

# Chapter 1

## Elementi di teoria dei campi

### 1.1 Introduzione

La teoria quantistica relativistica dei campi si basa sull'uso di operatori di campo funzioni delle coordinate spazio-temporali. Tali operatori obbediscono ad equazioni del moto che sono derivate da una lagrangiana  $L$  per mezzo di un principio variazionale. Normalmente  $L$  è scritta come integrale sulle coordinate spaziali di una densità lagrangiana  $\mathcal{L}$ , alla quale comunemente ci si riferisce semplicemente con il termine lagrangiana. Essa è una funzione dei campi  $\phi_j(x)$  e dei loro gradienti  $\frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x_\mu} \equiv \partial_\mu \phi_j(x)$

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(\phi_j(x), \partial_\mu \phi_j(x))$$

L'integrale di  $\mathcal{L}(x)$  esteso alle coordinate spaziali fornisce la lagrangiana  $L(t)$

$$L(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(x)$$

mentre l'integrale di  $\mathcal{L}(x)$  esteso allo spazio e al tempo fornisce l'azione  $S$

$$S = \int L(t) dt = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_j(x), \partial_\mu \phi_j(x))$$

Le equazioni del moto dei campi si ottengono per mezzo delle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi_j}{\partial x_\mu})} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

che discendono dal principio variazionale

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = 0$$

ove  $t_1$  e  $t_2$  sono arbitrari e le variazioni dei campi per  $t = t_1$  e  $t = t_2$  sono assunte nulle.

Affinché le equazioni del moto siano covarianti  $\mathcal{L}$  deve essere uno scalare di Lorentz.

Le interazioni tra campi sono introdotte, come vedremo tra breve, imponendo che la lagrangiana libera  $\mathcal{L}_0$  soddisfi una *simmetria di gauge locale*. Questo fa comparire, in aggiunta a  $\mathcal{L}_0$ , il termine di interazione  $\mathcal{L}'$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'$$

A ciascuna lagrangiana corrisponde un set di regole di Feynman per cui, una volta identificate tali regole, verrà immediata la connessione tra l'approccio lagrangiano e il metodo perturbativo da noi seguito a suo tempo nel ricavare le regole di Feynman a partire dalle equazioni d'onda di particella singola.

L'identificazione delle regole di Feynman procede associando ai termini della lagrangiana un set di propagatori e fattori di vertice come segue:

- I propagatori sono determinati dai termini quadratici nei campi quali, per esempio,  $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$  nella 1.3 e  $\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi)$  nella 1.5.
- Gli altri termini nella lagrangiana sono associati con i vertici di interazione (Il fattore di vertice equivalente a quello da noi visto nella nostra trattazione dell'elettrodinamica sarà dato dal coefficiente del corrispondente termine in  $i\mathcal{L}$  contenente i campi interagenti. Per esempio, il termine di interazione  $\mathcal{L}'$  della lagrangiana di un elettrone in un campo elettromagnetico è dato dalla 1.2 e si riconosce in  $i\mathcal{L}'$  il fattore  $ie\gamma^\mu$  da noi stabilito in precedenza)

Se il termine di interazione è proporzionale ad una costante di accoppiamento "piccola", è applicabile un approccio perturbativo. Le interazioni sono calcolate per mezzo di una serie perturbativa in  $i\mathcal{L}'$ . Il risultato finale del procedimento formale, più rigoroso di quanto da noi fatto in precedenza, sarà costituito da un set di regole di Feynman del tutto simili a quelle da noi già viste.

L'elettrodinamica quantistica è la teoria relativistica dei campi meglio conosciuta ed ha costituito il modello in base al quale sviluppare le successive teorie. Limitandoci all'accoppiamento di un elettrone al campo elettromagnetico, il termine di interazione è

$$e\bar{\psi}_e(x)\gamma^\mu\psi_e(x)A_\mu(x) \quad (1.2)$$

In esso compaiono gli operatori di campo  $\bar{\psi}_e(x)$  e  $\psi_e(x)$  e  $A_\mu(x)$ , il cui significato è il seguente:

- $\bar{\psi}_e(x)$  implica la creazione di un elettrone o la distruzione di un positrone
- $\psi_e(x)$  implica la distruzione di un elettrone o la creazione di un positrone
- $A_\mu(x)$  implica la creazione o la distruzione di un fotone

Al termine 1.2 della lagrangiana corrispondono le transizioni fondamentali (vertici) della figura 1.1. Nel caso di un generico fermione di carica elettrica  $eQ_f$  il vertice fondamentale di QED è spesso scritto anche nella forma

$$-eQ_f j_{em}^\mu(x) A_\mu(x)$$

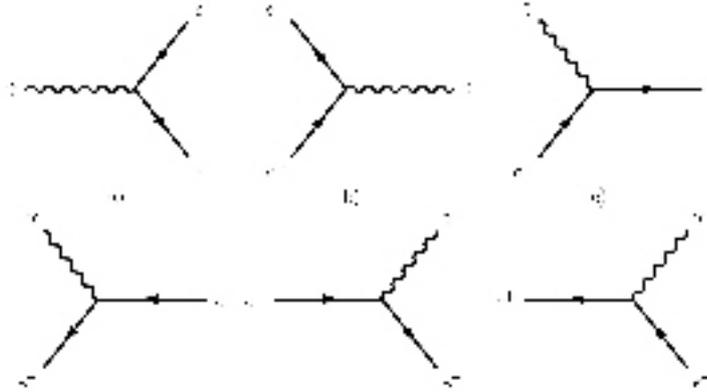


Figure 1.1: Vertici fondamentali in QED.

ove  $j_{em}^\mu(x)$  è l'operatore corrente elettromagnetica

$$j_{em}^\mu(x) = Q_f \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_f(x)$$

Vedremo che  $j_{em}^\mu(x)$  è una corrente conservata, nel senso che

$$\partial_\mu j_{em}^\mu(x) = 0$$

## 1.2 Lagrangiane ed equazioni dei campi

La grandezza fondamentale della teoria dei campi è, dunque, la (densità) lagrangiana  $\mathcal{L}$ .

Vediamo degli esempi.

### 1.2.1 Lagrangiana di un campo scalare (spin 0) reale

È

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.3)$$

ove  $\phi(x)$  è un campo reale ad una componente. Il fatto che  $\phi$  sia uno scalare (o uno pseudoscalare) fa sì che la lagrangiana sia un invariante relativistico.

Le equazioni di Eulero-Lagrange conducono all'equazione di Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

### 1.2.2 Lagrangiana di un campo scalare complesso

Il campo scalare  $\phi(x)$  ha una sola componente ed è, così, adatto alla descrizione di particelle scalari neutre, quale, per esempio, il  $\pi^0$ . Una particella scalare carica è convenientemente descritta da un campo scalare complesso

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \\ \phi^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i\phi_2(x)) \end{aligned}$$

dove  $\phi(x)$  e  $\phi^\dagger(x)$  soddisfano ciascuna l'equazione di KG

$$\begin{aligned}(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi &= 0 \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^\dagger &= 0\end{aligned}$$

La corrispondente lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \left( \partial_\mu \phi^\dagger \right) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (1.4)$$

L'uso del campo complesso permette di descrivere sia la particella che la sua antiparticella.

### 1.2.3 Lagrangiana di un campo di spin 1/2

E'

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (1.5)$$

Essa conduce all'equazione di Dirac

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0$$

### 1.2.4 Lagrangiana di un campo vettoriale (spin 1) a massa nulla

Consideriamo come esempio la lagrangiana del campo elettromagnetico

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (1.6)$$

$j^\mu$  è la corrente associata alla sorgente del campo,  $A_\mu$  è il campo elettromagnetico e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.7)$$

Questa lagrangiana porta alle equazioni di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

### 1.2.5 Dimensioni della lagrangiana e dei campi

In unità naturali ( $\hbar = c = 1$ ) La lagrangiana  $L$  ha le dimensioni di una massa

$$L \longrightarrow [m]$$

e, conseguentemente, la densità lagrangiana ha le dimensioni della quarta potenza della massa

$$\mathcal{L} \longrightarrow [m]^4 \quad (1.8)$$

essendo  $[m]^{-1}$  le dimensioni di una lunghezza. Le dimensioni di un campo scalare sono allora quelle di una massa

$$\phi \longrightarrow [m] \quad (1.9)$$

come si vede considerando il termine  $\frac{1}{2}m^2\phi^2$  della 1.3, mentre quelle di un campo spinoriale sono

$$\psi \longrightarrow [m]^{3/2} \quad (1.10)$$

### 1.3. SIMMETRIE E LEGGI DI CONSERVAZIONE: IL TEOREMA DI NOETHER<sup>5</sup>

come si vede considerando il termine  $m\bar{\psi}\psi$  della 1.5. Nel caso di un campo vettoriale a massa nulla (è il caso del fotone o del gluone) si ha

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow [m]^2$$

e

$$A_\mu \longrightarrow [m] \quad (1.11)$$

come si deduce considerando la 1.6 e la 1.7.

### 1.3 Simmetrie e leggi di conservazione: il teorema di Noether

Un grande vantaggio della formulazione lagrangiana sta nel fatto che lo studio delle proprietà di invarianza della lagrangiana conduce naturalmente all'individuazione di quantità conservate. Facciamo un esempio considerando una semplice lagrangiana  $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$ , funzione del campo  $\phi(x)$  e del suo gradiente  $\partial_\mu\phi(x)$ . L'invarianza per traslazioni spazio-temporali della lagrangiana  $\mathcal{L}$  implica

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.12)$$

ove  $T^{\mu\nu}$  è il tensore energia-momento espresso da

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (1.13)$$

La 1.12 ha la forma di una equazione di conservazione e, quindi,  $T^{\mu\nu}$  può essere considerata come una "corrente conservata".

$T^{00}$  è la "densità hamiltoniana"

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial^0\phi - \mathcal{L} \quad (1.14)$$

e

$$H = \int T^{00} d^3\mathbf{x} \quad (1.15)$$

è l'"energia totale"<sup>1</sup>.

$T^{0i}$  con  $i = 1, 2, 3$  corrispondono alle componenti della densità di momento, cosicché il momento è dato da

$$p^i = \int T^{0i} d^3\mathbf{x} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.16)$$

Insieme la 1.15 e la 1.16 danno il quadrimomento

$$p^\nu = \int T^{0\nu} d^3\mathbf{x} \quad (\nu = 0, 1, 2, 3)$$

e, dunque, la 1.12 implica la conservazione del quadrimomento

$$\frac{d}{dx^0} p^\nu = 0$$

---

<sup>1</sup>Ha la forma simile a quella valida per i sistemi meccanici  $H = p_i\dot{q}_i - L$  ( $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ ).

Insieme la 1.12 e la 1.13 costituiscono l'essenza del teorema di Noether, che possiamo enunciare dicendo: *se un'azione è invariante sotto un gruppo continuo di trasformazioni (il gruppo delle traslazioni spazio-temporali nel caso presente), la corrispondente lagrangiana determina un tensore (corrente) conservato (corrente di Noether) e un osservabile associato indipendente dal tempo (costante del moto).*

## 1.4 Invarianza di gauge: il caso abeliano

### 1.4.1 Invarianza di gauge globale

Consideriamo la lagrangiana di un elettrone libero 1.5

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Essa è chiaramente invariante sotto una *trasformazione di gauge globale* definita come

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta}\psi \quad (1.17)$$

ove  $q$  è la carica dell'elettrone e  $\theta$  è una costante arbitraria.

Poiché una trasformazione finita può essere realizzata con una serie infinita di trasformazioni infinitesime,  $\mathcal{L}$  è anche invariante per trasformazioni infinitesime del tipo

$$\psi \rightarrow \psi' = (1 + iq\epsilon)\psi \quad (1.18)$$

ove questa volta  $\epsilon$  è una costante arbitraria infinitesima. La trasformazione infinitesima 1.18 dà luogo alle variazioni infinitesime

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \psi' - \psi = iq\epsilon\psi \\ \delta(\partial_\mu\psi) &= \partial_\mu\psi' - \partial_\mu\psi = iq\epsilon(\partial_\mu\psi) \end{aligned}$$

e relazioni corrispondenti per  $\bar{\psi}$ . In corrispondenza a tali variazioni, la variazione della lagrangiana,  $\delta\mathcal{L}$ , è nulla; da ciò si ricava<sup>2</sup>

$$2\epsilon\partial_\mu(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

e, quindi, essendo  $\epsilon$  arbitraria, si ha

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \quad (1.19)$$

*L'invarianza di gauge globale porta ad una corrente conservata* che nel caso presente è la corrente elettromagnetica. Poiché

$$q = \int j^0 d^3\mathbf{x}$$

e, dalla 1.19,

$$\partial_0 j^0 = -\partial_i j^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

si ha

$$\frac{dq}{dt} = - \int_V \partial_i j^i d^3\mathbf{x} = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$$

<sup>2</sup>Si veda, per esempio, A&H.

Assumendo che i campi, e quindi  $\mathbf{j}$ , vadano a zero all'infinito con sufficiente rapidità, per  $S \rightarrow \infty$  si ha

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \text{costante}$$

L'invarianza di gauge globale della lagrangiana conduce alla conservazione della carica elettrica<sup>3</sup>.

Le trasformazioni di gauge globale 1.17 formano un gruppo detto  $U(1)$ . Si tratta di un *gruppo abeliano*, cioè il prodotto di due trasformazioni è commutativo

$$[U(\theta_1), U(\theta_2)] = 0$$

### 1.4.2 Invarianza di gauge locale

La lagrangiana di un elettrone libero 1.5 non è invariante sotto *la trasformazione di gauge locale*

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{iq\theta(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-iq\theta(x)}\bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Infatti, mentre il termine di massa  $m\bar{\psi}\psi$  è invariante, la derivata del campo non lo è

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi' = e^{iq\theta(x)}\partial_\mu\psi(x) + iqe^{iq\theta(x)}\psi(x)\partial_\mu\theta(x)$$

L'ultimo termine distrugge l'invarianza. Per ripristinare l'invarianza è necessario introdurre una derivazione  $\mathcal{D}_\mu\psi$  che subisca la stessa trasformazione di fase del campo, cioè

$$\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow e^{iq\theta(x)}\mathcal{D}_\mu\psi$$

Questo si ottiene con la *derivazione covariante*

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (1.21)$$

purché il campo vettoriale  $A_\mu(x)$  si trasformi come

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \quad (1.22)$$

Si riconosce nella 1.21 la minima sostituzione elettromagnetica che abbiamo già incontrato, mentre la 1.22 esprime la libertà di gauge che esiste nella scelta del potenziale vettore classico del campo elettromagnetico.

La lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

è ora invariante sotto trasformazione di gauge locale. Esplicitando la derivazione covariante si ha

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \mathcal{L}_0 - j^\mu A_\mu \quad (1.23)$$

<sup>3</sup>Qui è altrove volutamente sorvoliamo sulla distinzione tra operatori e grandezze fisiche corrispondenti in quanto ci interessa semplicemente introdurre i concetti principali senza alcuna pretesa di rigore formale. Per esempio  $\int j^0 d^3\mathbf{x}$  definisce l'operatore carica elettrica e  $q$  è il suo valore di aspettazione.

La corrente

$$j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.24)$$

ha esattamente la forma richiesta dall'invarianza di gauge globale e  $-j^\mu A_\mu$  è la familiare interazione tra la particella di Dirac e il campo elettromagnetico classico.

Dunque la richiesta di invarianza di gauge locale ci ha forzato ad introdurre il *campo di gauge*  $A_\mu$ , che ora associamo al campo del fotone fisico.

Per completare la lagrangiana di QED dobbiamo aggiungere il termine di energia cinetica  $-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  che descrive la propagazione dei fotoni liberi ed è invariante per trasformazioni di gauge locali

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

E' interessante notare che se il fotone avesse avuto massa, saremmo stati obbligati ad aggiungere il termine di massa del fotone della forma  $(1/2)m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$  e questo avrebbe distrutto l'invarianza di gauge locale.

In definitiva, mentre l'invarianza di gauge globale porta alla conservazione della carica elettrica, la richiesta di invarianza locale porta all'introduzione del campo vettoriale  $A_\mu$  il cui bosone di gauge è il fotone, il quale deve avere massa nulla (coerentemente con il range infinito delle interazioni e.m.) affinché l'invarianza locale non sia distrutta. Inoltre, *la richiesta di invarianza di gauge locale porta a specificare la forma dell'interazione radiazione-materia*, che nel caso specifico dell'elettrone (particella di Dirac) è  $-j^\mu A_\mu$ , ove  $j_\mu$  è la corrente conservata della lagrangiana di elettrone libero (vedi 1.19).

Quest'ultima parte è molto importante. Si può dimostrare che l'invarianza locale di gauge non è mai possibile per una teoria di campo libero ma soltanto per una teoria di campi interagenti. Pertanto *l'invarianza di gauge locale può essere assunta come principio per lo sviluppo di teorie di gauge, nelle quali, partendo da lagrangiane libere l'interazione sarà sempre introdotta attraverso la richiesta di invarianza di gauge locale.*

## 1.5 Dalla lagrangiana classica alle regole di Feynman

### 1.5.1 Quantizzazione dei campi

Il punto di partenza è la quantizzazione dei campi che porta ad esprimere gli operatori di campo come sovrapposizione lineare di operatori i quali, applicati ai vettori di stato, creano e distruggono una particella.

#### Campo scalare

Consideriamo, innanzitutto, un campo scalare reale  $\phi(x)$ , che descriva quanti (bosoni di spin 0) di massa  $m$ ; si ha

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega} [a(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x}] \quad (1.26)$$

### 1.5. DALLA LAGRANGIANA CLASSICA ALLE REGOLE DI FEYNMAN9

ove  $k \equiv (\omega, \mathbf{k})$  e  $\omega = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ .  $a^\dagger(\mathbf{k})$  e  $a(\mathbf{k})$  sono operatori di creazione e di distruzione, rispettivamente; per essi si ha

$$a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = |\mathbf{k}\rangle \quad a(\mathbf{k})|\mathbf{k}\rangle = |0\rangle$$

avendo indicato con  $|0\rangle$  lo stato vuoto e con  $|\mathbf{k}\rangle$  lo stato di particella singola di momento  $\mathbf{k}$ . Tali operatori soddisfano le relazioni di commutazione canoniche

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= 0 & [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0 \\ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (1.27)$$

Gli operatori appartenenti a due campi indipendenti  $\phi_i$  e  $\phi_j$  ( $i \neq j$ ) devono commutare, in particolare

$$[a_i, a_j^\dagger] = 0$$

Lo stato di vuoto è normalizzato a uno

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

Dalla 1.27 discende

$$\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

inoltre

$$\langle 0|\phi(x)|\mathbf{k}\rangle = e^{-ik \cdot x} \quad (1.28)$$

Nel caso di un campo scalare complesso si ha

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega} [a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}] \\ \phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega} [a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + b(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Gli operatori di creazione e di distruzione sono tali che:

- $a^\dagger(\mathbf{k})$  crea una particella di momento  $\mathbf{k}$  ed energia  $\omega$ ;
  - $b(\mathbf{k})$  distrugge una antiparticella di energia  $\omega$  e momento  $\mathbf{k}$ ,
- e soddisfano le relazioni di commutazione canoniche

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

mentre tutte le altre sono nulle.

#### Campo spinoriale

Consideriamo, ora, un campo spinoriale  $\psi(x)$  che descriva quanti (fermioni di spin 1/2) di massa  $m$ . Si ha

$$\psi(x) = \sum_r \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E} [a_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}] \quad (1.30)$$

ove  $p \equiv (E, \mathbf{p})$  e  $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . L'indice  $r$  individua la proiezione dello spin lungo l'asse di quantizzazione;  $u$  e  $v$  sono rispettivamente spinori di particella e di antiparticella, normalizzati così che

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_{r'}(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_{r'}(\mathbf{p}) = 2E \delta_{rr'}$$

Gli operatori di creazione e di distruzione sono tali che:

- $a_r^\dagger(\mathbf{p})$  crea una particella di energia positiva con momento  $\mathbf{p}$  e proiezione di spin  $r$ ;
- $b_r(\mathbf{p})$  crea una particella a energia negativa di momento  $-\mathbf{p}$  e proiezione di spin  $-r$  ovvero distrugge una antiparticella di energia positiva di momento  $\mathbf{p}$  e proiezione di spin  $r$ .

Per tali operatori valgono le relazioni di anticommutazione canoniche

$$\{b_r(\mathbf{p}), b_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{a_r(\mathbf{p}), a_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = (2\pi)^3 2E \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (1.31)$$

Tutti gli altri anticommutatori sono nulli.

Lo stato di particella singola è definito da

$$|\mathbf{p}, r\rangle \equiv a_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

e quello di antiparticella da

$$|\overline{\mathbf{p}}, \bar{r}\rangle \equiv b_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

Coerentemente con la 1.31 gli stati sono normalizzati in modo che

$$\langle \mathbf{p}', r' | \mathbf{p}, r \rangle = \langle \overline{\mathbf{p}'}, \bar{r}' | \overline{\mathbf{p}}, \bar{r} \rangle = (2\pi)^3 2E \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Dalla 1.30 si deducono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) | \mathbf{p}, r \rangle &= u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \\ \langle 0 | \bar{\psi}(x) | \mathbf{p}, r \rangle &= \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \\ \langle 0 | \bar{\psi}(x) | \overline{\mathbf{p}}, \bar{r} \rangle &= \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \\ \langle \mathbf{p}, r | \psi(x) | 0 \rangle &= v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (1.32)$$

### Campo vettoriale

Consideriamo infine un campo vettoriale  $A_\mu(x)$  di spin 1; è il caso dei fotoni reali, gluoni e BVI "fisici". Si ha

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \left[ \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right] \quad (1.33)$$

dove  $\lambda$  è l'elicità e  $\epsilon_\mu$  è il vettore di polarizzazione.

- Per i fotoni la somma è su  $\lambda = \pm 1$ ;
- per i gluoni  $\lambda = \pm 1$  e in più

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^c, \quad a_\lambda(\mathbf{k}) \rightarrow a_\lambda^c(\mathbf{k})$$

ove  $c$  è un indice di colore;

- per i BVI ( $W^\pm, Z^0$ ), che sono massivi,  $\lambda = +1, 0, -1$  e<sup>4</sup>

$$A_\mu \rightarrow W_\mu^j \quad j = 1, 2, 3$$

<sup>4</sup>Vedremo in seguito che i  $W$  fisici sono dati da  $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$ .

## 1.5. DALLA LAGRANGIANA CLASSICA ALLE REGOLE DI FEYNMAN11

Per  $\mathbf{k}$  e  $\lambda$  fissati si ha

$$k_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) = 0 \quad \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) = -1$$

e per i bosoni massivi ( $m \neq 0$ )

$$\sum_{\lambda=1,0,-1} \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2$$

Le relazioni analoghe alle 1.32 sono

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu(x) | \mathbf{k}, \lambda \rangle &= \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x} \\ \langle \mathbf{k}, \lambda | A_\mu(x) | 0 \rangle &= \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{ik \cdot x} \end{aligned} \quad (1.34)$$

### 1.5.2 L'operatore $S$

La quantità di cruciale importanza per applicare la teoria quantistica dei campi, trattata in teoria delle perturbazioni, ai decadimenti e ai processi d'urto è l'operatore  $S$ , ovvero la "matrice di scattering". Il processo fisico, sia esso scattering o decadimento, è pensato come la transizione da uno stato iniziale ( $t = -\infty$ ) fatto di particelle non interagenti ( $|i\rangle \equiv |\psi(-\infty)\rangle_I$ ) ad un insieme di stati finali ( $|\psi(+\infty)\rangle_I$ ) anch'essi fatti di particelle non interagenti. L'operatore  $S$  è definito da

$$|\psi(+\infty)\rangle_I = S |\psi(-\infty)\rangle_I \equiv \hat{S} |i\rangle \quad (1.35)$$

Un particolare elemento di matrice  $S_{fi}$  è l'ampiezza per trovare un particolare stato finale  $|f\rangle$  in  $|\psi(+\infty)\rangle_I$

$$S_{fi} = \langle f | \psi(+\infty)\rangle_I = \langle f | S | i \rangle \quad (1.36)$$

Così possiamo scrivere

$$|\psi(+\infty)\rangle_I = \sum_f |f\rangle \langle f | \psi(+\infty)\rangle_I = \sum_f S_{fi} |f\rangle$$

L'indice  $I$  che abbiamo apposto al ket significa che lo stato è descritto nella *rappresentazione di interazione*. In tale rappresentazione sia gli operatori che gli stati sono dipendenti dal tempo, però in un modo ben adatto alla teoria delle perturbazioni. In particolare, gli operatori hanno una dipendenza dal tempo generata dall'hamiltoniano imperturbato  $H_0$ ; gli stati hanno, invece, una dipendenza dal tempo generata dall'hamiltoniano di interazione  $H'$  (quando  $H' \rightarrow 0$  la rappresentazione di interazione va nella rappresentazione di Heisenberg). Allora, se  $A$  è un generico operatore nella rappresentazione di Scroedinger (quindi non dipendente dal tempo), il corrispondente operatore nella rappresentazione di interazione è

$$A_I(t) = e^{iH_0 t} A e^{-iH_0 t}$$

(questa espressione è formalmente analoga a quella nella rappresentazione di Heisenberg; soltanto ora l'operatore hamiltoniano è quello imperturbato  $H_0$  e non il totale  $H$ ). Ne segue che

$$\frac{dA_I(t)}{dt} = -i [A_I(t), H_0]$$

Vediamo ora gli stati. Detto  $|\psi(t)\rangle$  un generico stato nella rappresentazione di Schroedinger, lo stato nella rappresentazione di interazione è definito come (per preservare la consistenza tra gli elementi di matrice nelle due rappresentazioni)

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle$$

Considerando che nella rappresentazione di Schroedinger lo stato evolve secondo l'equazione

$$H |\psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$

segue che

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= e^{iH_0 t} \left\{ -H_0 |\psi(t)\rangle + i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right\} \\ &= e^{iH_0 t} \{ -H_0 + (H_0 + H') \} |\psi(t)\rangle = e^{iH_0 t} H' |\psi(t)\rangle \\ &= e^{iH_0 t} H' \{ e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I \} \end{aligned}$$

da cui l'equazione del moto di  $|\psi(t)\rangle_I$

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = H'_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (1.37)$$

ove

$$H'_I(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}$$

Ora, quando vogliamo calcolare una vita media di un decadimento o la sezione d'urto di un processo la quantità che ci serve è proprio  $S_{fi}$  e la probabilità associata  $|S_{fi}|^2$ . Assumendo che  $|\psi(+\infty)\rangle_I$  e  $|i\rangle$  siano ambedue normalizzati, abbiamo

$$1 = \langle \psi(+\infty) | \psi(+\infty) \rangle = \langle i | S^\dagger S | i \rangle = \langle i | i \rangle$$

e, quindi,  $S$  è un operatore unitario:  $S^\dagger S = 1$ .

Dobbiamo ora vedere come possiamo esprimere  $S$ . Lo facciamo con un approccio di tipo perturbativo. Integrando la 1.37 otteniamo l'equazione integrale

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle - i \int_{-\infty}^t H'_I(t_1) |\psi(t_1)\rangle_I dt_1 \quad (1.38)$$

La soluzione di ordine zero è

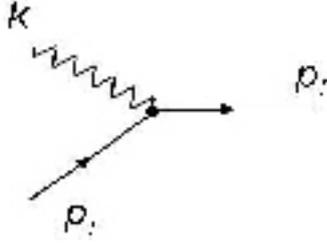
$$|\psi(t)\rangle_I^{(0)} = |i\rangle$$

La soluzione al primo ordine si trova sostituendo quella di ordine zero nel secondo membro della 1.38. Ricordando che  $|i\rangle$  è un vettore di stato costante, si ottiene

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle - i \int_{-\infty}^t H'_I(t_1) |i\rangle dt_1 = \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^t H'_I(t_1) dt_1 \right\} |i\rangle$$

Arrestandoci, per il momento, al primo ordine e mandando  $t$  a  $+\infty$  otteniamo l'espressione al primo ordine di  $S$

$$S^{(1)} = 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} H'_I(t_1) dt_1$$


 Figure 1.2: Una particella di spin 0 e carica  $\mu - e$  assorbe un fotone.

ovvero, considerando che

$$H'_I(t) = \int \mathcal{H}'_I(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

$$S^{(1)} = 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}'_I(x) d^4x \quad (1.39)$$

Considerando gli ordini successivi, l'espressione generale dell'operatore  $S$  è data dallo *sviluppo di Dyson*<sup>5</sup>

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \mathcal{T} \{ \mathcal{H}'_I(x_1) \mathcal{H}'_I(x_2) \dots \mathcal{H}'_I(x_n) \} \quad (1.40)$$

dove il simbolo  $\mathcal{T}$  sta a indicare che il prodotto di operatori nella parentesi graffa deve essere ordinato temporalmente. Infatti, considerando a titolo di esempio, il termine del secondo ordine,  $\mathcal{T}$  è definito come segue

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \{ \mathcal{H}'_I(x_1) \mathcal{H}'_I(x_2) \} &= \mathcal{H}'_I(x_1) \mathcal{H}'_I(x_2) \quad \text{per } t_1 > t_2 \\ &= \mathcal{H}'_I(x_2) \mathcal{H}'_I(x_1) \quad \text{per } t_1 < t_2 \end{aligned}$$

### 1.5.3 Un esempio

Consideriamo il semplice processo in figura 1.2 nel quale una particella di spin 0 e carica  $-e$  (per esempio un  $\pi^-$ ) interagisce con il campo em  $A^\mu$  assorbendo un fotone. Con l'approccio in termini di funzione d'onda scriviamo l'ampiezza come

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x)$$

con

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^e A^2 \simeq -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)$$

e

$$\phi(x) = N e^{-ip \cdot x}$$

Si ha

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{fi} A^\mu \quad (1.41)$$

<sup>5</sup>Si veda, per esempio, A&H, vol. I, pagg. 147-150.

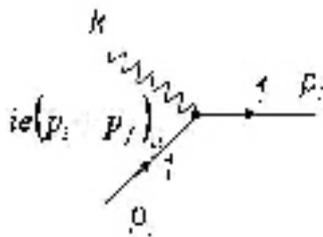


Figure 1.3: Fattori per il calcolo dell'ampiezza invariante.

con

$$\begin{aligned} j_\mu^{fi} &= -ie(\phi_f^* \partial_\mu \phi_i - \phi_i \partial_\mu \phi_f^*) \\ &= -eN_i N_f (p_i + p_f)^\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \end{aligned}$$

Trattandosi di un fotone entrante

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu N_k e^{-ik \cdot x}$$

quindi

$$\begin{aligned} T_{fi} &= ieN_i N_f N_k (p_i + p_f)^\mu \epsilon_\mu \int e^{i(p_f - p_i) \cdot x} e^{-ik \cdot x} d^4x \\ &= (2\pi)^4 ieN_i N_f N_k (p_i + p_f)^\mu \epsilon_\mu \delta^4(p_f - p_i - k) \end{aligned}$$

La  $\delta^4(p_f - p_i - k)$  ci dice che, se il fotone è reale e le particelle iniziale e finale sono uguali, il processo non può avvenire (potrebbe se il fotone fosse virtuale). Tuttavia lo stesso processo potrebbe avvenire se la particella finale fosse uno stato eccitato di quella iniziale.  $T_{fi}$  si può anche scrivere come

$$T_{fi} = -iN_i N_f N_k (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - k) \mathfrak{M}$$

ove

$$-i\mathfrak{M} = [ie(p_i + p_f)^\mu] \epsilon_\mu$$

da cui le regole di Feynman mostrate nel grafico 1.3

Seguiamo ora l'approccio di teoria quantistica dei campi. La particella carica scalare è rappresentata dal campo scalare complesso  $\phi(x)$  la cui lagrangiana libera è (1.4)

$$\mathcal{L}_0 = \left( \partial_\mu \hat{\phi}^\dagger \right) \left( \partial^\mu \hat{\phi} \right) - m^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$$

L'interazione con un campo elettromagnetico è introdotta sostituendo a  $\partial_\mu$  la derivazione covariante

$$\partial_\mu \longrightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iq\hat{A}_\mu(x)$$

Si trova

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 - iq \left( \hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi}^\dagger \right) \hat{A}_\mu + q^2 \hat{A}^\mu \hat{A}_\mu \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$$

1.5. DALLA LAGRANGIANA CLASSICA ALLE REGOLE DI FEYNMAN<sup>15</sup>

ovvero, essendo  $q = -e$ ,

$$\mathcal{L}' = ie \left( \hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi}^\dagger \right) \hat{A}_\mu + e^2 \hat{A}^\mu \hat{A}_\mu \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$$

Dalla 1.14 si vede che, nel caso la lagrangiana di interazione non contenga derivate rispetto al tempo, l'hamiltoniano di interazione è semplicemente

$$\mathcal{H}' = -\mathcal{L}'$$

Questo è il caso, per esempio di un elettrone in campo elettromagnetico (si veda la 1.23) per il quale si ha  $\mathcal{L}' = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\hat{\psi}\hat{A}_\mu$  e, quindi,  $\mathcal{H}' = -\mathcal{L}' = q\bar{\psi}\gamma^\mu\hat{\psi}\hat{A}_\mu$ . Nel caso presente, però, le derivate ci sono e risulta

$$\mathcal{H}' = -\mathcal{L}' - q^2 \left( \hat{A}_0 \right)^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$$

A  $-\mathcal{L}'$  si è aggiunto il termine non covariante  $-q^2 \left( \hat{A}_0 \right)^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$ . Tuttavia, una trattazione accurata che includa le definizioni precise della rappresentazione di interazione e i prodotti  $T$ -ordinati delle derivate degli operatori di campo, mostra che i contributi di termini non covarianti del tipo ora incontrato si cancellano negli elementi di matrice fisici<sup>6</sup>. Possiamo, dunque, porre

$$\mathcal{H}' = -ie \left( \hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi}^\dagger \right) \hat{A}_\mu \equiv \hat{j}_{fi}^\mu \hat{A}_\mu$$

ove abbiamo trascurato (come in precedenza) il termine in  $e^2$  (il quale descrive una interazione a quattro campi) e ove  $\hat{j}_{fi}^\mu$  è l'operatore corrente di transizione. Ricordando che al primo ordine

$$S^{(1)} = 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}'_I(x) d^4x$$

troviamo

$$\hat{T} = -i \int d^4x \hat{j}_{fi}^\mu \hat{A}_\mu$$

che è l'equivalente di teoria quantistica dei campi della relazione 1.41.  $\hat{T}$  è l'operatore di transizione dallo stato iniziale allo stato finale. L'ampiezza di transizione è l'elemento di matrice di  $\hat{T}$  tra lo stato finale e lo stato iniziale

$$T_{fi} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f | \mathcal{H}'_I(x) | i \rangle d^4x = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f | \hat{j}_{fi}^\mu \hat{A}_\mu | i \rangle d^4x$$

Per calcolare  $T_{fi}$  dobbiamo sostituire in questa relazione gli sviluppi dei campi  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\phi}^\dagger$  e  $\hat{A}_\mu$  (si vedano le 1.29 e 1.33)

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \left[ \hat{a}(\mathbf{p}_i) e^{-ip_i \cdot x} + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}_i) e^{ip_i \cdot x} \right] \\ \hat{\phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \left[ \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_f) e^{-ip_f \cdot x} + \hat{b}(\mathbf{p}_f) e^{ip_f \cdot x} \right] \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Si veda, per esempio, A&H, vol. I, pag. 199.

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \hat{\alpha}_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \epsilon_\mu^*(k, \lambda) \hat{\alpha}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right]$$

e scrivere lo stato iniziale e lo stato finale come

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |p_i; k, \lambda\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_i) \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \\ |f\rangle &= |p_f\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_f) |0\rangle \end{aligned}$$

Quindi l'ampiezza di transizione è

$$T_{fi} = -i \langle 0 | \hat{a}(p_f) \left\{ \int d^4x \hat{j}_{fi}^\mu \hat{A}_\mu \right\} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_i) \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$$

Sostituendo le espansioni dei campi e tenendo conto delle proprietà di commutazione degli operatori di creazione e di distruzione, questa relazione porta a<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int d^4x \langle p_f | \hat{j}_{fi}^\mu(x) | p_i \rangle \langle 0 | \hat{A}_\mu(x) | k \rangle \\ &= -i \int d^4x j_\mu^{fi} A^\mu \end{aligned}$$

Cioè, la corrente di transizione da noi scritta a suo tempo è semplicemente l'elemento di matrice dell'operatore corrente di transizione e la funzione d'onda  $A_\mu(x)$  per il fotone è l'elemento di matrice tra il vuoto e lo stato a un fotone dell'operatore  $\hat{A}_\mu(x)$ . Si vede così che siamo pervenuti allo stesso risultato da noi trovato in precedenza. Le regole di Feynman rimangono le stesse.

## 1.6 Invarianza di gauge: il caso non abeliano

### 1.6.1 Invarianza globale

Il più semplice gruppo di trasformazioni non abeliano è  $SU(2)$ . In questo caso i campi entrano nella teoria come multipletti

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

che formano la base per una rappresentazione del gruppo. La trasformazione di gauge è specificata da tre parametri  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

$$\phi \rightarrow \phi' = U\phi = e^{-ig\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\theta}}\phi$$

$T_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sono i generatori della trasformazione rappresentati da matrici  $n \times n$ . Nel caso  $n = 2$  (rappresentazione fondamentale)  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau}/2$  ove  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono le matrici di Pauli. I generatori, come sappiamo, soddisfano l'algebra

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k$$

<sup>7</sup>Si veda A&H, II ed., pagg. 136-140.

ove  $\epsilon_{ijk}$  sono le costanti di struttura del gruppo. Il gruppo è *non abeliano* proprio perché i generatori non commutano. *La richiesta di invarianza globale di gauge porta, nel caso di  $SU(2)$  a tre correnti conservate, quanti sono i generatori.*

Da  $SU(2)$  si generalizza a dimensioni superiori e, quindi, al caso di  $N$  generatori  $G$  e  $N$  correnti conservate. In particolare, per la cromodinamica quantistica, interessa  $SU(3)$ ; i generatori e, conseguentemente, le correnti conservate sono otto.

### 1.6.2 Invarianza locale

In vista degli sviluppi successivi relativi al modello elettrodebole, consideriamo come esempio il caso di due campi non interagenti di spin  $1/2$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , che costituiscano un doppietto di una simmetria  $SU(2)$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

La lagrangiana è semplicemente la somma di due lagrangiane di Dirac

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_1\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - m_1\bar{\psi}_1\psi_1 + i\bar{\psi}_2\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - m_2\bar{\psi}_2\psi_2$$

che possiamo scrivere nella forma compatta ( $m$  deve essere inteso come il vettore con le due componenti  $m_1$  e  $m_2$ )

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

del tutto simile alla lagrangiana di particella singola con la differenza che ora  $\psi$  è un vettore nello spazio di un certo "isospin"<sup>8</sup>. Tale lagrangiana non è invariante sotto la trasformazione di gauge locale

$$\psi \rightarrow \psi' = \left(1 - ig\boldsymbol{\epsilon}(x) \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \psi$$

ove  $\boldsymbol{\epsilon}(x)$  è un arbitrario vettore infinitesimale nello spazio dell'isospin e  $\boldsymbol{\tau}/2 \equiv (\tau_1/2, \tau_2/2, \tau_3/2)$  è l'operatore di "isospin", le cui componenti sono i generatori della trasformazione ( $\tau_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , sono le matrici di Pauli).

In analogia al caso abeliano possiamo rendere invariante la lagrangiana sotto trasformazione di gauge locale introducendo la derivazione covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \quad (1.42)$$

$W_\mu^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono un *tripletto di "isospin"* di *campi di gauge di Yang-Mills*. Il prodotto  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu$  è una matrice  $2 \times 2$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^\mu = \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix}$$

Al fine di mantenere l'invarianza di gauge, i campi  $\mathbf{W}_\mu$  devono trasformare come segue<sup>9</sup>

$$\mathbf{W}_\mu(x) \rightarrow \mathbf{W}_\mu(x) + \partial_\mu\boldsymbol{\epsilon}(x) + g\boldsymbol{\epsilon}(x) \times \mathbf{W}_\mu(x) \quad (1.43)$$

<sup>8</sup>Si badi che si tratta di un isospin astratto che nulla ha a che fare con lo spin isotopico introdotto in precedenza per gli adroni. Successivamente, quando tratteremo il modello di Glashow, Weinberg e Salam, assumerà un significato fisico preciso.

<sup>9</sup>Questa è la trasformazione dei campi di gauge relativa ad una trasformazione di gauge infinitesima. Per il caso della trasformazione di gauge finita si può vedere, per esempio, A&H, vol. 2, pag. 45.

Questa trasformazione dei campi di gauge è più complicata della corrispondente 1.22 in QED. La differenza è dovuta al fatto che i generatori  $\tau_i/2$  non commutano. Per completare la lagrangiana si può procedere come in QED introducendo un termine di energia cinetica dei campi di gauge per mezzo di

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}$$

ove  $G_{\mu\nu}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) è una generalizzazione del tensore di campo  $F_{\mu\nu}$ . La forma ad esso richiesta affinché sia mantenuta l'invarianza di gauge locale è

$$G_{\mu\nu}^{(i)} = \partial_\mu W_\nu^{(i)} - \partial_\nu W_\mu^{(i)} - g\epsilon_{ijk}W_\mu^{(j)}W_\nu^{(k)}$$

ovvero

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$$

cosicché, in aggiunta al normale termine di energia cinetica del caso abeliano, troviamo il termine in  $\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$  che introduce l'*autoaccoppiamento* dei tre bosoni di gauge<sup>10</sup>. La lagrangiana completa è dunque

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu} \quad (1.44)$$

ed è localmente gauge-invariante.

Come nel caso della QED l'aggiunta di un termine di massa  $m^2\mathbf{W}_\mu\mathbf{W}^\mu$  farebbe venir meno l'invarianza di gauge. Conseguentemente *la teoria di Yang-Mills richiede l'esistenza di bosoni di gauge di massa nulla. C'è una corrispondenza uno a uno tra la dimensione del gruppo di gauge e il numero dei campi di gauge* (a massa nulla). Nel caso del gruppo  $SU(2)$ , che come vedremo interessa il modello di GWS, tale dimensione è tre (tre sono i generatori) mentre nel caso di  $SU(3)$ , che interessa la QCD, la dimensione è otto (quanti sono i generatori di  $SU(3)$ ).

## 1.7 Rottura spontanea di simmetria

Simmetrie esatte, quale la conservazione della carica elettrica, sono una rarità. Molto più spesso le simmetrie non sono del tutto esatte in quanto almeno una "piccola" parte della lagrangiana le viola. E' questo, per esempio, il caso della conservazione della parità valida per le interazioni forti ed elettromagnetiche ma non per le interazioni deboli. Un caso particolarmente interessante è quello di una lagrangiana che possieda una particolare simmetria la quale però non è manifestata dallo stato fondamentale del sistema che la lagrangiana descrive. In questo caso si parla, forse in modo non molto appropriato, di *simmetria spontaneamente rotta*. Un classico esempio è fornito da un ferromagnete: sebbene l'hamiltoniana del sistema abbia simmetria di rotazione, lo stato fondamentale (quello a minore energia) non ha questa simmetria in quanto gli spin sono tutti allineati in una medesima, seppure arbitraria, direzione. Esistono in questo caso infiniti stati fondamentali equivalenti (stati di vuoto nel caso della teoria quantistica dei campi). Un altro esempio è fornito da un'asta caricata di punta. Le

<sup>10</sup>Questo giustifica il fatto che si tratti di un tripletto di isospin. Infatti, ciò significa che i bosoni di gauge portano la "carica" del gruppo di simmetria e, pertanto, possono interagire tra loro.

equazioni hanno simmetria di rotazione, però, superato un certo carico l'asta si piega in una determinata, seppure arbitraria, direzione. In entrambi i casi gli stati ad energia più bassa sono tutti al di sotto di quelli simmetrici. L'originale simmetria delle equazioni del moto è nascosta. Essa lascia traccia di sé soltanto nella impossibilità di predire in quale direzione si piegherà l'asta o si allineeranno gli spin. In effetti tutte le soluzioni non simmetriche sono equivalenti e si possono ottenere l'una dall'altra per rotazione. In ambedue i casi *esiste un valore critico di una grandezza fisica, una temperatura o una forza, al di sotto del quale la simmetria si rompe*. Oltre il punto critico il vuoto diventa degenere e la soluzione simmetrica instabile. Tutto questo è tipico di tutti gli esempi di *rottura spontanea di simmetria*.

### 1.7.1 Rottura spontanea di simmetria in teoria dei campi

Consideriamo il campo scalare complesso  $\phi(x)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

descritto dalla lagrangiana (classica)

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (1.45)$$

Interpretando tale lagrangiana come  $\mathcal{L} = T - V$ , identifichiamo il potenziale<sup>11</sup>

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

$\mathcal{L}$  è invariante sotto il gruppo  $U(1)$  di simmetria di gauge globale

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\delta} \phi(x) \quad (1.46)$$

con  $\delta$  costante arbitraria. Scritta in termini di  $\phi_1$  e  $\phi_2$  la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

e il potenziale è

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (1.47)$$

ovvero

$$V(\rho) = \mu^2 \rho^2 + \lambda \rho^4$$

ove  $\rho^2 = \phi^* \phi$ . Si vede che  $V$  presenta un minimo solo se  $\lambda > 0$ , per cui facciamo proprio questa assunzione. Per  $\mu^2 > 0$  il minimo è unico e corrisponde a  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ : lo stato fondamentale è simmetrico. Se invece  $\mu^2 < 0$  il minimo si ha per

$$\rho^2 = |\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$

<sup>11</sup>In teoria quantistica il termine in  $\phi^2$  sarebbe normalmente visto come un termine di massa e quello in  $\phi^4$  come una forma di autointerazione. Per la successiva assunzione  $\mu^2 < 0$  la massa risulterebbe immaginaria. D'altra parte nell'interpretazione quantistica i campi sono trattati come fluttuazioni intorno al valore di vuoto corrispondente allo stato di minima energia classico. Finora questo stato ha corrisposto a  $\phi = 0$  mentre in questo caso non è più così come si vedrà dagli sviluppi che seguono.

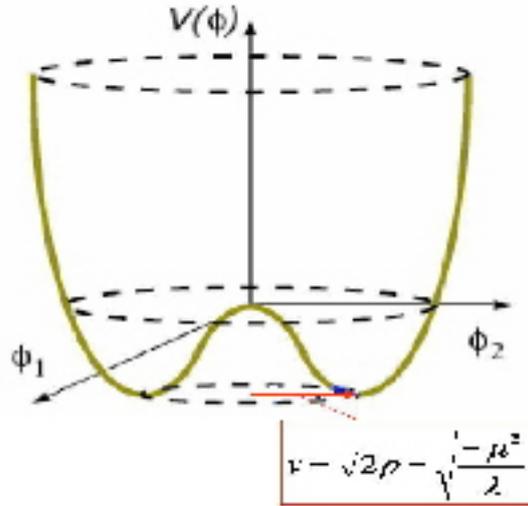


Figure 1.4: Andamento del potenziale in funzione dei campi  $(\phi_1, \phi_2)$ . Il valore  $V = 0$  per  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  è un massimo instabile mentre ci sono infiniti minimi con  $V = -(1/4)\mu^4/\lambda$  sulla circonferenza di raggio  $v = \sqrt{2}\rho = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ .

il che significa che, essendo

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

nel piano complesso  $(\phi_1, \phi_2)$  esiste una intera circonferenza di raggio (figura 1.4)

$$v = \sqrt{2}\rho = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (1.48)$$

in ogni punto della quale  $V$  assume il valore minimo

$$V_{\min} = -\frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda}$$

Il valore  $V = 0$  per  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  è un massimo instabile. Ci sono infiniti stati fondamentali e ciascuno è *non simmetrico* nel senso che risulta alterato dalla trasformazione 1.46. In effetti, poiché il generico minimo si ha per

$$\phi_{vac} = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\alpha}$$

con  $\alpha$  reale ma arbitrario, tale trasformazione fa passare da un minimo a un altro.

Poiché tutti i minimi sono equivalenti, senza perdere in generalità, possiamo scegliere come minimo il punto  $(\phi_1, \phi_2) = (v, 0)$  e scrivere

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= v + \chi_1(x) \\ \phi_2(x) &= \chi_2(x) \end{aligned}$$

con  $\chi_1$  e  $\chi_2$  reali. Allora

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \chi_1(x) + i\chi_2(x))$$

e  $\chi_1$  e  $\chi_2$  rappresentano fluttuazioni intorno a  $(\phi_1, \phi_2) = (v, 0)$ . In termini di  $\chi_1$  e  $\chi_2$  la lagrangiana diventa, a meno di termini costanti ( $\frac{\lambda}{4}v^4$ ) che non hanno significato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_1)^2 - \lambda v^2 \chi_1^2 \right] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_2)^2 \\ & - \left[ \lambda v (\chi_1^3 + \chi_1 \chi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\chi_1^4 + \chi_2^4 + 2\chi_1^2 \chi_2^2) \right] \end{aligned}$$

Se ora consideriamo  $\mathcal{L}$  come una lagrangiana di teoria quantistica, il primo termine è la lagrangiana di un campo scalare e descrive le "oscillazioni radiali"  $\chi_1$  che hanno massa

$$m_{\chi_1} = \sqrt{2\lambda v^2}$$

ovvero, considerando la 1.48,

$$m_{\chi_1} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Il terzo termine rappresenta interazioni cubiche e quartiche tra i campi  $\chi_1$  e  $\chi_2$ . Il secondo termine è quello più interessante; esso descrive il contributo di *una campo scalare a massa nulla* il cui quanto è noto con il nome di *bosone di Goldstone*, che è il quanto delle oscillazioni  $\chi_2$  attorno al cerchio di equilibrio.

Tutto questo può essere meglio capito se ripetiamo il passaggio relativo alla rottura di simmetria (scelta dello stato fondamentale) partendo da una espressione di  $\phi(x)$  in termini di modulo e fase ossia scrivendo

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)/v}$$

dove abbiamo introdotto la divisione per  $v$  nell'esponente per fare in modo che  $\theta(x)$  abbia le stesse dimensioni (massa) di  $\phi(x)$  e  $\rho(x)$ . Come abbiamo visto i punti di minimo del potenziale giacciono (nel piano  $(\phi_1, \phi_2)$ ) sulla circonferenza di raggio  $v$ , e quindi rappresentano gli infiniti stati fondamentali equivalenti del campo classico  $\phi(x)$ . Ora il valore di aspettazione sul vuoto del campo quantistico dovrebbe essere uguale al valore assunto dal campo classico nello stato fondamentale; quindi, nel caso presente tale valore di aspettazione non si annulla ma  $\langle 0|\phi|0\rangle = v/\sqrt{2}$ . Poiché in teoria quantistica dei campi le particelle sono pensate come eccitazioni dal vuoto, uno sguardo alla figura 1.4 suggerisce che se vogliamo una interpretazione quantistica del potenziale 1.47, per avere oscillazioni stabili dobbiamo espandere i campi attorno a un punto della circonferenza sulla quale giacciono tutti i minimi e non intorno al punto  $\phi = 0$ , che è instabile. Il minimo da noi scelto è il punto  $\rho = v/\sqrt{2}$  e  $\theta(x) = 0$ . Potremmo allora supporre che oscillazioni radiali in  $\rho$  corrispondano a convenzionali campi massivi in quanto soggette ad una forza di richiamo mentre oscillazioni in  $\theta$  sono a massa nulla in quanto, passando attraverso i punti della circonferenza dei minimi, non sono soggette ad alcuna forza. Espandiamo, allora,  $\phi(x)$  intorno  $\rho = v/\sqrt{2}$  e  $\theta(x) = 0$  ponendo

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x)) e^{i\theta(x)/v} \quad (1.49)$$

Sostituendo questa espressione nella lagrangiana simmetrica 1.45 otteniamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 - \mu^2 h^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)^2 + \text{termini di interazione (e termini costanti)}$$

Da questa lagrangiana è ora più evidente che i due gradi di libertà sono uno relativo al campo massivo  $h(x)$ , corrispondente alle oscillazioni radiali, e l'altro al campo a massa nulla  $\theta(x)$ , corrispondente alle oscillazioni "senza resistenza" sulla circonferenza dei minimi.

Questo modello è un semplice esempio del *teorema di Goldstone*, il quale afferma che la rottura spontanea di una simmetria continua globale genera inevitabilmente uno o più bosoni scalari a massa nulla. Per esempio, nel caso di un ferromagnete, le oscillazioni sono onde di spin che tendono a ruotare gli spin rispetto alla loro direzione di allineamento dello stato fondamentale. Se il sistema è governato da interazioni di corto raggio, solo una piccola energia è necessaria per produrre un cambiamento graduale e le eccitazioni si comportano come bosoni a massa nulla di Goldstone.

Siamo pervenuti al teorema di Goldstone considerando una lagrangiana, invariante sotto il gruppo  $U(1)$ , costruita con un campo complesso scalare, una lagrangiana, cioè, costruita con due campi scalari reali. Il tutto si può generalizzare a  $n$  campi scalari; il gruppo di simmetria diventa il gruppo ortogonale in  $n$  dimensioni  $O(n)$  che possiede  $(1/2)n(n-1)$  generatori. Il *teorema di Goldstone* non è, perciò, legato ad un particolare  $O(n)$  e si può enunciare dicendo che: *in una rottura spontanea di simmetria per ogni generatore rotto esiste un bosone scalare a massa nulla.*

### 1.7.2 Il meccanismo di Higgs

La rottura spontanea di simmetria è uno strumento rilevante ai fini della costruzione del modello GWS. Anche se l'abbiamo introdotta senza particolare riferimento a tale modello, è evidente che esso è il nostro fine ultimo. In particolare il teorema di Goldstone servirà a far comparire nella lagrangiana bosoni di campo che successivamente dovranno essere identificati con i bosoni intermedi delle interazioni elettrodeboli. Ora noi sappiamo che, con l'esclusione del fotone, gli altri tre bosoni,  $W^\pm$  e  $Z^0$ , hanno massa diversa da zero mentre i bosoni di Goldstone sono a massa nulla. Si rimedia a questo con il cosiddetto *meccanismo di Higgs*, il quale *nella sua forma minimale prevede l'esistenza di un bosone scalare che accoppiandosi ai bosoni di Goldstone fa acquistare massa a  $W^\pm$  e  $Z^0$ .*

Partiamo considerando un campo scalare complesso

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

Per vedere in modo semplice in cosa consista il meccanismo di Higgs consideriamo il modello del paragrafo precedente, questa volta per un campo scalare carico, e introduciamo l'interazione elettromagnetica (e con essa *l'invarianza sotto un gruppo  $U(1)$  di simmetria di gauge locale*). In accordo con il principio di gauge questo si ottiene sostituendo nella lagrangiana 1.45 la derivazione  $\partial_\mu$  con la derivazione covariante  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  e aggiungendo il termine di energia cinetica  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ . Si ha

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - iqA_\mu) \phi^* (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.50)$$

ove, ricordiamo,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Questa lagrangiana è invariante sotto la trasformazione abeliana di gauge locale

$$U(\alpha) = e^{iq\alpha(x)}$$

con la quale

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\phi(x) \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi'^*(x) = e^{-iq\alpha(x)}\phi^*(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}$$

Operiamo la rottura di simmetria scegliendo lo stato di vuoto  $(\phi_1, \phi_2)_{vac} = (v, 0)$  e ponendo

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \chi_1(x) + i\chi_2(x)]$$

ovvero

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= v + \chi_1(x) \\ \phi_2(x) &= \chi_2(x)\end{aligned}$$

La lagrangiana diventa

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu\chi_1)^2 - \lambda v^2 \chi_1^2 \right] + \frac{1}{2} (\partial_\mu\chi_2)^2 + \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ & - qv A_\mu \partial^\mu \chi_2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{termini di interazione}\end{aligned}\quad (1.51)$$

In questa lagrangiana troviamo un campo scalare ( $\chi_1$ ) di massa  $m_{\chi_1} = \sqrt{2\lambda}v$  e un bosone di Goldstone a massa nulla  $\chi_2$ . Il fatto nuovo, incoraggiante per il nostro scopo, è costituito dal terzo termine il quale ci dice che il campo di gauge  $A_\mu$  ha ora acquistato la massa  $m_A = qv$ . Tuttavia la stessa lagrangiana presenta almeno due aspetti sconcertanti che gettano dubbi sul procedimento finora seguito:

1. il termine in  $A_\mu \partial^\mu \chi_2$  sembra dare al campo di gauge la possibilità di trasformarsi in  $\chi_2$  nella propagazione, la qualcosa getta dubbi sull'interpretazione dello spettro di massa;
2. la lagrangiana iniziale aveva (in termini di campi) quattro gradi di libertà: due campi scalari e due gradi di libertà rappresentati dai due possibili stati di elicità del campo vettoriale di gauge a massa nulla. Nella 1.51 i gradi di libertà sono diventati cinque: i due campi scalari più i tre gradi di libertà associati al campo di gauge massivo, il quale ha ora tre possibili stati di elicità. E questo non è fisico in quanto la semplice scelta dello stato fondamentale non può introdurre nel sistema un ulteriore grado di libertà.

Si può rimediare utilizzando la libertà di scelta della gauge. Innanzitutto, rompiamo la simmetria scrivendo  $\phi(x)$  in modo analogo alla 1.49

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H(x)) e^{i\theta(x)/v}$$

Poiché, per l'invarianza locale di gauge

$$\phi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\phi(x)$$

eseguimo una trasformazione di gauge scegliendo  $\alpha(x)$  in modo che, punto per punto,  $q\alpha(x)$  sia opposto alla fase di  $\phi(x)$ ,  $\theta(x)/v$ . In questo modo il campo  $\phi'$  diventa reale ed è dato da

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x))$$

Con questa scelta dovremmo avere risolto il problema. Infatti, poiché, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, il bosone di Goldstone corrisponde ad oscillazioni sulla circonferenza dei minimi, e quindi a quanti del campo  $\theta(x)$ , con questa scelta dovremmo aver cancellato ("gauged away") il non voluto ulteriore grado di libertà. In altri termini ci aspettiamo che il campo  $\theta(x)$  non appaia più nella lagrangiana. Per questa particolare gauge (chiamata *U gauge* o *gauge unitaria*)

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{qv}\partial_\mu\theta(x)$$

Sostituendo le espressioni di  $\phi'(x)$  e  $A'(x)$  nella lagrangiana 1.50 otteniamo la lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 - \lambda v^2 H^2 \right] + \frac{1}{2}q^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}q^2 A_\mu A^\mu H^2 \quad (1.52) \\ & + q^2 v A_\mu A^\mu H - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda v^4}{4} \end{aligned}$$

nella quale effettivamente  $\theta$  non compare più: il bosone di Goldstone è sparito. La lagrangiana ora correttamente descrive due particelle massive interagenti: il *bosone scalare di Higgs* di massa

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v^2$$

e il bosone vettoriale di gauge  $A_\mu$  con massa

$$m_A = qv$$

Gli altri termini descrivono interazioni tra campi e autointerazioni. Il termine finale costante come al solito non ha significato. Il meccanismo si può descrivere dicendo che il bosone a massa nulla di Goldstone è stato "inghiottito" dal campo di gauge che così ha acquistato anche la polarizzazione longitudinale (elicità nulla) necessaria perché il bosone di gauge acquisti massa. Questo è il *meccanismo abeliano di Higgs*. Per utilizzarlo per lo sviluppo del modello GWS occorre estenderlo al caso di simmetria di gauge non abeliana. Questo è quello che faremo nel prossimo paragrafo

### 1.7.3 Meccanismo di Higgs non abeliano

Consideriamo ancora una volta una lagrangiana del tipo 1.45

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (1.53)$$

ove però questa volta  $\phi(x)$  non è semplicemente un campo scalare complesso ma un doppietto di  $SU(2)$  di campi scalari complessi

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

La lagrangiana 1.53 è invariante sotto la trasformazione di simmetria globale  $SU(2)$

$$\phi \rightarrow \phi' = U\phi = e^{-\frac{ig\Delta\cdot\tau}{2}}\phi$$

ovvero sotto la trasformazione infinitesima,

$$\phi \rightarrow \phi' = \left(1 - ig\epsilon_j \frac{\tau_j}{2}\right)\phi$$

ove  $\tau \equiv (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  sono le matrici di Pauli e  $\epsilon_j$  con  $j = 1, 2, 3$  sono tre parametri costanti infinitesimi. Per giungere ad una lagrangiana localmente invariante, invece delle tre costanti  $\epsilon_j$ , introduciamo tre parametri di gauge dipendenti dalle coordinate spazio-temporali

$$\epsilon(x) \equiv [\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \epsilon_3(x)]$$

e sostituiamo la derivazione  $\partial_\mu$  con la derivazione covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\tau_j}{2}W_\mu^j$$

ove  $W_\mu^j$  con  $j = 1, 3$  sono un tripletto di campi di gauge, i quali, sotto una trasformazione di gauge infinitesimale, trasformano come

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu + \partial_\mu\epsilon + g\epsilon \times \mathbf{W}_\mu$$

Il potenziale

$$V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

rimane inalterato, per cui la lagrangiana diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}_\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu} \\ &= \left(\partial_\mu\phi + ig\frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu\phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu\phi + ig\frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}^\mu\phi\right) - V(\phi) - \frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.54)$$

ove abbiamo aggiunto l'ultimo termine che rappresenta l'energia cinetica dei campi di gauge. Siamo interessati al caso  $\mu^2 < 0$  e  $\lambda > 0$  e vogliamo procedere alla rottura di simmetria. Vediamo che  $V(\phi)$  ha un minimo dello stesso valore su tutti i punti dell'insieme continuo definito da

$$\phi^\dagger\phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}$$

ovvero, in termini delle componenti reali dei due campi complessi  $\phi_a$  e  $\phi_b$ , da

$$\phi^\dagger\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{v^2}{2}$$

Induciamo la rottura della simmetria  $SU(2)$  scegliendo come stato fondamentale (scegliendo una specifica direzione nello spazio di  $SU(2)$  la simmetria diventa nascosta)

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0 \quad \phi_3^2 = v^2$$

e sviluppiamo  $\phi(x)$  attorno allo stato di vuoto definito da

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Procedendo in analogia al paragrafo 1.7.2, scegliamo  $\phi(x)$  come

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

In questo modo abbiamo "spazzato via" ("gauged away") tre campi scalari lasciando il solo campo di Higgs  $H(x)$ .

L'argomento è simile, anche se più complicato, al caso precedente nel quale eravamo partiti considerando un unico campo scalare complesso. Sostanzialmente ci avvaliamo dell'invarianza per  $SU(2)$  - che corrisponde a invarianza per rotazioni nello spazio di  $SU(2)$  - per allineare il campo arbitrario  $\phi(x)$  punto per punto nella direzione "giù" facendo l'appropriata rotazione di  $SU(2)$ . Naturalmente differenti  $\phi(x)$  avranno differenti fasi rispetto alla direzione "giù" e la fase sarà dipendente dalle coordinate spazio-temporali. Se allora parametrizziamo l'arbitrario  $\phi(x)$  in modulo e fase

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} e^{i\theta(x)\cdot\tau/2v}$$

saremo in grado di eliminare  $\theta(x)$  facendo l'appropriata scelta del parametro di gauge  $\mathbf{\Lambda}(x)$ ; ovvero, poiché

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-\frac{ig\mathbf{\Lambda}(x)\cdot\tau}{2}} \phi(x)$$

basta scegliere

$$\mathbf{\Lambda}(x) = \frac{\boldsymbol{\theta}(x)}{gv}$$

per avere

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

e, eliminando l'apice, la 1.55.

Inserendo la 1.55 nella lagrangiana 1.54 troviamo

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \lambda v^2 H^2 \right] + \frac{g^2 v^2}{8} \left[ (W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2 \right] \quad (1.56)$$

*+termini di ordine più elevato + termini di energia cinetica dei campi  $\mathbf{W}$*

Questa lagrangiana descrive un campo scalare massivo di Higgs con massa

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v = \sqrt{-2\mu^2} \quad (1.57)$$

e tre campi di gauge massivi con massa

$$m_W = \frac{1}{2}gv \quad (1.58)$$

## 1.8 Unitarietà e rinormalizzabilità

Prendendo la lagrangiana 1.52 (o anche la 1.56) come lagrangiana quantistica e sviluppando la teoria delle perturbazioni, i propagatori dei campi di gauge presentano poli in corrispondenza delle masse delle particelle fisiche; sono cioè del tipo

$$i \frac{-g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu / M^2}{k^2 - M^2}$$

Nel limite degli alti momenti, i propagatori sono dominati dal termine

$$\frac{k^\mu k^\nu / M^2}{k^2 - M^2}$$

che tende a una costante per  $k \rightarrow \infty$  e che, pertanto, sembra condurre a sgradevoli divergenze nel calcolo dei grafici di Feynman che richiedano l'integrazione su un loop. Tuttavia, grazie alla invarianza di gauge che è alla base della teoria, è possibile dimostrare che le divergenze si cancellano e la teoria è rinormalizzabile<sup>12</sup>. Per dimostrare tale rinormalizzabilità non è conveniente usare la gauge unitaria ma è opportuno introdurre una intera classe di gauges, dipendenti da un parametro  $\xi$ . In queste gauges, dette *R-gauges*, il propagatore dei bosoni vettoriali è

$$i \left[ -g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi) k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M^2} \right] \frac{1}{k^2 - M^2} \quad (1.59)$$

il quale, per  $\xi \neq 0$ , tende a  $1/k^2$  per  $k^2 \rightarrow \infty$ , cosicché i problemi di divergenze spariscono. Si noti che nel propagatore 1.59 sembra esserci un altro polo (diverso da quello corrispondente alla particella fisica) a  $k^2 = \xi M^2$ ; si tratta di un polo non fisico in quanto dipendente dal parametro arbitrario  $\xi$ . La gauge unitaria (*U-gauge*) corrisponde a  $\xi \rightarrow \infty$ . Per i calcoli a livello "albero" è sempre conveniente usare questa gauge; solo quando si va ad ordini più elevati, per il cui calcolo sono necessari integrali di loop, la scelta della *R-gauge* diventa conveniente.

---

<sup>12</sup>La dimostrazione fu data da 'tHooft. Una trattazione completa è riportata in Nucl. Phys. B35, 173 (1971).

