

## ELEMENTI DI CIRCUITO E RETI ELETTRICHE

In questo capitolo trattiamo gli *elementi di circuito lineari* cioè quelli cui è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti.

### §2.1. Componenti elettrici ideali

Un *componente elettrico* è un dispositivo dotato di *terminali* o *nodi*. Fra questi terminali c'è una differenza di potenziale e dagli stessi terminali passa una corrente. Una *rete* è un insieme di componenti fra di loro interconnessi in modo da avere terminali in comune. In effetti prenderemo in considerazione gli elementi ideali.

#### §2.1.1 Bipoli

Un *bipolo* è un insieme di componenti elettrici accessibili da due nodi. In Fig.2.1-1 diamo la rappresentazione grafica di un bipolo.  $V$  è la tensione ai capi del bipolo,  $I$  è la corrente nel medesimo. Un bipolo si dice *elementare* quando è costituito da un solo componente.

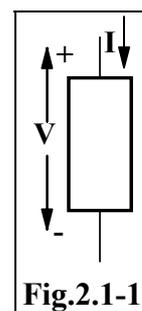


Fig.2.1-1

Un bipolo si dice *passivo* se la relazione fra la tensione ai suoi capi e la corrente nel bipolo dipende soltanto dal bipolo stesso. Si definisce impedenza del bipolo il rapporto fra la trasformata della tensione e quella della corrente con condizioni iniziali nulle.

#### §2.1.1.1 Bipoli elementari passivi

I bipoli elementari passivi ideali sono i *resistori*, i *condensatori* e gli *induttori* dei quali abbiamo discusso diffusamente nel §1.3. Nella figura a lato sono mostrati i simboli che sono usati per indicare questi componenti

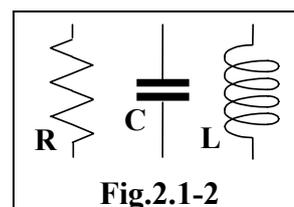


Fig.2.1-2

#### §2.1.1.2 Bipoli attivi

Un bipolo si dice *attivo* se contiene al suo interno almeno un bipolo elementare attivo. Un bipolo elementare si dice attivo quando non soddisfa la condizione della definizione dei bipoli elementari passivi. Per esso non è possibile definire una impedenza. I bipoli attivi sono i *generatori di tensione e di corrente*.

#### §2.1.1.2.1 Generatori indipendenti di tensione

È il bipolo a fissare la tensione  $V_G$  ai suoi capi, indipendentemente dalla corrente che lo attraversa. In questo caso il bipolo è un generatore ideale di tensione  $V_G$ . La relazione I-V non dipende soltanto dal bipolo ma anche dal circuito in cui il generatore è inserito. Il simbolo grafico relativo è mostrato nella Fig.2.1-3

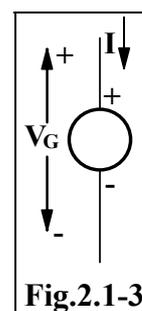
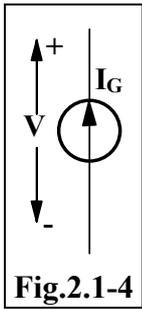


Fig.2.1-3



### §2.1.1.2.2 Generatori indipendenti di corrente

Oppure il bipolo stabilisce la corrente  $I_G$  erogata, indipendentemente dalla tensione che si manifesta ai suoi capi. In questo caso il bipolo è un generatore ideale di corrente  $I_G$ . La Fig.2.1-4 mostra il simbolo grafico del generatore di corrente.

### §2.1.1.2.3 Generatori dipendenti

Un generatore di tensione dipendente fornisce ai suoi capi una tensione  $V_G$  funzione di un'altra tensione o di una corrente in un altro ramo della rete.

$$\text{Se} \quad V_G = k V_{AB} \quad [2.1-1]$$

la f.e.m. del generatore è proporzionale alla differenza di potenziale fra i punti **A** e **B** di una rete. Siamo davanti ad un generatore di tensione dipendente da una tensione.

$$\text{Se, invece,} \quad V_G = h I_r \quad [2.1-2]$$

la f.e.m. del generatore è proporzionale alla corrente  $I_r$  in un ramo **r** di una rete. Si tratta di un generatore di tensione dipendente da una corrente.

Un generatore di corrente dipendente fornisce una corrente  $I_G$  funzione di una tensione o di una corrente in un altro ramo della rete. Ancora una volta abbiamo due casi possibili.

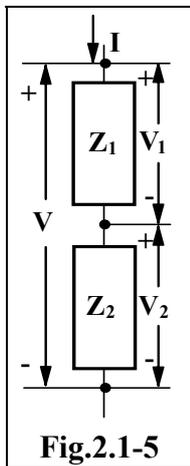
$$\text{Quando} \quad I_G = f V_{AB} \quad [2.1-3]$$

la corrente del generatore è proporzionale alla differenza di potenziale fra i punti **A** e **B** di una rete. Siamo davanti ad un generatore di corrente dipendente da una tensione.

$$\text{Se,} \quad I_G = g I_r \quad [2.1-4]$$

la corrente del generatore è proporzionale alla corrente  $I_r$  in un ramo **r** di una rete. Si tratta di un generatore di corrente dipendente da una corrente. I simboli grafici dei generatori dipendenti sono identici a quelli degli indipendenti.

Un bipolo non elementare si dice **attivo** se contiene almeno un generatore di tensione o di corrente. Altrimenti, dal momento che contiene soltanto elementi passivi, si dice **passivo**.



## §2.1.2 Connessione fra bipoli

Ci sono due modi di collegare fra di loro due bipoli: in **serie** e in **parallelo**.

### §2.1.2.1 Bipoli in serie

Nella connessione **serie** (vedi Fig.2.1-5) fra i due bipoli è comune la corrente. Chiamiamo  $V_1$  e  $V_2$  le tensioni, rispettivamente su  $Z_1$  e  $Z_2$ . Allora

$$V = V_1 + V_2 = Z_1 I + Z_2 I = (Z_1 + Z_2) I = Z I, \quad [2.1-5]$$

cioè  $Z = Z_1 + Z_2$ .  
Cioè, **due impedenze in serie** si comportano come una unica impedenza pari alla **somma delle singole impedenze**. Allora la corrente nella serie è

$$I = \frac{V}{Z_1 + Z_2}. \quad [2.1-6]$$

### §2.1.2.2 Partitori di tensione

Possiamo determinare anche le cadute sulle due impedenze. Si ha

$$V_1 = I Z_1 = \frac{V}{Z_1 + Z_2} Z_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V \quad [2.1-7]$$

$$\text{e} \quad V_2 = I Z_2 = \frac{V}{Z_1 + Z_2} Z_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V. \quad [2.1-8]$$

Queste due ultime espressioni possono essere riscritte come:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad [2.1-9]$$

e

$$\frac{V_2}{V} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad [2.1-10]$$

La tensione complessiva  $V$  viene ripartita sulle due impedenze secondo i due rapporti dati dalle [2.1-9] e [2.1-10], detti *rapporti di partizione*. Si dice che il circuito serie costituisce un *partitore di tensione*.

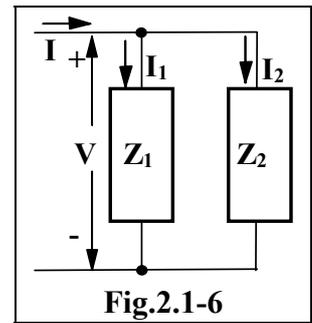
**§2.1.2.3 Bipoli in parallelo**

Nella connessione parallelo, vedi Fig.2.1-6, fra i due bipoli è comune la tensione. Chiamiamo  $I_1$  e  $I_2$  le correnti, rispettivamente, in  $Z_1$  e  $Z_2$ . Allora

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) V,$$

in cui

$$Z = \frac{1}{1/Z_1 + 1/Z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = Z_1 || Z_2. \quad [2.1-11]$$



In effetti

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2},$$

o anche

$$Y = Y_1 + Y_2. \quad [2.1-12]$$

Cioè due *ammettenze in parallelo* si comportano come una unica ammettenza pari alla *somma delle singole ammettenze*

**§2.1.2.4 Partitori di corrente**

Possiamo determinare anche le correnti nelle due impedenze del parallelo.

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{I}{Z_1} Z = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I \quad [2.1-13]$$

e

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{I}{Z_2} Z = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I. \quad [2.1-14]$$

Queste due ultime espressioni possono essere riscritte come:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad [2.1-15]$$

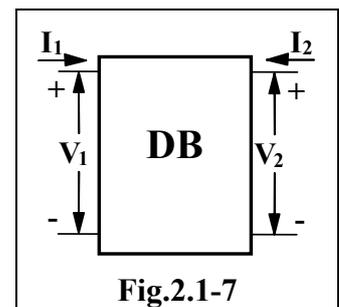
e

$$\frac{I_2}{I} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad [2.1-16]$$

La corrente complessiva  $I$  viene ripartita fra le due impedenze secondo i due rapporti dati dalle [2.1-15] e [2.1-16], detti ancora una volta, *rapporti di partizione*. Si dice che il circuito parallelo è un *partitore di corrente*.

**§2.1.3 Doppio Bipoli**

Un *Doppio Bipolo (DB)* è un elemento di circuito accessibile da due coppie di nodi. Ognuna di queste coppie di nodi costituisce una porta. Pertanto il DB viene spesso chiamato circuito *2-porte*. Indichiamo con  $V_1$  e  $V_2$  le tensioni delle porte di sinistra e destra, rispettivamente, come mostrato in Fig.2.1-7, e con  $I_1$  e  $I_2$  le correnti relative alle due porte. Si faccia attenzione al senso che convenzionalmente viene assegnato alle correnti ed alla polarità delle tensioni.

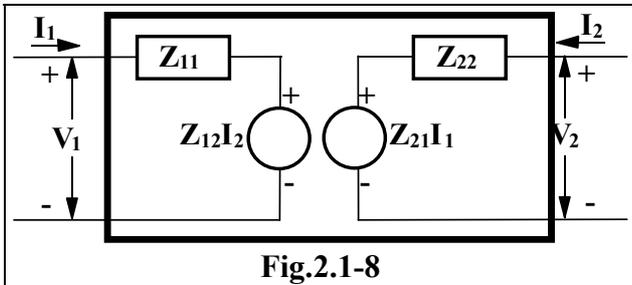


Poiché si sta parlando solo di elementi lineari considereremo soltanto DB lineari.

Un DB è definito dalle relazioni fra le due tensioni e le due correnti delle porte. Due di que-

ste possono essere assunte come cause e le altre due risulteranno gli effetti relativi. In altre parole due possono essere assunte come variabili indipendenti e le altre due saranno le variabili dipendenti. Dal momento che abbiamo quattro variabili, si hanno  $\binom{4}{2} = 6$  possibili scelte di coppie di variabili indipendenti. Considereremo solo quattro di queste 6 possibilità.

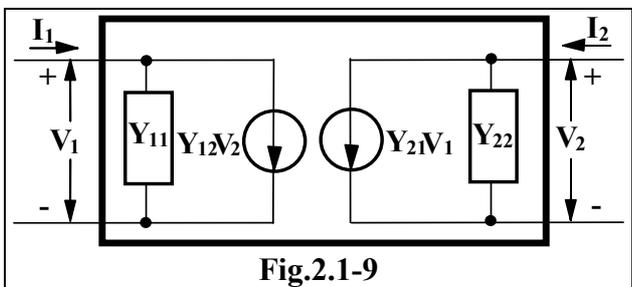
Quando le variabili indipendenti sono le due correnti, le tensioni sono una combinazione lineare di queste correnti ed i coefficienti di proporzionalità (*parametri*) hanno le dimensioni di *impedenze*. In tal caso si dice che si sta usando la configurazione a *parametri Z*. Scriviamo allora



La figura accanto mostra il circuito equivalente del DB con parametri Z.

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \quad [2.1-17]$$

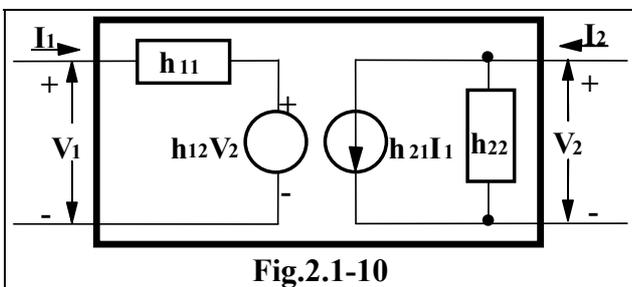
Se le variabili indipendenti sono le due tensioni, le correnti sono una combinazione lineare di queste tensioni ed i parametri hanno le dimensioni di *ammittenze*. La configurazione viene detta a *parametri Y*.



Accanto è mostrato il circuito equivalente del DB con parametri Y.

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \quad [2.1-18]$$

Quando le variabili indipendenti sono la tensione V2 e la corrente I1, le altre due variabili sono una combinazione lineare di queste ed i parametri hanno tutte dimensioni diverse. Si tratta dei *parametri h*.

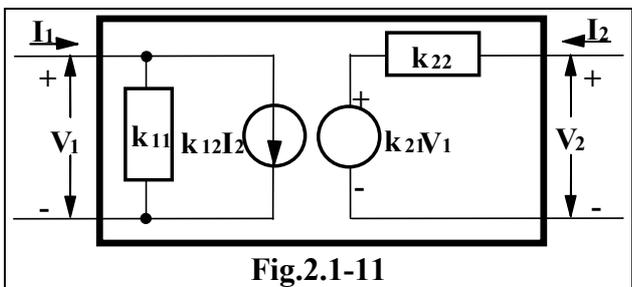


Il circuito equivalente del DB a parametri ibridi è mostrato accanto.

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases} \quad [2.1-19]$$

Guardando le espressioni si realizza che h11 ha le dimensione di una impedenza, h22 quelle di una ammettenza mentre h12 ed h21 sono adimensionate. Poiché i parametri non hanno tutte le stesse dimensioni si dice che essi sono *ibridi*.

Nel caso che si scelgono come variabili indipendenti la tensione V1 e la corrente I2, le altre due variabili sono una combinazione lineare di queste ed i parametri non hanno dimensioni eguali. Si tratta dei *parametri k* il cui circuito equivalente è mostrato accanto



Il circuito equivalente del DB a parametri ibridi è mostrato accanto.

$$\begin{cases} I_1 = k_{11}V_1 + k_{12}I_2 \\ V_2 = k_{21}V_1 + k_{22}I_2 \end{cases} \quad [2.1-20]$$

k11 ha le dimensione di una ammettenza, k22 quelle di una impedenza mentre k12 ed k21 sono adimensionate. Anche questa volta i parametri non hanno tutte le stesse dimensioni e quindi vengono anche essi chiamati *ibridi*.

Per comodità introduciamo Δ come il determinante della matrice quadrata che si ottiene con

la rappresentazione scelta. Usiamo come pedice  $z, y, h$  o  $k$  a seconda che si usi una rappresentazione oppure un'altra. Per esempio

$$\Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}. \quad [2.1-21]$$

Si può far vedere che nel caso di **doppio bipolo passivo**  $Z_{12} = Z_{21}$  o  $Y_{12} = Y_{21}$  e se il quadripolo passivo è anche **simmetrico** anche  $Z_{11} = Z_{22}$  o  $Y_{11} = Y_{22}$  <sup>[DE], [CO]</sup>.

**§2.1.3.1 Trasformazioni di rappresentazioni**

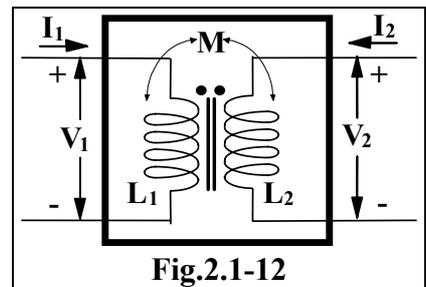
Per ogni rete si può scegliere, a piacere, una qualunque delle rappresentazione dei DB descritte precedentemente. Fra i parametri di una configurazione e quelle di una altra, relative alla stesso DB, esistono delle relazioni. Noti i parametri in una qualunque configurazioni è possibile ricavare quelli di un'altra. In Appendice 2 una tabella riassume queste relazioni fra le varie configurazioni.

**§2.1.3.2 Mutua induzione ed i trasformatori ideali**

La mutua induzione si esercita fra circuiti attraversati da correnti fra i quali c'è accoppiamento magnetico. Cioè quando il flusso dell'induzione magnetica prodotto dalla corrente che circola in un ramo di un circuito si concatena con parti di altri rami dello stesso o di un altro circuito. Perché l'accoppiamento avvenga è necessario che i rami concatenati si comportino da induttanze. L'insieme dei due componenti fra di loro accoppiati prende il nome di **trasformatore**. Il simbolo grafico è quello della figura a lato.

Un **trasformatore** è un particolare DB per il quale si ha

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + M \cdot \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = M \cdot \frac{dI_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} \end{cases} \quad [2.1-22]$$



$L_1$  e  $L_2$  sono le induttanze degli induttori di Fig.2.1-12.  $M$ , detto **coefficiente di mutua induzione**, anch'esso misurato in Henry, esprime l'effetto che la variazione di corrente in uno degli induttori produce sull'altro.

Applicando la trasformata di Laplace e considerando nulle le condizioni iniziali

$$\begin{cases} V_1 = sL_1I_1 + sMI_2 \\ V_2 = sMI_1 + sL_2I_2 \end{cases} \quad [2.1-23]$$

Quindi il trasformatore è immediatamente descrivibile come un DB con i parametri  $Z$ .

Se si applica la trasformata di Fourier

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ \mathcal{V}_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases} \quad [2.1-24]$$

Se tutto il flusso prodotto da uno degli avvolgimenti si concatena tutto con l'altro, senza alcuna dispersione si ha il massimo  $M_{Max}$  di mutua induzione. Si può dimostrare che

$$M_{Max} = \sqrt{L_1 L_2}. \quad [2.1-25]$$

Si definisce il coefficiente d'accoppiamento  $k$  il rapporto fra il coefficiente di mutua induzione e quello massimo. Cioè:

$$k = \frac{M}{M_{Max}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad [2.1-26]$$

**§2.2. Reti Elettriche**

Un insieme di dispositivi ed apparecchiature interconnesse tra di loro in modo da consentire il passaggio di cariche elettriche viene indicato come **rete** o **circuito elettrico**. In questa parte ci occu-

priamo dei metodi per risolvere le reti. Cioè dei modi con i quali è possibile conoscere i valori delle tensioni e delle correnti in ciascuna parte del circuito.

### §2.2.1 Teorema di Thevenin

Nella Fig.2.2-1a è rappresentata una generica rete elettrica lineare  $R$  che obbedisce al principio di sovrapposizione. Supponiamo che al suo interno ci siano  $r_i$  rami il cui  $i$ -esimo abbia un generatore di tensione  $V_i$  e  $r_j$  rami il cui  $j$ -esimo abbia un generatore di corrente  $I_j$ . Consideriamo i nodi  $A$  e  $B$ . Sul nodo  $A$  sia l'impedenza  $Z_G$ . Sia  $I$  la corrente che esce da  $A$  e che, quindi scorre in  $Z_G$ . Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti tenendo in conto, ad una ad una, le cause. Quando consideriamo il generatore  $V_i$  cortocircuitiamo tutti gli altri generatori di tensione e apriamo tutti quelli di corrente e quando consideriamo il generatore di corrente  $I_j$  apriamo tutti gli altri generatori di corrente e cortocircuitiamo tutti quelli di tensione. Ogni generatore produce fra i nodi  $A$  e  $B$  una  $V_{AB}$  proporzionale alla causa che lo ha generato. Sommando tutti gli effetti si ha:

$$V_{AB} = -I Z_G + \sum_{i=1}^{r_i} h_i V_i + \sum_{j=1}^{r_j} k_j I_j \quad [2.2-1]$$

estesa a tutti gli  $i$  e  $j$ . Poniamo

$$V_V = \sum_{i=1}^{r_i} h_i V_i + \sum_{j=1}^{r_j} k_j I_j,$$

la precedente espressione si scrive

$$V_{AB} = V_V - I Z_G. \quad [2.2-2]$$

$V_V$  viene detta tensione a vuoto. Infatti, se fra i terminali  $A$  e  $B$  non viene posto alcunché, in  $Z_G$  non scorre corrente e  $V_{AB}$  coincide con la  $V_V$ . Se cortocircuitiamo  $A$  e  $B$  la corrente  $I_{cc}$  (detta corrente di cortocircuito) che scorre in  $Z_G$  è

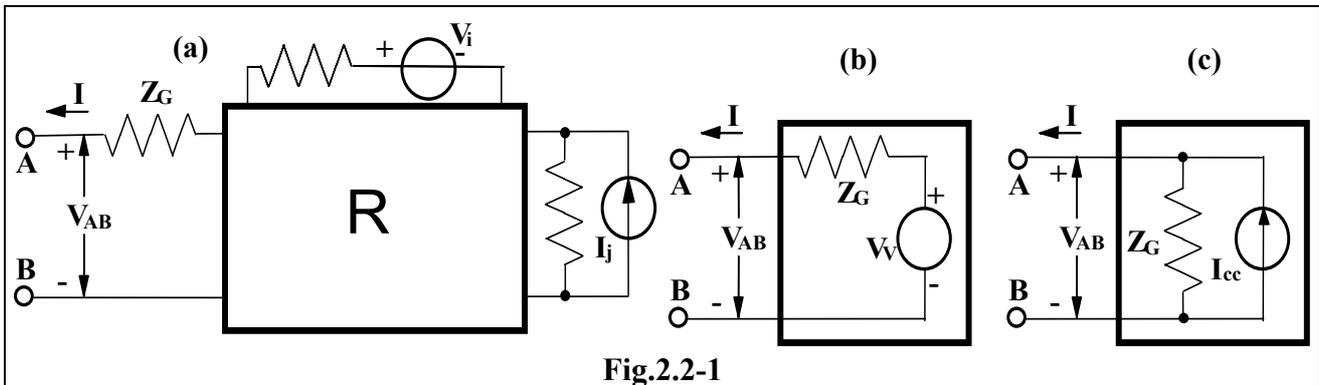


Fig.2.2-1

$$I_{cc} = \frac{V_V}{Z_G}. \quad [2.2-3]$$

Vista dai nodi  $A$  e  $B$  la rete si comporta come un generatore di tensione di forza elettromotrice  $V_V$  e impedenza interna  $Z_G$  o che è lo stesso come un generatore di corrente di valore  $I_{cc}$  con una impedenza interna in parallelo  $Z_G$ .

Le Figg.2.2-1b e c mostrano i circuiti equivalenti della rete  $R$  visti tra  $A$  e  $B$ . Il primo usa un generatore di tensione e l'altro quello di corrente. Tuttavia i due circuiti sono del tutto equivalenti.

Quanto detto si può esprimere nel seguente **Teorema di Thevenin**: *una rete elettrica qualunque, da due qualsiasi nodi, può essere considerata semplicemente come un generatore di tensione con in serie l'impedenza  $Z_G$  o un generatore di corrente con in parallelo la stessa impedenza  $Z_G$ . La f.e.m. del generatore è la tensione a vuoto fra i due punti. La corrente del generatore è la corrente di cortocircuito fra i nodi  $A$  e  $B$ . L'impedenza  $Z_G$  è quella vista tra i nodi  $A$  e  $B$  quando vengono cortocircuitati i generatori indipendenti di tensione ed aperti quelli indipendenti di correnti.*

**§2.2.1.1 Impedenza interna e generatori dipendenti**

Il Teorema di Thevenin può fare compiere errori grossolani quando si è in presenza di generatori dipendenti. Infatti bisogna fare distinzione fra i generatori dipendenti e gli indipendenti. Per spiegare quanto detto usiamo l'esempio della Fig.2.2-2a. Se non si distingue fra i generatori dipendenti ed indipendenti si sarebbe tentati di dire che l'impedenza interna è  $Z_G = R$ .

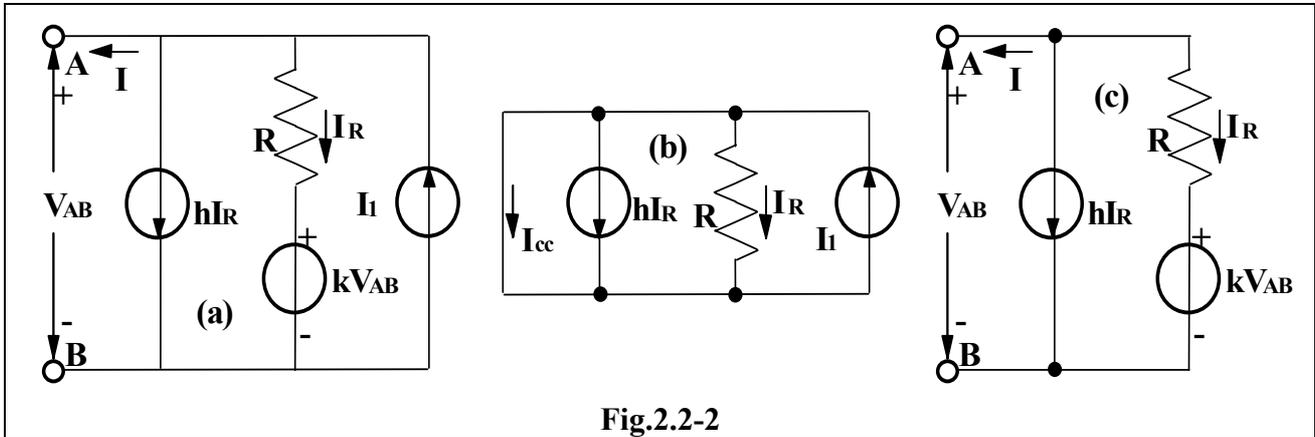


Fig.2.2-2

Le cose vanno in modo differente. Cominciamo a calcolare la  $I_{cc}$ . Per fare ciò osserviamo che (Fig.2.2-2b) cortocircuitando **A** e **B** il generatore dipendente  $k V_{AB}$  è nullo. Quindi è nulla anche la  $I_R$  e l'unica corrente fra i due nodi cortocircuitati è la  $I_1$ . Quindi  $I_{cc} = I_1$ . Calcoliamo adesso la tensione a vuoto  $V_v$ . La corrente  $I_1$  è la somma delle correnti degli altri due rami, cioè:  $I_1 = I_R + h I_R \Rightarrow I_R = I_1/(1+h)$ . La tensione a vuoto si può calcolare dalla somma del generatore  $k V_v$  e la caduta su  $R$ . Cioè  $V_v = k V_v + R I_R \Rightarrow V_v = R I_1/(1-k)$ . Sfruttando la precedente:  $V_v = R I_1/[(1+h)(1-k)]$ . Dal rapporto fra la tensione a vuoto e la  $I_{cc}$  si determina che la  $Z_{eq} = R/[(1+h)(1-k)]$ .

In effetti la  $Z_{eq}$  si poteva calcolare più rapidamente eliminando i generatori indipendenti. Si ha il circuito di Fig.2.2-2c in cui  $I_R = (V_{AB} - k V_{AB})/R = (1-k) V_{AB}/R$ . Quindi  $-I = h I_R + I_R = (1+h)(1-k) V_{AB}/R$ . E il rapporto fra  $V_{AB}$  e  $-I$  da direttamente lo stesso risultato precedente.

**§2.2.2 Teorema di Millmann**

Fra i due nodi **A** e **B** di una rete siano connessi  $k$  rami. Ogni  $i$ -esimo di questi rami, per il Teorema di Thevenin, può essere semplificato in un generatore  $I_i$  di corrente ed una ammettenza in parallelo  $Y_i$ .  $I_i$  è la corrente di cortocircuito dell' $i$ -esimo ramo (Fig.2.2-3). Allora la tensione fra i due terminali è la somma delle correnti di cortocircuito di tutti i rami per l'impedenza complessiva della rete. Poiché i rami sono in parallelo, l'impedenza equivalente offerta dai rami è

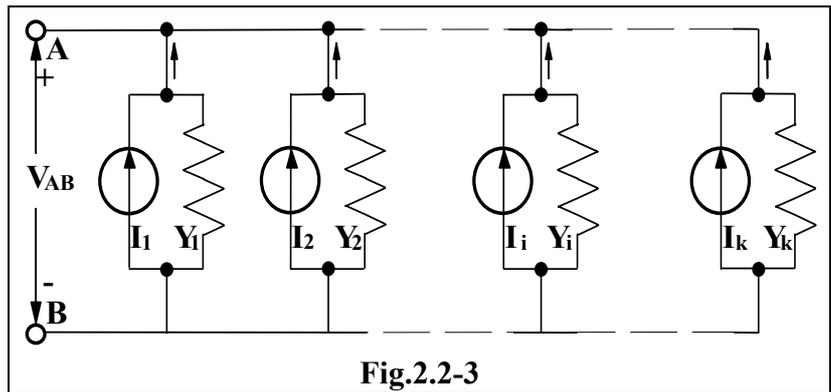


Fig.2.2-3

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_k Y_k. \tag{2.2-4}$$

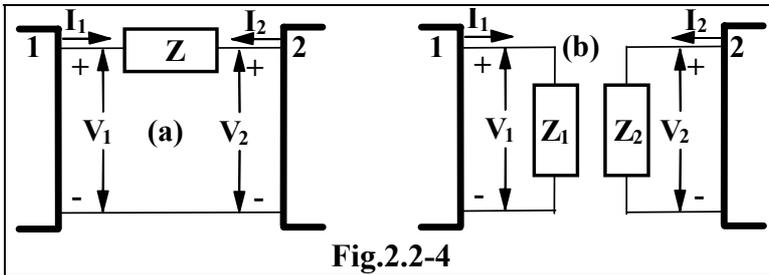
E la tensione fra i due morsetti è

$$V_{AB} = \frac{\sum_k I_k}{\sum_k Y_k}. \tag{2.2-5}$$

Che esprime il cosiddetto **Teorema di Miller** che si può anche formulare a come: **la tensione ai ca-**

*pi di rami connessi in parallelo è la sommatoria delle correnti di cortocircuito dei rami divisa la sommatoria delle ammettenze degli stessi rami.*

### §2.2.3 Teorema di Miller



Una rete elettrica sia divisibile in due reti distinte connesse fra di loro da una impedenza  $Z$  collegata fra due punti **1** e **2** come mostrato in Fig.2.2-4a. Se si conosce il rapporto  $k = V_2/V_1$  la rete si può dividere in due reti fra di loro non connesse. Infatti la corrente che scorre in  $Z$  è

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{Z} = \frac{V_1}{Z} \cdot \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{V_1}{Z} \cdot (1 - k) = \frac{V_1}{Z_1},$$

con

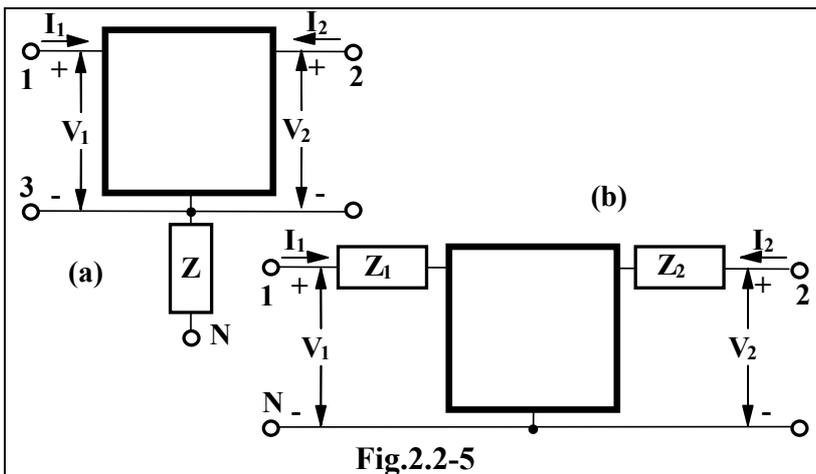
$$Z_1 = \frac{Z}{1 - k}. \quad [2.2-6]$$

Analogamente

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{Z} = \frac{V_2}{Z} \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{V_2}{Z} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{V_2}{Z_2},$$

in cui

$$Z_2 = \frac{k}{k - 1} Z. \quad [2.2-7]$$



L'effetto di  $Z$  viene ricondotto a quello di due impedenze connesse ai nodi **1** e **2** come mostrato in Fig.2.2-4b.

Il teorema di Miller ha un duale e cioè: **una impedenza connessa in serie ad un nodo, può essere eliminata riportando due opportune impedenze in serie agli altri due nodi** (Fig.2.2-5a).

Poniamo  $h = -I_2/I_1$ , con  $I_1$  e  $I_2$  le correnti che entrano, rispettivamente nei nodi **1** e **2**. L'impedenza da eliminare è connessa fra il nodo **3** ed il nodo **N**. Si ha

$$V_{1N} = V_{13} + (I_1 + I_2) Z = V_{13} + I_1 \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) Z = V_{13} + I_1(1 - h) Z = V_{13} + I_1 Z_1,$$

Quindi

$$Z_1 = (1 - h) Z. \quad [2.2-8]$$

$$\text{Analogamente } V_{2N} = V_{23} + (I_1 + I_2) Z = V_{23} + I_2 \left(\frac{I_1}{I_2} + 1\right) Z = V_{23} + I_2 \left(1 - \frac{1}{h}\right) Z = V_{23} + I_2 Z_2,$$

in cui

$$Z_2 = \frac{h - 1}{h} Z. \quad [2.2-9]$$

Il circuito equivalente della rete in cui l'effetto di  $Z$  è riportato dalle due impedenze  $Z_1$  e  $Z_2$  è mostrato nella Fig.2.2-5b.

§2.2.4 I Grafi

Se per il momento prescindiamo dalla vera natura dei singoli componenti della rete ma rappresentiamo soltanto la loro presenza con un tratto di linea fra due nodi otteniamo quello che viene comunemente detto il **grafo** della rete. In Fig.2.2-6 sono rappresentati una rete elettrica ed il relativo grafo. Non è che dal grafo si possono ricavare tutte le proprietà della rete. Tuttavia alcune proprietà sono ricavabili immediatamente dalla struttura del grafo.

Cominciamo definendo come **nodo semplice** un punto di giunzione fra solo due elementi differenti. Ad esempio i nodi 4 e 6 della Fig.2.2-6. Un nodo si dice **complesso** se è il punto di giunzione di almeno tre elementi. Ad esempio i nodi 1, 2, 3 e 5 della stessa figura. Ogni linea che unisce due nodi complessi prende il nome di **ramo**. C'è un ramo tra i nodi 1 e 2. Non è un ramo quello tra i nodi 3 e 4 e neppure quello tra i nodi 5 e 4. Da ora in poi i nodi complessi saranno semplicemente chiamati **nodi**.

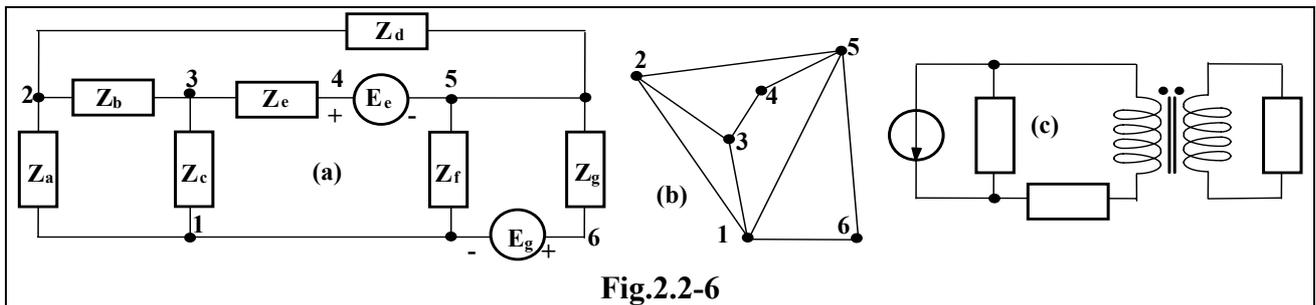


Fig.2.2-6

Quando sono presenti circuiti magnetici è possibile che ci siano parti della rete non connesse direttamente. In tal caso si dice che la rete ha parti separabili. La rete di Fig.2.2-6c ha due parti separabili.

Una linea chiusa di un grafo si dice **maglia**.

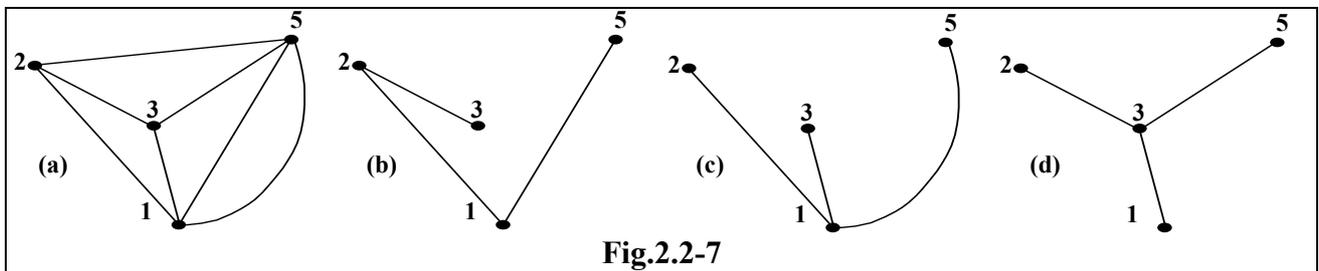


Fig.2.2-7

Indichiamo con **n** il numero di nodi complessi, con **r** il numero di rami e con **p** il numero di parti separabili. Se da un grafo eliminiamo un ramo alla volta, così da aprire, ogni volta, una maglia, finché, alla fine, non se ne abbia più alcuna, ma, tuttavia tutti i nodi complessi rimangano connessi, si ottiene uno **scheletro** del grafo. Per ogni grafo non c'è un solo scheletro. In Fig.2.2-7a è ridisegnato il grafo della Fig.2.2-6b senza mostrare i nodi semplici. Le altre figure 2.2-7 sono alcuni possibili scheletri dello stesso grafo.

Lo scheletro di una rete di **n** nodi e di una sola parte separabile è di **n-1** rami. Infatti per unire **n** nodi occorrono solo **n-1** collegamenti. Qualsiasi altro collegamento chiude una maglia e non si ha più uno scheletro. Nel caso di una rete con **p** parti separabili è semplice convincersi che il relativo scheletro è fatto di **n-p** rami. Questa proprietà è indipendente dalla scelta che si fa per lo scheletro di una rete.

Una volta scelto lo scheletro, i rami della rete o sono fra gli **s** che costituiscono lo scheletro della rete o fra quelli rimossi per ottenere lo scheletro, che sono **m**, e che sono anche **detti rami di maglia**. Per quanto detto prima si ha che

$$s = n - p. \tag{2.2-10}$$

Se in totale c'erano **r** rami, cioè  $r = s + m$  segue che

$$m = r - s = r - n + p. \quad [2.2-11]$$

### §2.2.5 Le leggi di Kirchhoff

Per la risoluzione dei circuiti elettrici rivestono importanza fondamentale le leggi di Kirchhoff.

#### §2.2.5.1 La legge di Kirchhoff per le maglie

Consideriamo una maglia con  $r$  rami. In generale nell' $i$ -esimo ramo della maglia circola una corrente  $I_i$  e c'è un generatore di f.e.m.  $E_i$  ed una impedenza in serie  $Z_i$ . Qualora fossero presenti generatori di corrente  $I_{icc}$  occorre trasformarli applicando il teorema di Thevenin. Cioè

$$E_i = Z_i I_{icc}. \quad [2.2-12]$$

Se ci sono  $r$  rami, faranno parte della maglia  $r$  nodi. Siano 1, 2, ..,  $i$ , ..,  $r$  i nodi della maglia. La differenza di potenziale fra il nodo  $i$ -esimo e il nodo  $i+1$ -esimo è

$$V_{i+1} - V_i = E_i - Z_i I_i. \quad [2.2-13]$$

Per primo bisogna assegnare un verso arbitrario alla corrente di maglia. Nell'esempio di Fig.2.2-8 il senso scelto arbitrariamente per la corrente di maglia  $I$  è mostrato con un cerchietto con freccia interno alla maglia. Le tensioni sono positive se tendono a fare scorrere correnti concordi a quelle di maglia e le correnti sono positive nella stessa ipotesi. Nell'esempio citato  $E_b$  è positiva mentre  $E_d$  è negativa.  $I_c$  è negativa e  $I_a$  è positiva.

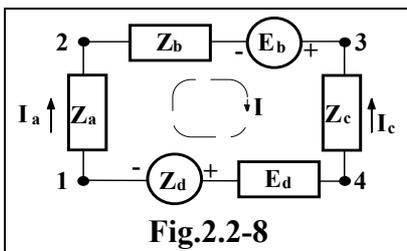


Fig.2.2-8

Il nodo  $r$ -esimo è collegato al primo dal  $r$ -esimo ramo per chiudere la maglia. Per questo ramo si ha

$$V_1 - V_r = E_r - Z_r I_r. \quad [2.2-14]$$

Sommiamo la [2.2-13] sui primi  $r-1$  rami. Si ha

$$\sum_{i,1}^{r-1} (V_{i+1} - V_i) = \sum_{i,1}^{r-1} (E_i - Z_i I_i),$$

Cioè

$$\sum_{i,1}^{r-1} V_{i+1} - \sum_{i,1}^{r-1} V_i = \sum_{i,1}^{r-1} E_i - \sum_{i,1}^{r-1} Z_i I_i.$$

Il primo membro si riduce a  $V_r - V_1$  perché tutti i termini intermedi si elidono. Sommando con la [2.2-14] si ha:

$$V_r - V_1 + V_1 - V_r = 0 = \sum_{i,1}^{r-1} E_i - \sum_{i,1}^{r-1} Z_i I_i + E_r - Z_r I_r.$$

In conclusione

$$\sum_{i,1}^r E_i = \sum_{i,1}^r Z_i I_i. \quad [2.2-15]$$

che esprime la legge di Kirchhoff per le maglie: **in una maglia la sommatoria delle forze elettromotrici dei generatori nei vari rami eguaglia la sommatoria delle cadute di potenziale sulle impedenze dei vari rami.**

#### §2.2.5.2 La legge di Kirchhoff per i nodi

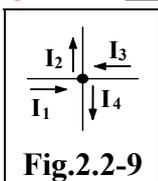


Fig.2.2-9

Prendiamo ora in considerazione il nodo cui affluiscono  $r$  rami. Assumiamo positive le correnti che entrano nel nodo e negative quelle che ne escono. Nell'esempio della Fig.2.2-9,  $I_1$  e  $I_3$  sono positive,  $I_2$  e  $I_4$  sono negative.

**La legge di Kirchhoff per i nodi afferma che la sommatoria delle correnti che entrano nel nodo è nulla:**

$$\sum_{i,1}^r I_i = 0. \quad [2.2-16]$$

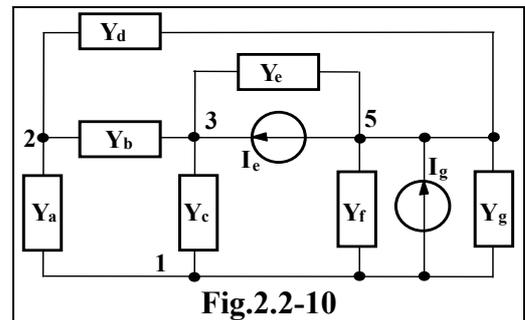
La legge di Kirchhoff per i nodi segue direttamente dalla conservazione della carica. Infatti la rela-

zione precedente stabilisce che in ogni nodo la sommatoria delle cariche che in intervallo di tempo entrano nel nodo è eguale a quelle che ne escono e cioè nel nodo le cariche non si producono ne si distruggono.

**§2.2.5.3 Risoluzione delle reti elettriche con il metodo dei nodi**

Per la risoluzione della rete si applica la legge di Kirchhoff ai nodi. Per spiegare il metodo è bene riferirsi ad un esempio. Prendiamo una rete con n nodi e una parte separabile. Adottiamo un nodo, per esempio il nodo n, come nodo di riferimento. Le tensioni degli altri n-1 nodi saranno riferite a questo nodo. Basta conoscere le tensioni degli n-1 modi per avere risolto la rete. Se, invece, ci sono p parti separabili, per ognuna di esse si prende uno dei suoi nodi come riferimento. Si immaginano tutti i nodi di riferimento fittiziamente connessi insieme, per esempio a massa, e le tensioni necessarie per risolvere la rete sono il numero di rami s dello scheletro date dalla [2.2-10] e cioè sono n-p. C'è da dire, però, che se nella rete ci sono generatori di tensione bisogna trasformarli in generatori di corrente.

Il circuito di Fig.2.2-6a, applicando il Teorema di Thevenin, è ridisegnato in Fig.2.2-10 con generatori di corrente invece che di tensione. Inoltre, invece delle impedenze sono mostrati i loro inversi e cioè le ammettenze. In esso si è posto  $I_g = E_g/Z_g$  e  $I_e = E_e/Z_e$ . Dal momento che  $p = 1$  e  $n = 4$  il numero di tensioni incognite è  $n-p = 3$ . Scriviamo le equazioni delle correnti ai nodi applicando la [2.2-16] e prendendo come riferimento il nodo 1.



Al nodo 2  $V_2 Y_a + (V_2 - V_3) Y_b + (V_2 - V_5) Y_d = 0,$   
 mentre al nodo 3  $V_3 Y_c + (V_3 - V_2) Y_b - I_e + (V_3 - V_5) Y_e = 0,$   
 ed al nodo 5  $V_5 (Y_f + Y_g) - I_g + (V_5 - V_3) Y_e + I_e + (V_5 - V_2) Y_d = 0.$   
 Riordinando  $V_2 (Y_a + Y_b + Y_d) - V_3 Y_b - V_5 Y_d = 0;$   
 $-V_2 Y_b + V_3 (Y_b + Y_c + Y_e) - V_5 Y_e = I_e;$   
 $-V_2 Y_d - V_3 Y_e + V_5 (Y_d + Y_e + Y_f + Y_g) = I_g - I_e.$

La matrice  $Y$  dei coefficienti è simmetrica rispetto la diagonale principale <sup>[MAS]</sup>. Ed è

$$Y = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_d & -Y_b & -Y_d \\ -Y_b & Y_b + Y_c + Y_e & -Y_e \\ -Y_d & -Y_e & Y_d + Y_e + Y_f + Y_g \end{bmatrix}$$

Questa della simmetria è una proprietà generale valida per tutte le reti.

Chiamiamo  $V$  il vettore delle tensioni da ricavare e  $I$  il vettore dei termini noti:

$$V = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_5 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 0 \\ I_e \\ I_g - I_e \end{bmatrix}$$

Il sistema si può riscrivere in modo simbolico come

$$I = V \cdot Y \tag{2.2-17}$$

e può essere risolto applicando le note regole di Kramer.

**§2.2.5.4 Risoluzione delle reti elettriche con il metodo delle maglie**

Si può adottare un altro metodo per la risoluzione dei circuiti che richiede la presenza soltanto di generatori di tensione. Questa volta si tratta di determinare la corrente delle maglie. Scelto a piacere uno scheletro, l'aggiunta di uno qualunque dei rami rimossi per ottenere lo scheletro chiude una delle maglie. Assumiamo come corrente di maglia proprio la corrente di questo ramo. Questa corrente circola anche negli altri rami della maglia. Per ogni ramo aggiunto si ha una diversa maglia con una differente corrente di maglia. Quindi in ogni ramo della rete passa una corrente che

è una combinazione lineare delle correnti di maglia. Il numero  $m$  di maglie indipendenti è dato dalla [2.2-11].

Per far capire meglio come applicare il metodo, prendiamo sempre come esempio la rete di Fig.2.2-6 ripresa in Fig.2.2-11a. Scegliamo lo scheletro della Fig.2.2-7b riportato in Fig.2.2-11b. I rami soppressi per ottenere lo scheletro sono quelli in cui stanno le impedenze  $Z_c$ ,  $Z_d$ ,  $Z_e$  e  $Z_g$  e pertanto le correnti di maglia le chiameremo  $I_c$ ,  $I_d$ ,  $I_e$  e  $I_g$ , a seconda del ramo soppresso. Scegliamo le maglie come nella Fig.2.2-11a in cui sono indicati i versi arbitrari assegnati alle correnti di maglia.

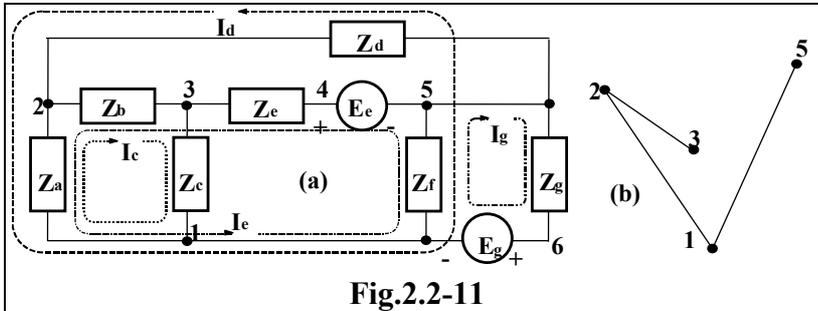


Fig.2.2-11

Cominciamo con il considerare la maglia 1-2-3-1. La corrente di maglia  $I_c$  incontra l'impedenza complessiva  $Z_a+Z_b+Z_c$ . Essa determina, allora una caduta di potenziale  $I_c(Z_a+Z_b+Z_c)$ . Ma nella stessa maglia circola la corrente  $I_d$ , nel ramo  $Z_a$ , determinando una caduta  $-Z_a I_d$ . Inoltre la corrente  $I_e$

circola in  $(Z_a+Z_b)$  producendo una caduta di potenziale  $-I_e(Z_a+Z_b)$ .  $I_g$  non circola nella maglia in studio. Non sono presenti generatori nella maglia. Allora per questa maglia si ha:

$$I_c(Z_a+Z_b+Z_c)-I_d Z_a-I_e(Z_a+Z_b) = 0.$$

Nella maglia 1-5-2-1 la corrente  $I_c$  circola nel ramo di  $Z_a$  e produce una caduta  $-I_c Z_a$ . La corrente di maglia  $I_d$  passa nelle impedenze  $Z_a$ ,  $Z_d$  e  $Z_f$  e produce una caduta  $I_d(Z_a+Z_b+Z_f)$ .  $I_e$  attraversa le impedenze  $Z_a+Z_f$  dando una caduta di potenziale  $I_e(Z_a+Z_f)$ . Per finire, la corrente  $I_g$  scorre solo in  $Z_f$  e da una caduta  $I_g Z_f$ . Anche in questa maglia non ci sono generatori. Si ha

$$-I_c Z_a+I_d(Z_a+Z_d+Z_f)+I_e(Z_a+Z_f)+I_g Z_f = 0.$$

Nella maglia 1-5-3-2-1  $I_c$  circola nei rami  $Z_a$  e  $Z_b$  e da una caduta  $-I_c(Z_a+Z_b)$ .  $I_d$  passa nelle impedenze  $Z_a$  e  $Z_f$  e produce una caduta  $I_d(Z_a+Z_f)$ . La corrente di maglia  $I_e$  attraversa le impedenze  $Z_a$ ,  $Z_b$ ,  $Z_e$  e  $Z_f$  causando una caduta  $I_e(Z_a+Z_b+Z_e+Z_f)$ . E per finire  $I_g$  scorre solo in  $Z_f$  e determina una caduta  $I_g Z_f$ . In questa maglia c'è il generatore di tensione  $E_e$ . Quindi

$$-I_c(Z_a+Z_b)+I_d(Z_a+Z_f)+I_e(Z_a+Z_b+Z_e+Z_f)+I_g Z_f = E_e.$$

Nella maglia 1-5-1  $I_c$  non circola mentre  $I_d$  scorre in  $Z_f$  e da una caduta  $I_d Z_f$ .  $I_e$  attraversa l'impedenza  $Z_f$  determinando una caduta di potenziale  $I_e Z_f$ . Infine la corrente di maglia  $I_g$  fluisce in  $Z_f$  e  $Z_g$  e produce una caduta  $I_g(Z_f+Z_g)$ . In questa maglia c'è il generatore di tensione  $E_g$  ma inserito in modo da spingere la corrente in verso opposto a quello di quella di maglia. Allora

$$I_d Z_f+I_e Z_f+I_g(Z_f+Z_g) = -E_g.$$

Ricapitolando:

$$\begin{aligned} I_c(Z_a+Z_b+Z_c)-I_d Z_a-I_e(Z_a+Z_b) &= 0; \\ -I_c Z_a+I_d(Z_a+Z_d+Z_f)+I_e(Z_a+Z_f)+I_g Z_f &= 0; \\ -I_c(Z_a+Z_b)+I_d(Z_a+Z_f)+I_e(Z_a+Z_b+Z_e+Z_f)+I_g Z_f &= E_e; \\ I_d Z_f+I_e Z_f+I_g(Z_f+Z_g) &= -E_g. \end{aligned}$$

Anche questa volta la matrice  $\mathbf{Z}$  del sistema è simmetrica rispetto la diagonale <sup>[MAS]</sup>:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b + Z_c & -Z_a & -(Z_a + Z_b) & 0 \\ -Z_a & Z_a + Z_d + Z_f & Z_a + Z_f & Z_f \\ -(Z_a + Z_b) & Z_a + Z_f & Z_a + Z_b + Z_e + Z_f & Z_f \\ 0 & Z_f & Z_f & Z_f + Z_g \end{bmatrix}$$

Chiamiamo  $\mathbf{I}$  il vettore delle correnti da ricavare e  $\mathbf{V}$  il vettore dei termini noti. Cioè:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_c \\ I_d \\ I_e \\ I_g \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_e \\ -E_g \end{bmatrix}$$

Il sistema si può riscrivere in modo simbolico come

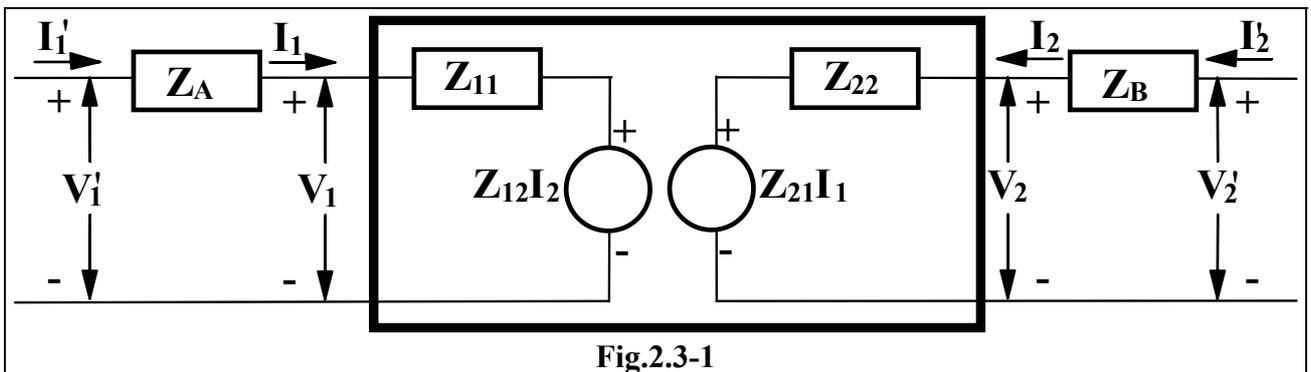
$$\mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z} \qquad [2.2-18]$$

e risolvere praticamente applicando le regole di Kramer.

**§2.3. Connessioni fra bipoli ed un doppio bipolo**

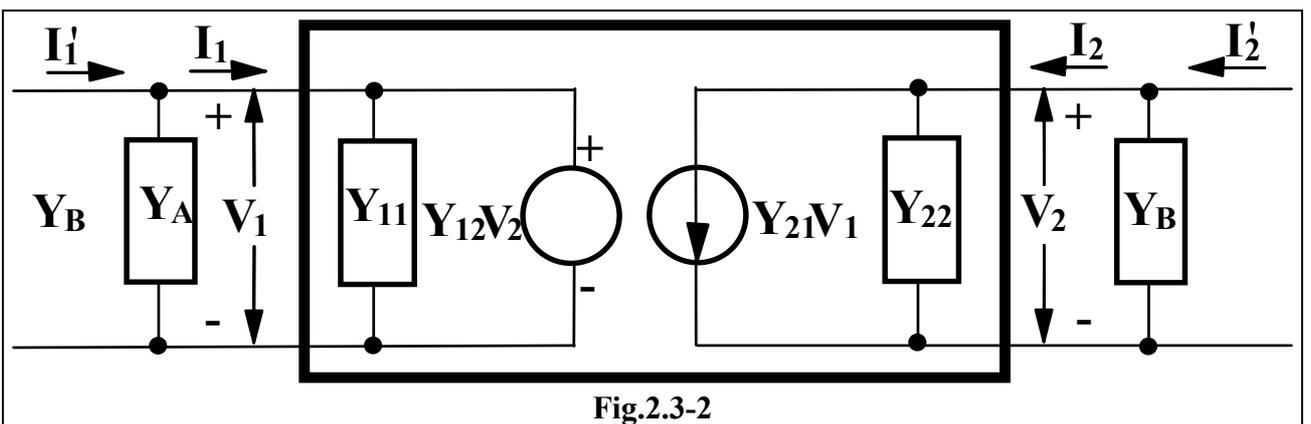
È utile ridurre a soltanto un doppio bipolo DB' una rete in cui sia presente un doppio bipolo DB ed un bipolo esterno. A seconda di come il bipolo esterno è connesso al DB è più conveniente usare una rappresentazione del DB oppure un'altra.

Se si ha una impedenze in serie al DB su una porta conviene usare una rappresentazione che per tale porta abbia come variabile indipendente la corrente e come variabile dipendente la tensione. Pertanto, se si mette un bipolo in serie all'ingresso si usa o la rappresentazione a parametri  $\mathbf{Z}$  o quella a parametri  $\mathbf{h}$ . Se, il bipolo in serie si mette sull'uscita, allora conviene adoperare la rappresentazione a parametri  $\mathbf{Z}$  oppure quella a parametri  $\mathbf{k}$ . Se si hanno ammettenze in parallelo alla porta è, invece, più conveniente una rappresentazione che per tale porta abbia come variabile indipendente la tensione e come variabile dipendente la corrente. Allora, quando si mette un bipolo in parallelo all'ingresso si deve usare la rappresentazione a parametri  $\mathbf{Y}$  o  $\mathbf{k}$ . Se il bipolo si mette sull'uscita allora è più opportuno usare la rappresentazione  $\mathbf{Y}$  o  $\mathbf{h}$ .



Per giustificare la validità pratica di quanto affermato ci rifacciamo ad alcuni esempi. Consideriamo il caso di un doppio bipolo con due impedenze  $Z_A$  e  $Z_B$  connesse in serie come mostrato in Fig.2.3-1. È evidente che se la rappresentazione del doppio bipolo DB è quella a parametri  $\mathbf{Z}$  si può inglobare il tutto in un unico doppio bipolo DB', ancora a parametri  $\mathbf{Z}$ , per il quale

$$Z'_{11} = Z_A + Z_{11}, \quad Z'_{12} = Z_{12}, \quad Z'_{21} = Z_{21}, \quad Z'_{22} = Z_B + Z_{22}. \qquad [2.3-1]$$



Collegiamo ora, invece, ad un DB, due ammettenze  $Y_A$  e  $Y_B$  in parallelo, alle due porte, come rappresentato nella Fig.2.3-2. Se si usano per il DB i parametri  $Y$  si può semplificare il tutto come un unico doppio bipolo DB', anche esso a parametri  $Y$ , e per il quale

$$Y'_{11} = Y_A + Y_{11}, \quad Y'_{12} = Y_{12}, \quad Y'_{21} = Y_{21}, \quad Y'_{22} = Y_B + Y_{22}. \quad [2.3-2]$$

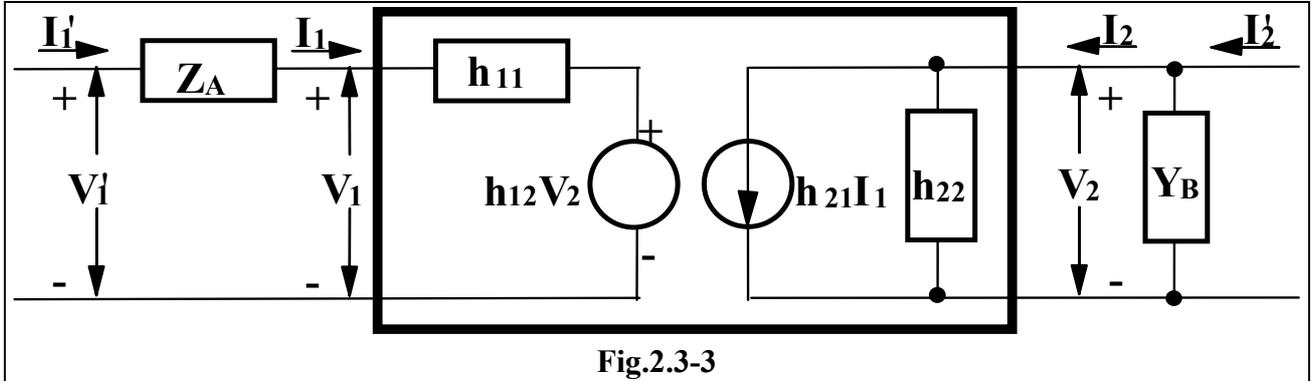


Fig.2.3-3

Nel caso di impedenza  $Z_A$  in serie all'ingresso e di ammettenza  $Y_B$  in parallelo all'uscita, come quella di Fig.2.3-3 conviene partire da una rappresentazione a parametri ibridi del DB ed arrivare ad una altra rappresentazione DB' ancora a parametri ibridi. In tal caso

$$h'_{11} = Z_A + h_{11}, \quad h'_{12} = h_{12}, \quad h'_{21} = h_{21}, \quad h'_{22} = Y_B + h_{22}. \quad [2.3-3]$$

Il caso opposto di ammettenza  $Y_A$  in parallelo all'ingresso e di impedenza  $Z_B$  in serie all'uscita è lasciato come esercizio.

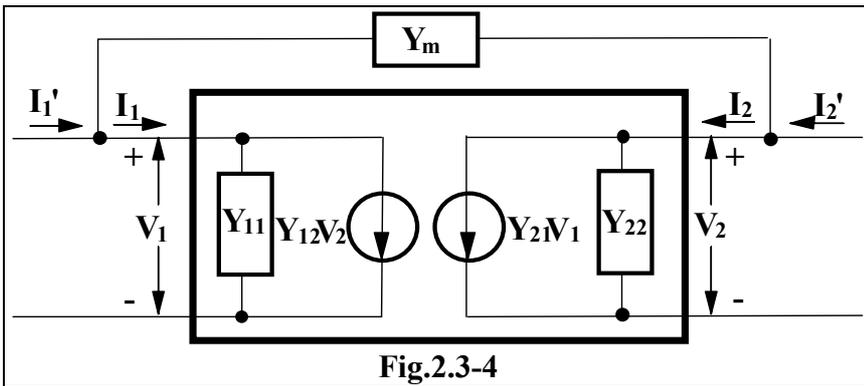


Fig.2.3-4

È interessante il caso relativo ad una impedenza  $Y_m$  fra il nodo d'ingresso e d'uscita della Fig.2.3-4. Partiamo dalla rappresentazione a parametri  $Y$ :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2 \\ I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2 \end{cases}$$

Per le correnti  $I_1'$  e  $I_2'$  si può scrivere:

$$\begin{cases} I_1' = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2 + Y_m \cdot (V_1 - V_2) = (Y_{11} + Y_m) \cdot V_1 + (Y_{12} - Y_m) \cdot V_2 \\ I_2' = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2 + Y_m \cdot (V_2 - V_1) = (Y_{21} - Y_m) \cdot V_1 + (Y_{22} + Y_m) \cdot V_2 \end{cases}$$

Ed il DB' ha i parametri

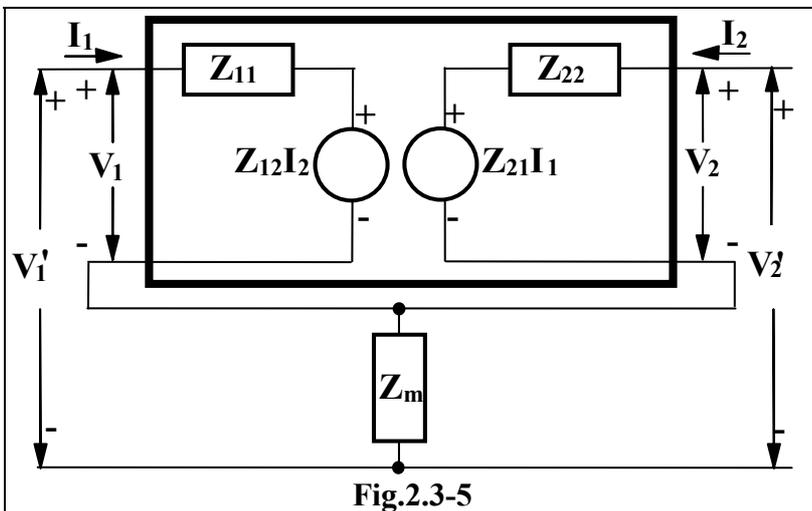


Fig.2.3-5

$$\begin{cases} Y'_{11} = Y_A + Y_m; \\ Y'_{12} = Y_{12} - Y_m; \\ Y'_{21} = Y_{21} - Y_m; \\ Y'_{22} = Y_B + Y_m; \end{cases} \quad [2.3-4]$$

Studiamo ora il caso in cui una impedenza  $Z_m$  è connessa in serie ad entrambe le porte come nella Fig.2.2-16. Utilizziamo la rappresentazione a parametri  $Z$ . Cioè

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{cases}$$

Nella  $Z_m$  circola la somma di  $I_1$  e  $I_2$  e la caduta ai suoi capi è  $Z_m \cdot (I_1 + I_2)$ . Allora

$$\begin{cases} V_1' = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_m \cdot (I_1 + I_2) \\ V_2' = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_m \cdot (I_1 + I_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1' = (Z_{11} + Z_m) \cdot I_1 + (Z_{12} + Z_m) \cdot I_2 \\ V_2' = (Z_{21} + Z_m) \cdot I_1 + (Z_{22} + Z_m) \cdot I_2 \end{cases}$$

Ed il DB' ha i parametri

$$Z'_{11} = Z_A + Y_m, \quad Z'_{12} = Z_{12} + Z_m, \quad Z'_{21} = Z_{21} + Z_m, \quad Z'_{22} = Z_B + Z_m. \quad [2.3-5]$$

### §2.3.1 Le funzioni di rete

Applichiamo una sorgente ad una delle porte, che chiamiamo ingresso. Per esempio adoperiamo un generatore di tensione  $V_g$  con una impedenza  $Z_g$ . Connettiamo all'altra porta una impedenza utilizzatrice  $Z_u$ . Si dice che il DB è pilotato dal generatore e caricato dall'utilizzatore. Usiamo il pedice *i* (*input*) per indicare le grandezze relative alla porta cui si applica un generatore e con il pedice *o* (*output*) quelle relative alla porta in cui si inserisce un carico. Il tutto è mostrato nella Fig.2.3-6.

Sulla porta d'ingresso

$$V_i = V_g - Z_g \cdot I_i. \quad [2.3-6]$$

Sull'altra porta 
$$I_o = -\frac{V_o}{Z_u}. \quad [2.3-7]$$

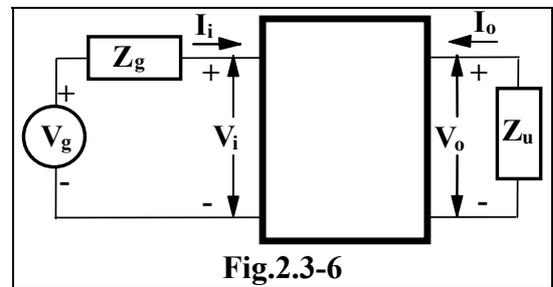


Fig.2.3-6

Definiamo le funzioni di rete. Si chiama amplificazione di tensione  $A_v$  il rapporto

$$A_v = \frac{V_o}{V_i}. \quad [2.3-8]$$

Invece l'ammettenza d'ingresso  $Y_i$  è

$$Y_i = \frac{I_i}{V_i}. \quad [2.3-9]$$

Si chiama amplificazione di corrente  $A_I$  il rapporto

$$A_I = \frac{I_o}{I_i}. \quad [2.3-10]$$

Usando le due precedenti espressioni e la [2.3-7] si ottiene

$$A_I = \frac{-V_o/Z_u}{Y_i V_i} = -\frac{Z_i V_o}{Z_u V_i} = -\frac{Z_i}{Z_u} A_v = -\frac{Y_u}{Y_i} A_v. \quad [2.3-11]$$

Da cui anche

$$A_v = -\frac{Z_u}{Z_i} \cdot A_I. \quad [2.3-12]$$

Il circuito d'ingresso è il partitore di tensione rappresentato in Fig.2.3-7. L'amplificazione di tensione  $A_{Vg}$  riferita alla f.e.m del generatore è

$$A_{Vg} = \frac{V_o}{V_g} = \frac{V_o}{V_i} \frac{V_i}{V_g} = A_v \frac{Z_i}{Z_i + Z_g} = A_v \frac{Y_g}{Y_i + Y_g}. \quad [2.3-13]$$

Se pilotiamo con un generatore di corrente  $I_g$ , sempre con una impedenza interna  $Z_g$ , si può definire l'amplificazione di corrente riferita al generatore  $A_{Ig}$  come

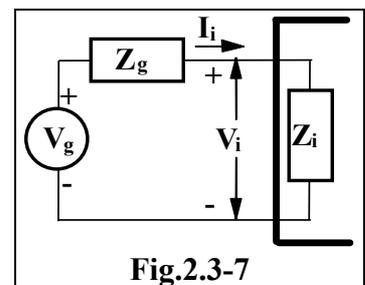


Fig.2.3-7

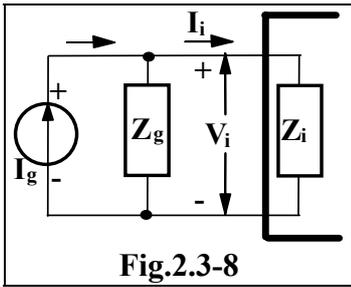


Fig.2.3-8

$$A_{I_g} = \frac{I_o}{I_g} \tag{2.3-14}$$

Il circuito equivalente d'ingresso è rappresentato in Fig.2.3-8. C'è un partitore di corrente. Dunque

$$A_{I_g} = -\frac{I_o}{I_i} \cdot \frac{I_i}{I_g} = A_I \frac{Z_g}{Z_i + Z_g} \tag{2.3-15}$$

Per quanto riguarda l'uscita, possiamo applicare Thevenin e rappresentare il DB come un generatore dipendente dall'ingresso con l'impedenza interna  $Z_o$ . L'impedenza d'uscita è definita secondo il teorema di Thevenin come il rapporto fra la tensione applicata alla porta d'uscita e la corrente nella porta d'uscita quando si elimina il generatore d'ingresso. Cioè si cortocircuita il generatore di tensione o si apre quello di corrente. Nel caso di pilotaggio con un generatore di tensione  $V_g$

$$Z_o = \left. \frac{V_o}{I_o} \right|_{V_g=0} \tag{2.3-16}$$

Mentre nel caso del generatore di corrente  $I_g$

$$Z_o = \left. \frac{V_o}{I_o} \right|_{I_g=0} \tag{2.3-17}$$

Dal momento che l'impedenza d'ingresso va calcolata aprendo il generatore di corrente o cortocircuitando quello di tensione all'ingresso, allora essa dipende solo dal DB e dalla  $Z_g$ .

A seconda di come si preferisce pilotare l'ingresso, se cioè con un generatore di tensione o con uno di corrente, si calcola nei due casi o la f.e.m.  $V_{oV}$  del generatore di tensione o la corrente di cortocircuito  $I_{occ}$ , rispettivamente

Nel caso di pilotaggio in tensione con il generatore di f.e.m.  $V_g$  ricaviamo dalla [2.3-13] che  $V_o = A_{V_g} V_g$ . Allora

$$V_{oV} = \lim_{Z_u, \infty} A_{V_g} V_g = V_g \lim_{Z_u, \infty} A_{V_g} = k_m V_g \tag{2.3-18}$$

in questo caso conviene rappresentare il doppio bipolo caricato come nella Fig.2.3-9a.

Se si pilota in corrente con il generatore  $I_g$  ricaviamo dalla [2.3-14] che  $I_o = A_{I_g} I_g$ . Allora

$$I_{occ} = \lim_{Z_u, 0} A_{I_g} I_g = I_g \lim_{Z_u, 0} A_{I_g} = h_m I_g \tag{2.3-19}$$

questa volta è più opportuna la rappresentazione del doppio bipolo caricato come nella Fig.2.3-9b.

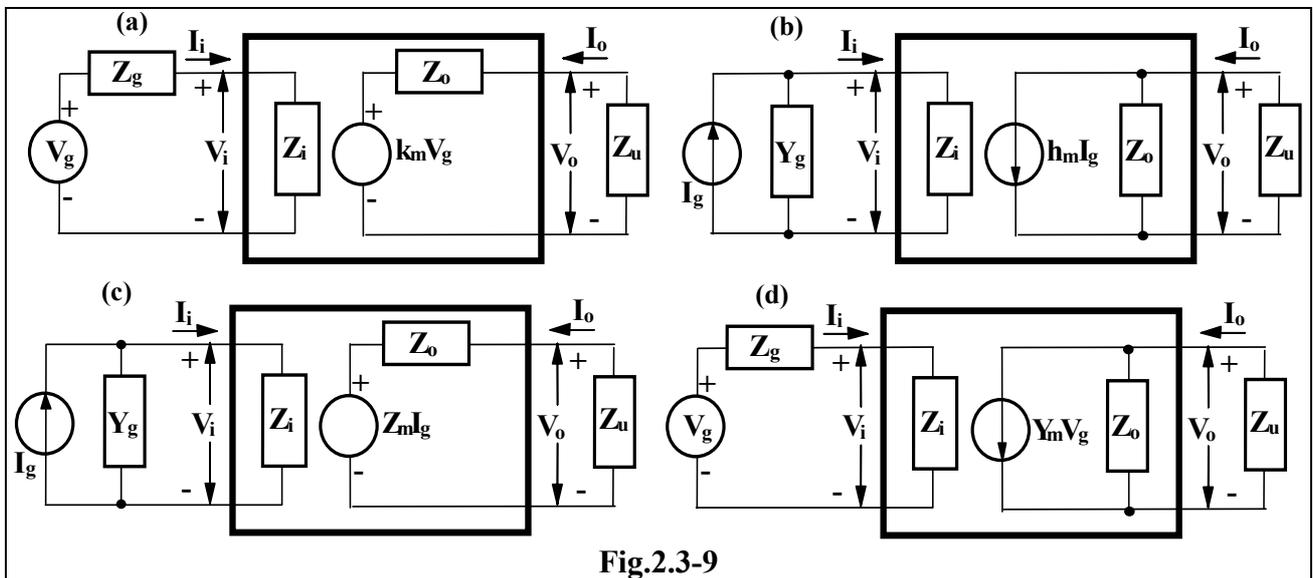


Fig.2.3-9

Ricordiamo che per il teorema di Thevenin

$$V_{oV} = Z_o I_{occ}. \quad [2.3-20]$$

Pertanto, utilizzando la [2.3-19], questa si può riscrivere come

$$V_{oV} = Z_o I_{occ} = Z_{ohm} I_g = Z_m I_g. \quad [2.3-21]$$

in questo caso conviene rappresentare il doppio bipolo caricato come nella Fig.2.3-9c.

Riapplicando la [2.3-20] alla [2.3-18]

$$I_{occ} = V_{oV}/Z_o = k_m V_g/Z_o = Y_m V_g. \quad [2.3-22]$$

in questo caso conviene rappresentare il doppio bipolo caricato come nella Fig.2.3-9d.

### §2.3.1.1 Una applicazione con i parametri Y

Calcoliamo le funzioni di rete utilizzando per il DB i parametri Y. Riprendiamo le [2.1-18].

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases} \quad [2.1-18]$$

Per il generatore vale la

$$V_1 = V_g - I_1/Y_g \quad [2.3-23]$$

e per il carico

$$I_2 = -Y_u V_2. \quad [2.3-24]$$

Dalla seconda delle [2.1-18] e da quest'ultima si ricava

$$-Y_u V_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2,$$

cioè

$$-(Y_u + Y_{22}) V_2 = Y_{21} V_1.$$

Ma allora

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_u + Y_{22}}. \quad [2.3-25]$$

Riprendiamo la prima delle [2.1-18]. Utilizzando la definizione di  $A_v$  [2.3-8] si ha

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 = Y_{11} V_1 + Y_{12} A_v V_1,$$

per cui l'ammettenza d'ingresso è

$$Y_i = I_1/V_1 = Y_{11} + Y_{12} A_v. \quad [2.3-26]$$

Questa può essere scritta in forma esplicita dei parametri del DB e dell'utilizzatore sostituendovi l'espressione [2.3-26] della  $A_v$ . Perciò

$$Y_i = Y_{11} - Y_{12} \frac{Y_{21}}{Y_u + Y_{22}} = \frac{\Delta_y + Y_u Y_{11}}{Y_u + Y_{22}}. \quad [2.3-27]$$

Anche l'amplificazione di corrente [2.3-11] può essere espressa in forma esplicita. Impieghiamo le [2.3-25] e le [2.3-27]

$$A_I = -Y_u \frac{A_v}{Y_i} = -Y_u \frac{A_v}{Y_{11} + Y_{12} \cdot A_v} = \frac{-Y_u}{Y_{11}/A_v + Y_{12}} = \frac{-Y_u}{-Y_{11}(Y_u + Y_{22})/Y_{21} + Y_{12}}. \quad [2.3-28]$$

Per finire

$$A_I = \frac{Y_u Y_{21}}{\Delta_y + Y_{12} Y_u}. \quad [2.3-29]$$

Possiamo anche calcolare l'amplificazione riferita al generatore in forma esplicita. Usiamo le [2.3-13] in cui sostituiamo le [2.3-25] e [2.3-27]

$$A_{Vg} = A_v \frac{Y_g}{Y_i + Y_g} = -\frac{Y_{21}}{Y_u + Y_{22}} \frac{Y_g}{\frac{\Delta_y + Y_u Y_{11}}{Y_u + Y_{22}} + Y_g} = -\frac{Y_{21} Y_g}{\Delta_y + Y_u Y_{11} + Y_g (Y_u + Y_{22})}. \quad [2.3-30]$$

Per determinare l'impedenza d'uscita bisogna cortocircuitare il generatore  $V_g$ . Allora la corrente  $I_1$  passa nell'ammettenza  $Y_g$  e per la tensione  $V_1$  si ha  $I_1 = -Y_g V_1$ , che sostituita nella prima delle [2.1-18] da  $-Y_g V_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$ , da cui si ricava  $(Y_g + Y_{11}) V_1 = -Y_{12} V_2$ .

Infine

$$V_1 = -\frac{Y_{12}}{Y_g + Y_{11}} V_2. \quad [2.3-31]$$

Sostituiamo nella seconda delle [2.1-18]

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 = -\frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_g + Y_{11}}V_2 + Y_{22}V_2 = \frac{-Y_{12}Y_{21} + Y_{22}(Y_g + Y_{11})}{Y_g + Y_{11}}V_2$$

e finalmente 
$$Z_o = \frac{V_2}{I_2} = \frac{Y_g + Y_{11}}{\Delta_y + Y_{22}Y_g}. \quad [2.3-32]$$

Per rappresentare il DB come nella Fig.2.3-9a bisogna calcolare la  $V_{ov}$ . Per fare ciò sostituiamo la [2.3-30] nella [2.3-18]:

$$V_{ov} = V_g \lim_{Y_u,0} A_{Vg} = -V_g \lim_{Y_u,0} \frac{Y_{21}Y_g}{\Delta_y + Y_u Y_{11} + Y_g(Y_u + Y_{22})},$$

cioè 
$$V_{ov} = -V_g \frac{Y_{21}Y_g}{\Delta_y + Y_g Y_{22}} = k_m V_g, \quad [2.3-33]$$

con 
$$k_m = -\frac{Y_{21}Y_g}{\Delta_y + Y_g Y_{22}}. \quad [2.3-34]$$

### §2.3.1.2 Una applicazione con i parametri h

Riprendiamo le [2.1-19]: 
$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_1 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases} \quad [2.1-19]$$

Per il generatore vale la 
$$V_1 = V_g - Z_g I_1, \quad [2.3-35]$$

e per il carico 
$$V_2 = -Z_u I_2 \quad [2.3-36]$$

Dalla seconda delle [2.1-19] e dalla [2.3-36] si ricava

cioè 
$$\begin{aligned} I_2 &= h_{21}I_1 - h_{22}I_2 Z_u, \\ (1 + Z_u h_{22})I_2 &= h_{21}I_1. \end{aligned}$$

Ma allora 
$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1 + Z_u h_{22}}. \quad [2.3-37]$$

Riprendiamo la prima delle [2.1-19]. Per la definizione di  $A_i$  ed usando la [2.3-36]

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 = h_{11}I_1 - h_{12}A_i Z_u I_1,$$

e, allora 
$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = h_{11} - h_{12}A_i Z_u. \quad [2.3-38]$$

O anche 
$$Z_i = h_{11} - h_{12} \frac{h_{21}Z_u}{1 + h_{22}Z_u} = \frac{Z_u \Delta_h + h_{11}}{1 + h_{22}Z_u} \quad [2.3-39]$$

Per determinare in forma esplicita la  $A_v$  sostituiamo nella [2.3-8] le [2.3-37] e [2.3-38]. Si ha

$$A_v = -Z_u \frac{A_i}{Z_i} = -Z_u \frac{h_{21}}{1 + Z_u h_{22}} \frac{1 + h_{22}Z_u}{Z_u \Delta_h + h_{11}},$$

cioè 
$$A_v = -\frac{h_{21}}{\Delta_h + h_{11}Y_u}. \quad [2.3-40]$$

Calcoliamo l'amplificazione riferita al generatore in forma esplicita. Sostituiamo nella [2.3-13] le [2.3-39] e [2.3-40]. Si ha

$$A_{Vg} = A_v \cdot \frac{Z_i}{Z_i + Z_g} = -\frac{h_{21}}{\Delta_h + h_{11}Y_u} \cdot \frac{\frac{Z_u \Delta_h + h_{11}}{1 + h_{22}Z_u}}{\frac{Z_u \Delta_h + h_{11}}{1 + h_{22}Z_u} + Z_g} = -\frac{h_{21}}{\Delta_h + h_{11}Y_u} \cdot \frac{Z_u \Delta_h + h_{11}}{Z_u \Delta_h + h_{11} + Z_g(1 + h_{22}Z_u)},$$

Quindi 
$$A_{Vg} = -\frac{h_{21}}{(Z_g + h_{11})/Z_u + Z_g h_{22} + \Delta_h}. \quad [2.3-41]$$

Per rappresentare il DB come nella Fig.2.3-9a bisogna calcolare la  $V_{ov}$ . Per fare ciò sostituiamo

tuiamo la [2.3-41] nella [2.3-18]:

$$V_{oV} = V_g \lim_{Z_u, \infty} A_{Vg} = -V_g \lim_{Z_u, \infty} \frac{h_{21}}{(Z_g + h_{11})/Z_u + Z_g h_{22} + \Delta_h},$$

$$V_{oV} = -V_g \frac{h_{21}}{Z_g h_{22} + \Delta_h} = k_m V_g. \quad [2.3-42]$$

$$k_m = -\frac{h_{21}}{Z_g h_{22} + \Delta_h}. \quad [2.3-43]$$

Per calcolare l'impedenza d'uscita cortocircuitiamo  $V_g$ . Pertanto, la tensione  $V_1$  è  $-Z_g \cdot I_1$ . Utilizzando la prima delle [2.1-19]

$$V_1 = -Z_g I_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2,$$

cioè

$$(Z_g + h_{11}) I_1 = -h_{12} V_2,$$

infine

$$I_1 = -\frac{h_{12}}{Z_g + h_{11}} V_2. \quad [2.3-44]$$

Sostituendo nella seconda delle [2.1-19]

$$I_2 = -h_{21} \frac{h_{12}}{Z_g + h_{11}} V_2 + h_{22} V_2 = \left( h_{22} - \frac{h_{21} h_{12}}{Z_g + h_{11}} \right) V_2.$$

Quindi

$$Y_o = \frac{I_2}{V_2} = h_{22} - \frac{h_{21} h_{12}}{Z_g + h_{11}}. \quad [2.3-45]$$

### §2.3.1.3 Una applicazione con i parametri Z

Riprendiamo le [2.1-17]:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \quad [2.1-17]$$

Per il generatore vale la  
e per il carico

$$V_1 = V_g - Z_g \cdot I_1, \quad [2.3-35]$$

$$V_2 = -Z_u I_2 \quad [2.3-36]$$

Dalla seconda delle [2.1-17] e dalla [2.3-36] si ricava

$$-Z_u I_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2,$$

cioè

$$(Z_u + h_{22}) I_2 = -Z_{21} I_1.$$

Ma allora

$$A_I = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_u + Z_{22}}. \quad [2.3-46]$$

Riprendiamo la prima delle [2.1-17]. Sostituendo in questa il valore di  $I_2$  che si può ricavare dalla [2.3-46]

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_u + Z_{22}} \cdot I_1,$$

e, allora

$$Z_i = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_u}. \quad [2.3-47]$$

$A_v$  può essere sempre calcolato adoperando l'espressione generale [2.3-12]. Il calcolo della funzione esplicita lo lasciamo come esercizio.

Il doppio bipolo si presenta come perfettamente simmetrico. Pertanto scambiando nella [2.3-47]  $Z_{11}$  con  $Z_{22}$  e  $Z_{12}$  con  $Z_{22}$  e  $Z_u$  con  $Z_g$  si scrive immediatamente l'impedenza d'uscita:

$$Z_o = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_g}. \quad [2.3-48]$$

### §2.3.1.4 Potenza

La differenza di potenziale fra due punti è il lavoro che bisogna compiere per trasportare una carica unitaria fra i due punti. Quindi il lavoro che si compie per trasportare una carica  $q$  attraverso una differenza di potenziale  $V$  è

$$L = q \cdot V. \quad [2.3-49]$$

La rapidità con cui questo trasporto viene fatto da la potenza elettrica:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dq}{dt} V = V \frac{dq}{dt} = V I. \quad [2.3-50]$$

Se la corrente, che per il momento immaginiamo continua, attraversa un resistore R, la potenza che in esso si dissipa è:

$$P = V I = R I^2 = \frac{V^2}{R}. \quad [2.3-51]$$

Supponiamo, invece che la corrente  $i = I_M \cos(\omega t)$  sia sinusoidale monocromatica e che attraversi una impedenza Z composta da una resistenza R ed una reattanza X. Ai capi dell'impedenza si manifesta una tensione  $v = V_M \cos(\omega t + \varphi)$ . Abbiamo visto nel §1.3 che il legame fra corrente  $i$  e tensione  $v$  in questo caso è fornito dalle relazioni [1.3-20] - [1.3-22].

$$V_M = I_M \sqrt{R^2 + X^2} = I_M |Z|. \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

La potenza istantanea è  $v \cdot i$  mentre quella media, di maggiore interesse, in genere è:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v i dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_M \cos(\omega t + \varphi) I_M \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{V_M I_M}{T} \int_0^T [\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)] \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{V_M I_M}{T} \left[ \cos(\varphi) \int_0^T \cos^2(\omega t) dt - \sin(\varphi) \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \right]. \end{aligned}$$

Il calcolo porta a

$$P = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi. \quad [2.3-52]$$

Se  $X = 0$ , cioè, se il circuito ha solo resistori,  $V_M/I_M = R$  e  $\varphi = 0$ . Allora, in questo caso

$$P = \frac{V_M I_M}{2} = \frac{V_M^2}{2R} = \frac{R \cdot I_M^2}{2} \quad [2.3-53]$$

Se chiamiamo **valore efficace** di tensione e di corrente alternata sinusoidale  $V_{ef} = V_M/\sqrt{2}$  e  $I_{ef} = I_M/\sqrt{2}$ , rispettivamente, la relazione precedente relativa alla potenza media dissipata nella resistenza è

$$P = V_{ef} I_{ef} = \frac{V_{ef}^2}{R} = R I_{Mef}^2 \quad [2.3-54]$$

analoga alla [2.3-51]. Adesso si comprende il senso del nome **valore efficace**. Esso **rappresenta il valore di una corrente alternata sinusoidale che dissipa una potenza eguale a quella di una corrente continua nella stessa resistenza**. Si noti anche che se l'impedenza non ha parte resistiva la potenza dissipata è nulla. Il che significa che la potenza si dissipa unicamente nelle parti resistive di un circuito

Nel caso che l'impedenza abbia una parte reattiva, al calcolo della potenza media, vedi [2.3-52], prende anche parte un termine  $\cos \varphi$  che assume per questo il nome di **fattore di potenza** e viene spesso indicato con PF. Se c'è parte reattiva il fattore di potenza è inferiore ad 1. Esso esprime quanta parte della potenza media fornita all'impedenza si dissipa nella parte resistiva. Per una impedenza da cui ci si aspetta un comportamento resistivo il PF dovrebbe avvicinarsi quanto più ad 1, mentre per una impedenza da cui ci si aspetta un comportamento reattivo il PF dovrebbe avvicinarsi quanto più ad 0.

**§2.3.1.5 Adattamento d'impedenza**

Vogliamo ora trattare il problema della potenza trasferita da un generatore  $V_g$  con impedenza interna  $Z_g = R_g + jX_g$  ad un carico  $Z_u = R_u + jX_u$ . Ma la potenza nel carico si dissipa soltanto nella sua parte resistiva  $R_u$ . La potenza media in è:

$$P = I_{ef}V_{uef} = I_{ef}^2 R_u = V_{gef}^2 \frac{R_u}{|Z_g + Z_u|^2} = V_{gef}^2 \frac{R_u}{|R_g + jX_g + R_u + jX_u|^2}.$$

È evidente che, per quanto riguarda la parte reattiva il massimo della potenza sul carico si ha se le due reattanze sono eguali ed opposte, cioè se  $X_g = -X_u$ . In queste condizioni la precedente diventa:

$$P = V_{gef}^2 \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2}. \tag{2.3-55}$$

Per trovare il valore di  $R_u$  che massimizza questa potenza basta derivare la precedente rispetto a  $R_u$  e imporre che la derivata sia nulla. Si ha

$$\frac{dP}{dR_u} = V_{gef}^2 \frac{(R_g + R_u)^2 - 2R_u(R_g + R_u)}{(R_g + R_u)^4} = 0.$$

La soluzione di questa equazione è  $R_u = R_g$ . Quindi se le reattanze di carico ed impedenza interna sono eguali ed opposte e le resistenze, invece, sono eguali si ha il massimo di potenza sul carico che è, per la [2.3-55]

$$P = V_{gef}^2 \frac{R_u}{(2R_u)^2} = \frac{V_{gef}^2}{4R_u}. \tag{2.3-56}$$

Poiché le due impedenza sono eguali la potenza erogata dal generatore è il doppio di quella del carico ed il sistema ha un rendimento del 50% ma la potenza sul carico è la massima possibile.

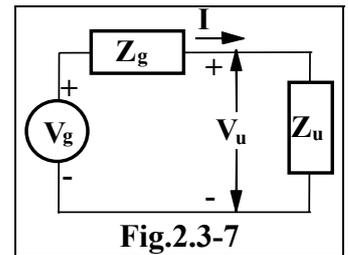


Fig.2.3-7

**§2.3.1.6 Quadrupoli come adattatori d'impedenza**

Spesso non è possibile ottenere direttamente l'adattamento d'impedenza fra carico e generatore perché le relative impedenze non sono eguali e non si possono modificare. Si può ovviare all'inconveniente interponendo fra generatore e carico un doppio bipolo che adatti il suo ingresso al generatore e la sua uscita al carico. In questo caso si dice che si sta lavorando su **impedenze immagini**.

Riprendiamo le espressioni relative al calcolo delle impedenze d'ingresso e d'uscita, per esempio, quelle calcolate utilizzando i parametri  $Z$ . Però imponiamo la condizione d'impedenza immagine sia d'ingresso che d'uscita. Quindi dalle [2.3-47] e [2.3-48]:

$$\begin{cases} Z_i = Z_g = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_u} \\ Z_o = Z_u = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} \end{cases}$$

che si possono riscrivere come

$$\begin{cases} Z_u + Z_{22} = -\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g - Z_{11}} \\ Z_u - Z_{22} = -\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} \end{cases}$$

Eseguendo una volta la somma ed una volta la differenza termine a termine si ottiene:

$$\begin{cases} 2Z_u = -\left[ \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} + \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g - Z_{11}} \right] = -2 \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g^2 - Z_{11}^2} Z_g \\ 2Z_{22} = \left[ \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g - Z_{11}} \right] = -2 \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g^2 - Z_{11}^2} Z_{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_u = -\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}^2 - Z_g^2} Z_g \\ Z_{22} = -\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}^2 - Z_g^2} Z_{11} \end{cases}$$

e per rapporto fra queste due: 
$$\frac{Z_u}{Z_g} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}} \quad [2.3-57]$$

Risostituendo nelle due ultime espressioni si ottiene:

$$\begin{cases} Z_u^2 = Z_{22} \left( Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}} \right) \\ Z_g^2 = Z_{11} \left( Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \right) \end{cases} \quad [2.3-58]$$

Determiniamo le impedenze d'ingresso e d'uscita a vuoto ed in cortocircuito:

$$\begin{aligned} Z_{iV} &= \lim_{Z_u, \infty} Z_i = Z_{11}; & Z_{oV} &= \lim_{Z_g, \infty} Z_o = Z_{22}, \\ Z_{ic} &= \lim_{Z_u, 0} Z_i = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}}; & Z_{oV} &= \lim_{Z_g, 0} Z_o = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}}. \end{aligned}$$

Confrontando rapidamente queste espressioni con le [2.3-58] si vede che queste si possono scrivere come:

$$\begin{cases} Z_u = \sqrt{Z_{oV}Z_{oc}} \\ Z_g = \sqrt{Z_{iV}Z_{iV}} \end{cases} \quad [2.3-59]$$

Infine si può ricavare un'altra espressione che lega i parametri del doppio bipolo alle due impedenze esterne. Si può ricavare il prodotto  $Z_{12}Z_{21}$  dalle [2.3-58]

$$Z_{12}Z_{21} = Z_{11} \frac{Z_{22}^2 - Z_u^2}{Z_{22}} = Z_{22} \frac{Z_{11}^2 - Z_g^2}{Z_{11}} \quad [2.3-60]$$

In pratica, per ottenere che il doppio dipolo adatti sia in ingresso che in uscita, due condizioni sono state fissate e quindi si trovano due relazioni una per il rapporto fra due parametri e l'altra per il prodotto degli altri due. Quindi il problema permette di sceglierne altre due ancora.

Nel caso di quadripolo simmetrico  $Z_{11} = Z_{22}$  e  $Z_{12} = Z_{21}$  le due impedenze immagini coincidono, e prendono il nome di **impedenza caratteristica**  $Z_0$  il cui valore è facile calcolare

$$Z_0^2 = Z_{11}^2 - Z_{12}^2 \quad [2.3-61]$$

### §2.3.1.7 Quadripoli iterativi

Un caso interessante è quando il quadripolo interposto, dal punto di vista delle impedenze d'ingresso e d'uscita, è come se non ci fosse. In tal caso la sua impedenza d'uscita deve essere eguale a quella del generatore e quella d'ingresso identica a quella di carico. In tal caso si dice che si è in condizioni di impedenza **iterativa**.

Imponiamo la condizione d'impedenza iterativa sia d'ingresso che d'uscita. Quindi dalle [2.3-47] e [2.3-48]:

$$\begin{cases} Z_i = Z_u = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_u} \\ Z_o = Z_g = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} \end{cases} \quad [2.3-62]$$

che si possono riscrivere come 
$$\begin{cases} Z_{11} - Z_u = \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_u + Z_{22}} \\ Z_{22} - Z_g = \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} \end{cases} \quad \text{dalle quali si ricava}$$

$$(Z_{11} - Z_u)(Z_u + Z_{22}) = (Z_{22} - Z_g)(Z_g + Z_{11}) = Z_{12}Z_{21} \quad [2.3-63]$$

ed ancora

$$Z_u(Z_{11} - Z_{22} - Z_u) = Z_g(Z_{22} - Z_{11} - Z_g)$$

cioè

$$Z_u^2 - Z_g^2 = (Z_{22} - Z_{11})(Z_g + Z_u)$$

In definitiva

$$Z_u - Z_g = Z_{22} - Z_{11} \quad [2.3-64]$$

Anche questa volta si trovano due relazioni soltanto per i quattro parametri e la scelta di due è, quindi, libera.

### §2.4. Connessioni fra doppi bipoli

I doppi bipoli possono essere interconnessi in modo vario. Si può procedere nei modi già noti per determinare il comportamento delle reti in cui sono presenti DB interconnessi fra di loro. Ma si può arrivare a delle semplificazioni per alcuni casi particolari che ci accingiamo a trattare.

#### §2.4.1 Connessione in parallelo

Se i DB sono in parallelo (Fig.2.4-1), le tensioni delle porte corrispondenti sono identiche. È conveniente usare le tensioni come variabili indipendenti e le correnti come dipendenti e lavorare con i parametri  $Y$ . I doppi bipoli sono descritti dalla [2.1-18]:

$$\begin{cases} I_{1a} = Y_{11a}V_{1a} + Y_{12a}V_{2a} \\ I_{2a} = Y_{21a}V_{1a} + Y_{22a}V_{2a} \\ I_{1b} = Y_{11b}V_{1b} + Y_{12b}V_{2b} \\ I_{2b} = Y_{21b}V_{1b} + Y_{22b}V_{2b} \end{cases}$$

Per le tensioni e le correnti possiamo scrivere:

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}; \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b}; \quad V_1 = V_{1a} = V_{1b}; \quad V_2 = V_{2a} = V_{2b}.$$

Allora:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} + I_{1b} = Y_{11a}V_{1a} + Y_{12a}V_{2a} + Y_{11b}V_{1b} + Y_{12b}V_{2b} = \\ &= (Y_{11a} + Y_{11b})V_1 + (Y_{12a} + Y_{12b})V_2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{2a} + I_{2b} = Y_{21a}V_{2a} + Y_{22a}V_{2a} + Y_{21b}V_{2b} + Y_{22b}V_{2b} = \\ &= (Y_{21a} + Y_{21b})V_1 + (Y_{22a} + Y_{22b})V_2. \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11t}V_1 + Y_{12t}V_2 \\ I_2 = Y_{21t}V_1 + Y_{22t}V_2 \end{cases}$$

in cui  $Y_{11t} = Y_{11a} + Y_{11b}$ ;  $Y_{12t} = Y_{12a} + Y_{12b}$ ;  $Y_{21t} = Y_{21a} + Y_{21b}$ ;  $Y_{22t} = Y_{22a} + Y_{22b}$ . [2.4-1]

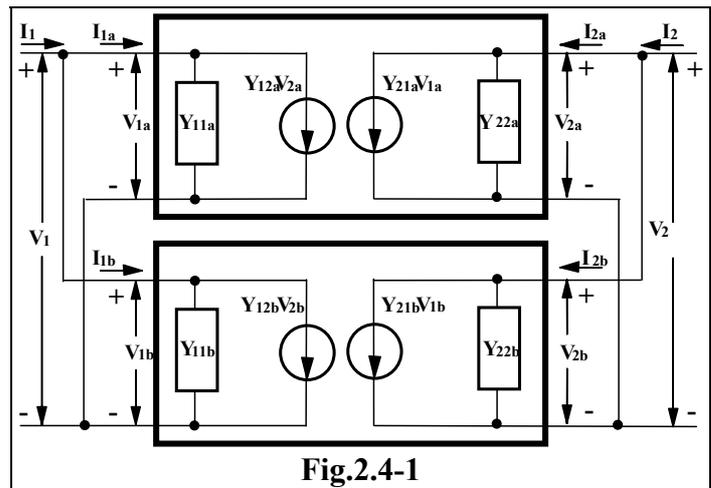


Fig.2.4-1

#### §2.4.2 Connessione in serie

Dal momento che i DB sono in serie, Fig.2.36, le correnti delle porte corrispondenti sono identiche. Allora è conveniente utilizzare proprio le correnti come variabili indipendenti e quindi scegliere la rappresentazione a parametri  $Z$ . I due DB sono descritti dalla [2.1-17]. Quindi:

$$\begin{cases} V_{1a} = Z_{11a}I_{1a} + Z_{12a}I_{2a} \\ V_{2a} = Z_{21a}I_{1a} + Z_{22a}I_{2a} \\ V_{1b} = Z_{11b}I_{1b} + Z_{12b}I_{2b} \\ V_{2b} = Z_{21b}I_{1b} + Z_{22b}I_{2b} \end{cases}$$

Per le tensioni e le correnti possiamo scrivere

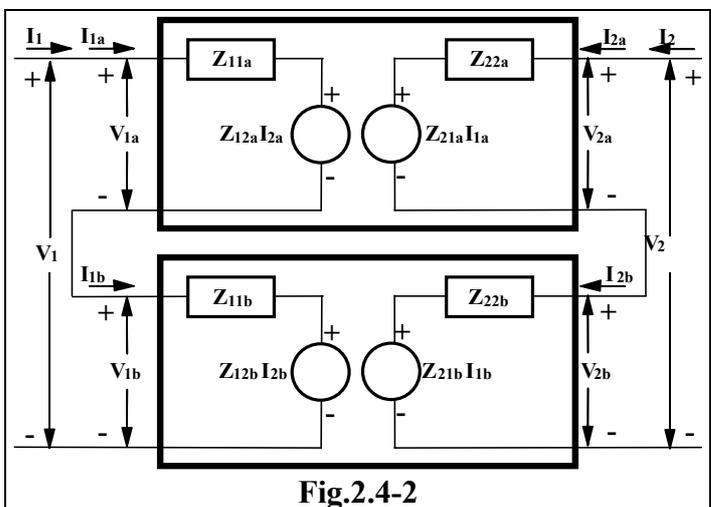


Fig.2.4-2

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b}; \quad V_2 = V_{2a} + V_{2b}; \quad I_1 = I_{1a} = I_{1b}; \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b}.$$

In modo analogo al caso precedente si ottiene

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11t}I_1 + Z_{12t}I_2 \\ V_2 = Z_{21t}I_1 + Z_{22t}I_2 \end{cases}$$

in cui  $Z_{11t} = Z_{11a} + Z_{11b}; Z_{12t} = Z_{12a} + Z_{12b}; Z_{21t} = Z_{21a} + Z_{21b}; Z_{22t} = Z_{22a} + Z_{22b}.$  [2.4-2]

**§2.4.3 Connessione serie-parallelo**

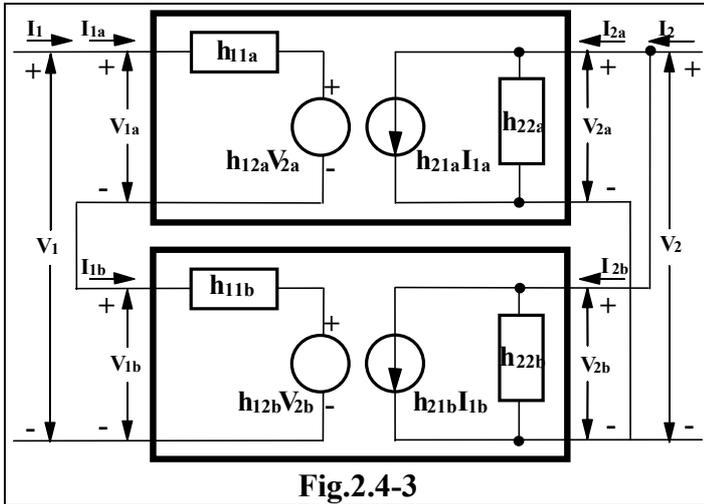


Fig.2.4-3

In questo caso i due quadrupoli sono connessi in modo da avere gli ingressi in serie e le uscite in parallelo, Fig.2.4-3. Le correnti delle porte d'ingresso sono eguali, così come le tensioni delle porte d'uscita. È opportuno utilizzare i parametri *h*, definiti nella [2.1-19]. Allora:

$$\begin{cases} V_{1a} = h_{11a}I_{1a} + h_{12a}V_{2a} \\ I_{2a} = h_{21a}I_{1a} + h_{22a}V_{2a} \\ V_{1b} = h_{11b}I_{1b} + h_{12b}V_{2b} \\ I_{2b} = h_{21b}I_{1b} + h_{22b}V_{2b} \end{cases}$$

Per le tensioni e le correnti possiamo scrivere

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b}; \quad V_2 = V_{2a} = V_{2b} \quad I_1 = I_{1a} = I_{1b}; \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b}.$$

In modo analogo ai casi precedenti si ottiene

$$\begin{cases} V_1 = h_{11t}I_1 + h_{12t}V_2 \\ I_1 = h_{21t}I_1 + h_{22t}V_2 \end{cases}$$

in cui  $h_{11t} = h_{11a} + h_{11b}; h_{12t} = h_{12a} + h_{12b}; h_{21t} = h_{21a} + h_{21b}; h_{22t} = h_{22a} + h_{22b}.$  [2.4-3]

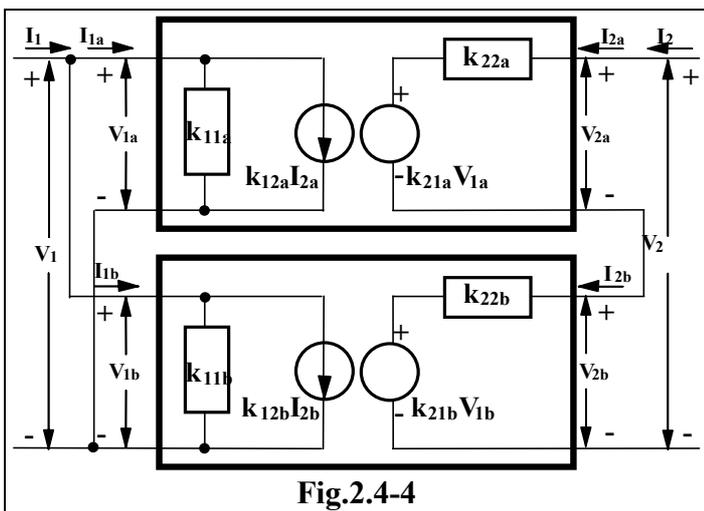


Fig.2.4-4

**§2.4.4 Connessione parallelo-serie**

Gli ingressi sono in parallelo e le uscite in serie come nella Fig.2.2-4. Le tensioni delle porte d'ingresso sono eguali, ed anche le correnti di quelle d'uscita. Allora conviene usare i parametri *k*. I due doppi dipoli sono descritti dalla [2.1-20]

$$\begin{cases} I_{1a} = k_{11a}V_{1a} + k_{12a}I_{2a} \\ V_{2a} = k_{21a}V_{1a} + k_{22a}I_{2a} \\ I_{1b} = k_{11b}V_{1b} + k_{12b}I_{2b} \\ V_{2b} = k_{21b}V_{1b} + k_{22b}I_{2b} \end{cases}$$

In base a quanto detto è:

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}; \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b}; \quad V_1 = V_{1a} = V_{1b}; \quad V_2 = V_{2a} + V_{2b}.$$

In modo analogo si ottiene  $\begin{cases} I_1 = k_{11t}V_1 + k_{12t}I_2 \\ V_2 = k_{21t}V_1 + k_{22t}I_2 \end{cases}$

in cui  $k_{11t} = k_{11a} + k_{11b}; k_{12t} = k_{12a} + k_{12b}; k_{21t} = k_{21a} + k_{21b}; k_{22t} = k_{22a} + k_{22b}.$  [2.4-4]

**§2.4.5 Connessione in cascata**

In questo caso, Fig.2.2-4, l'uscita del primo doppio bipolo è connessa all'ingresso del se-

condo. Per cui è

$$I_{2a} = -I_{1b}; \quad V_{2a} = V_{1b}; \quad V_1 = V_{1a}; \quad I_1 = I_{1a}; \quad V_2 = V_{2b}; \quad I_2 = I_{2b}. \quad [2.4-5]$$

Per ricavare un bipolo che descriva complessivamente i due bipoli in cascata bisogna eliminare, appunto, le variabili intermedie e, cioè,  $I_{2a}$ ,  $I_{1b}$ ,  $V_{2a}$  e  $V_{1b}$ . A seconda dei parametri utilizzati per descrivere i due doppi bipoli e di quelli che si vogliono utilizzare nel doppio bipolo complessivo si faranno le opportune operazioni.

Come esempio eseguiamo il lavoro quando il primo doppio bipolo è descritto con i parametri  $k$  data dalle [2.1-20] ed il secondo con i parametri  $h$  data dalle [2.1-19]. Cioè

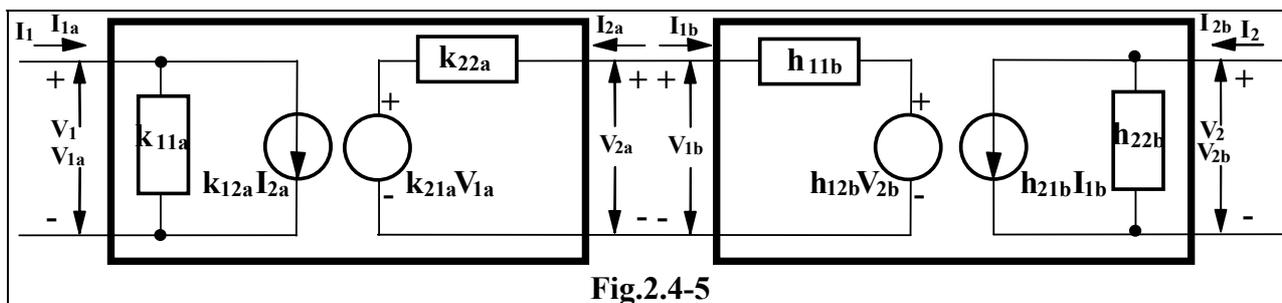


Fig.2.4-5

$$\begin{cases} I_{1a} = k_{11a}V_{1a} + k_{12a}I_{2a} \\ V_{2a} = k_{21a}V_{1a} + k_{22a}I_{2a} \end{cases}; \quad \begin{cases} V_{1b} = h_{11b}I_{1b} + h_{12b}V_{2b} \\ I_{2b} = h_{21b}I_{1b} + h_{22b}V_{2b} \end{cases}$$

Volendo, come descrizione finale quella dei parametri  $Y$ , cioè le [2.1-18].

Utilizzando le [2.4-5] le due precedenti espressioni diventano:

$$\begin{cases} I_1 = k_{11a}V_1 - k_{12a}I_{1b} \\ V_{2a} = k_{21a}V_1 - k_{22a}I_{1b} \end{cases}; \quad [2.4-6]$$

$$\begin{cases} V_{2a} = h_{11b}I_{1b} + h_{12b}V_2 \\ I_2 = h_{21b}I_{1b} + h_{22b}V_2 \end{cases} \quad [2.4-7]$$

Per confronto fra la seconda delle [2.4-6] e la prima delle [2.4-7] si ottiene

$$k_{21a}V_1 - k_{22a}I_{1b} = h_{11b}I_{1b} + h_{12b}V_2,$$

cioè

$$(k_{22a} + h_{11b})I_{1b} = k_{21a}V_1 - h_{12b}V_2,$$

dunque

$$I_{1b} = \frac{k_{21a}V_1 - h_{12b}V_2}{k_{22a} + h_{11b}}. \quad [2.4-8]$$

E questa, sostituita nella prima delle [2.4-6]

$$\begin{aligned} I_1 &= k_{11a}V_1 - k_{12a} \frac{k_{21a}V_1 - h_{12b}V_2}{k_{22a} + h_{11b}} = \frac{k_{11a}(k_{22a} + h_{11b}) - k_{12a}k_{21a}}{k_{22a} + h_{11b}} V_1 + \frac{k_{12a}h_{12b}}{k_{22a} + h_{11b}} V_2 = \\ &= \frac{\Delta_{Ka} + k_{11a}h_{11b}}{k_{22a} + h_{11b}} V_1 + \frac{k_{12a}h_{12b}}{k_{22a} + h_{11b}} V_2. \end{aligned}$$

Cioè

$$I_1 = Y_{11t}V_1 + Y_{12t}V_2, \quad [2.4-9]$$

con

$$Y_{11t} = \frac{\Delta_{Ka} + k_{11a}h_{11b}}{k_{22a} + h_{11b}}; \quad Y_{12t} = \frac{k_{12a}h_{12b}}{k_{22a} + h_{11b}}. \quad [2.4-10]$$

Analogamente sostituendo la [2.4-8] nella seconda delle [2.4-7]:

$$\begin{aligned} I_2 &= h_{21b}I_{1b} + h_{22b}V_2 = h_{21b} \frac{k_{21a}V_1 - h_{12b}V_2}{k_{22a} + h_{11b}} + h_{22b}V_2 = \\ &= \frac{h_{21b}k_{21a}}{k_{22a} + h_{11b}} V_1 + \frac{h_{22b}(k_{22a} + h_{11b}) - h_{21b}h_{12b}}{k_{22a} + h_{11b}} V_2 = \frac{h_{21b}k_{21a}}{k_{22a} + h_{11b}} V_1 + \frac{\Delta_{h2} + h_{22b}k_{22a}}{k_{22a} + h_{11b}} V_2. \end{aligned}$$

Cioè

$$I_2 = Y_{21t}V_1 + Y_{22t}V_2 \quad [2.4-11]$$

con

$$Y_{21t} = \frac{h_{21b}k_{21a}}{k_{22a} + h_{11b}}; \quad Y_{22t} = \frac{\Delta_{h2} + h_{22b}k_{22a}}{k_{22a} + h_{11b}}. \quad [2.4-12]$$

Come si vede anche se è concettualmente semplice alle volte può essere complicato deter-

minare i parametri equivalente di DB in cascata. È meglio procedere in altro modo. Più avanti vedremo come fare.

BIBLIOGRAFIA

- [AL] - *Alberini, Quaranta, Rispoli* - **Elettronica** - Zanichelli - 1962
- [BA] - *Battistini, Nencioni* - **Elettrotecnica** - Le Monnier - 1984
- [CH] - *Chen* - **The Analysis of Linear Systems** - McGraw Hill - 1966
- [CO] - *Connors* - **Networks** - Arnold - 1972
- [DE] - *Desoer, Kuh* - **Fondamenti di Teoria dei Circuiti** - Angeli - 1990
- [FA] - *Falcone* - **Elettronica generale** - Siderea - 1968
- [FO] - *Fodor* - **Nodal Analysis of Electric Networks** - Elseviere - 1988
- [KA] - *Kaufman, Seidman* - **Electronic Sourcebook for Technicians and Engineers** - Mc Graw Hill - 1988
- [MAR] - *Magrab* - **Computer Integrated Experimentation** – Springer -Verlag - 1991
- [MAS] - *Mason, Zimmermann* - **Electronic Circuits, Signals, and System** - J.Wiley - 1964
- [MOS] - *Moschytz* - **Linear Integrated Networks** - Van Nostrand