata come la corrente di Noether di un nuovo gruppo di simmetria,  $U(1)_Y$ , il quale si aggiunge al gruppo  $SU(2)_L$  in modo che insieme vadano a costituire il gruppo di simmetria  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  delle *interazioni elettrodeboli*<sup>11</sup>.

Alla corrente  $j_\mu^Y$ , che scriviamo per il generico fermione fondamentale come

$$j_\mu^Y = \bar{\psi}\gamma_\mu Y\psi \quad (2.40)$$

(omettendo ancora una volta la specifica costante di accoppiamento), è associata una nuova *carica conservata* che è l'ipercarica debole  $Y$ , generatore di  $U(1)_Y$ .

Dalla 2.39 abbiamo

$$j_\mu^Y = 2j_\mu^{em} - 2J_\mu^3$$

cosicché usando le 2.36 e 2.38 troviamo

$$\begin{aligned} j_\mu^Y &= -2(\bar{e}_R\gamma_\mu e_R + \bar{e}_L\gamma_\mu e_L) - 2\left(\frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L\right) \\ &= -2(\bar{e}_R\gamma_\mu e_R) - (\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L + \bar{e}_L\gamma_\mu e_L) \\ &= -2(\bar{e}_R\gamma_\mu e_R) - 1(\bar{\chi}_L\gamma_\mu\chi_L) \end{aligned}$$

I coefficienti dei termini  $(\bar{e}_R\gamma_\mu e_R)$  e  $(\bar{\chi}_L\gamma_\mu\chi_L)$  devono essere letti come l'ipercarica,  $Y = -2$ , del singoletto di isospin debole  $e_R$  e l'ipercarica,  $Y = -1$ , del doppietto di isospin debole  $\chi_L$ . Tali valori (autovalori dell'operatore ipercarica) sono coerenti con la relazione

$$Q = t_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.41)$$

<sup>9</sup>La corrente e.m. è

$$j_\mu^{em} = e\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi$$

ove  $e$  è la costante di accoppiamento e  $Q$  è l'operatore carica elettrica, il cui autovalore per l'elettrone è  $-1$ .

<sup>10</sup>Lo schema isospin-ipercarica deboli è matematicamente una copia dello schema sviluppato a suo tempo da Gell-Mann-Nishijima per sistemare le particelle strane in multipletti  $SU(2)$  di isospin adronico. I nomi "isospin" e "ipercarica" deboli sono stati, perciò, introdotti per analogia. Glashow fu il primo (nel 1961) a proporre  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  molto tempo prima della scoperta delle correnti neutre (1973). L'idea di Glashow fu poi estesa da Weinberg (1967) e Salam (1968) per includere i bosoni vettoriali massivi  $W^\pm$  e  $Z^0$ . Nasceva così il modello teorico noto come *modello standard delle interazioni elettrodeboli* o modello di Glashow-Weinberg-Salam (GWS).

<sup>11</sup>Al posto di un unico gruppo di simmetria unificata abbiamo il prodotto di due gruppi ognuno con una costante di accoppiamento indipendente: così, in aggiunta a  $e$  avremo bisogno di un'altra costante di accoppiamento per specificare pienamente le interazioni elettrodeboli. Da un punto di vista "estetico" questa unificazione non è completamente soddisfacente; da qui nasce l'idea della "grande unificazione" a cui accenneremo in seguito (vedi....).

In modo del tutto simile a  $\nu_{eL}$  e  $e_L^-$ ,  $u_L$  e  $d'_L$  costituiscono un doppietto di isospin debole, con  $t_3(u_L) = +1/2$  e  $t_3(d'_L) = -1/2$ , mentre  $u_R$  e  $d'_R$  costituiscono due singoletti. Per quanto riguarda l'ipercarica questa volta abbiamo

$$\begin{aligned}
 j_\mu^Y &= 2j_\mu^{em} - 2J_\mu^3 \\
 &= 2 \left( \frac{2}{3} \bar{u}_R \gamma_\mu u_R + \frac{2}{3} \bar{u}_L \gamma_\mu u_L \right) + 2 \left( -\frac{1}{3} \bar{d}'_R \gamma_\mu d'_R - \frac{1}{3} \bar{d}'_L \gamma_\mu d'_L \right) \\
 &\quad - 2 \left( \frac{1}{2} \bar{u}_L \gamma_\mu u_L + \frac{1}{2} \bar{d}'_L \gamma_\mu d'_L \right) \\
 &= \frac{4}{3} (\bar{u}_R \gamma_\mu u_R) - \frac{2}{3} (\bar{d}'_R \gamma_\mu d'_R) + \frac{1}{3} (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) + \frac{1}{3} (\bar{d}'_L \gamma_\mu d'_L)
 \end{aligned}$$

da cui si vede che  $u_R$  e  $d'_R$  hanno  $Y = 4/3$  e  $-2/3$  rispettivamente, mentre i membri del doppietto ( $u_L, d'_L$ ) hanno ambedue  $Y = 1/3$  (coerentemente con la 2.41). I membri di un multipletto di  $SU(2)_L$  hanno la stessa ipercarica perché, essendo il gruppo di simmetria complessivo il prodotto dei due gruppi  $SU(2)_L$  e  $U(1)_Y$ , i generatori  $t_i$  di  $SU(2)_L$  commutano con il generatore  $Y$  di  $U(1)_Y$ .

Naturalmente quanto finora visto per il doppietto  $(\nu_e, e^-)_L$  e il singoletto  $e_R^-$  si estende agli altri due doppietti leptonici  $(\nu_\mu, \mu^-)$ ,  $(\nu_\tau, \tau^-)$  e relativi singoletti  $\mu_R^-$  e  $\tau_R^-$ , mentre quanto visto per il doppietto  $(u, d')_L$  e i singoletti  $u_R$  e  $d'_R$  si estende in modo del tutto simile agli altri quark.

Nella tabella 3.1 sono riportati i numeri quantici di tutti i fermioni fondamentali; quelli degli antifermioni sono opposti e sono riportati nella tabella 3.2.