SEGNALI, SISTEMI E OPERATORI

Alla base dell'elettronica c'è lo studio dei segnali, dei sistemi e del modo come i segnali si propagano nei sistemi. Per rendere più agevole la trattazione è necessario introdurre dei metodi matematici.

§1.1. Segnali

Un segnale è una grandezza fisica, generalmente variabile nel tempo, cui si attribuisce un significato.

Indichiamo con f(t) il segnale e con f_m ed f_M, rispettivamente i limiti finiti del segnale.

$$f_m \leq f(t) \leq f_M.$$

Se attribuiamo significato a tutti i valori che il segnale assume nell'intervallo in cui è definito diciamo che il segnale e ***analogico***. Se, invece, attribuiamo senso solo ad un numero limitato di intervalli, diciamo che il segnale è ***numerico***. Quando gli intervalli sono solo due allora il segnale viene detto ***binario*** o ***digitale***.

Ad un segnale volutamente prodotto è possibile che si sovrapponga qualche altro segnale non desiderato che, a seconda della sua origine, prende il nome di ***rumore*** o di ***disturbo***. Un rumore è un segnale indesiderato che si sovrappone al segnale ed è prodotto dallo stesso sistema che lo manipola. Un disturbo è un segnale che si sovrappone all'interno del sistema stesso, ma proviene dal suo esterno. Inoltre, un segnale, attraversando un sistema, può venire deformato in modo non voluto. Si parla, in tal caso di ***distorsione***. Le informazioni contenute in un segnale cui è sovrapposto un rumore od un disturbo o che è deformato nell'attraversamento di un sistema possono non essere più intelligibili.

Consideriamo, per esempio, un sistema composto dallo spazio attraverso cui viaggia un segnale televisivo, dall'antenna ricevente e dal televisore. Il segnale, prodotto dal trasmettitore, emesso in modo teoricamente perfetto, nel viaggiare attraverso lo spazio per raggiungere il ricevitore, viene modificato per la presenza di segnali elettrici di disturbo, come, ad esempio, le scariche atmosferiche o quelle prodotte nei motori a scoppio o dalle spazzole di quelli elettrici. All'ingresso del ricevitore è presente sia il segnale che il disturbo. Inoltre, gli stessi componenti elettrici che costituiscono il televisore producono correnti e tensioni casuali che costituiscono il rumore. Per finire, poiché il ricevitore non è ideale, anche in assenza di rumore e disturbi, la qualità dell'immagine e del suono non sarebbe mai perfetta a causa del fatto che i segnali, nell'attraversare il ricevitore non vengono trasmessi idealmente ma sono deformati in modo indesiderato. In questo sta la distorsione.

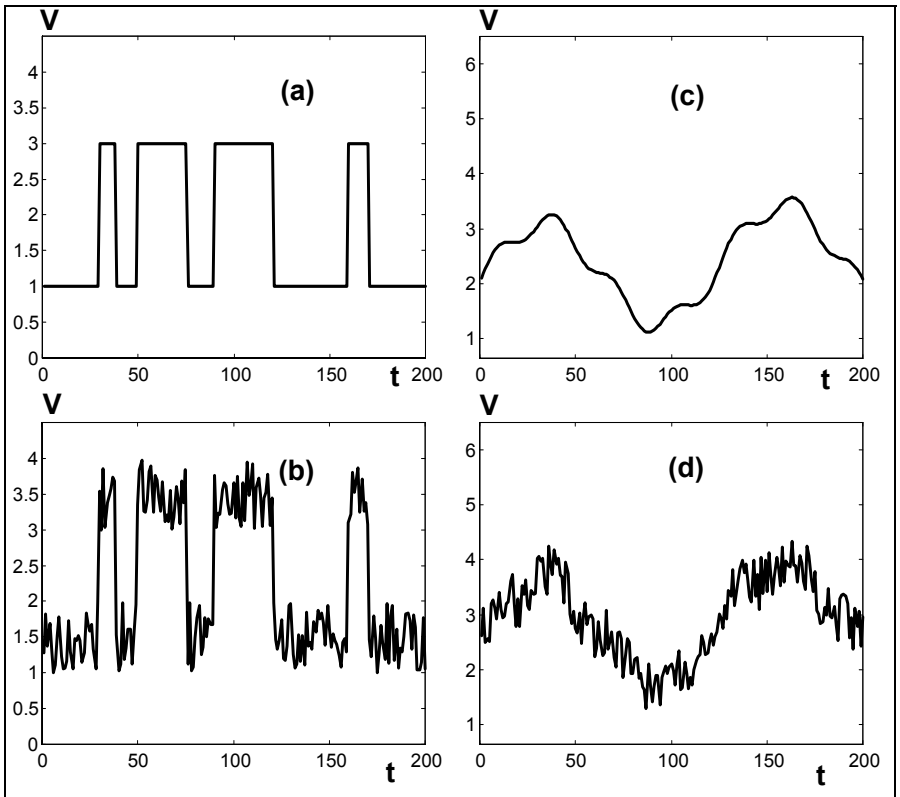

Fig.1.1-1

La Fig.1.2-1 mostra due esempi di segnali come sono stati trasmessi (sopra) e modificati da disturbi, rumore e distorsioni (sotto). Il segnale di sinistra è di tipo numerico, quello di destra analogico. É evidente che, per questi effetti indesiderati, la perdita di intelligibilità è minore per i segnali numerici che per quelli analogici. Ma anche se questo aspetto farebbe propendere verso la scelta dei segnali numerici per la trasmissione dei dati, vi sono altri fattori che, a seconda dei casi, fanno scegliere un tipo di trasmissione anziché l'altra. Per il momento trascuriamo completamente la presenza del rumore, dei disturbi e delle distorsioni.

§1.1.1 Segnali numerici o discreti

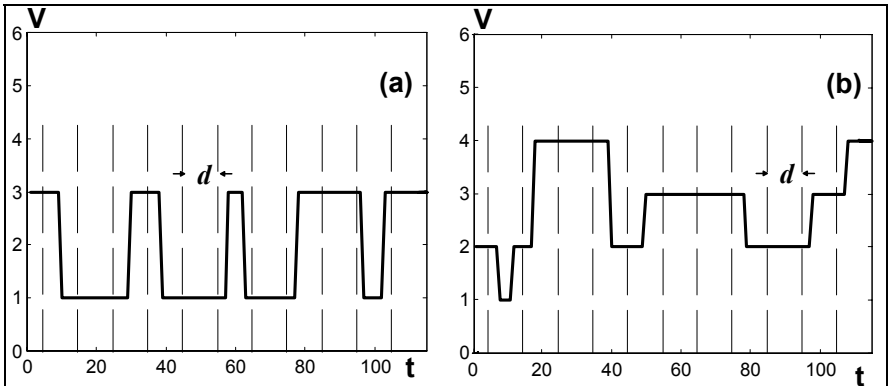

Fig.1.1-2

In Fig.1.1-2 sono mostrati due esempi di segnali numerici. Il primo si riferisce ad un segnale binario. Il secondo ad uno a quattro livelli. Il significato dei due segnali è determinato dalle convenzioni adottate. In un sistema sincrono, il valore numerico va considerato ad intervalli regolari. Se l'intervallo ha durata ***d***, allora il primo segnale assume la successione di 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 etc e l'altro 2, 2, 4, 4, 2 , 3, 3, 3, 2, 2, , etc. Nel caso di sistema asincrono il significato che si da al primo segnale è 1, 0, 1, 0, 1 etc. Ed al secondo 2, 1, 2, 4, 2, 3, 2, 3 etc.

Nel passaggio di un segnale da un livello ad un altro esso prende dei valori che non vengono definiti. Per esempio si può scegliere, per un segnale binario, come livello di 0 la tensione fra 0 V e 0.8 V e come livello di 1 un segnale di tensione fra 2.4 V e 5 V. Quindi non viene attribuito alcun significato alla tensione fra 0.8 V e 2.4 V

§1.1.2 Segnali analogici

Ci occuperemo delle proprietà generali dei segnali temporali. Studieremo, inoltre, alcuni esempi di segnali analogici che hanno particolari caratteristiche e rivestono importanza fondamentale nello studio della elettronica.

§1.1.2.1 Segnali impulsivi

Una definizione qualitativa dice che un impulso è un segnale che è diverso da zero solo per un limitato intervallo di tempo. La Fig.1.1-3 mostra alcuni esempi di segnali impulsivi. In ordine, da sinistra a destra e dall'alto in basso, sono mostrati un impulso rettangolare, un impulso esponenziale prima crescente e poi decrescente, un impulso sinusoidale, un treno d'oscillazioni di ampiezza costante, un treno d'oscillazioni di ampiezza variabile ed un impulso bipolare.

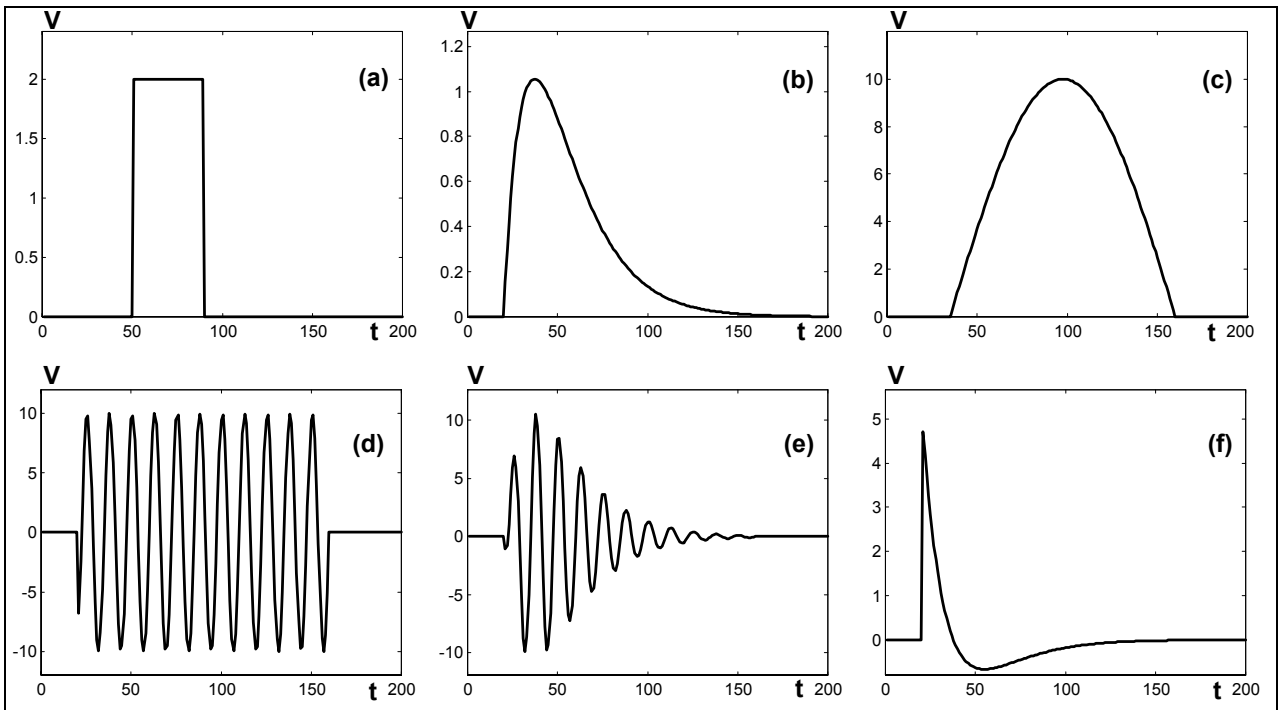

Fig.1.1-3

Definiamo ***contenuto c*** di un impulso f(t) in un intervallo $t_0 \div t_1$:

$$c = \int_{t0}^{t1} f(t)dt. \qquad [1.1\text{-}1]$$

Definiamo ***energia e*** di un impulso f(t) nello stesso intervallo

$$e = \int_{t0}^{t1} f^2(t)dt. \qquad [1.1\text{-}2]$$

Si intende che l'intervallo può essere tutto l'asse dei tempi. Cioè $-\infty < t < +\infty$. In tal caso si parla semplicemente di contenuto e energia senza specificare altro. Una definizione più accurata di impulso dice che la sua energia deve essere non zero e finita.

Di un impulso è possibile definire alcuni altri parametri. La Fig.1.1-4 ci consente di illustrare meglio le relative definizioni. Si definisce ***ampiezza*** V_M il valore assoluto del massimo assoluto, mentre la differenza fra massimo e minimo prende il nome di ***valore picco-picco*** e si indica con V_{pp}. Il ***tempo di salita*** t_s è il tempo che impiega

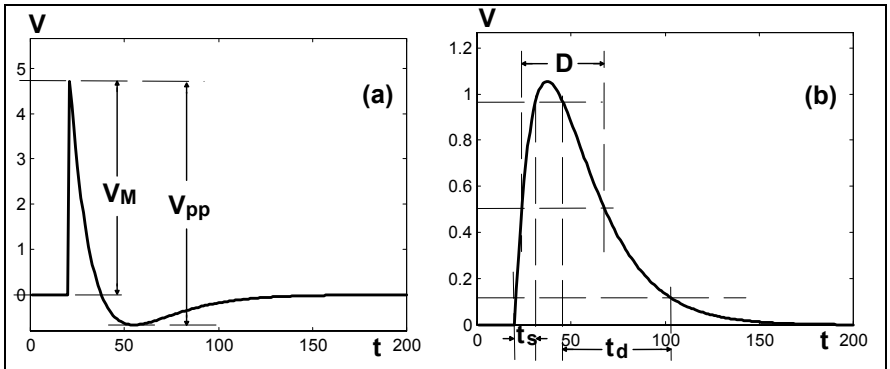

Fig.1.1-4

il segnale a salire dal 10% al 90% del suo valore finale. Il ***tempo di discesa*** t_d è il tempo che impiega il segnale a scendere dal 90% al 10% del suo valore iniziale. La ***durata D*** è il tempo in cui il segnale si mantiene al di sopra del 50% del suo valore V_{pp}.

§1.1.2.2 Segnali periodici

Un ***segnale periodico*** f(t) si ripete allo stesso modo nel tempo. Per esso deve essere

$$f(t) = f(t+T) \text{ per ogni } t > 0 \qquad [1.1\text{-}3]$$

con T costante.

Il più piccolo valore di *T* prende il nome di ***periodo***. Il suo inverso è la frequenza e rappresenta il numero di periodi contenuti in un secondo. La Fig.1.1-5 mostra alcuni esempi di segnali periodici, nell'ordine un onda sinusoidale, un onda a dente di sega ed un onda quadra.

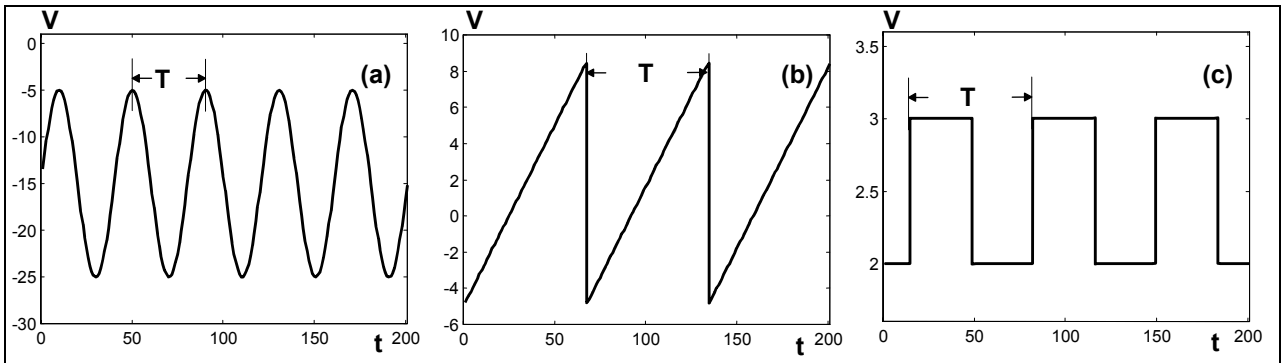

Fig.1.1-5

Questa volta se si facesse il calcolo del contenuto e dell'energia si troverebbe, in genere, un valore infinito. Nel caso di segnali periodici è meglio parlare di contenuto medio come il contenuto in un periodo diviso lo stesso periodo. Spesso si preferisce usare i termini ***valor medio o valore in continua***. Il valor medio di un segnale f(t) viene indicato con **<f>** oppure $\mathbf{f_{med}}$. Pertanto

$$f_{med} = \langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt. \qquad [1.1\text{-}4]$$

Se dal segnale ***f*** periodico viene sottratto il suo valor medio f_{med} si ottiene il suo valore ***alternato*** f_a il cui valor medio è ovviamente nullo.

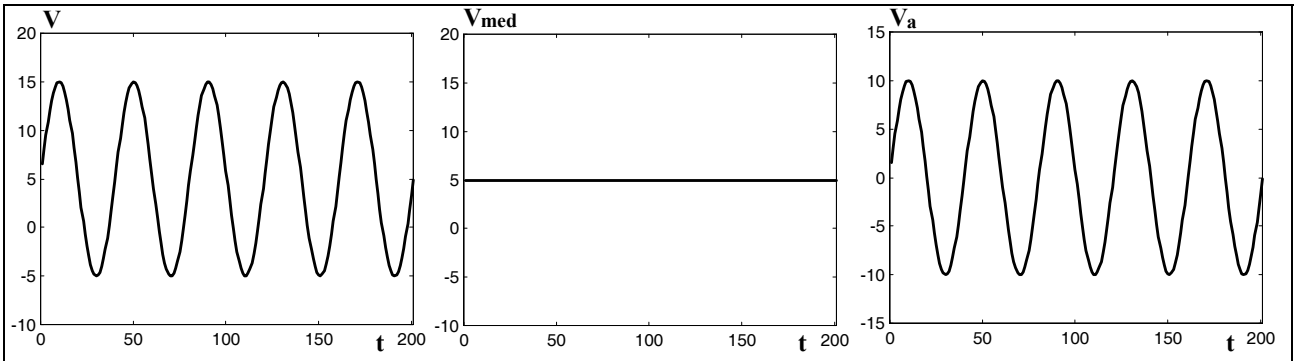

Fig.1.1-6

Consideriamo solo un periodo. Possiamo definire tempo di salita, tempo di discesa. Inoltre possiamo parlare, come nel caso dei segnali impulsivi, di ampiezza e del valore picco-picco. In Fig.1.1-6 è illustrato l'esempio di un segnale periodico *V* di cui viene mostrato il valor medio V_{med} ed il valore alternato V_a. Dalle definizioni

$$f(t) = f_{med} + f_a(t) \qquad [1.1\text{-}5]$$

Invece di energia, per i segnali periodici, ha senso parlare di potenza media:

$$< f^2 >= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt \qquad [1.1\text{-}6]$$

Una definizione più accurata di segnale periodico dice che la sua potenza media deve essere non zero e finita. Cioè

$$0 < \; < f^2 > \; = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt \; < \infty$$

Consideriamo la potenza media di un segnale f a partire dal suo valor medio e dal suo valore alternato. Utilizziamo la [1.1-5]. Si ha

$$<f^2> = <(f_{med}+f_a)^2> = <f_{med}^2+2f_{med}f_a+f_a^2> = f_{med}^2 +2f_m<f_a>+<f_a^2> = f_{med}^2 +<f_a^2>,$$

cioè $$<f^2> = f_{med}^2 +<f_a^2>. \qquad [1.1\text{-}7]$$

La potenza media di un segnale periodico è la somma della potenza della componente media e della potenza media di quella alternata.

Per finire definiamo ***valore efficace*** la radice quadrata della potenza media. Cioè:

$$f_{ef} = \sqrt{< f^2 >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}. \qquad [1.1\text{-}8]$$

Più avanti daremo senso alle parole valore efficace. Adoperando le definizioni precedenti e la [1.1-7] si ha $$f_{ef}^2 = f_{med}^2 +f_{aef}^2. \qquad [1.1\text{-}9]$$

Il valore efficace di un segnale si ottiene a partire dal suo valor medio e dal valore efficace della sola componente alternativa secondo la [1.1-7].

<u>Somma di più' segnali periodici di periodo diverso</u>

Uno dei problemi che si può incontrare nello studio dei segnali periodici è la determinazione del periodo quando il segnale è la somma di più segnali periodici di diverso periodo. Siano f(t) e h(t) due funzioni periodiche di periodo rispettivamente $T_f = N_f/D_f$ e $T_h = N_h/D_h$, dove N_f, D_f, N_h e D_h sono interi. Sia M_D il m.c.m fra D_f e D_h . Allora potremo scrivere

$$T_f = \frac{N_f \cdot M_D/D_f}{M_D} \qquad \text{e} \qquad T_h = \frac{N_h \cdot M_D/D_h}{M_D}.$$

Sia M_N il m.c.m. tra $N_f \cdot M_D/D_f$ e $N_h \cdot M_D/D_h$. Il periodo comune ai due segnali è

$$T_c = M_N/M_D. \qquad [1.1\text{-}10]$$

La Fig.1.1-7 mostra un segnale periodico di periodo T_1, un segnale periodico di periodo T_2 e il segnale somma di periodo T_c.

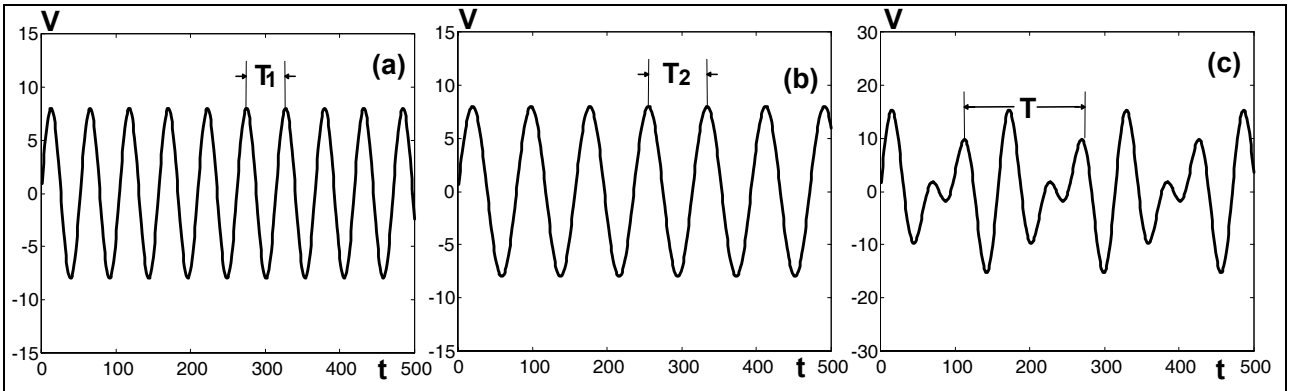

Fig.1.1-7

§1.1.2.3 Segnali casuali

Ad una importante categoria appartengono i segnali ***casuali*** o ***random***. Essi non sono deterministici. Tuttavia di essi possono essere date delle informazioni statistiche.

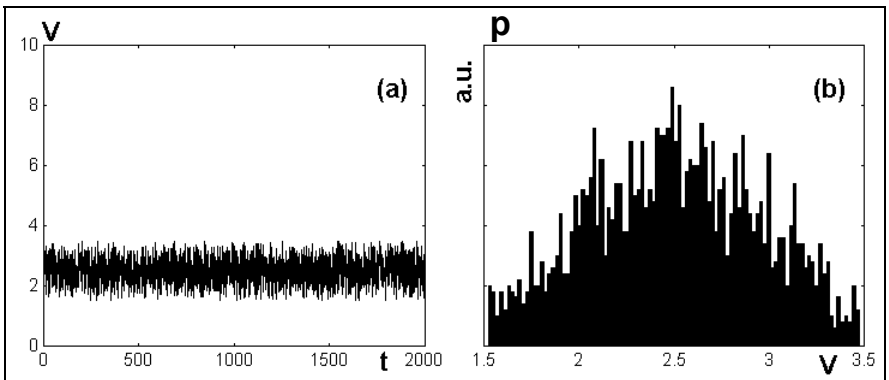

Fig.1.1-8

Consideriamo il segnale casuale di Fig.1.1-8a. Si osserva che la sua ampiezza è sostanzialmente compresa in una fascia. Supponiamo di campionare, cioè misurare, il valore *V* che il segnale assume ad intervalli di tempo regolari e molto stretti. Costruiamo una figura, detta ***spettro d'ampiezza***, in cui, in funzione di *V* mettiamo il numero di volte *N(V)* che il segnale assume il valore $V \pm \Delta V$ (ΔV è la precisione con cui eseguiamo la misura). È meglio normalizzare al numero di misure complessive N_T. Si ottiene qualcosa di simile alla Fig.1.1-8b. La quantità $N(V)/N_T$ rappresenta la probabilità *p* che la tensione assuma un valore di $V \pm \Delta V$. Per essere più precisi la figura riporta la densità di probabilità dell'ampiezza.

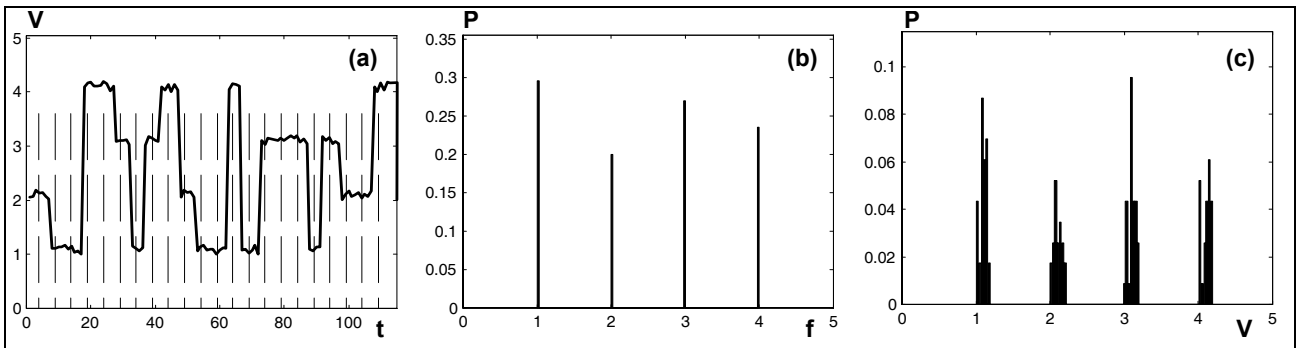

Fig.1.1-9

Se il segnale è numerico, come quello mostrato nella Fig.1.1-9a, lo spettro assume la forma riportata nella Fig.1.1-9b. Si nota che, questa volta, sull'asse delle ascisse non si mette la tensione *V*, ma il valore assegnato *f* alla variabile nell'intervallo. Inoltre non è detto che gli intervalli siano tutti eguali ma essi dipendono da quale senso si è attribuito alla funzione. È chiaro che se del segnale di Fig.1.1-9a si facesse lo spettro delle ampiezze assumendolo come continuo si otterrebbe una figura differente come quella di Fig.1.1-9c.

Per un segnale numerico si avrà: $\sum_i p_i = 1.$ [1.1-11]

Si può definire il ***valore medio*** $< f >= \sum_i p_i \cdot f_i,$ [1.1-12]

ed l'***altezza quadratica media*** $< f^2 >= \sum_i p_i \cdot f_i^2.$ [1.1-13]

Si possono estendere le precedenti ai segnali continui ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p dv = 1; \qquad [1.1\text{-}14]$$

il ***valore medio*** $< f >= \int_{-\infty}^{\infty} p f dv;$ [1.1-15]

e l'***altezza quadratica media*** $$< f^2 > \; = \int_{-\infty}^{\infty} p f^2 dv. \qquad [1.1\text{-}16]$$

Alcuni processi stazionari, come, ad esempio il ***rumore*** possono essere descritti da funzioni probabilistiche. In tal caso il suo valore efficace corrisponde alla ***varianza*** e lo spettro d'ampiezza del segnale è una gaussiana.

§1.1.2.4 Segnali complessi

Un segnale il cui valore istantaneo è un numero complesso è un ***segnale complesso***. Esso può essere scritto come

$$f = R_e + jI_m. \qquad [1.1\text{-}17]$$

Il suo complesso coniugato f^* è

$$f^* = R_e - jI_m. \qquad [1.1\text{-}18]$$

La parte reale e l'immaginaria possono essere ricavate come

$$R_e = (f+f^*)/2. \qquad [1.1\text{-}19]$$

$$j\,I_m = (f-f^*)/2. \qquad [1.1\text{-}20]$$

Il segnale complesso può anche essere espresso in forma trigonometrica come

$$f = |f|\,(\cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi). \qquad [1.1\text{-}21]$$

Ed il modulo quadro è $$|f|^2 = f \cdot f^* = R_e^2 + I_m^2, \qquad [1.1\text{-}22]$$

e l'argomento $$\varphi = \mathrm{arctg}(I_m/R_e). \qquad [1.1\text{-}23]$$

L'***energia e*** nell'intervallo $t_0 \div t_1$

$$e = \int_{t0}^{t1} |f|^2\, dt, \qquad [1.1\text{-}24]$$

e la ***potenza media*** $$p = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T (R_e^2 + I_m^2)dt \qquad [1.1\text{-}25]$$

§1.1.2.5 Operazioni sui segnali

Sui segnali si possono eseguire diversi tipi di operazioni. Cominciamo ad occuparci di quelle che riguardano la variabile indipendente. Facciamo rilevare che questa può essere una qualunque grandezza fisica, anche se considereremo quasi sempre il tempo.

Cambio della scala dei tempi

Il cambio della scala dei tempi comporta una sostituzione della variabile ***t*** con il termine ***t/a***. Il fattore di scala è, dunque, ***a***. In Fig.1.1-10 sono mostrate le conseguenze del cambio di scala su di

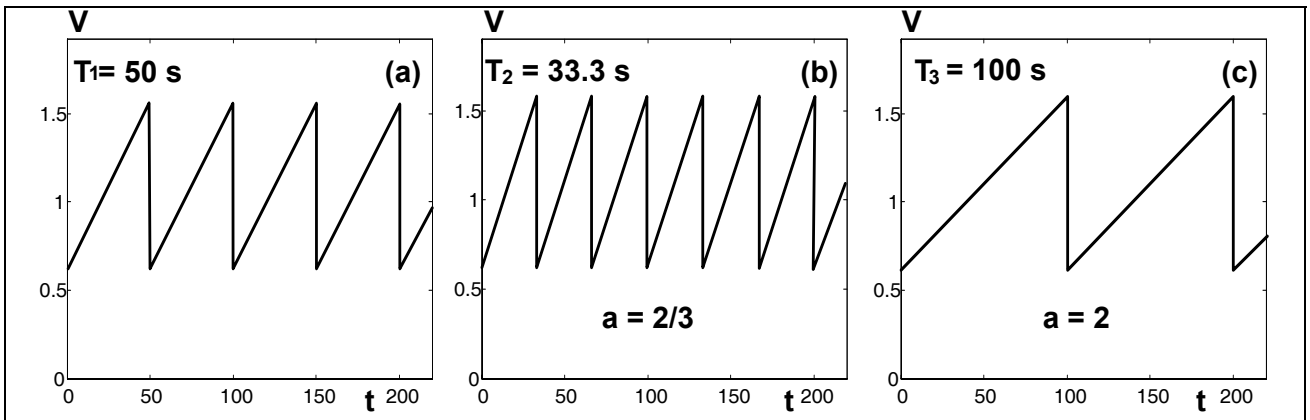

Fig.1.1-10

una onda a dente di sega. In pratica, a seconda che ***a*** sia maggiore o minore di 1 si ha una dilatazione od una compressione della figura nel senso dell'asse delle ascisse. Nulla cambia, invece nel senso dell'altro asse.

Traslazione della variabile tempo

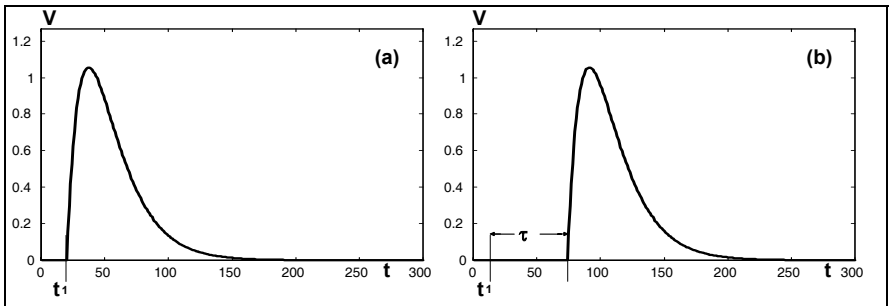

Fig.1.1-11

Una traslazione del tempo di una quantità τ di una f(t) si ottiene sostituendo alla variabile t la variabile t-τ. La funzione traslata viene indicata con v(t-τ). In Fig.1.1-11 è mostrato un esempio di un impulso traslato proprio della quantità τ.

Operazioni sui segnali e loro proprietà

Un sistema può essere studiato come una scatola nera, ***Blocco***, che esegue una determinata operazione sul segnale.

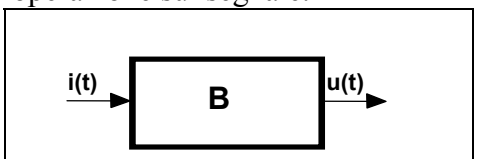

Fig.1.1-12

In generale definiamo *i(t)* l'ingresso del blocco e *u(t)* la sua uscita. Se siamo in assenza di rumore, disturbi o distorsioni si dice che il sistema ha effettuato una operazione o ***trasformazione*** sul segnale. Se teniamo conto della presenza di rumore, disturbi e distorsioni, quello che abbiamo in ingresso è il segnale, mentre all'uscita otterremo il segnale modificato dalla presenza di rumore, disturbi e distorsioni, oltre che, evidentemente, dall'operazione che il blocco deve eseguire. Il blocco viene rappresentato come un rettangolo con frecce entranti ed uscenti. Le entranti si riferiscono alle variabili d'ingressi o cause, le uscenti a quelle d'uscita o effetti. In Fig.1.1-12 è mostrato una rappresentazione di un generico blocco.

Moltiplicazione per una costante

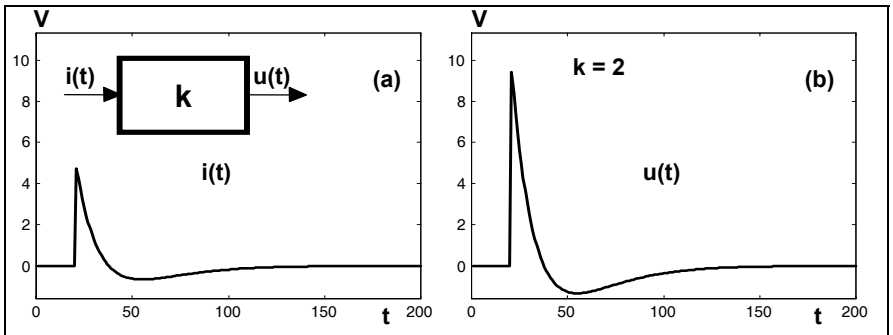

Fig.1.1-13

Se un blocco da come uscita una replica dell'ingresso, a parte un fattore di scala k, (positivo o negativo), si dice che esso esegue la moltiplicazione per una costante k. La relazione fra l'ingresso e l'uscita del blocco moltiplicatore viene espressa dalla relazione

$$u(t) = k \cdot i(t). \qquad [1.1\text{-}26]$$

La Fig.1.1-13 mostra un segnale d'ingresso e l'uscita moltiplicata per 2. Nella stessa figura è rappresentato il blocco moltiplicatore.

Linearità'

Un blocco ***lineare*** soddisfa a queste due condizioni:

PROPORZIONALITÀ;

SOVRAPPONIBILITÀ.

La prima proprietà dice che un blocco lineare, applicando all'ingresso un segnale k volte superiore, fornisce una uscita k volte più grande. La sovrapponibilità corrisponde al fatto che, in un blocco o

un sistema lineare, l'uscita che si ottiene applicando all'ingresso la somma di due segnali e la somma delle uscite che si otterrebbero applicando separatamente, una alla volta, i singoli segnali.

Formalmente:

$$\left.\begin{aligned} u[k\cdot i(t)] &= k\cdot u[i(t)] \\ u[i_1(t)+i_2(t)] &= u[i_1(t)]+u[i_2(t)] \end{aligned}\right\}. \qquad [1.1\text{-}27]$$

Somma

Un blocco può anche avere più ingressi. Un caso interessante è quello del blocco sommatore. La [1.1-28] esprime la funzione realizzata dal blocco ***sommatore*** mostrato sotto.

$$u(t) = i_1(t) + i_2(t) \qquad [1.1\text{-}28]$$

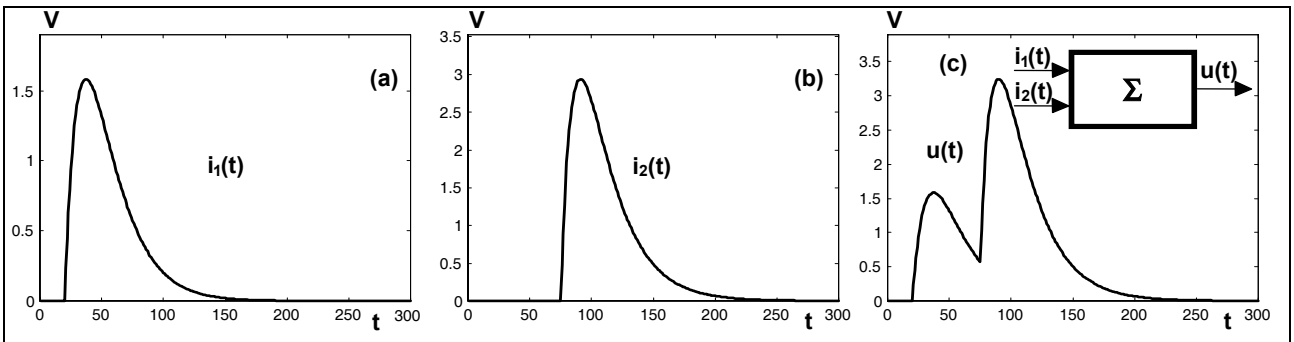

Fig.1.1-14

La Fig.1.2-14 mostra l'operazione eseguita da un sommatore sui due segnali i_1 e i_2.

Derivazione

L'operatore che esegue la derivazione dell'ingresso i(t) e fornisce una uscita u(t)

$$u(t) = \frac{di(t)}{dt}, \qquad [1.1\text{-}29]$$

prende il nome di ***derivatore***. Nella Fig.1.1-15 un segnale è mostrato, insieme con la sua derivata. L'uscita è positiva o negativa secondo che la funzione cresce o decresce.

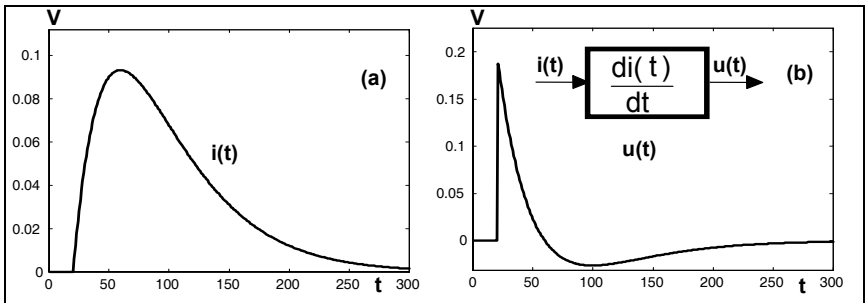

Fig.1.1-15

Un blocco può eseguire la derivata n-esima sul segnale. In tal caso la funzione ingresso-uscita è

$$u(t) = \frac{d^n i(t)}{dt^n}. \qquad [1.1\text{-}30]$$

Integrazione

L'operatore che esegue l'integrale del segnale d'ingresso i(t) fornisce una uscita u(t) tale che

$$u(t) = \int_o^t i(t)dt. \qquad [1.1\text{-}31]$$

Il blocco corrispondente è un ***integratore***. Nella Fig.1.1-16

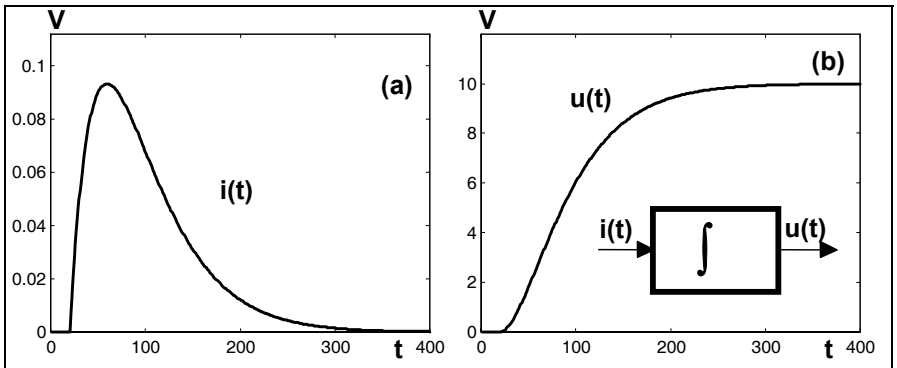

Fig.1.1-16

è mostrato un esempio di integrazione di un segnale.

Ritardo

Un blocco ***ritardatore*** esegue la funzione definita da

$$u(t) = i(t-\tau). \qquad [1.1\text{-}32]$$

Il risultato dell'operazione è stato già mostrato nella Fig.1.1-11.

Smorzamento

Molto spesso si incontrano segnali smorzati. Essi vengono ottenuti mediante un operatore detto ***smorzatore*** definito dalla [1.1-33]

$$f(t) = i(t)\cdot e^{-\alpha t}. \qquad [1.1\text{-}33]$$

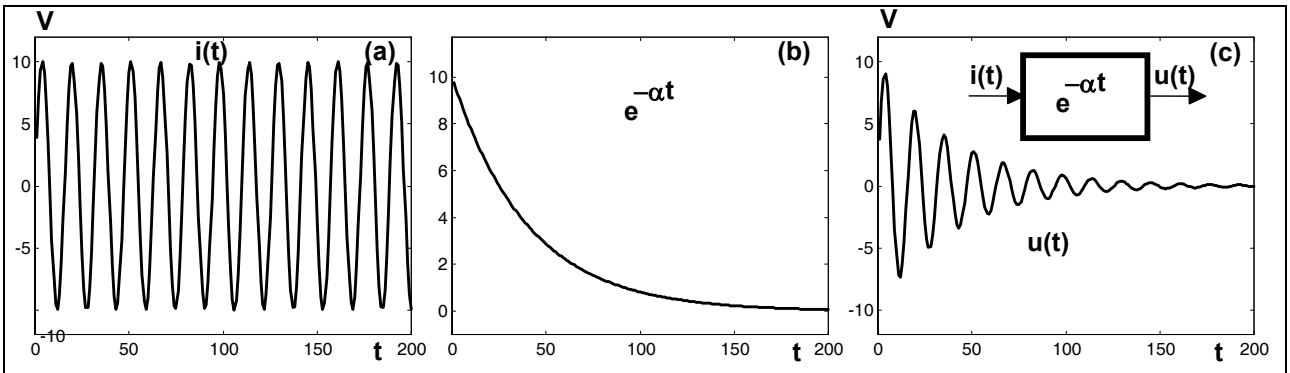

Fig.1.1-17

Nella Fig.1.1-17 è mostrato un esempio di smorzamento. Un'onda sinusoidale è applicata all'ingresso del blocco smorzatore che da in uscita una oscillazione smorzata.

Convoluzione

La ***convoluzione*** fra due segnali f(t) e h(t) o fra un segnale ed una funzione del tempo, viene definita come

$$\gamma_{fh}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau; \qquad [1.1\text{-}34]$$

Il significato e l'importanza della convoluzione saranno evidenti più avanti.

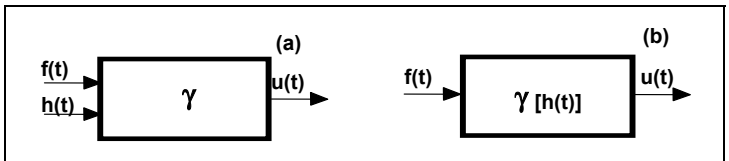

Fig.1.1-18

Nella Fig.1.1-18, a sinistra è mostrato il blocco che esegue la convoluzione fra due segnali. A destra è riportato il blocco che esegue la convoluzione del segnale f(t) con la funzione h(t).

Correlazione

Siano f(t) e h(t) due segnali. Definiamo funzione di ***correlazione*** $\psi_{fh}(\tau)$ in un intervallo $t_0 \div t_1$

$$\psi_{fh}(\tau) = \int_{t0}^{t1} f(t+\tau)h(t)dt; \qquad [1.1\text{-}35]$$

E, analogamente

$$\psi_{hf}(\tau) = \int_{t0}^{t1} h(t+\tau)f(t)dt; \qquad [1.1\text{-}36]$$

Se l'intervallo è illimitato, allora almeno uno dei due segnali deve essere un impulso per evitare che ψ diverga. In tal caso

$$\psi_{fh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)h(t)dt; \qquad \psi_{hf}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t+\tau)dt. \qquad [1.1\text{-}37]$$

Se i segnali sono periodici è conveniente scegliere per intervallo il periodo e

$$\psi_{fh}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t+\tau)h(t)dt; \qquad \psi_{hf}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)h(t+\tau)dt. \qquad [1.1\text{-}38]$$

Nel caso di segnali complessi le funzioni di correlazione sono definite come

$$\psi_{fh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)h^*(t)dt; \qquad \psi_{hf}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)h(t+\tau)dt. \qquad [1.1\text{-}39]$$

Se i segnali complessi sono anche periodici

$$\psi_{fh}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t+\tau)h^*(t)dt; \qquad \psi_{hf}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f^*(t)h(t+\tau)dt. \qquad [1.1\text{-}40]$$

Quando i segnali sono reali, per calcolare $\psi_{fh}(\tau)$ si trasla f(t) a sinistra di τ. Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato traslando a destra h. E dal momento che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)h(t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t-\tau)dt,$$

allora

$$\psi_{fh}(\tau) = \psi_{hf}(-\tau) \qquad [1.1\text{-}41]$$

Nel caso dei segnali complessi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)h^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t-\tau)dt,$$

allora

$$\psi_{fh}(\tau) = \psi_{hf}^*(-\tau) \qquad [1.1\text{-}42]$$

<u>Autocorrelazione</u>

Se le due funzioni sono identiche si definisce la ***funzione di autocorrelazione*** come la correlazione fra le due funzioni identiche e si indica con $\psi_f(\tau)$. Ovviamente:

$$\psi_f(\tau) = \int_{t0}^{t1} f(t+\tau)f(t)dt; \qquad [1.1\text{-}43]$$

$$\psi_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f(t)dt; \qquad [1.1\text{-}44]$$

$$\psi_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t+\tau)f(t)dt; \qquad [1.1\text{-}45]$$

$$\psi_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f^*(t)dt; \qquad [1.1\text{-}46]$$

$$\psi_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t+\tau)f^*(t)dt. \qquad [1.1\text{-}47]$$

valide, in ordine, per segnali qualunque, per segnali impulsivi, per segnali periodici reali, per segnali complessi e per segnali complessi periodici.

Una osservazione da fare su $\psi_f(0)$. Da quanto detto finora è chiaro che per le [1.1-43], [1.1-44], [1.1-46], rappresenta l'energia del segnale, mentre per le [1.1-45] e [1.1-47] è la potenza media.

I coefficienti di correlazione

Sia ***c*** un coefficiente numerico per il quale moltiplichiamo h(t). Sottraiamo a f(t) la quantità c·h(t). Si ottiene un segnale f(t)- c·h(t) la cui energia nell'intervallo $t_0 \div t_1$ è, secondo la [1.1-2] $[f(t)-c\cdot h(t)]^2$. Il valore c_{fh} di c che minimizza l'energia di f(t)- c·h(t) è [MAS]

$$c_{fh} = \psi_{fh}(0)/\psi_h(0) \qquad [1.1\text{-}48]$$

e prende il nome di ***coefficiente di correlazione*** di h(t) rispetto ad f(t) nell'intervallo $t_0 \div t_1$. Esso dice quante volte si deve sottrarre h(t) da f(t) per ottenere un segnale ad energia minima. In modo analogo si definisce il coefficiente di correlazione c_{hf} di f(t) rispetto ad h(t). Analogamente esso è

$$c_{hf} = \psi_{hf}(0)/\psi_f(0) \qquad [1.1\text{-}49]$$

Le due espressioni precedenti sono valide in generale, indipendentemente dal tipo di segnale, se reale o complesso, se periodico o no e se il coefficiente viene calcolato in un intervallo limitato o no. Tutto va bene, purché per ψ si adoperino, di caso in caso, le opportune espressione.

Nella Fig.1.1-19 sono mostrati due segnali impulsivi. Le figure accanto mostrano i segnali

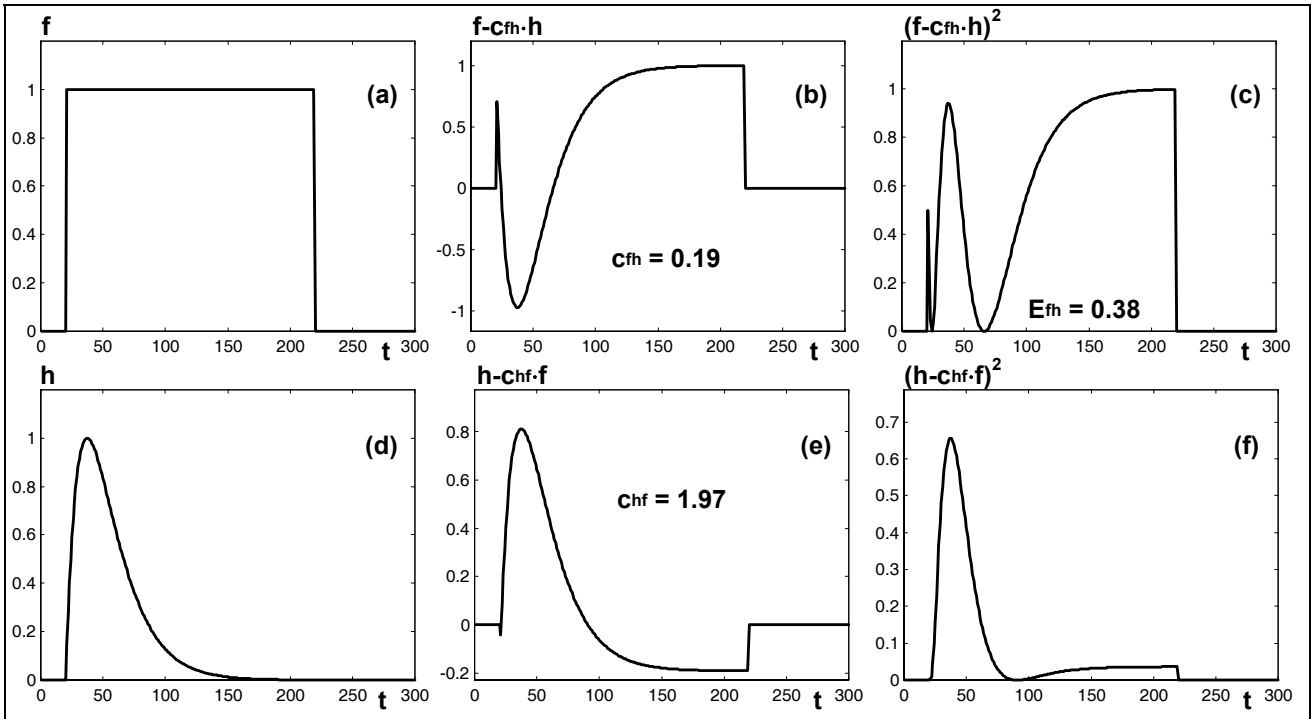

Fig.1.1-19

differenza e le rispettive energie minime.

In modo più generale si può definire il coefficiente di correlazione fra la f(t+τ) e la h(t). Cioè si calcola la correlazione fra la f(t) traslata di τ e la h(t). Ovviamente il coefficiente di correlazione non è più costante ed assume la forma

$$c_{fh}(\tau) = \psi_{fh}(\tau)/\psi_h(0), \qquad c_{hf}(\tau) = \psi_{hf}(\tau)/\psi_f(0), \qquad [1.1\text{-}50]$$

ancora una volta valide in generale, indipendentemente dal tipo di segnale usando la definizione che di volta in volta si applica a ψ.

Ortogonalità

Un segnale f(t) è ***ortogonale*** ad un segnale h(t), in un intervallo $t_0 \div t_1$, se il coefficiente di correlazione c_{fh} è nullo. Ciò significa, che il tentativo di estrarre da f(t) un segnale $c_{fh}\cdot h(t)$ ed ottenerne uno di energia o potenza media minima fallisce. Per essere $c_{fh} = 0$, dalla [1.1-50], deve essere

$$\psi_{fh}(0) = 0 = \int_{t0}^{t1} f(t)h(t)dt = \int_{t0}^{t1} h(t)f(t)dt = \psi_{hf}(0) = 0.$$

Come f non è contenuto in h anche il viceversa vale. Non si può estrarre ne f(t) da h(t) ne h(t) da f(t). A secondo che dei casi, l'energia del segnale somma è eguale alla somma delle energie dei singoli segnali. Oppure, per segnali non impulsivi, la potenza media del segnale somma è eguale alla somma delle potenze medie dei singoli segnali.

L'efficienza di correlazione

Per i segnali reali si definisce, ***l'efficienza di correlazione***

$$E_{fh}(\tau) = c_{fh}(\tau)c_{hf}(-\tau) = \frac{\psi_{fh}(\tau)}{\psi_f(0)} \cdot \frac{\psi_{hf}(-\tau)}{\psi_h(0)} = \frac{[\psi_{fh}(\tau)]^2}{\psi_f(0)\psi_h(0)}, \qquad [1.1\text{-}51]$$

in cui si è fatto uso della [1.1-41].

Per i segnali complessi, invece

$$E_{fh}(\tau) = c_{fh}(\tau)c_{hf}(-\tau) = \frac{\psi_{fh}(\tau)}{\psi_f(0)} \cdot \frac{\psi_{hf}(-\tau)}{\psi_h(0)} = \frac{\psi_{fh}(\tau)}{\psi_f(0)} \cdot \frac{\psi_{fh}^*(\tau)}{\psi_h(0)} = \frac{|\psi_{fh}(\tau)|^2}{\psi_f(0)\psi_h(0)}, \qquad [1.1\text{-}52]$$

in cui si è utilizzata la [1.1-42].

Il motivo per cui si esegue il prodotto $c_{fh}(\tau)\cdot c_{hf}(-\tau)$ sta nel fatto che spostare a destra la f(t) di τ corrisponde a fare altrettanto a sinistra con la h(t).

Le ampiezze dei due segnali non hanno alcuna importanza, ai fini del calcolo dell'efficienza di correlazione, solo le loro forme incidono su tale efficienza. $E_{fh}(\tau)$ corrisponde alla somiglianza fra le funzioni f ed h traslate di τ. $E_{fh}(\tau)$ varia con τ. All'istante τ_M in cui $E_{fh}(\tau_M)$ è massima, la replica di h traslata di τ_M assomiglia a f al massimo.

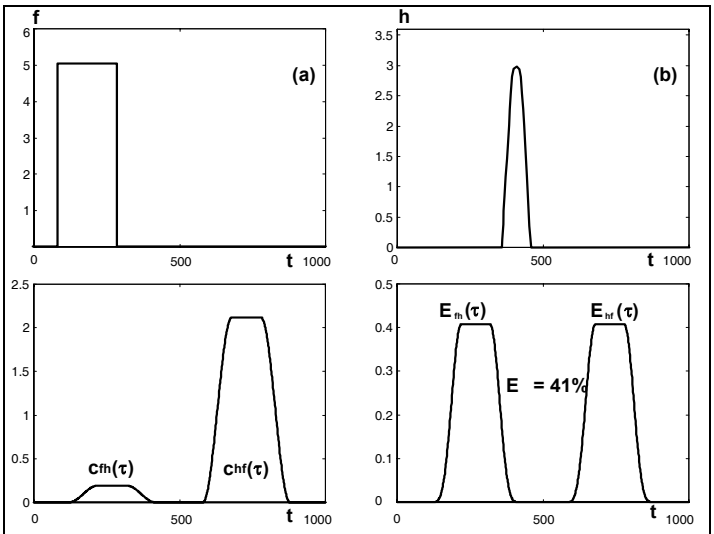

Fig.1.1-20

L'efficienza è un numero positivo non superiore ad 1. Se $E_{fh}(\tau_M)$ è unitaria, significa che, a parte una costante moltiplicativa, il segnale h, traslato di τ_M è identico a f. $E_{fh}(\tau) = 0$ per ogni τ vuol dire che i due segnali non hanno proprio niente in comune. In questo caso si dicono ***scorrelati***.

Per aiutare a comprendere meglio quanto finora è stato detto sono riportati alcuni esempi.

La Fig.1.1-20 è relativa a due impulsi, uno rettangolare, l'altro sinusoidale. La Fig1.1-20c mostra i due coefficienti di correlazione, mentre l'ultima figura fa vedere l'efficienza di correlazione. Il massimo si ha quando i due impulsi si sovrappongono al meglio ed è del 41.2-2 %.

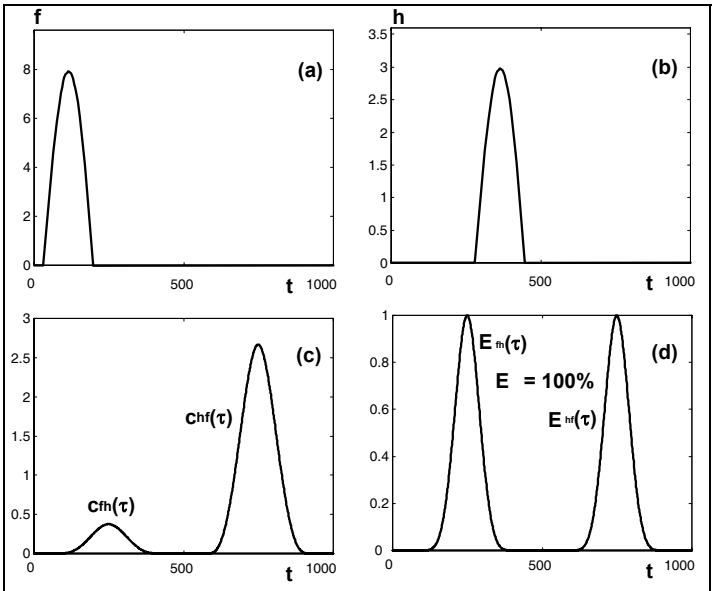

Fig.1.1-21

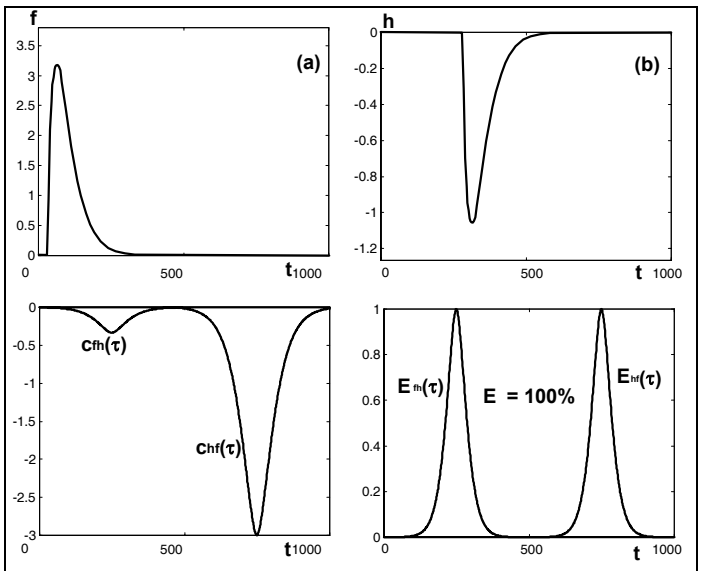

Fig.1.1-22

La Fig.1.1-21 si riferisce alla correlazione di due impulsi sinusoidali di eguale forma ma traslati e di diversa ampiezza. Le due funzioni di correlazione sono identiche ed anche i coefficienti di correlazione lo sono, a parte un fattore di scala. L'efficienza di correlazione diventa unitaria quando τ è proprio il ritardo fra i due impulsi e questi, a parte un coefficiente, sono proprio sovrapponibili.

La stessa cosa è stata fatta in Fig.1.1-22 con due impulsi unipolari simili traslati e di segno contrario.

Per quanto riguarda l'efficienza di autocorrelazione di qualunque segnale essa è massima per $\tau = 0$, ovviamente.

Modulazione di ampiezza

Dato un segnale $v_m = V_M g_m(t)$, [1.1-53]
con ampiezza V_M, detto segnale ***modulante*** ed un segnale periodico sinusoidale di frequenza f_p ed ampiezza V_P $v_p = V_P\cos(2\pi f_p t)$, [1.1-54]

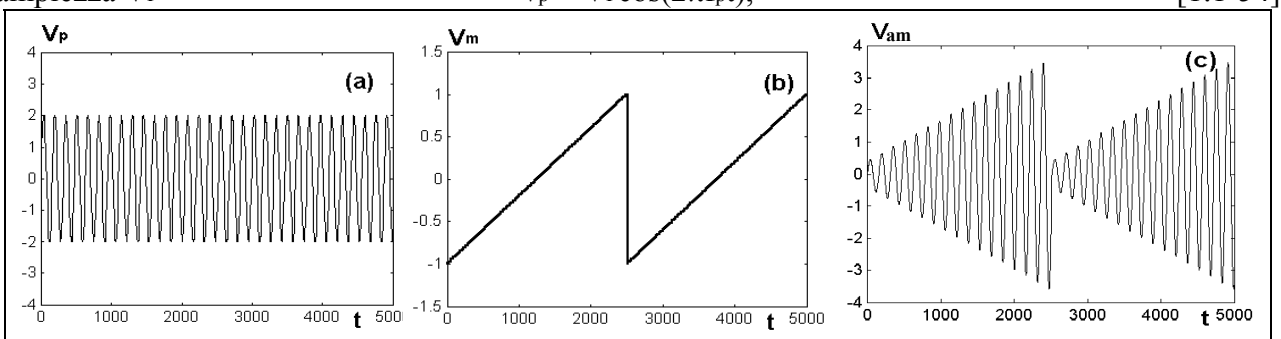

Fig.1.1-23

detto ***portante***. Si dice segnale ***modulato in ampiezza*** il segnale

$$v_{am} = V_p[1+m_a g_m(t)]\cos(2\pi f_p t), \qquad [1.1\text{-}55]$$

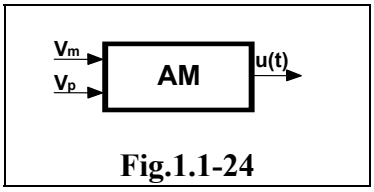

Fig.1.1-24

$m_a \leq 1$ viene detto ***indice di modulazione***.

Nella Fig.1.1-23a è mostrata l'onda portante. Nella Fig.1.1-23b il segnale modulante che è un dente di sega e nella Fig.1.2-23c il segnale modulato. Si nota bene che l'effetto della modulazione è di fare variare l'ampiezza della portante così come varia il segnale modulante. Un blocco che esegue la modulazione d'ampiezza viene rappresentato nella Fig.1.1-24.

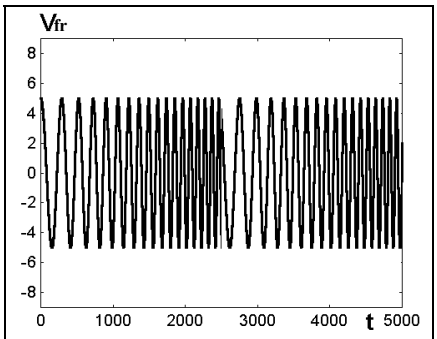

Fig.1.1-25

Modulazione di frequenza

Dato un segnale

$$v_m = V_M g_m(t), \qquad [1.1\text{-}53]$$

con ampiezza V_M, detto segnale ***modulante*** ed un segnale periodico sinusoidale di frequenza f_p ed ampiezza V_P

$$v_p = V_P\cos(2\pi f_p t), \qquad [1.1\text{-}54]$$

detto ***portante***. Si dice segnale ***modulato in frequenza*** il segnale

$$v_{fr} = V_p\cos\{2\pi f_p[1+m_f g_m(t)]t]\}, \qquad [1.1\text{-}56]$$

$m_f \leq 1$ viene detto ***indice di modulazione***.

Un blocco che esegue la modulazione d'ampiezza viene rappresentato come a lato. La Fig.1.1-25. mostra l'effetto della modulazione di frequenza sugli stessi segnali di Fig.1.1-23. La frequenza della portante diminuisce quando il segnale modulante è negativo, mentre cresce quando è positivo.

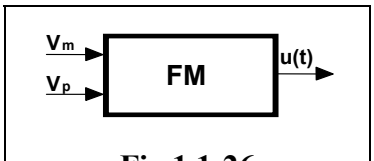

Fig.1.1-26

§1.1.2.6 Segnali fondamentali

Definiamo alcuni segnali fondamentali. La loro importanza è basilare, anche se si tratta di pure astrazione teoriche.

Gradino unitario

La Fig.1.1-27a rappresenta un ***gradino unitario***. Esso viene definito come

$$g(t) = \begin{cases} 1 \text{ per } t > 0 \\ 0 \text{ per } t \le 0 \end{cases}. \quad [1.1\text{-}57]$$

Nella Fig.1.1-27b c'è la rappresentazione di un gradino unitario traslato di τ. Esso è definito come

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 1 \text{ per } t > \tau \\ 0 \text{ per } t \le \tau \end{cases}. \quad [1.1\text{-}58]$$

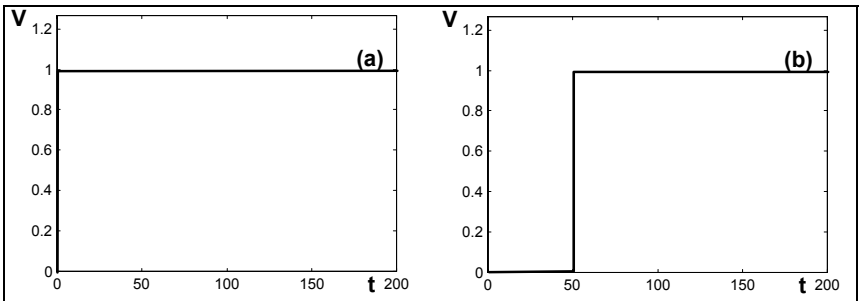

Fig.1.1-27

Il gradino unitario è particolarmente importante per rappresentare i segnali discontinui. Sommando ad un segnale continuo un gradino di ampiezza ***a*** ritardato di τ si produce una discontinuità al segnale continuo con un salto pari ad ***a*** al tempo τ.

Impulso unitario o δ

Prendiamo in considerazione un impulso come quello rappresentato in Fig.1.1-28. La sua ampiezza, nell'intervallo ***d***, è 1/d ed è zero altrimenti. L'impulso ha dunque una area unitaria. Viene definito impulso δ (funzione ***delta di Dirac***) l'impulso che si ottiene al limite quando d tende a zero. Dunque

$$\int_0^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1. \quad [1.1\text{-}59]$$

Per convenzione rappresentiamo la funzione ***delta*** come una barretta all'istante in cui avviene. Nella stessa Fig.1.2-28 è mostrata una $\delta(t-\tau)$.

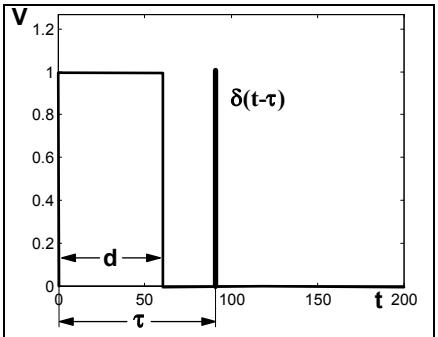

Fig.1.1-28

Applichiamo una delta ad un integratore. Si ha

$$\int_0^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = \int_{0-}^{t} \delta(t)dt = \begin{cases} 1 \text{ per } t > 0 \\ 0 \text{ per } t \le 0 \end{cases} = g(t),$$

che non è altro che il gradino unitario. Poiché, quindi, il gradino è l'integrale della delta, segue, banalmente, che la delta è la derivata del gradino.

Esponenziale complesso

I segnali esponenziali sono di estrema importanza. Studieremo, per ora, in generale, i segnali ***esponenziali complessi***. Sia ρ un numero complesso

$$\rho = \sigma_0 + j\omega_0. \quad [1.1\text{-}60]$$

Definiamo un esponenziale complesso unitario come

$$e(t) = e^{\rho t} \text{ per } t > 0 \qquad [1.1\text{-}61]$$

Usando le formule di Eulero l'esponenziale complesso è esprimibile in un'altra forma:

$$e(t) = e^{\rho t} = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = e^{\sigma_0 t} e^{j\omega_0 t} = e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t + j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t). \qquad [1.1\text{-}62]$$

L'importanza del segnale esponenziale complesso sta nel fatto che la derivazione o l'integrazione di un esponenziale complesso comporta soltanto la moltiplicazione o la divisione per ρ dello stesso esponenziale. Inoltre se o σ_0 oppure ω_0 sono nulli si ottengono particolari segnali, come vedremo più avanti.

Un altro segnale esponenziale complesso molto importante è il coniugato del precedente che si indica con $e^*(t)$.

$$e^*(t) = e^{*\rho t} = e^{(\sigma_0 - j\omega_0)t} = e^{\sigma_0 t} e^{-j\omega_0 t} = e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t - j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t). \qquad [1.1\text{-}63]$$

Applicando le definizioni si ha:

$$e(t)e^*(t) = e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t + j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t)e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t - j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t) = e^{2\sigma_0 t},$$

cioè

$$e^{\sigma_0 t} = \sqrt{e\,e^*}. \qquad [1.1\text{-}64]$$

Il prodotto dell'esponenziale complesso e del suo coniugato da il coefficiente esponenziale reale.

§1.1.2.7 Segnali derivati dai fondamentali

A partire dai tre segnali fondamentali è possibile costruirne tanti altri. Descriveremo alcuni fra i più importanti.

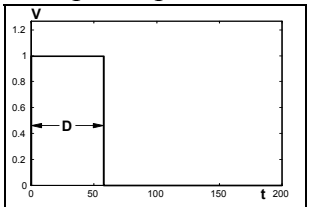

Fig.1.1-29

Impulso unitario largo D

Un impulso unitario largo D può essere ottenuto per differenza fra due gradini di cui il secondo ritardato di D. Pertanto è

$$f(t) = g(t) - g(t-D) \qquad [1.1\text{-}65]$$

mostrato nella Fig.1.1-29.

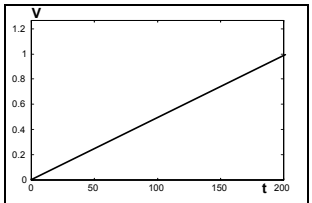

Fig.1.1-30

Rampa unitaria

Integrando un gradino unitario si ha la rampa unitaria definita come

$$f(t) = t \text{ per } t > 0[\qquad 1.1\text{-}66]$$

mostrata nella Fig.1.1-30.

Esponenziale decrescente

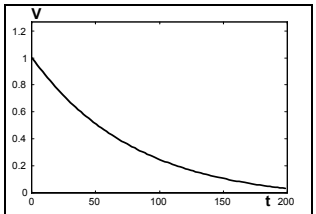

Fig.1.1-31

Un segnale che si incontra molto spesso è l'esponenziale decrescente. Esso si ha dalla [1.1-62] per $\omega_0 = 0$ e per $\sigma_0 = -\alpha < 0$. Allora

$$f(t) = e^{-\alpha t} \qquad \text{per } t > 0, \qquad [1.1\text{-}67]$$

o che è lo stesso da

$$f(t) = g(t)\, e^{-\alpha t} \qquad [1.1\text{-}68]$$

ed è mostrato nella Fig.1.1-31.

Esponenziale divergente

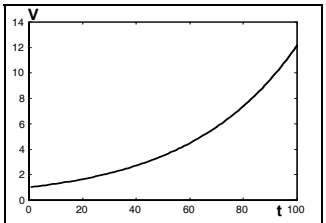

Fig.1.1-32

Sempre dalla [1.1-62] per $\omega_0 = 0$, ma, al contrario, per $\alpha > 0$, dalla [1.1-62] si ottiene un esponenziale divergente. Si ha

$$f(t) = e^{\alpha t} \qquad \text{per } t > 0, \qquad [1.1\text{-}69]$$

o che è lo stesso da

$$f(t) = g(t)\, e^{\alpha t} \qquad [1.1\text{-}70]$$

mostrato nella Fig.1.1-32.

Sinusoide smorzata

La semidifferenza dell'esponenziale complesso e del suo coniugato da il seno smorzato, a parte l'unità immaginaria ***j*** a dividere. Infatti dalle [1.1-62] e [1.1-63]

$$\frac{e-e^*}{2j}=\frac{e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t+j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t)-e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t-j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t)}{2j}$$

cioè $$\frac{e-e^*}{2j}=e^{\sigma_0 t}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t \qquad \text{per } t>0. \qquad [1.1\text{-}71]$$

mostrato nella Fig.1.1-33.

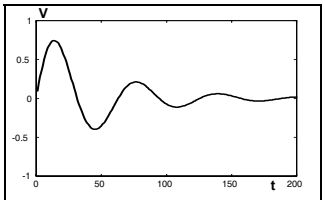

Fig.1.1-33

Cosinusoide smorzata

Se, invece, si esegue la semisomma dell'esponenziale complesso e del suo coniugato si ha il coseno smorzato. Infatti, analogamente al caso precedente, e utilizzando ancora le [1.1-62] e [1.1-63]

$$\frac{e+e^*}{2}=\frac{e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t+j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t)+e^{\sigma_0 t}(\cos\omega_0 t-j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t)}{2}$$

cioè $$\frac{e+e^*}{2}=e^{\sigma_0 t}\cos\omega_0 t \qquad \text{per } t>0. \qquad [1.1\text{-}72]$$

mostrato nella Fig.1.1-34.

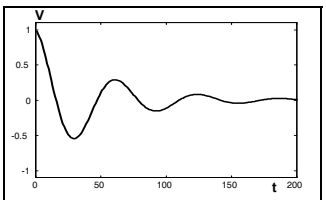

Fig.1.1-34

Oscillazione sinusoidale divergente

Nel caso in cui σ_0 risultasse positivo si avrebbero oscillazioni divergenti come quelle mostrate in Fig.1.1-35.

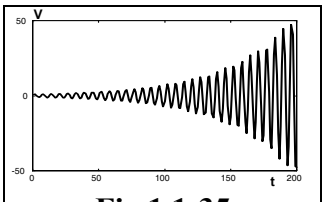

Fig.1.1-35

Seno unitario

La [1.1-71], nel caso di smorzamento nullo, da il segnale seno mostrato nella figura 1.1-36

$$f(t) = \mathrm{sen}\ \omega_0 t \qquad \text{per } t>0. \qquad [1.1\text{-}73]$$

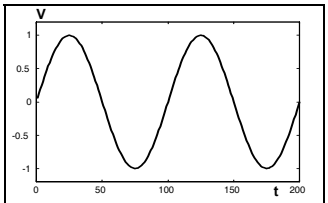

Fig.1.1-36

Coseno unitario

Analogamente la [1.1-72], nel caso di smorzamento nullo, da il segnale coseno mostrato nella figura 1.1-37.

$$f(t) = \cos\ \omega_0 t \qquad \text{per } t>0. \qquad [1.1\text{-}74]$$

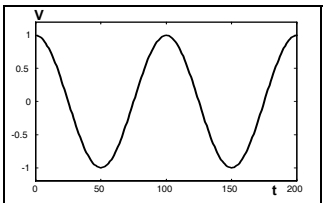

Fig.1.1-37

§1.2. Le equazioni differenziali

La trattazione delle ***equazioni differenziali***, pur essendo molto importante, esula dagli scopi di questa trattazione. Pertanto si rimanda ai testi specializzati[BO],[SA],[SP1] senza entrare nei particolari. Vengono soltanto ricordati i risultati relativi ad alcuni casi semplici di equazioni differenziali che sono più comunemente incontrati nello studio dei sistemi elettronici.

§1.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

Cominciamo dalle ***equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti***. Un sistema descritto dalla seguente equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti

$$\sum_{i,0}^{n} a_i \frac{d^n y}{dx^n} = 0 \qquad [1.2\text{-}1]$$

si dice anche di ordine ***n*** poiché l'equazione differenziale relativa è di ordine n.

Il calcolo fornisce gli strumenti per determinare la soluzione. Si chiama polinomio caratteristico il polinomio

$$P_d(n) = \sum_{i,0}^{n} a_i s^i, \qquad [1.2\text{-}2]$$

le cui radici si hanno per

$$\sum_{i,0}^{n} a_i s^i = 0.$$

Se questa ha n radici $p_1, p_2, ..., p_n$ distinte allora la soluzione della [1.2-1] è

$$y = c_1 e^{p_1 x} + c_2 e^{p_2 x} + ... + c_n e^{p_n x} . \qquad [1.2\text{-}3]$$

Se una sua radice p_j ha molteplicità r, allora, in corrispondenza, la [1.2-3] avrà sempre n termini di cui r sono $e^{p_j x}$, $x \cdot e^{p_j x}$,...+ $x^{r-1} \cdot e^{p_j x}$.

Ad ognuno degli n termini è associata una costante arbitraria da determinare in base alle condizioni al contorno e cioè delle

$$y_0^k = \left. \frac{d^k y}{dx^k} \right|_0 . \qquad [1.2\text{-}4]$$

§1.2.2 Equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti

In questo caso l'equazione da risolvere è del tipo

$$\sum_{i,0}^{n} a_i \frac{d^n y}{dx^n} = z(x) \qquad [1.2\text{-}5]$$

Il sistema è ancora di ordine n.

La soluzione della [1.2-5] è ancora la [1.2-3] con l'aggiunta di un integrale particolare che dipende dalla z(x). Si rimanda ai citati testi di calcolo per un approfondimento di questo argomento. Tuttavia vale la pena di ricordare che se z(x) è, per es., un polinomio, allora un integrale particolare sarà un altro polinomio. Se, per es., z(x) è una funzione del tipo *sen ωx* o *cos ωx* allora l'integrale particolare sarà qualcosa del tipo Asen ωx + Bcos ωx. Nel caso di un seno od un coseno smorzato, si avrà, invece, un integrale particolare del tipo $e^{\alpha x}$(Asen ωt + Bcos ωt).

§1.3. La trasformata di Steimetz

Una trasformazione di una funzione f(x) in un altra F(y) consiste nell'applicare un ***operatore*** che fa corrispondere ad una funzione f(x) nel dominio della variabile x una funzione F(y) nel dominio della variabile y. In elettronica le trasformazioni si usano per facilitare lo studio dei circuiti.

Cominciamo a descrivere un operatore che trasforma una funzione periodica sinusoidale in un numero complesso. Tale operatore prende il nome di ***Trasformata di Steimetz***.

Consideriamo un vettore rotante $\overline{A}$ con pulsazione ω, fase iniziale φ ed ampiezza A_M. Le citate formule di Eulero ci consentono di descrivere il vettore in forma esponenziale o trigonometrica:

$$\overline{A} = A_M[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)], \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{A} = A_M e^{j(\omega t + \varphi)}]. \qquad [1.3\text{-}1]$$

Calcoliamo la derivata di $\overline{A}$.

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = A_M\omega\,[-\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + j\cos(\omega t + \varphi)] = j\omega A_M[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)] = j\omega\overline{A}$$ .Quindi

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = j\omega\overline{A}. \qquad [1.3\text{-}2]$$

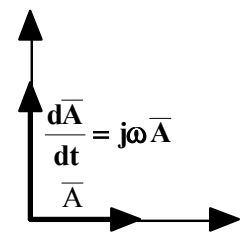

Fig.1.2-1

La trasformata di Steimetz consente di calcolare la derivata di un segnale sinusoidale periodico di pulsazione ω semplicemente moltiplicando per jω la sua rappresentazione complessa. Nella Fig.1.3-1 è mostrata la rappresentazione schematica del vettore $\overline{A}$ e della sua derivata. La derivata è sfasata in anticipo di 90° rispetto al vettore $\overline{A}$.

Calcoliamo l'integrale di $\overline{A}$.

$$\int_0^t \overline{A}dt = A_M\int_0^t [\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)]dt = \frac{A_M}{\omega}\int_0^t [\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)]d(\omega t) =$$

$$= \frac{A_M}{\omega}[\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) - j\cos(\omega t + \varphi)] = \frac{A_M}{j\omega}[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)] = \frac{\overline{A}}{j\omega}$$

Allora $$\int_o^t \overline{A}dt = \frac{\overline{A}}{j\omega} \qquad [1.3\text{-}3]$$

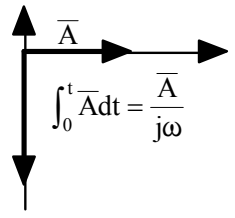

Fig.1.2-2

La funzione integrale si ottiene dividendo per jω. La cosa era prevedibile dal momento che in fondo siamo in presenza di segnali esponenziali complessi. Nella Fig.1.3-2 è mostrata la rappresentazione schematica del vettore $\overline{A}$ e del suo integrale. Questa volta l'integrale è sfasato in ritardo di 90° rispetto al vettore $\overline{A}$.

Adoperiamo la trasformazione di Steimetz per il calcolo di tensioni e correnti applicate a componenti come ***resistori***, ***condensatori*** ed ***induttori***.

In una rete elettrica il rapporto $\overline{V}/\overline{I}$ fra le trasformate di Steimetz di tensione e corrente viene indicato con il simbolo $\overline{Z}$ e prende il nome di i***mpedenza***. Il suo inverso $\overline{Y} = 1/\overline{Z}$ viene chiamato ***ammettenza***.

Un ***resistore*** è definito dalla legge di ***Ohm***. **v** è la tensione ai suoi capi, **i** è la corrente che l'attraversa. Cioè:

$$R = \frac{v}{i}, \qquad [1.3\text{-}4]$$

R è la ***resistenza*** del resistore e si misura in ***Ohm***.

Pertanto la tensione ai capi è $$v = R\,i \qquad [1.3\text{-}5]$$

Se la corrente è sinusoidale di ampiezza I_M e pulsazione ω con fase iniziale φ

$$i = I_M[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)] \qquad [1.3\text{-}6]$$

quindi

$$v = R\,i = R\,I_M[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)] = V_M[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)] = v$$

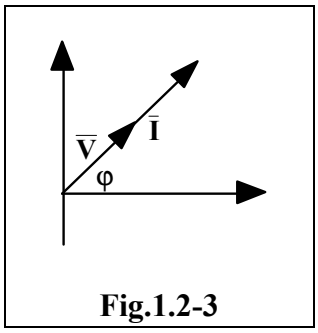

Fig.1.2-3

Applicando la trasformazione di Steimetz

$$\overline{V} = R\,\overline{I} \qquad [1.3\text{-}7]$$

che si poteva ottenere direttamente dalla [1.3-5].

Un ***condensatore*** è definito dal rapporto fra la carica **q** accumulata dalle sue armature e la differenza di potenziale **v** che si stabilisce fra le stesse. Dunque:

$$C = \frac{q}{v} \qquad [1.3\text{-}8]$$

C è la sua capacità e si misura in ***Farad***.

Se applichiamo una differenza di potenziale variabile ad un condensatore di capacità C scorre una corrente

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d\,Cv}{dt} = C\frac{dv}{dt},$$

cioè $$i = C\frac{dv}{dt}. \qquad [1.3\text{-}9]$$

Per quanto detto prima, applicando la [1.3-2],

$$\overline{I} = j\omega C\,\overline{V}, \qquad [1.3\text{-}10]$$

o anche $$\overline{V} = \frac{1}{j\omega C}\overline{I}. \qquad [1.3\text{-}11]$$

L'impedenza del condensatore, che ha le dimensioni di una resistenza, è

$$\frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \overline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \overline{X}_C, \qquad [1.3\text{-}12]$$

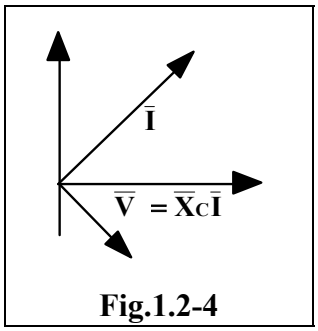

Fig.1.2-4

e viene chiamata ***reattanza*** del condensatore ed indicata con $\overline{X}_C$. Il suo inverso è la ***suscettanza***.

Il ***modulo*** e l'***argomento*** della reattanza sono, rispettivamente,

$$X_C = |\overline{X}_C| = \frac{1}{\omega C}, \qquad [1.3\text{-}13]$$

e $$\arg(\overline{X}_C) = -\pi/2. \qquad [1.3\text{-}14]$$

Questo significa che, aumentando la frequenza o la capacità, la corrente nel condensatore aumenta, e che il vettore $\overline{V}$ è in ritardo di 90° sul vettore $\overline{I}$, vedi Fig.1.2-4

In modo analogo una ***induttore*** è definito dal fatto che una variazione di corrente al suo interno produce ai suoi capi una caduta di potenziale data da

$$v = L\frac{di}{dt}, \qquad [1.3\text{-}15]$$

L è l'***induttanza*** dell'induttore e si misura in ***Henry***.

Applicando la [1.3-2] si ha

$$\overline{V} = j\omega L\overline{I}. \qquad [1.3\text{-}16]$$

L'impedenza dell'induttore, che ha le dimensioni di una resistenza, è

$$\frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \overline{Z} = j\omega L = \overline{X}_L, \qquad [1.3\text{-}17]$$

La ***reattanza*** dell'induttore ed indicata con $\overline{X}_L$.

Il ***modulo*** e l'***argomento*** della reattanza sono, rispettivamente,

$$X_L = |\overline{X}_L| = \omega L, \qquad [1.3\text{-}18]$$

e

$$\arg(\overline{X}_L) = \pi/2, \qquad [1.3\text{-}19]$$

Questo significa che, aumentando la frequenza o la capacità, la corrente nell'induttore diminuisce, e che il vettore $\overline{V}$ è in anticipo di 90° dal vettore $\overline{I}$, vedi Fig.1.2-5.

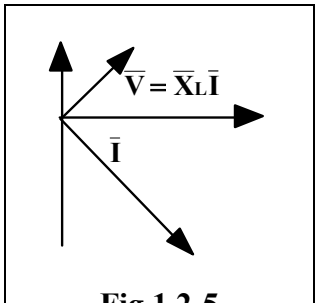

Fig.1.2-5

Due componenti sono in ***serie*** se sono attraversati dalla stessa corrente. Ovviamente la tensione ai capi è la somma delle tensioni sui singoli componenti. Supponiamo di mettere in serie una resistenza R ed un elemento reattivo X come in Fig.1.2-6a. Sarà:

$$\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_X = R\,\overline{I} + \overline{X}\,\overline{I} = (R + X)\,\overline{I}. \qquad [1.3\text{-}20]$$

Per quanto riguarda il modulo e la fase, dalla Fig1.2-6b:

$$|V| = \sqrt{V_R^2 + V_X^2} = |I|\sqrt{R^2 + X^2} = |I|\,|Z|. \qquad [1.3\text{-}21]$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{V_X}{V_R} = \mathrm{arctg}\frac{X}{R}. \qquad [1.3\text{-}22]$$

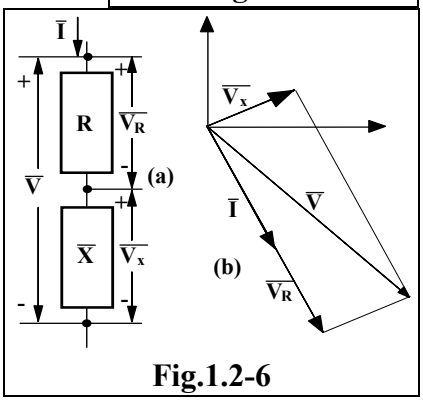

Fig.1.2-6

Due componenti sono in ***parallelo*** se hanno i terminali in comune e quindi sino sottoposti alla stessa tensione. Naturalmente la corrente complessiva è la somma delle singole correnti. Supponiamo di mettere in parallelo una conduttanza G ed un elemento reattivo di suscettanza S come in Fig.1.2-7a. Sarà:

$$\overline{I} = \overline{I}_G + \overline{I}_S = G\overline{V} + \overline{S}\overline{V} = (G + X)\overline{V} = \overline{Y}\overline{V}. \qquad [1.3\text{-}23]$$

Per quanto riguarda il modulo e la fase, dalla Fig1.2-7b:

$$|I| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2} = |V|\sqrt{G^2 + S^2} = |V|\,|Y|. \qquad [1.3\text{-}24]$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{V_S}{V_G} = \mathrm{arctg}\frac{S}{G}. \qquad [1.3\text{-}25]$$

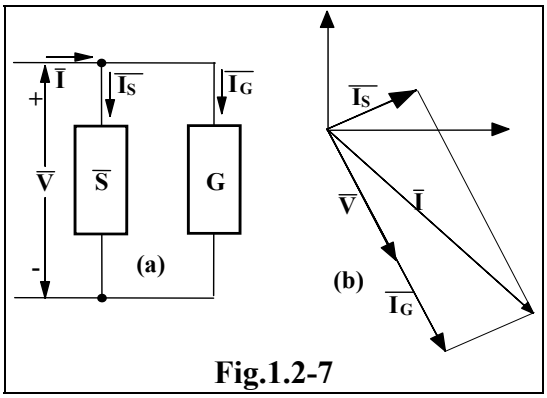

Fig.1.2-7

§1.4. La trasformata di Laplace

Data una funzione f(t), nulla per $t \le 0$, ad un solo valore, si definisce ***Trasformata di Laplace***

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \qquad [1.4\text{-}1]$$

in cui s è la ***variabile complessa*** $s = \sigma + j\omega$, [1.4-2]
quando $L(\sigma)$ è assolutamente convergente.

Da ora in poi ndicheremo per brevità con la lettera ***minuscola*** una funzione della variabile indipendente e con la stessa lettera, però ***maiuscola*** la sua trasformata di Laplace e viceversa. Quindi nel seguito, ad es.:

$$f(t) \Leftrightarrow F(s);$$
$$f_1(t) \Leftrightarrow F_1(s);$$
$$f_p(t) \Leftrightarrow F_p(s);$$

che supporremo tutte trasformabili insieme alle loro derivate n-esime ed alle loro funzioni integrali. Si fa notare che, se si eseguono trasformate di funzioni non nulle solo per t>0, è del tutto indifferente mettere come limite inferiore zero oppure -∞. Infatti

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-st}dt0 = \int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-st}dt0,$$

se f(t) è non nulla solo per x≥t. E allora, dal momento che considereremo soltanto funzioni non nulle solo per t > 0 potremo sempre dire che

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-st}dt. \qquad [1.4\text{-}3]$$

§1.4.1 Proprietà fondamentali

Prima di applicare la trasformata di Laplace ai circuiti elettronici è necessario mostrare alcune sue proprietà fondamentali.

La trasformata di Laplace è un operatore lineare

Siano $f_1(t)$ e $f_2(t)$ due funzioni che hanno come trasformate $F_1(s)$ e $F_2(s)$. Vogliamo calcolare la trasformata della loro somma. Applicando la definizione [1.4-3], dal momento che l'integrale di una somma è eguale alla somma degli integrali delle funzione componenti la somma, si ha semplicemente

$$\mathcal{L}(f_1+f_2) = \mathcal{L}(f_1) + \mathcal{L}(f_2) = F_1+F_2. \qquad [1.4\text{-}4]$$

Inoltre dalla definizione di trasformata risulta evidente che:

$$\mathcal{L}(k_1f_1) = k_1\mathcal{L}(f_1) = k_1F_1; \qquad \mathcal{L}(k_2f_2) = k_2\mathcal{L}(f_2) = k_2F_2; \qquad [1.4\text{-}5]$$

ed anche $\mathcal{L}(k_1f_1+ k_2f_2) = k_1\mathcal{L}(f_1)+ k_2\mathcal{L}(f_2) = k_1F_1+ k_2F_2.$ [1.4-6]

Il che stabilisce che ***la trasformata di Laplace è un operatore lineare.***

Trasformata della derivata

Calcoliamo la trasformata della derivata della funzione f(t) che ha come trasformata F(s). Applichiamo la definizione [1.4-3]

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt}\cdot e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}df = \left|e^{-st}f\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -(se^{-st}f)dt = -f(0) + s\int_0^{\infty} e^{-st}fdt = sF(s) - f(0),$$

valida se $\lim_{t,\infty} e^{-st}f = 0.$ [1.4-7]

In tal caso
$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0). \qquad [1.4\text{-}8]$$

La trasformata della derivata di una funzione si calcola moltiplicando per ***s*** la relativa trasformata e sottraendo il suo valore iniziale.

Nel seguito ci interesserà ricordare che se vale la [1.4-7]
$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0) = \int_0^\infty e^{-st} df. \qquad [1.4\text{-}9]$$

<u>Trasformata della derivata i-esima</u>

Dimostreremo, con il metodo induttivo, che per la derivata i-esima vale
$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s) - \sum_{k,0}^{n-1} s^{n-k-1} f_0^k, \qquad [1.4\text{-}10]$$

dove, in analogia alla [1.2-4]
$$f_0^k = \left.\frac{d^k f}{dt^k}\right|_0. \qquad [1.4\text{-}11]$$

Abbiamo visto che per n = 1 la [1.4-10] è verificata. Supponiamo che sia anche vera per n-1.

Cioè
$$\mathcal{L}\left(\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right) = s^{n-1} F(s) - \sum_{k,0}^{n-2} s^{n-k-1} f_0^k.$$

Applicando a quest'ultima ancora la [1.4-8]:
$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right)\right] = s\left[s^{n-1} F(s) - \sum_{k,0}^{n-2} s^{n-k-1} f_0^k\right] - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_0 = s^n F(s) - \sum_{k,0}^{n-1} s^{n-k-1} f_0^k.$$

Che non è altro che la [1.4-10].

<u>Trasformata della funzione integrale</u>

Determiniamo la trasformata della funzione integrale $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$ della funzione f(t) che ha come trasformata F(s). Ovviamente è $\varphi(0) = 0$. Inoltre $d\varphi/dt = f$.

Dalla [1.4-8] $\mathcal{L}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = s\mathcal{L}(\varphi) - \varphi(0) = s\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right)$; e $\mathcal{L}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \mathcal{L}(f) = F(s)$.

Eguagliando le due espressioni
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{F(s)}{s}. \qquad [1.4\text{-}12]$$

La trasformata dell'integrale di una funzione si calcola dividendo per ***s*** la relativa trasformata.

<u>Trasformata di un segnale ritardato</u>

Si può esprimere la trasformata di un segnale ritardato in funzione della trasformata del segnale originario. Consideriamo la f(t) e la stessa funzione ritardata di Δt. Impieghiamo la definizione [1.4-3] per determinare la trasformata.
$$\mathcal{L}[f(t-\Delta t)] = \int_0^\infty f(t-\Delta t)e^{-st}dt = \int_0^{\Delta t} f(t-\Delta t)e^{-st}dt + \int_{\Delta t}^\infty f(t-\Delta t)e^{-st}dt.$$

Poniamo $\tau = t\text{-}\Delta t$. Allora la precedente diventa
$$\mathcal{L}[f(\tau)] = 0 + \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+\Delta t)}d\tau = e^{-s\Delta t} \cdot \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

Dunque $$\mathcal{L}[f(t-\Delta t)] = e^{-s\Delta t}F(s) \qquad [1.4\text{-}13]$$

Quindi la trasformata del segnale ritardato di Δt si ottiene da quella del segnale non ritardato semplicemente moltiplicando per $e^{-s\Delta t}$. Un ritardo Δt nel dominio del tempo corrisponde ad un fattore moltiplicativo $e^{-s\Delta t}$ in quello di s.

Teorema del valore iniziale

Riprendiamo la [1.4-9].

$$sF(s) - f(0) = \int_0^\infty e^{-st} df,$$

e determiniamo il limite di entrambi i termini per $s \to \infty$:

$$\lim_{s,\infty}[sF(s) - f(0)] = \lim_{s,\infty}[sF(s)] - f(0) = \lim_{s,\infty}\left[\int_0^\infty e^{-st} df\right] = 0.$$

Cioè

$$f(0) = \lim_{s,\infty}[sF(s)], \qquad [1.4\text{-}14]$$

che consente di ricavare il valore iniziale di una f(t) a partire dalla sua F(s). Ricordiamo che, pero, la [1.4-9], e quindi la [1.4-14], valgono quando vale la [1.4-7].

Teorema del valore finale

In modo analogo, ma questa volta il limite si esegue per $s \to 0$:

$$\lim_{s,0}[sF(s) - f(0)] = \lim_{s,0}[sF(s)] - f(0) = \lim_{s,0}\left[\int_0^\infty e^{-st} df\right] = \int_0^\infty \lim_{s,0}(e^{-st})\, df = \int_0^\infty df = \lim_{t,\infty} f(t) - f(0).$$

Cioè $$\lim_{t,\infty} f(t) = \lim_{s,0}[sF(s)]; \qquad [1.4\text{-}15]$$

che permette di ricavare il valore finale di una f(t) a partire dalla sua F(s). Si intende che la validità della [1.4-15] dipende da quella della [1.4-7].

Cambio della scala dei tempi

Abbiamo già visto cosa succede quando si scalano i tempi. Vediamo cosa succede della trasformata. Riprendiamo la definizione [1.4-3]

$$\mathcal{L}[f(t/a)] = \int_0^\infty f(t/a)\, e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t/a)\, e^{-sat/a}\, a\, d(t/a) = a\int_0^\infty f(x)\, e^{-sax} d(x) = aF(as).$$

Quindi

$$\mathcal{L}[f(t/a)] = aF(as). \qquad [1.4\text{-}16]$$

Per a = -1

$$\mathcal{L}[f(-t)] = -F(-s). \qquad [1.4\text{-}17]$$

Moltiplicazione per esponenziale complesso

Molto spesso si incontrano segnali moltiplicati per esponenziali complessi, perciò è molto comodo conoscere il modo di determinare la trasformata di tali segnali in modo semplice. Adoperiamo la definizione di trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)\, e^{-at}] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} e^{-at} dt \int_0^\infty = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(s+a)t} d(t) = F(s+a).$$

Cioè $$\mathcal{L}[f(t)\,e^{-at}] = F(s+a). \qquad [1.4\text{-}18]$$

Si fa notare che l'espressione precedente è valida comunque sia a, positivo o negativo, reale o complesso. Discuteremo più avanti il senso di a negativo o complesso. In altri termini, il calcolo si esegue semplicemente sostituendo in F(s), dappertutto a ***s***, ***s+a***.

§1.4.2 Trasformate dei segnali fondamentali e dei loro derivati

A questo punto è utile calcolare le trasformate dei segnali fondamentali e dei loro derivati.

Gradino unitario

Riprendiamo la definizione [1.1-57] del gradino unitario ed applichiamo la definizione di trasformata [1.4-3]

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}\frac{d(-st)}{-s} = -\frac{1}{s}\cdot\left|e^{-st}\right|_o^\infty = \frac{1}{s}.$$

Allora $$\mathcal{L}[g(t)] = G(s) = \frac{1}{s} \qquad [1.4\text{-}19]$$

Delta

Per calcolare la trasformata della δ possiamo tenere conto che essa è la derivata del gradino. Applicando, allora la proprietà della trasformata della derivata, espressa dalla [1.4-9], ad un gradino si ha:

$$\mathcal{L}(\delta) = \mathcal{L}\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s\cdot\frac{1}{s} - 0 = 1.$$

Dunque $$\mathcal{L}(\delta) = 1. \qquad [1.4\text{-}20]$$

Esponenziale complesso

Un segnale formalmente molto interessante è l'esponenziale complesso definito dalla [1.1-61] che, si può anche scrivere in modo solo apparentemente diverso come $e(t) = g(t)\cdot e^{\rho t}$. Ricordiamo che g(t) è il gradino unitario diverso da zero soltanto per tempi positivi come definito dalle [1.1-57] e [1.1-59]. Il calcolo della trasformata è immediato. Applicando la proprietà della moltiplicazione per un esponenziale complesso descritta dalla [1.4-18] e tenendo presente che la trasformata di un gradino è data dalla [1.4-19] si ha direttamente:

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[g(t)e^{\rho t}] = \frac{1}{s-\rho}. \qquad [1.4\text{-}21]$$

Esponenziale decrescente

Nel caso di esponenziale reale: $f(t) = g(t)\,e^{-\alpha t}$.

In modo diretto usando la [1.4-21] $$\mathcal{L}[g(t)e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s+\alpha}. \qquad [1.4\text{-}22]$$

Impulso largo D

La [1.1-65] è l'espressione di un impulso unitario largo D. Impiegando la [1.4-19] che si riferisce alla trasformata di un gradino e la [1.4-13] che da la trasformata di un segnale ritardato

$$\mathcal{L}[g(t) - g(t-D)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sD}}{s} = \frac{1-e^{-sD}}{s}.$$

Cioè $$\mathcal{L}[g(t) - g(t-D)] = \frac{1-e^{-sD}}{s}. \qquad [1.4\text{-}23]$$

Rampa unitaria

La trasformata di una rampa unitaria può essere calcolata in molti modi. Per esempio si può tener conto che essa è l'integrale di un gradino unitario. Pertanto, applicando la [1.4-12] alla [1.4-19] si ha:

$$f(t)=\int_0^t g(t)dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathcal{L}[g(t)]}{s}=\frac{1}{s^2}. \qquad [1.4\text{-}24]$$

Sinusoide unitaria

Per calcolare la trasformata del segnale sinusoidale unitario definito dalla [1.1-56] applichiamo la definizione. Pertanto:

$$\mathcal{L}(\text{sen}\omega t)=\int_0^\infty \text{sen}\omega t e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\int_0^\infty \text{sen}\omega t d(e^{-st})=-\frac{1}{s}\left[\left|\text{sen}\omega t e^{-st}\right|_0^\infty-\omega\int_0^\infty \cos\omega t e^{-st}dt\right]=.$$

$$=-\frac{1}{s}\left[0+\frac{\omega}{s}\int_0^\infty \cos\omega t d(e^{-st})\right]=-\frac{\omega}{s^2}\left[\left|\cos\omega t e^{-st}\right|_0^\infty+\omega\int_0^\infty \text{sen}\,\omega t e^{-st}dt+\right]=-\frac{\omega}{s^2}\{-1+\omega\cdot\mathcal{L}(\text{sen}\,\omega t)\}.$$

Quindi $$s^2\cdot\mathcal{L}(\text{sen}\omega t)=\omega-\omega^2\mathcal{L}(\text{sen}\omega t),$$

ed ancora $$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}(\text{sen}\omega t)=\omega.$$

Per finire $$\mathcal{L}(\text{sen}\omega t)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \qquad [1.4\text{-}25]$$

Cosinusoide unitaria

Poiché $\frac{d}{dt}(\text{sen}\,\omega t)=\omega\,\text{sen}\,\omega t\,\cos\omega t$, segue che $\cos\omega t=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{d}{dt}(\text{sen}\,\omega t)$. Per il calcolo della trasformata del coseno, conviene utilizzare la proprietà della derivata data dalla [1.4-8]. Allora:

$$\mathcal{L}(\cos\omega t)=\frac{1}{\omega}\cdot\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\text{sen}\omega t\right]=\frac{1}{\omega}\cdot[s\mathcal{L}(\text{sen}\omega t)-\text{sen}0].$$

Pertanto $$\mathcal{L}(\cos\omega t)=\frac{1}{\omega}\cdot s\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}. \qquad [1.4\text{-}26]$$

Sinusoide smorzata

Applicando la proprietà [1.4-18] degli smorzamenti alla trasformata [1.4-25] del seno si ha direttamente $$\mathcal{L}(\text{sen}\omega t\ e^{-\alpha t})=\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}. \qquad [1.4\text{-}27]$$

Cosinusoide smorzata

Analogamente, a partire dalle [1.4-26] applicata alla [1.4-18]:

$$\mathcal{L}(\cos\omega t\ e^{-\alpha t})=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}. \qquad [1.4\text{-}28]$$

§1.4.3 Operazioni sui segnali e Trasformata di Laplace

Convoluzione

Abbiamo già definito con la [1.1-34] la convoluzione fra due funzioni f(t) e h(t) come

$$\gamma_{fh}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Vediamo di determinare la relazione tra la trasformata della convoluzione e quella delle singole funzioni. Sia $\Gamma_{fh}(s)$ la trasformata di Laplace di $\gamma_{fh}(t)$. Per definizione è

$$\mathcal{L}[\gamma_{fh}(t)] = \Gamma_{fh}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt,$$

che si può calcolare scambiando per prima cosa le variabili d'integrazione. Allora

$$\Gamma_{fh}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-st}dt\right]f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[h(x)e^{-s(x+\tau)}]\,dx\,f(\tau)d\tau,$$

dove si è posto x=t-τ nell'integrale interno. Il termine esponenziale può essere separato in due parti, una delle quali non dipende dalla variabile d'integrazione dell'integrale interno, e può, quindi, essere posta al di fuori di questi. Cioè

$$\Gamma_{fh}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-sx}dx\right]f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau.$$

L'integrale interno non dipende da τ e può essere portato fuori dal segno del primo integrale e cioè

$$\Gamma_{fh}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-sx}dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau\cdot,$$

che per la definizione [1.4-1] della trasformata di Laplace da:

$$\Gamma_{fh}(s) = F(s)\,H(s) \qquad [1.4\text{-}29]$$

Il processo di convoluzione fra due funzioni nel dominio del tempo corrisponde a quello di moltiplicazione nel dominio di s delle relative trasformate.

Si noti che la [1.4-29] può essere anche scritta come:

$$\Gamma_{fh}(s) = F(s)\,H(s) = H(s)\,F(s) = \Gamma_{hf}(s). \qquad [1.4\text{-}30]$$

<u>Correlazione</u>

La correlazione fra due funzioni reali f(t) e h(t) e data dalla [1.1-37]

$$\psi_{fh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)h(t)dt.$$

Applicando la definizione di trasformata e indicando con $\Psi_{fh}(s)$ la trasformata della correlazione $\psi_{fh}(t)$ fra i due segnali f(t) e h(t)

$$\mathcal{L}[\psi_{fh}(t)] = \Psi_{fh}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{fh}\,e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)\,h(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt\,.$$

Scambiamo le variabili d'integrazione. Allora

$$\Psi_{fh}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)\,e^{-st}dt\right]h(\tau)d\tau$$

Poniamo x = t+τ nell'integrale interno. Si ha dx = dτ. Allora la precedente diventa

$$\Psi_{fh}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-s(x-\tau)}dx\right]h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-sx}dx\right]h(\tau)\,e^{s\tau}d\tau,$$

In quest'ultima il termine esponenziale è stato separato nelle due parti e quella indipendente da x è stata portata al di fuori dall'integrale in dx. Inoltre, poiché il termine in parentesi quadra non dipen-

de dalla variabile d'integrazione τ, può essere portato fuori dall'integrale in $d\tau$. Allora

$$\Psi_{fh}(s) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx\right]\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s\tau}d\tau,$$

e applicando la definizione della trasformata di Laplace:

$$\Psi_{fh}(s) = F(s)\,H(-s). \qquad [1.4\text{-}31]$$

Nel caso di segnali complessi si sarebbe trovato

$$\Psi_{fh}(s) = F(s)\,H^*(-s). \qquad [1.4\text{-}32]$$

Autocorrelazione

L'autocorrelazione del segnale f(t) è stata definita dalle [1.1-43]÷[1.1-47]. Per il calcolo della sua trasformata conviene applicare le due precedenti definizioni e tenere presente che f(t) = h(t). Indicando con $\psi_f(t)$ e $\Psi_f(s)$, rispettivamente l'autocorrelazione e la sua trasformata si ha

$$\Psi_f(s) = F(s)F(-s) \qquad [1.4\text{-}33]$$

per f(t) reale. Altrimenti, nel caso di f(t) complessa

$$\Psi_f(s) = F(s)\,F^*(-s). \qquad [1.4\text{-}34]$$

§1.4.4 L'antitrasformata di Laplace

L'***antitrasformata di Laplace*** di una funzione F(s) è quell'operatore che a partire dalla F(s) ci consente di ricavare la f(t) di cui la F(s) è la Trasformata secondo Laplace.

Si può dare una definizione in termici analitici dell'antitrasformata. Tuttavia quanto già detto è sufficiente. In effetti per trovare l'antitrasformata di una F(s) ci si aiuta con tabelle come quelle proposte nell'Appendice 1 e le si adopera alla rovescia.

§1.4.5 Le equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti

Le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di particolare importanza si possono risolvere facilmente usando la trasformata di Laplace. Discutiamo di due casi.

I Tipo

Cominciamo dalle equazioni differenziali lineari del tipo descritte dalla [1.2-5] relativa ad un sistema di ordine n.

$$\sum_{i,0}^{n} a_i \frac{d^n y(x)}{dx^n} = z(x). \qquad [1.2\text{-}5]$$

Applicando la [1.4-10] e trasformando entrambi i membri

$$\sum_{i,0}^{n} a_i \left[s^n Y(s) - \sum_{k,0}^{n-1} s^{n-k-1} y_0^k\right] = Z(s).$$

cioè

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{\sum_{i,0}^{n} a_i s^i} + \frac{\sum_{i,0}^{n}\sum_{k,0}^{i-1} a_i s^{i-k-1} y_0^k}{\sum_{i,0}^{n} a_i s^i}. \qquad [1.4\text{-}35]$$

Abbiamo già chiamato

$$P_d(s) = \sum_{i,0}^{n} a_i s^i \qquad [1.2\text{-}4]$$

polinomio caratteristico. Poniamo $$Y'(s)=\sum_{i,0}^{n}\sum_{k,0}^{i-1}a_i s^{i-k-1}y_0^k \qquad [1.4\text{-}36]$$

la [1.4-35] può essere scritta semplicemente come

$$Y(s)=\frac{Z(s)}{P_d(s)}+\frac{Y'(s)}{P_d(s)}. \qquad [1.4\text{-}37]$$

La risposta Y(s) del sistema è data da due termini, il primo dipende dall'eccitazione, il secondo dalle condizioni iniziali. Entrambi i termini, inoltre, dipendono da come è fatto il sistema attraverso il polinomio caratteristico $P_d(s)$. Il termine funzione dall'eccitazione applicata prende il nome di ***risposta forzata*** mentre l'altro, relativo alle condizioni iniziali si chiama ***risposta libera***.

II Tipo

In questo caso l'equazione differenziale da risolvere è la

$$\sum_{i,0}^{n}a_i\frac{d^n y(x)}{dx^n}=\sum_{i,0}^{m}b_i\frac{d^m z(x)}{dx^n}. \qquad [1.4\text{-}38]$$

Applicando la [1.4-10], riordinando e riscrivendo opportunamente si ha:

$$Y(s)=\frac{\sum_{i,0}^{m}b_i s^i}{\sum_{i,0}^{n}a_i s^i}\cdot Z(s)+\frac{\sum_{i,0}^{m}\sum_{k,0}^{i-1}b_i s^{i-k-1}z_0^k}{\sum_{i,0}^{n}a_i s^i}+\frac{\sum_{i,0}^{n}\sum_{k,0}^{i-1}a_i s^{i-k-1}y_0^k}{\sum_{i,0}^{n}a_i s^i}. \qquad [1.4\text{-}39]$$

Dove z^k_0 ha il significato analogo alla [1.2-4], pero per la z. Cioè

$$z_0^k=\left.\frac{d^k y}{dx^k}\right|_0. \qquad [1.4\text{-}40]$$

Posto $$P_n(s)=\sum_{i,0}^{m}b_i s^i \qquad [1.4\text{-}41]$$

e definito il polinomio caratteristico $P_d(s)$ con la [1.2-4] e Y'(s) con la [1-4-36]. Poniamo

$$Z'(s)=\sum_{i,0}^{m}\sum_{k,0}^{i-1}b_i s^{i-k-1}z_0^k. \qquad [1.4\text{-}42]$$

Allora la [1.4-39] essere scritta semplicemente come

$$Y(s)=\frac{P_n(s)}{P_d(s)}\cdot Z(s)+\frac{Z'(s)}{P_d(s)}+\frac{Y'(s)}{P_d(s)}. \qquad [1.4\text{-}43]$$

Questa volta la risposta Y(s) del sistema è formato da tre termini, il primo due dipendono dall'eccitazione applicata al sistema, il terzo dalle condizioni iniziali del sistema. Tutti, d'altra parte, dipendono da come è fatto il sistema attraverso il polinomio caratteristico $P_d(s)$.

§1.4.6 Poli e zeri

Vedremo dopo l'importanza che i due polinomi P_n e P_d hanno nella determinazione del comportamento del sistema cui sono applicate le eccitazioni e di cui si vuole sapere la risposta. Intanto chiamiamo ***poli*** le radici di $P_d(s)$ e ***zeri*** le radici di $P_n(s)$ e li indichiamo rispettivamente con p_i e z_i. Ricordiamo che un polinomio di grado n ha n radici, non sempre tutte distinte, non sempre tutte reali. Per ogni radice complessa esiste la corrispondente coniugata.

§1.4.7 Sviluppo delle funzioni razionali fratte in frazioni parziali

Dalle [1.4-37] e [1.4-43] si vede che, nei sistemi governati da equazioni differenziali a coefficienti costanti, se la trasformata dell'eccitazione è esprimibile sotto forma di rapporto fra polinomi,

questa si può esprimere anche essa sotto forma di un rapporto di polinomi. Per motivi che vedremo successivamente è opportuno formalizzare tale rapporto fra polinomi come una somma di frazioni parziali.

Sia R(s) una funzione rapporto fra due polinomi a coefficienti reali con il denominatore di ordine n. Se il grado del numeratore m < n allora

$$R(s) = \frac{\sum_{i,0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i,0}^{n} a_i s^i}. \qquad [1.4\text{-}44]$$

Se il grado q = m + n ≥ n del numeratore di una F(s) allora

$$F(s) = \sum_{i,0}^{q-n} c_i s^i + \frac{\sum_{i,0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i,0}^{n} a_i s^i} = P_{q-n}(s) + R(s). \qquad [1.4\text{-}45]$$

Con R(s) si è indicato genericamente una frazione polinomiale con denominatore di grado n e numeratore di grado m <n.

Il termine $P_{q-n}(s)$ è un polinomio di grado q-n immediatamente antitrasformabile. Il problema che ci interessa è quello di ricavare l'antitrasformata del termine R(s).

Siano p_i le radici del denominatore, ognuna delle quali ha molteplicità n_i, per un totale di r radici distinte, in modo che sia

$$\sum_{i,1}^{r} n_i = n. \qquad [1.4\text{-}46]$$

Allora sarà possibile scrivere l'espressione di R(s) in modo che siano evidenti le radici e cioè

$$R(s) = \frac{\sum_{i,0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i,0}^{n} a_i s^i} = \frac{\sum_{i,0}^{m} b_i s^i}{a_n \prod_{i,1}^{r} (s - p_i)^{n_i}}, \qquad [1.4\text{-}47]$$

che si può riscrivere come

$$R(s) = \sum_{i,1}^{r} \sum_{k,1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s - p_i)^{n_i}}, \qquad [1.4\text{-}48]$$

nella quale

$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \cdot \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \left| (s - p_i)^{n_i} F(s) \right|_{s = p_i}. \qquad [1.4\text{-}49]$$

La dimostrazione di questa proprietà è rintracciabile in **[DI]**.

§1.4.8 Sistemi stabili e instabili

Supponiamo di avere un sistema isolato a riposo, con condizioni iniziali nulle. Applichiamo un ingresso z(t) impulsivo, cioè un segnale con energia non illimitata. Se, una volta che l'impulso è finito, passato un transitorio più o meno lungo, il sistema si rimette nelle condizioni iniziali esso si dice ***stabile***. Altrimenti il sistema è ***instabile***. Facciamo vedere che la parte reale dei poli di un sistema determina se il sistema è stabile o no.

Per semplicità studiamo un sistema che ha un solo polo *p,* cioè con una F(s)= k/(s-p), che a riposo abbia una uscita y(t) = 0. Applichiamo al suo ingresso una δ (qualunque impulso può essere immaginato come la sommatoria di δ non unitarie e traslate l'una rispetto all'altra). Per la [1.4-35]

l'uscita è y(s)=k/(s-p) cui corrisponde una y(t) =ke^{pt}. Essendo presente soltanto un polo esso è reale. Se il polo è negativo, allora $\lim_{t,\infty} y(t) = \lim_{t,\infty} ke^{pt} = 0$ ed il sistema ritorna allo stato iniziale. Se, invece, è positivo, la soluzione diverge per $t\to\infty$ ed il sistema non è stabile. Le cose non cambiano se i poli sono più di uno, purché ce ne sia almeno uno positivo ed il sistema non è stabile. Nel caso di poli complessi la stabilità del sistema dipende soltanto dal segno della parte reale dei poli. Se essa è positiva l'uscita del sistema diverge. La differenza che in questo caso l'uscita diverge oscillando. Non è possibile nel caso dei sistemi instabili applicare il teorema del valore finale perché non è soddisfatta la [1.4-7].

§1.5. La serie di Fourier

Abbiamo già utilizzato la trasformata di Steimetz per lo studio del comportamento di componenti in regime di correnti e tensioni alternative sinusoidali. La comodità dello strumento ci spinge ad aumentare il campo dello possibili applicazioni. Si può facilmente dimostrare che la trasformata di Steimetz è un operatore lineare. Pertanto essa è immediatamente applicabile al caso in cui le correnti o le tensioni siano somme di più componenti comunque sinusoidali. Vedremo che il suo campo d'applicazione è ben vasto

§1.5.1 Serie di Fourier Trigonometrica

Si può dimostrare [SA] che un segnale periodico f(t) di qualunque natura e di periodo T è esprimibile con la somma di una serie di componenti. Lo sviluppo, da chi lo ha proposto, prende il nome di ***Serie di Fourier***. La rappresentazione fondamentale è

$$v(t) = a_0 + \sum_{k,1}^{n} (a_k \cos k\omega t + b_k \operatorname{sen} k\omega t) \qquad [1.5\text{-}1]$$

con ***k*** intero positivo.

Al ***periodo T*** corrisponde la pulsazione $\omega = 2\pi/T$ detta anche ***pulsazione fondamentale***. La frequenza $f = 1/T = \omega/2\pi$ prende anche essa il nome di ***frequenza fondamentale***. Alle componenti di pulsazioni ***kω*** o frequenza ***kf*** con $k > 1$ si danno il nome di k-esima ***armonica***.

Il termine a_0 è il ***valor medio*** e pertanto

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0-\pi}^{\alpha_0+\pi} v(\alpha/\omega)d\alpha. \qquad [1.5\text{-}2]$$

I coefficienti a_k e b_k sono i ***coefficienti di correlazione*** fra la funzione v(t) e le funzioni f(t) = cos kωt e h = sen kωt. Calcoliamo a_k. Dalla [1.1-48] $a_k = c_{vf} = \psi_{vf}(0)/\psi_f(0)$ in cui

$$\psi_{vf}(0) = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)\cos(k\omega t)dt; \quad \text{e} \quad \psi_f(0) = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \cos^2(k\omega t)dt = \frac{1}{2};$$

ricavate, per $\tau = 0$, dalle [1.1-38] e [1.1-45] rispettivamente. Pertanto

$$a_k = \frac{\psi_{vf}(0)}{\psi_f(0)} = \frac{2}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)\cos(k\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0-\pi}^{\alpha_0+\pi} v(\alpha/\omega)\cos(k\alpha)d\alpha. \qquad [1.5\text{-}3]$$

In modo analogo, utilizzando h(t), invece di f(t) si ha che $b_k = c_{vh} = \psi_{vh}(0)/\psi_h(0)$ in cui

$$\psi_{vh}(0) = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)\operatorname{sen}(k\omega t)dt; \quad \text{e} \quad \psi_h(0) = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \operatorname{sen}^2(k\omega t)dt = \frac{1}{2};$$

pertanto

$$b_k = \frac{\psi_{vh}(0)}{\psi_h(0)} = \frac{2}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)\operatorname{sen}(k\omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0-\pi}^{\alpha_0+\pi} v(\alpha/\omega)\operatorname{sen}(k\alpha)d\alpha. \qquad [1.5\text{-}4]$$

Se n è limitato la serie è composta da un numero finito di termini e si dice ***finita***. Altrimenti la serie si dice ***infinita***. Alle volte una serie infinita viene troncata ad un numero finito di termini commettendo un certo errore.

Consideriamo insieme i due termini relativi alla k-esima armonica. La loro somma è

$$s_k = a_k \cos k\omega t + b_k \operatorname{sen} k\omega t. \qquad [1.5\text{-}5]$$

Poniamo

$$\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad [1.5\text{-}6]$$

cui viene dato il nome di ***modulo*** o ***ampiezza*** della k-esima armonica.

Allora $$s_k = \rho_k\left(\frac{a_k}{\rho_k}\cdot\cos k\omega t + \frac{b_k}{\rho_k}\cdot \operatorname{sen} k\omega t\right) = \rho_k \operatorname{sen}(k\omega t + \varphi_k), \qquad [1.5\text{-}7]$$

in cui $$\operatorname{sen}\varphi_k = \frac{a_k}{\rho_k}, \qquad [1.5\text{-}8]$$

e $$\cos\varphi_k = \frac{b_k}{\rho_k}, \qquad [1.5\text{-}9]$$

o anche $$\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}. \qquad [1.5\text{-}10]$$

φ_k prende il nome di fase iniziale.

Ricordiamo che $$< \operatorname{sen}\omega_1\cdot\cos\omega_2 >= 0,$$

$$< \operatorname{sen}\omega_1\cdot\operatorname{sen}\omega_2 > = < \cos\omega_1\cdot\cos\omega_2 >= \begin{cases} 1/2 & \text{per} \quad \omega_1 = \omega_2 \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}.$$

Un segnale periodico di frequenza f è ***ortogonale*** a tutti i segnali sinusoidali tranne quelli che hanno frequenze pari alla fondamentale od a una delle armoniche. Cioè, non è possibile estrarre da un segnale periodico di frequenza f altro che segnali sinusoidali di frequenza k·f con k intero. E, inoltre, le varie componenti armoniche di diversa frequenza di un segnale periodico sono fra di loro tutte ortogonali.

§1.5.2 Serie di Fourier Esponenziale

Consideriamo la serie $$v(t) = \sum_{k,-n}^{n} c_k e^{jk\omega t}, \qquad [1.5\text{-}11]$$

con $$c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)\, e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0-\pi}^{\alpha_0+\pi} v(\alpha/\omega)\, e^{-jk\alpha} d\alpha. \qquad [1.5\text{-}12]$$

Il termine relativo all'indice -k e cioè c_{-k} si ottiene dalla precedente cambiando il segno di k e questo
comporta che $$c_{-k} = c^*_k. \qquad [1.5\text{-}13]$$

Sommiamo i due termini della serie relativi agli indici +k e -k:

$$c_k e^{jk\omega t} + c_{-k} e^{-jk\omega t} = e^{jk\omega t}\cdot\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)\, e^{-jk\omega t} dt + e^{-jk\omega t}\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t)\, e^{jk\omega t} dt.$$

Utilizzando le identità di Eulero, dopo una serie di passaggi che qui vengono tralasciati, la precedente diventa

$$c_k e^{jk\omega t} + c_{-k} e^{-jk\omega t} = a_k \cos k\omega t + b_k \operatorname{sen} k\omega t = s_k$$

che risulta essere identica alla [1.5-5]. Inoltre, il termine per k = 0 è

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} v(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0-\pi}^{\alpha_0+\pi} v(\alpha/\omega) d\alpha. \qquad [1.5\text{-}14]$$

Allora le [1.5-1] e [1.5-11] rappresentano la stessa v(t). Mentre, però, i coefficienti a_0, a_k e b_k sono numeri reali, i coefficienti c_k sono numeri complessi. La forma [1.5-11] prende il nome di ***Serie Esponenziale***. Anche se di non immediata comprensione tuttavia è più compatta e richiede un sola espressione per l'unico coefficiente. La comodità dell'uso della forma esponenziale sta nel fatto che le operazione di moltiplicazione, divisione, derivazione ed integrazione vengono fortemente facilitate se la serie di Fourier è in forma esponenziale. Per contrasto, se la serie viene espressa dalla [1.5-1] si dice che si sta usando la ***forma trigonometrica***.

§1.5.3 La rappresentazione di Bode

Una funzione del tempo che può essere espressa con componenti sinusoidali viene rappresentata graficamente in più modi. I più usati sono quelli di Bode e di Nyquist.

Un modo molto compatto di rappresentare le componenti del segnale è mediante i cosiddetti ***diagrammi di Bode***. Si tratta di due diagrammi cartesiani distinti, uno per il modulo e l'altro per l'argomento, di ogni singola componente. Sulle ascisse vengono poste le frequenze o le pulsazioni. Il modulo viene spesso rappresentato in scala logaritmica, mentre la fase in scala lineare. In realtà si preferisce rappresentare 20 Log del modulo e viene espresso in dB (decibel). In effetti, invece di disegnare i singoli punti corrispondenti alle varie armoniche si preferisce rappresentare le armoniche con delle barrette di altezza proporzionale al modulo od alla fase rispettivamente. La figura che rappresenta il modulo prende anche il nome di ***spettro del segnale***.

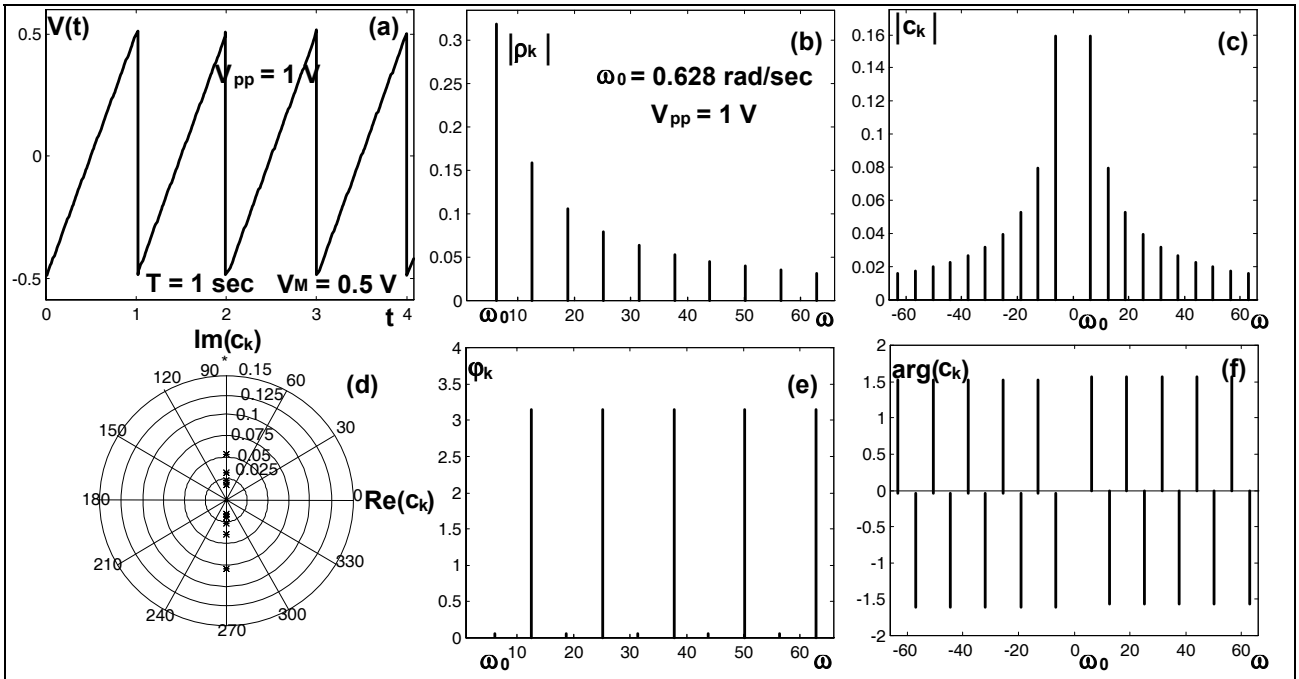

Fig.1.5-1

Se il segnale non ha componenti con ω negative, come, per esempio, nel caso dello sviluppo in serie trigonometrica di un segnale reale periodico, conviene usare per le ω la scala logaritmica.

Per spiegare bene questa questione è meglio riferirsi ad un esempio. In Fig.1.5-1a è mostrata un funzione periodica a dente di sega di periodo T ed ampiezza V_M che si può esprimere come

$$v(t) = 2V_M/T\ \ (t+i\,T) \quad \text{per} \quad -T/2+i\,T < t < T/2+i\,T \qquad [1.5\text{-}15]$$

con i intero qualunque. Senza eseguire i calcoli si vede che a_0 è nullo. Calcoliamo a_k con la [1.5-3]

$$a_k = \frac{2V_M}{T\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha}{\omega}\cdot\cos k\alpha d\alpha = \frac{2V_M}{T\pi\omega}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha\cdot\cos k\alpha d\alpha = \frac{V_M}{\pi^2}\left|\frac{\cos k\alpha}{k^2}+\frac{\alpha\,\mathrm{sen}\,k\alpha}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0. \qquad [1.5\text{-}16]$$

Mentre b_k va calcolato con la [1.5-4]

$$b_k = \frac{2V_M}{T\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha}{\omega}\cdot\mathrm{sen}\,k\alpha d\alpha = \frac{V_M}{\pi^2}\left|\frac{\mathrm{sen}\,k\alpha}{k^2}-\frac{\alpha\cos k\alpha}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{V_M}{k\pi^2}[\pi\cos(k\pi)+\pi\cos(-k\pi)] = -\frac{2V_M}{\pi k}(-1)^k.$$

Dunque

$$b_k = \frac{2V_M}{\pi k}(-1)^{k+1}. \qquad [1.5\text{-}17]$$

In base alle [1.5-6] il modulo di ogni singola componente è

$$\rho_k = \frac{2V_M}{k\pi}. \qquad [1.5\text{-}18]$$

Per la [1.5-8] sen $\varphi_k = 0$, mentre per la [1.5-9]

$$\cos\ \varphi_k = (-1)^{k+1} \qquad [1.5\text{-}19]$$

e quindi l'argomento è, alternativamente 0 e π. Le [1.5-18] e [1.5-19] sono rappresentate nelle Fig.1.5-1b e Fig.1.5-1e, rispettivamente.

Se la [1.5-15] si sviluppa con la serie esponenziale, si trova

$$c_k = (-1)^k \frac{jV_M}{k\pi}. \qquad [1.5\text{-}20]$$

Questa volta bisogna rappresentare le componenti per k sia positivo che negativo. I diagrammi di Bode non possono essere utilizzati allo stesso modo perché non si può fare il logaritmo per $\omega < 0$. Allora si usa una scala lineare per le pulsazioni.

Le Fig.1.5-1c e Fig.1.5-1f mostrano i diagrammi di Bode della serie esponenziale. Dal momento che per la [1.5-13] $c_{-k} = c^*_k$, segue che $|c_k| = |c_{-k}|$ e la rappresentazione del modulo è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. Una ulteriore conseguenza della [1.5-13] è che $\arg(c_k) = -\arg(c_{-k})$ e la figura corrispondente è simmetrica rispetto l'origine. Queste proprietà dei diagrammi di Bode nella forma complessa sono del tutto generali e non valide soltanto per il segnale a dente di sega.

§1.5.4 La rappresentazione di Nyquist

In effetti, se si usa la serie esponenziale è più opportuno ricorrere alla rappresentazione di Nyquist. Per ogni componente viene rappresentato sul piano immaginario il vettore di ampiezza $|c_k|$ e argomento $\arg(c_k)$. La rappresentazione è più compatta ma si perde la corrispondenza con la frequenza, a meno di indicare, sulla figura, accanto ad ogni vettore, la corrispondente frequenza. Per quanto detto precedentemente a proposito della rappresentazione di Bode della serie esponenziale, il diagramma di Nyquist è simmetrico rispetto l'asse reale. La Fig.1.5-1d rappresenta il diagramma di Nyquist del segnale periodico a dente di sega dell'esempio precedente. Si tratta di una successione di vettori, di ampiezza decrescente e di fase alternativamente di +90° e -90°.

§1.6. L'integrale di Fourier

Riprendiamo la [1.5-11] e vi inseriamo il valore di c_k della [1.5-12]. Inoltre indichiamo con $\omega_0 = 2\pi/T_0$ la pulsazione fondamentale e supponiamo che la serie sia infinita. Senza togliere nulla alla generalità facciamo $t_0 = 0$. Si ha

$$v(t) = \sum_{k,-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right]e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k,-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right]\cdot\frac{\omega_0}{2\pi}\cdot e^{jk\omega_0 t}.$$

Indichiamo con $\omega = k\omega_0$ la pulsazione di ogni componente. La precedente diventa

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\omega,-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)\,e^{-j\omega t}dt\right]\omega_0\,e^{j\omega t},$$

nella quale ω appartiene all'insieme dei numeri interi positivi e negativi multipli di ω_0. Ricordiamo che la serie di Fourier di un segnale periodico di pulsazione ω_0 è formato da un insieme discreto di componenti. La distanza fra le componenti è ω_0. Se aumentiamo il periodo, ω_0 diminuisce e le righe dello spettro si infittiscono. A parità di valore efficace aumentando il periodo aumentano le righe ma diminuisce l'altezza di ogni riga. Quando il periodo diventa molto grande ω_0 diventa molto piccola e lo spettro tende al continuo con ampiezze molto piccole. Al limite, se T_0 tende all'infinito, ω_0 diventa infinitesimo ed il numero di componenti della serie diventa infinito. La sommatoria va sostituita con l'integrale ed al posto di ω_0 bisogna usare $d\omega$. Pertanto per $T_0 \to \infty$ la precedente si riscrive come

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega. \qquad [1.6\text{-}1]$$

che prende il nome di ***integrale di Fourier***. Dal momento che $T_0 \to \infty$ il segnale non è più periodico. Inoltre perché l'integrale di Fourier converga occorre che v(t) abbia energia finita.

§1.7. La Trasformata di Fourier

Nella [1.6-1] l'integrale interno è una funzione complessa di ω che prende il nome ***di Trasformata di Fourier***. Per convenzione indichiamo con la lettera corrispondente corsiva maiuscola la trasformata di Fourier, oppure con il simbolo $\mathcal{F}[v(t)]$. Per cui

$$\mathcal{F}[v(t)] = \mathcal{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad [1.7\text{-}1]$$

Ma, allora, l'integrale di Fourier può essere riscritto come

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{V}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad [1.7\text{-}2]$$

che è l'***antitrasformata di Fourier***. Le due espressioni sono analoghe a parte il segno dell'esponenziale ed il fattore 1/2π.

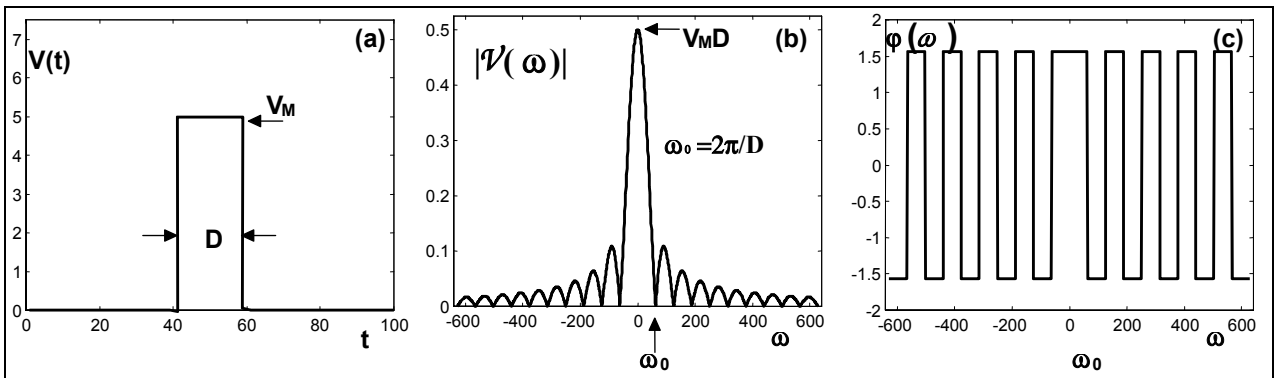

Fig.1.7-1

A titolo d'esempio calcoliamo la Trasformata di Fourier di un impulso largo D ed alto V_M come quello di Fig.1.7-1. Si ha

$$\mathcal{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-D/2}^{D/2} V_M e^{-j\omega t}dt = \frac{V_M}{-j\omega}\left|e^{-j\omega t}\right|_{-D/2}^{D/2} = \frac{2jV_M}{\omega}\cdot\frac{e^{-j\omega D/2}-e^{j\omega D/2}}{2} =$$

$$= \frac{2jV_M}{\omega}\cdot(-j\,\mathrm{sen}\,\omega D/2).$$

Cioè

$$\mathcal{V}(\omega) = V_M D\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\omega D/2}{\omega D/2}. \qquad [1.7\text{-}3]$$

Si noti che $\mathcal{V}(\omega)$ è reale. Nella stessa Fig.1.7-1 sono riportati i diagrammi di Bode relativi a $\mathcal{V}(\omega)$. Questa volta lo spettro non è più rappresentato a righe ma, essendo uno spettro continuo, con una linea ininterrotta.

§1.7.1 La Trasformata di Fourier e quella di Laplace

Se si confrontano le [1.4-1]e [1.7-1] si nota come la differenza nelle definizioni delle due trasformate sta nell'esponente: ***-st*** nella trasformata di Laplace, ***-jωt*** in quella di Fourier. Dal momento che per la [1.4-2], s = σ+jω, è banale constatare che.

$$\mathcal{F}[v(t)] = \mathcal{V}(\omega) = \mathcal{L}[v(t)]|_{s=j\omega} = V(s)|_{s=j\omega} \qquad [1.7\text{-}4]$$

e le proprietà della trasformata di Fourier sono ricavabili da quelle di Laplace purché si ponga **s = jω**. Naturalmente si può anche passare dalla trasformata di Fourier a quella di Laplace semplicemente sostituendo a **jω** la variabile **s = σ+jω**.

Poiché sono state ricavate le trasformate di Laplace di un bel po' di segnali non si ritiene di doverlo fare anche per le trasformate di Fourier. Tuttavia per mostrare il metodo calcoleremo ancora la trasformata di Fourier dell'impulso di Fig.1.7-1a. Quest'impulso rettangolare largo D si può ot-

tenere come differenza tra due gradini di ampiezza V_M traslati fra di loro di D. Cioè

$$v(t) = V_M\,[g(t+D/2) - g(t-D/2],$$

e trasformando
$$V(s) = V_M \cdot \frac{e^{sD/2} - e^{-sD/2}}{s}.$$

Applicando direttamente la [1.7-4]

$$\mathcal{V}(j\omega) = V_M \frac{e^{j\omega D/2} - e^{-j\omega D/2}}{j\omega} = 2V_M \frac{\operatorname{sen}\omega D/2}{\omega} = V_M D \cdot \frac{\operatorname{sen}\omega D/2}{\omega D/2}$$

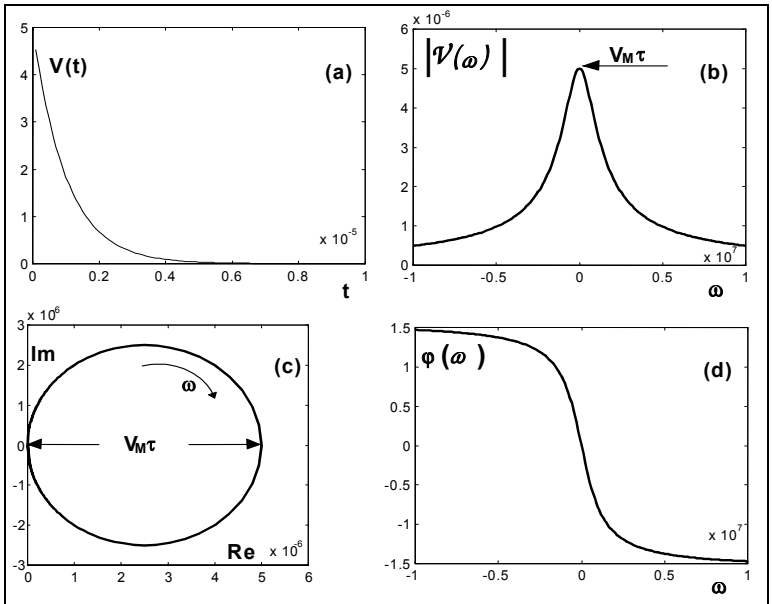

Fig.1.7-2

che è la [1.7-3] già trovata.

Un altro esempio si può fare con un esponenziale come quello di Fig.1.7-2a che è esprimibile come

$$v(t) = V_M e^{-t/\tau} \quad \text{per} \quad t>0. \qquad [1.7\text{-}5]$$

Questa, per la [1.4-22], ha come trasformata

$$V(s) = V_M / (s + 1/\tau). \qquad [1.7\text{-}6]$$

Allora, in modo diretto

$$\mathcal{V}(\omega) = V_M / (j\omega + 1/\tau). \qquad [1.7\text{-}7]$$

I diagrammi di Bode della [1.7-7] sono mostrati nelle Fig.1.7-2b e Fig.1.7-2d. La Fig.1.7-2c rappresenta il diagramma di Nyquist relativo al medesimo segnale. Facciamo vedere che è una circonferenza. Calcoliamo le due parti reali e immaginarie della [1.7-7]:

$$\operatorname{Re}[\mathcal{V}(\omega)] = x = \frac{V_M/\tau}{\omega^2 + 1/\tau^2}; \qquad \operatorname{Im}[\mathcal{V}(\omega)] = y = \frac{-\omega V_M}{\omega^2 + 1/\tau^2}.$$

Quindi
$$x^2 + y^2 = V_M^2 \frac{\omega^2 + 1/\tau^2}{[\omega^2 + 1/\tau^2]^2} = \frac{V_M^2}{\omega^2 + 1/\tau^2} = \tau V_M^2 x,$$

che è l'equazione del cerchio di raggio $\tau V_M/2$ con il centro sull'asse delle x, passante dall'origine e rappresentato in Fig.1.7-2c. Per ω negativa e, in valore assoluto, crescente, il vettore sta nel semipiano a parte immaginaria negativa e si sposta dall'origine. Per ω crescente e positiva, il vettore si riavvicina all'origine spostandosi nel semipiano a parte immaginaria positiva.

§1.7.2 La convoluzione nel dominio del tempo

Riprendiamo la [1.4-30] relativa alla trasformata di Laplace della convoluzione fra due segnali g(t) e h(t). Applicando la [1.7-4] si ha che:

$$\mathcal{F}[\gamma_{gh}(t)] = \mathcal{Y}_{gh}(\omega) = \mathcal{G}(\omega)\mathcal{H}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{Y}_{hg}(\omega) = \mathcal{F}[\gamma_{hg}(t)]. \qquad [1.7\text{-}8]$$

Teorema della convoluzione nel dominio del tempo: la trasformata della convoluzione di due funzioni nel dominio del tempo è il prodotto delle trasformate delle due funzioni nel dominio delle pulsazioni. Applicando la definizione di antitrasformata la precedente si può scrivere come::

$$\gamma_{gh}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\omega)\mathcal{H}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{G}(\omega)\mathcal{H}(\omega)] \qquad [1.7\text{-}9]$$

che può anche essere letta come ***la convoluzione di due funzioni nel dominio del tempo è l'antitrasformata del prodotto delle relative trasformate***.

§1.7.3 La convoluzione nel dominio delle pulsazioni

Siano g(t) e h(t) due funzioni che hanno le trasformate $\mathcal{G}(\omega)$ e $\mathcal{H}(\omega)$. Si definisce convoluzione fra le due trasformate

$$C_{gh}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x)\mathcal{H}(\omega - x)dx. \qquad [1.7\text{-}10]$$

Si può dimostrare, con un processo del tutto simile a quello della sezione §1.4.3, però applicato alle antitrasformate, che per l'antitrasformata della $C_{gh}(\omega)$ vale la

$$\mathcal{F}^{-1}[C_{gh}(\omega)] = \mathcal{Y}^{-1}{}_{gh}(\omega) = 2\pi g(t)h(t) = 2\pi h(t)g(t) = \mathcal{Y}^{-1}{}_{hg}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[C_{hg}(\omega)], \qquad [1.7\text{-}11]$$

o anche

$$g(t)h(t) = h(t)g(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} C_{gh}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} C_{hg}(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad [1.7\text{-}12]$$

Teorema della convoluzione nel dominio delle pulsazioni: l'antitrasformata della convoluzione di due funzioni nel dominio delle pulsazioni è il prodotto delle due funzioni nel dominio del tempo. Applicando la definizione di trasformata si ha una forma diversa:

$$\frac{1}{2\pi}C_{gh}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x)\mathcal{H}(\omega - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}[g(t)h(t)]. \qquad [1.7\text{-}13]$$

E cioè: ***la convoluzione nel dominio delle pulsazioni fra le trasformate di due funzioni, a parte un fattore 2π, è la trasformata del prodotto delle due funzioni***.

§1.7.4 Il Teorema di Parseval

Se t è una variabile non necessariamente reale, v(t) può essere complessa. Allora si può fare la trasformata della sua funzione coniugata $v^*(t)$ ponendo nella definizione di trasformata [1.7-1] al posto di j, -j. Quindi

$$\mathcal{F}[v^*(t)] = \mathcal{V}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v^*(t)e^{j\omega t}dt = \mathcal{V}^*(-\omega). \qquad [1.7\text{-}14]$$

Ovviamente se f(t) è reale non esiste alcuna differenza fra la v(t) e la sua coniugata $v^*(t)$ e solo per questo caso di funzione reale

$$\mathcal{V}(\omega) = \mathcal{V}^*(-\omega). \qquad [1.7\text{-}15]$$

Se nella [1.7-13] si pone ω = 0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x)\mathcal{H}(-x)dx;$$

La variabile x è provvisoria e sparisce con l'integrazione, allora si può mettere al suo posto ω.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\omega)\mathcal{H}(-\omega)d\omega.$$

Se h(t) = $g^*(t)$, $\quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\omega)\mathcal{G}^*(-\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\omega)\mathcal{G}^*(\omega)d\omega;$

in quanto, per la [1.7-14], $\quad \mathcal{G}^*(\omega) = \mathcal{G}^*(-\omega).$

Cioè $\quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\omega)|^2 d\omega;$

Nel caso di segnale reali il modulo per la funzione del tempo è superfluo. Allora il primo membro della [1.7-15] assume l'aspetto dell'energia di un segnale impulsivo, vedi [1.1-2]. Pertanto, utilizzando un segnale v(t), invece che una generica funzione g(t), si ha:

$$e = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{V}(\omega)|^2 \, d\omega. \qquad [1.7\text{-}16]$$

Teorema di Parseval**: l'energia di un segnale è 1/2π l'area della curva $|\mathcal{V}(\omega)|^2$*. Il grafico di $|\mathcal{V}(\omega)|^2$ da lo ***spettro d'energia e la funzione $|\mathcal{V}(\omega)|^2$ prende il nome di ***densità spettrale d'energia***.

Abbiamo già definito la potenza media di un segnale periodico v(t) come

$$< v^2 >= \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} v^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} v^2(t)dt. \qquad [1.1\text{-}6]$$

Nel caso di segnali periodici si può dimostrare che il teorema di Parseval assume la forma [BAH]

$$< v^2 >= \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} v^2(t)dt = \sum_{k,-\infty}^{\infty} |c_k(\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k,1}^{\infty}\left[a_k^2(\omega) + b_k^2(\omega)\right] = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k,1}^{\infty} \rho_k^2(\omega); [1.7\text{-}17]$$

e cioè la potenza media può essere calcolata a partire dallo spettro. Anche qui $c_k(\omega)^2$ è la ***densità spettrale d'energia*** ed il suo grafico è lo ***spettro d'energia***.

§1.7.5 La funzione di correlazione ed il Teorema di Wiener-Kintchine

Consideriamo un segnale v(t) che ha come trasformata di Fourier $\mathcal{V}(\omega)$. La sua funzione di autocorrelazione è $\psi_v(t)$. Si dimostra che [BAH]

$$\mathcal{F}[\psi_v(t)] = |\mathcal{V}(\omega)|^2 \qquad [1.7\text{-}18]$$

Cioè la densità spettrale di energia di un segnale è la trasformata della funzione di autocorrelazione dello stesso segnale. In ciò consiste il ***Teorema di Wiener-Kintchine***

§1.7.6 Dallo spettro di un segnale impulsivo al corrispondente del periodico

Il treno $\delta_n T$ costituito da 2n+1 impulsi δ distanziati fra di loro di T_0, mostrato in Fig.1.7-3a, è dato da

$$\delta_n T = \sum_{k,-n}^{n} \delta(t - kT_0) \qquad [1.7\text{-}19]$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier di questo segnale periodico

$$\Phi(\delta_n T) = \mathcal{F}\left[\sum_{k,-n}^{n} \delta(t - kT_0)\right] = \sum_{k,-n}^{n} e^{-jk\omega T} = 1 + \sum_{k,1}^{n}(e^{jk\omega T_0} + e^{-jk\omega T_0}) = 1 + 2\sum_{k,1}^{n}\cos(k\omega T_0).$$

Questa somma è stata calcolata come [BAH]

$$\mathcal{F}(\delta_n T) = \frac{\mathrm{sen}[(n + 1/2)\omega T_0]}{\mathrm{sen}(\omega T_0/2)}. \qquad [1.7\text{-}20]$$

$\mathcal{F}(\delta_n T)$ è periodica di periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$. La Fig.1.7-3a mostra una $\delta_2 T_0$. La Fig.1.7-3b rappresenta la $\mathcal{F}(\delta_2 T)$. Le successive Fig.1.7-3c, Fig.1.7-3d e Fig.1.7-3e sono relative alle $\mathcal{F}(\delta_{10} T)$, $\mathcal{F}(\delta_{20} T)$ e $\mathcal{F}(\delta_{40} T)$, rispettivamente. All'aumentare di n le componenti di $\mathcal{F}(\delta_n T)$ si addensano attorno ai valori $k\omega_0$. Il massimo si ha comunque per $\omega = k\cdot\omega_0$ ed è 2n+1. Per n molto grande lo spettro tende ad essere contenuto in una zona limitata attorno alle pulsazioni $k\cdot\omega_0$ e il massimo sale in corrispondenza. Vedi Fig.1.7-3f

Per $n \to \infty$, $\delta_n T \to \delta_\infty T$ ed il treno di impulsi si trasforma in un segnale periodico composto da infinite δ traslate fra di loro di T_0 che si può esprimere come

$$\delta_\infty T = \sum_{k,-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \qquad [1.7\text{-}21]$$

Con il simbolismo adottato quando $n \to \infty$, $\mathcal{F}(\delta_n T) \to \mathcal{F}(\delta_\infty T)$

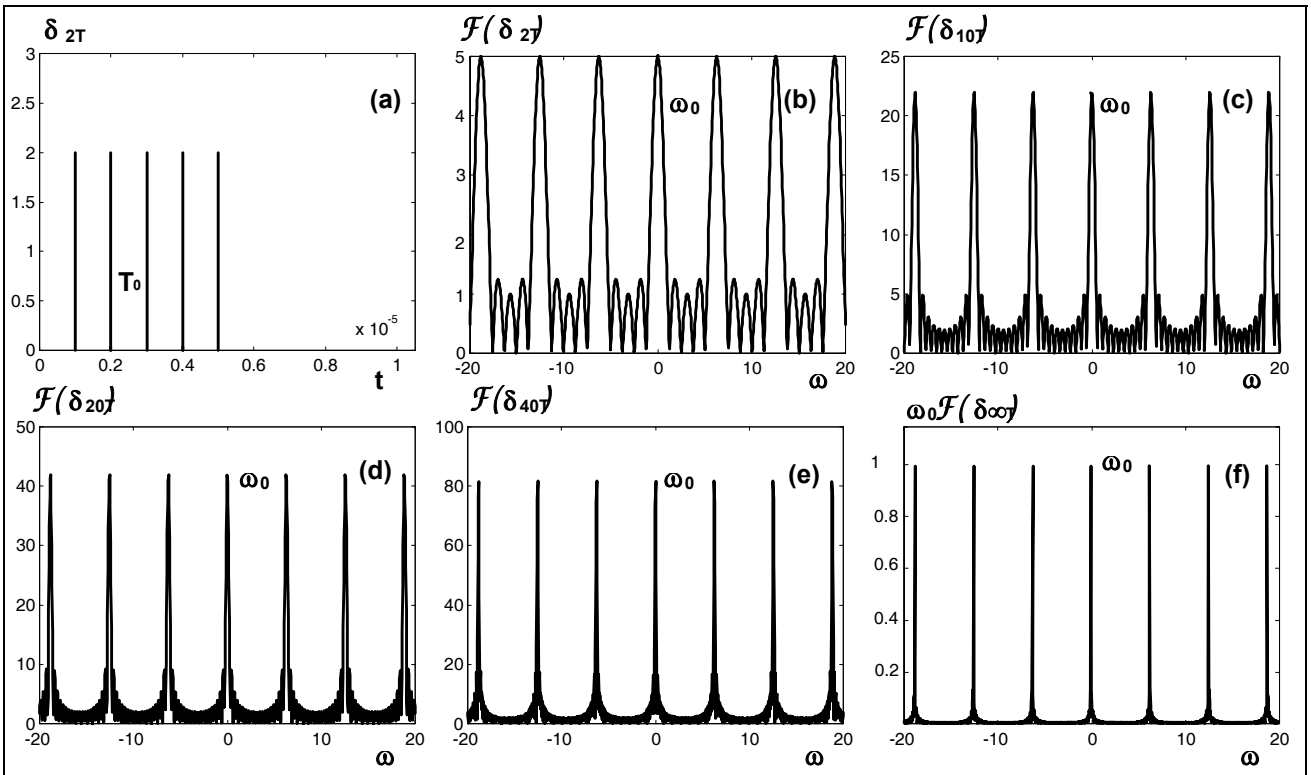

Fig.1.7-3

Si può dimostrare che [BAH]

$$\mathcal{F}(\delta_\infty T) = \lim_{n,\infty} \frac{\mathrm{sen}[(n+1/2)\omega T_0]}{\mathrm{sen}(\omega T_0/2)} = \omega_0 \sum_{k,-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0). \qquad [1.7\text{-}22]$$

Le componenti dello spettro si hanno solo in corrispondenza ai valori $k\omega_0$ ed il massimo in corrispondenza tende all'infinito come era sospettabile da quanto detto precedentemente. Ogni componente è una $\omega_0\delta(\omega-k\omega_0)$ mostrata in Fig.1.7-3f.

Inoltre si può fare vedere che [BAH]

$$\int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \frac{\mathrm{sen}[(n+1/2)\omega T_0]}{\mathrm{sen}(\omega T_0/2)} d\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \qquad [1.7\text{-}23]$$

che è, quindi l'area della curva di Fig.1.7-3b compresa in un intervallo T_0. Ciò vale anche quando $n \to \infty$. L'area di ogni impulso $\omega_0\delta(\omega-k\omega_0)$ è sempre ω_0.

Eseguiamo ora la convoluzione fra un impulso v(t) ed una δ. Per le proprietà della δ si ha:

$$\gamma_{v\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = v(t). \qquad [1.7\text{-}24]$$

Se la convoluzione viene eseguita fra un impulso v(t) ed una δ traslata di T_0 cioè una $\delta(t-T_0)$ si ha, analogamente

$$\gamma_{v\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)\delta(t-T_0-\tau)d\tau = v(t-T_0). \qquad [1.7\text{-}25]$$

Il risultato importante è che la convoluzione tra una δ traslata di T_0 ed un impulso v(t) è una replica dell'impulso traslato di T_0. Nella Fig.1.7-4a è mostrato un impulso esponenziale. Nella Fig.1.7-4b la convoluzione con una δ traslata di T_0, cioè la $v(t-T_0)$.

Se si esegue la convoluzione fra un impulso v(t) ed una $\delta_\infty T$ si ottiene, quindi, un segnale periodico che chiamiamo $v_T(t)$ composto da un numero infinito di impulsi v(t) ognuno traslato ri-

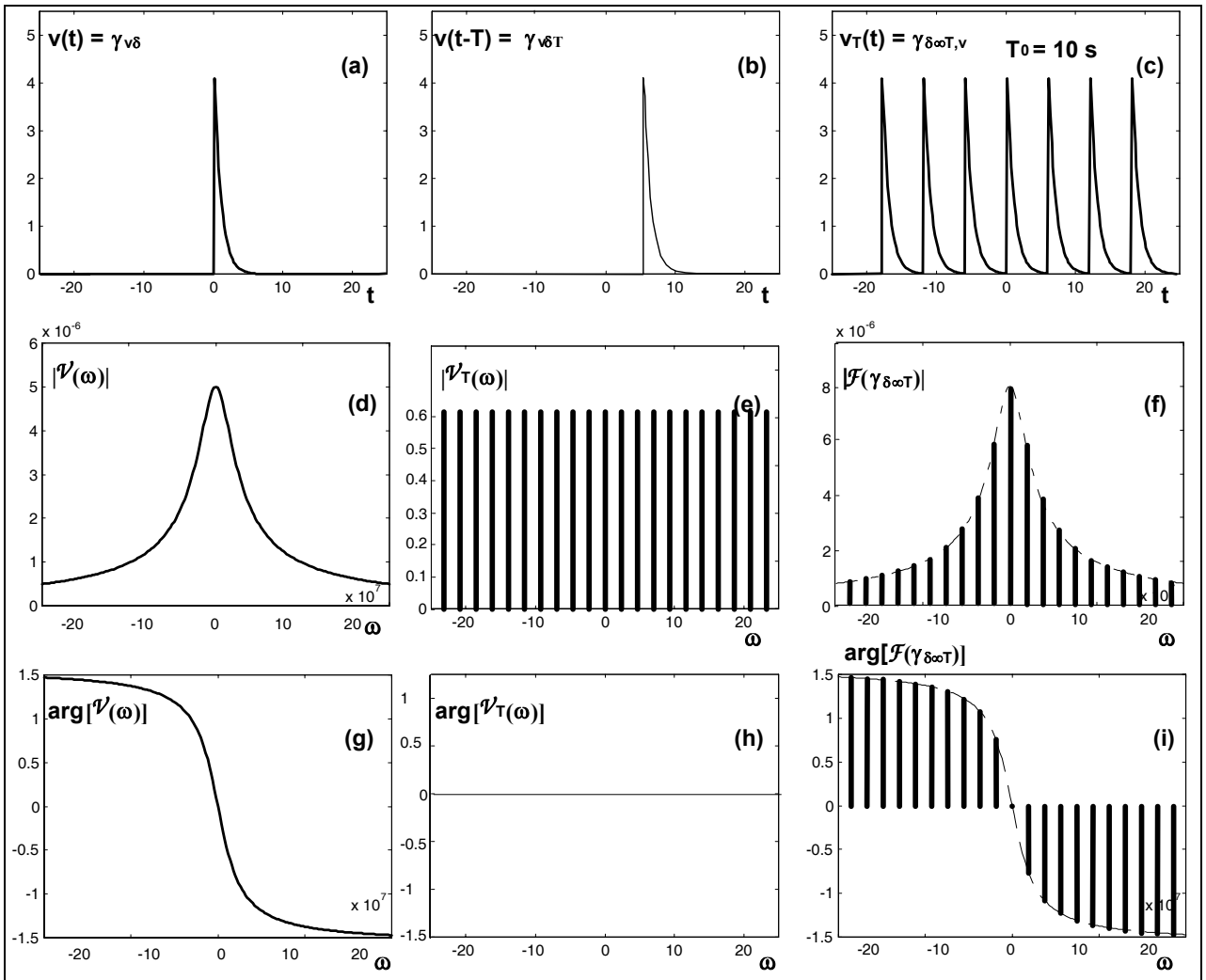

Fig.1.7-4

spetto al precedente di T_0. Cioè si ha una funzione con periodo T_0. In Fig.1.7-4c è mostrata questa convoluzione $v_T(t)$ che può essere scritta come

$$v_T(t) = \gamma_{\delta_\infty T,\, v}(t). \qquad [1.7\text{-}26]$$

La sua trasformata, per la [1.7-4], ed applicando la [1.4-29] per la trasformata della convoluzione

$$\mathcal{F}\left[v_T(t)\right] = \mathcal{F}\left[\gamma_{\delta_\infty T,\, v}(t)\right] = \mathcal{V}_T(\omega) = \mathcal{F}(\delta_{\infty T})\mathcal{V}(\omega). \qquad [1.7\text{-}27]$$

Per avere la $\mathcal{V}_T(\omega)$ basta fare il prodotto fra la $\mathcal{V}(\omega)$ e la $\mathcal{F}(\delta_\infty)$. In altre parole, le componenti dello spettro sono di pulsazione $k\omega_0$. Il modulo della $\mathcal{V}_T(\omega)$ si ottiene da quello della $\mathcal{V}(\omega)$ moltiplicandolo per $2\pi/\omega_0$. Per quanto riguarda l'esempio il diagramma degli argomenti non cambia perché l'argomento della [1.7-13] è dappertutto nullo. La Fig.1.7-4d mostra il modulo di $\mathcal{V}(\omega)$ e la Fig.1.7-4g l'argomento. Le Fig.1.7-4e e Fig.1.7-4h sono relative alla $\mathcal{F}(\delta_\infty T)$. Le ultime due figure e cioè la Fig.1.7-4f e la Fig.1.7-4i mostrano modulo e argomento della $\mathcal{V}_T(\omega)$ rispettivamente.

§1.7.7 Lo spettro di un segnale modulato in ampiezza

Nel §1.1.2.5 abbiamo discusso la modulazione d'ampiezza. Il processo di modulazione di un segnale portante $v_p = V_P\cos(\omega_p t)$ con un segnale modulante $v_m = V_M g_m(t)$, produce un segnale modulato $v_{am} = V_p[1+m_a g_m(t)]\cos(\omega_p t) = V_p[1+m_a g_m(t)]\cos(\omega_p t) = V_p[\cos(\omega_p t) + m_a g_m(t)\cos(\omega_p t)]$. La modulazione ha aggiunto alla portante il termine $V_p m_a g_m(t)\cos(\omega_p t) = V_p m_a g_m(t)\,(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t})/2 = V_p/2\cdot m_a g_m(t)\,(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) = V_p/2\cdot m_a[g_m(t)\,e^{-j\omega_0 t} + g_m(t)\,e^{j\omega_0 t}]$. La Fig.1.7-5a mostra la trasformata $\mathcal{G}_m(\omega)$ di $g_m(t)$. Mentre nella Fig.1.7-5b le due componenti a $-\omega_p$ e $+\omega_p$ di $\cos(\omega_p t)$ sono mostrate. Esse, in effetti, sono le $\delta(\omega+\omega_p)$ e $\delta(\omega-\omega_p)$, rispettivamente. I due termini che compaiono nella rela-

zioni precedenti, e cioè $g_m(t)\, e^{-j\omega_p t}$ e $g_m(t)\, e^{j\omega_p t}$ non sono altro che il prodotto di due funzioni del tempo. Nel §1.7.3 si è visto che la trasformata del prodotto delle due funzioni è la convoluzione nel dominio delle pulsazioni fra le trasformate di due funzioni, a parte un fattore 2π. Quindi al termine $g_m(t)\, e^{-j\omega_p t}$ corrisponde la convoluzione nel dominio delle pulsazioni fra le trasformata $\mathcal{G}_m(\omega)$ e $\delta(\omega+\omega_p)$. Analogamente al termine $g_m(t)\, e^{j\omega_p t}$ corrisponde la convoluzione nel dominio delle pulsazioni fra le trasformata $\mathcal{G}_m(\omega)$ e $\delta(\omega-\omega_p)$. Ricordiamo quanto visto nel paragrafo 1.7.6 espresso dalla [1.7-24] e cioè che la convoluzione di una generica funzione del tempo con una $\delta(t-T_0)$ traslata di T_0 riproduce la medesima funzione, ma traslata di T_0. Questa proprietà è analoga nel dominio di ω: la convoluzione di una generica funzione di ω con una $\delta(\omega-\omega_0)$ traslata di ω_0 riproduce la medesima funzione, ma traslata di ω_0. A questo punto è molto semplice ricostruire lo spettro del segnale modulato. Esso è mostrato in Fig.1.7-5c. Alle righe corrispondenti alla portante si sono aggiunte, per ognuna delle righe lo spettro della modulante centrato sulle righe. Questo spettro di modulante ha ampiezza $V_p/2\cdot m_a$.

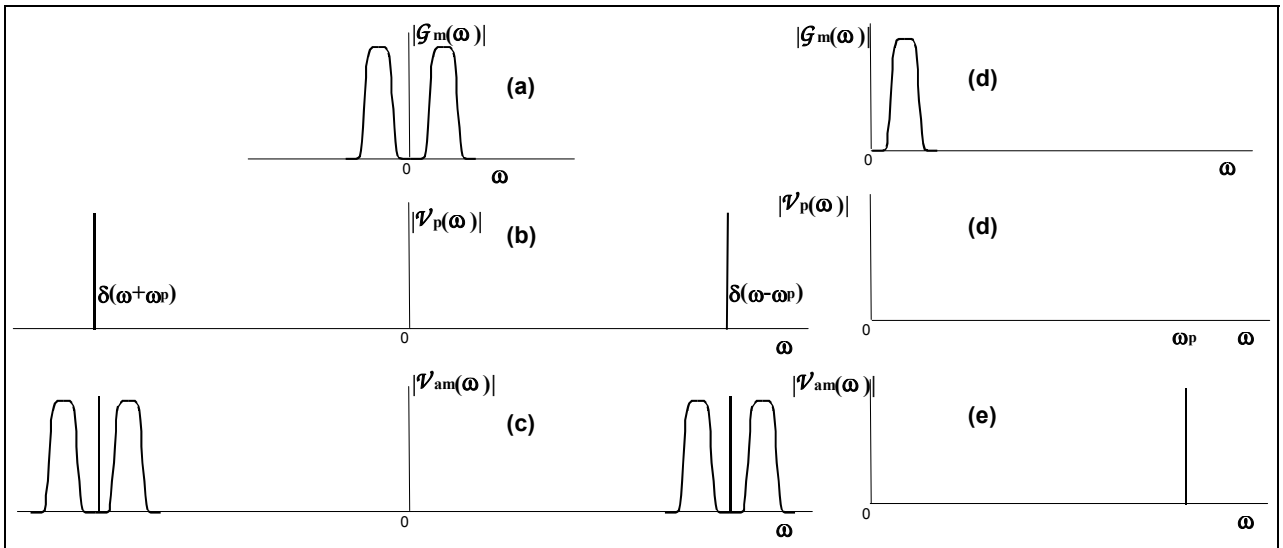

Fig.1.7-5

Se, invece di usare la rappresentazione esponenziale si usa quella trigonometrica si trova il risultato della Fig,1.7-5e. Ancora una volta alla frequenza della portante, la cui ampiezza resta inalterata si aggiungono due bande laterali ognuna della quale è la riproduzione di $\mathcal{G}_m$ ma centrate sulla ω_p. Nella modulazione l'informazione da trasmettere è nella modulante. La portante fornisce soltanto il supporto, come dice la stessa parola. La potenza associata alla portante non cambia con la modulazione, dato che la sua ampiezza è rimasta inalterata. Per ognuna delle frequenze delle due bande laterali si aggiunge una potenza $(V_p/2\cdot m_a)^2 = (V_p\cdot m_a)^2/4$. Questa potenza viene data dal processo di modulazione. Poiché l'indice di modulazione non può superare l'unità la massima potenza che contiene l'informazione è, per ogni banda, $V_p^2/4$. La trasmissione della modulazione d'ampiezza è poco efficiente perché il rapporto fra la potenza del segnale che contiene l'informazione e quella che agisce da vettore non supera $2\, V_p^2/4/V_p^2 = 1/2$. Un miglioramento di questo rapporto si ha se la portante viene, in qualche modo, attenuata o addirittura soppressa. In questo caso si parla si trasmissione a ***portante soppressa***. Inoltre, dal momento che ognuna delle due bande laterali non è altro che la replica traslata della $\mathcal{G}_m(\omega)$, è sufficiente trasmettere una sola di esse e risparmiare potenza senza perdere informazione. In questo caso si parla si trasmissione a ***banda laterale unica***.

§1.8. Sistemi a dati campionati

Nel paragrafo §1.1 è stato fatto vedere che l'influenza del rumore, dei disturbi e delle distorsioni è inferiore quando il segnale da trasmettere è numerico. Tuttavia spesso l'informazione è di tipo analogico. Per sfruttare questa proprietà dei segnali numerici si esegue una coppia di trasformazioni sul segnale analogico. Per primo lo si mette in forma numerica, poi lo si trasmette e, alla fine viene riconvertito in forma analogica. La Fig.1.8-1 illustra questo processo.

L'operazione di conversione del segnale da analogico a numerico prevede una prima opera-

Fig.1.8-1

zione che prende il nome di ***campionatura (sampling)***. Il segnale analogico f(t) viene osservato ad intervalli regolare. Teoricamente è immaginabile di trasformare il segnale analogico in due modi ottenendo:

Segnali tempo discreti: definiti soltanto in istanti discreti di tempo equispaziati, mentre non risultano definiti al di fuori di detti istanti. Sono normalmente ottenuti dal campionamento di segnali tempo continui.

$$f(nT_0) = f(t)|_{t=nT_0}, \qquad n = 0, 1,2 \ldots \qquad [1.8\text{-}1]$$

T è detto ***periodo di campionamento.*** In altri termini il segnale può essere immaginato come una sequenza di valori numerici che rappresentano i valori che la funzione f(t) assume agli istanti di campionamento. In Fig.1.8.2a c'è una tensione v(t) campionata in Fig.1.8-2b.

Segnali Sample&Hold : sono segnali definiti in ogni istante, ma che variano solo ad intervalli di tempo discreti.

$$f_{SH}(t) = f(nT_0)|, \qquad nT \le t \le n(T_0+\tau) \qquad [1.8\text{-}2]$$

In questo caso il segnale è definito in tutti gli intervalli. Però, il segnale sample&hold mantiene (***hold***) il valore assunto all'istante del campionamento per un intervallo di tempo $\tau < T_0$, mentre è nullo per il tempo $T_0-\tau$. In Fig.1.8.2c la tensione della Fig.1.8-2a è sample&held.

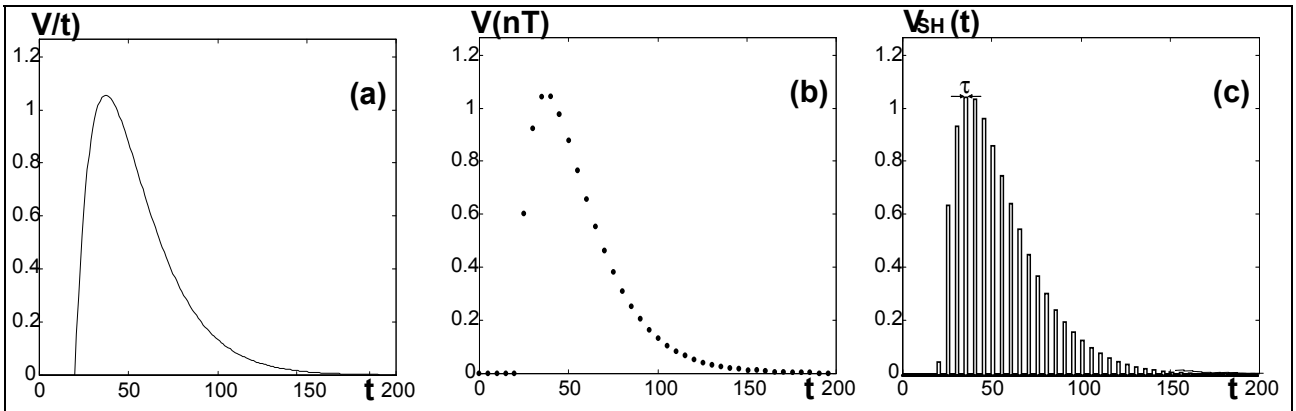

Fig.1.8-2

Comunque sia stato campionato il segnale esso viene ***quantizzato***. Infatti il segnale numerico non può assumere qualunque valore a piacere, ma soltanto dei valori discreti. Quindi la funzione campionata viene trasformata dalla quantizzazione perdendo in precisione in ragione della larghezza dell'intervallo di quantizzazione. Supponiamo, che il segnale da trattare sia nell'intervallo 0-1.6 V. Se quantizziamo a 16 livelli, la sequenza corrispondente al segnale campionato dell'esempio della Fig.1.8-2 assume i valori 0, 0, 0, 0, 0, 6, 9, 11, 11, 10, 9, 8, 7, ecc. Ma se la campionatura fosse soltanto a 4 livelli i valori sarebbero 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, ecc. Evidente risulta la perdita di precisione di questa quantizzazione troppo larga rispetto la precedente.

Il processo di quantizzazione è seguito da un ultimo processo che si chiama di ***codifica*** (***encoding***). La codifica fa corrispondere ad un valore numerico della grandezza quantizzata un insieme di grandezze secondo un opportuno codice. Per esempio si può adoperare una codifica binaria e la precedente sequenza, corrispondente alla quantizzazione a 16 livelli sarebbe: 0000, 0000, 0000, 0000, 0000, 0110, 1001, 1011, 1011, 1010, 1001, 1000, 0111, etc. Questo è un codice binario puro. Tuttavia esistono numerosi modi di codificare che spesso sono usati per diminuire i possibili errori di codifica e per permettere in fase di ricezione di correggere eventuali errori introdotti nella trasmissione.

L'intero processo di campionatura, quantizzazione e codifica viene spesso chiamato ***conversione Analogica/Digitale***.

§1.8.1 Il campionamento ideale istantaneo

Il campionamento ideale istantaneo consente di ottenere il segnali tempo discreti. Immaginiamo di avere una sequenza di δ equidistanziate di T_0. Cioè una $\delta_{\infty T}$ già definita nel §1.7.6 come

$$\delta_{\infty}T = \sum_{k,-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \qquad [1.7\text{-}21]$$

la cui trasformata è

$$\mathcal{F}(\delta_{\infty}T) = \omega_0 \sum_{k,-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k,-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T_0}). \qquad [1.7\text{-}22]$$

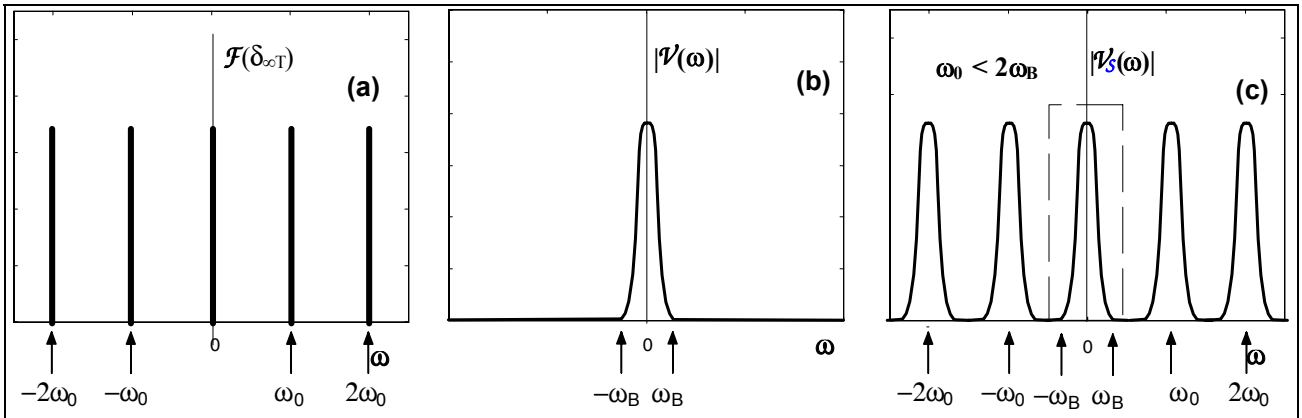

Fig.1.8-2

rappresentata in Fig.1.8-2a. Se moltiplichiamo la v(t) da campionare per la $\delta_{\infty T}$ otteniamo la funzione campionata ad intervalli regolari T_0 che è:

$$v_S(T_0) = v(t)\,\delta_{\infty}T = v(t) \sum_{k,-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k,-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta(t - kT_0) \qquad [1.8\text{-}3]$$

La trasformata di v(t) è $\mathcal{V}(\omega)$, rappresentata in Fig.1.8-2b, che supponiamo abbia una banda limitata a ω_B, cioè $\mathcal{V}(\omega) = 0$ per $|\omega| > \omega_B$. La proprietà della convoluzione nel dominio delle pulsazioni studiata nel §1.7.3 e cioè

$$\frac{1}{2\pi} C_{gh}(\omega) = \mathcal{F}[g(t)h(t)]. \qquad [1.7\text{-}13]$$

Applicata alla [1-8-3] da: $\mathcal{F}[v_S(T_0)] = \mathcal{V}_S(T_0) = \mathcal{F}[v(t)\delta_{\infty}T] = \frac{1}{2\pi} C_v.$

Ricordiamo che il processo di convoluzione fra una $\delta(\omega-\omega_0)$ ed una funzione $\mathcal{V}(\omega)$ da la stessa funzione ma traslata di ω_0 e cioè $\mathcal{V}(\omega-\omega_0)$. Dal momento che la trasformata $\mathcal{F}[\delta_{\infty T}]$ data dalla [1.7-22] è una successione di $\delta(\omega-k\omega_0)$ di ampiezza costante ω_0, il risultato complessivo del processo di sampling nel dominio delle pulsazioni è che la trasformata $\mathcal{V}_S(\omega)$ della funzione campionata $v_S(t)$ è una successione illimitata di repliche della $\mathcal{V}(\omega)$che si ripetono con cadenza ω_0. Nella

Fig.1.8-2c è mostrato di il caso in cui la

$$\omega_0 > 2\omega_B. \qquad [1.8\text{-}4]$$

È possibile ricuperare l'informazione contenuta nel segnale campionato filtrando tutte le componenti che superano ω_B. Nella stessa figura è mostrato con una linea tratteggiata un filtro che svolge questa funzione del segnale campionato dato che ha una banda passante $\omega_B < \omega_p < \omega_0$.

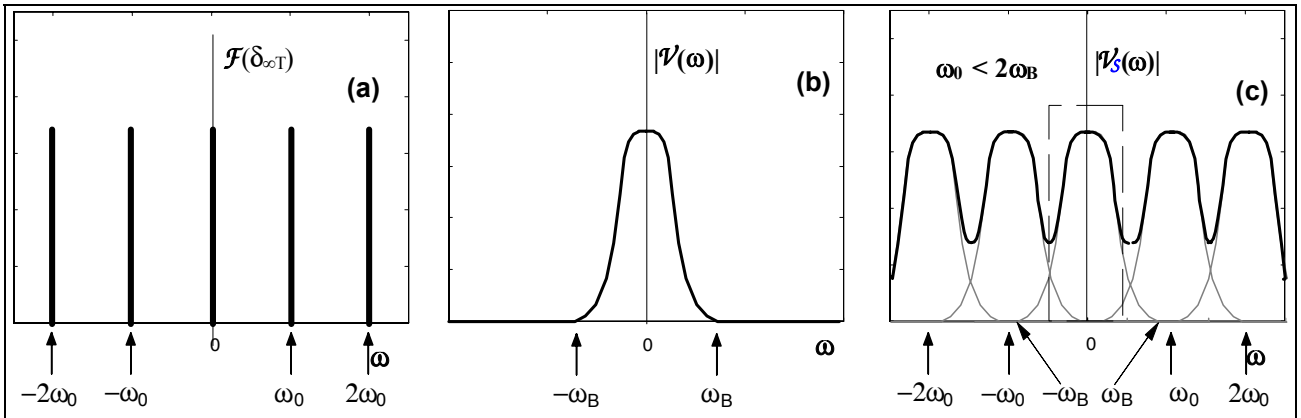

Fig.1.8-3

Nel caso in cui questa relazione non è verificata il risultato è mostrato nella Fig.1.8-3c. Questa volta nessun filtro è buono a ricostruire la banda originaria perché c'è sovrapposizione parziale. In questo caso si ha un fenomeno che si chiama ***aliasing***.

La conclusione di questo discorso si può enunciare con il ***limite di Nyquist***: ***la frequenza di campionamento deve essere almeno il doppio della massima frequenza contenuta nel segnale***.

§1.8.2 Il campionamento ideale con mantenimento

Nei sistemi reali quello che avviene e che il segnale, catturato all'istante kT_0, rimane al valore campionato per un tempo $\tau \le T_0$. Se si fa la convoluzione fra un impulso i(t), largo τ, e la funzione campionata $v_S(T_0)$ data dalla [1.8-3], si ottiene la funzione campionata e mantenuta $v_{SH}(T_0)$. Cioè:

$$v_{SH}(T_0) = \gamma[i(t), v_S(T_0)] = \gamma\left\{[u(t) - u(t-\tau)], \sum_{k,-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta(t - kT_0)\right\}. \qquad [1.8\text{-}4]$$

Ricordiamo la proprietà ricavata in §1.7.2 che alla convoluzione nel dominio del tempo fra due funzioni corrisponde il prodotto delle relative trasformate nel dominio di ω. Si tratta di moltiplicare la

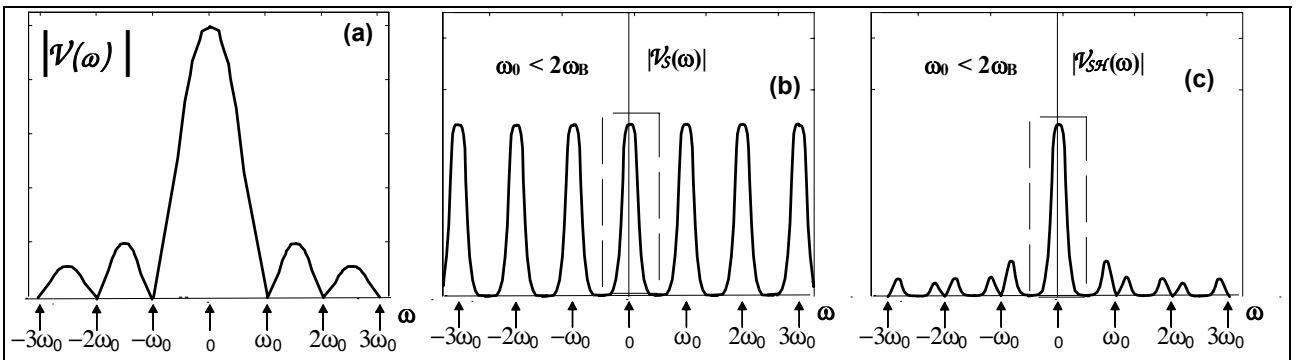

Fig.1.8-4

trasformata $\mathcal{V}_\tau(\omega)$ dell'impulso largo τ data dalla [1.7-3] e rappresentato nella Fig.1.8-4a, per la trasformata $\mathcal{V}_S(\omega)$ dell'impulso campionato come quello Fig.1.8-2c. Questa ultima, con una differente scala rispetto la precedente, ma eguale a quella della Fig.1.8-4a, per far vedere un intervallo $6\omega_0$, è

ridisegnata in Fig.1.8-4b. La [1.7-3] ponendo D = τ si scrive come:

$$\mathcal{V}(\omega) = V_M \tau \cdot \frac{\operatorname{sen} \omega\tau/2}{\omega\tau/2}.$$

Il risultato della moltiplicazione fra le due trasformate e cioè la $\mathcal{V}_{SH}(\omega)$ è riprodotto in Fig.1.8-4c. Il confronto con la Fig.1.8-2c ci dice immediatamente che il risultato è diverso. Non solo i lobi laterali vengono compressi, ma anche la zona compresa nel rettangolo tratteggiato che corrisponde al filtro di ricostruzione del segnale analogico non è la stessa nei due casi. L'operazione di sampling, dunque modifica lo spettro del segnale filtrato introducendo una distorsione non lineare del segnale. Di questo bisogna tenere conto. Poiché la distorsione avviene perché si sta moltiplicando per la $\mathcal{V}_\tau(\omega)$, è sufficiente, prima del campionamento, moltiplicare per la funzione inversa in modo da avere una predistorsione che poi verrà compensata dalla distorsione del sampling ed holding.

Esistono due metodi per soddisfare il limite di Nyquist al fine di evitare l'aliasing: o aumentare la frequenza di campionamento o ridurre la banda. In generale è questa ultima soluzione che si adotta filtrando a monte la banda del segnale con un filtro, che per quanto detto prende il nome di filtro di antialiasing. Il filtro fa si che la massima frequenza del segnale da campionare soddisfi il limite di Nyquist.

In Fig.1.8-5a è mostrato un generico sistema di trasmissione e ricostruzione di dati campionati e mantenuti. Al filtro antialiasing segue il filtro predistortore che serve per compensare la distorsioni dovuta all'holding. Quindi il segnale viene campionato e mantenuto e dopo la conversione in numerico il segnale, opportunamente posto su portante, viene trasmesso. Il segnale ricevuto viene convertito daccapo in analogico e successivamente filtrato in modo da prelevare soltanto il primo lobo.

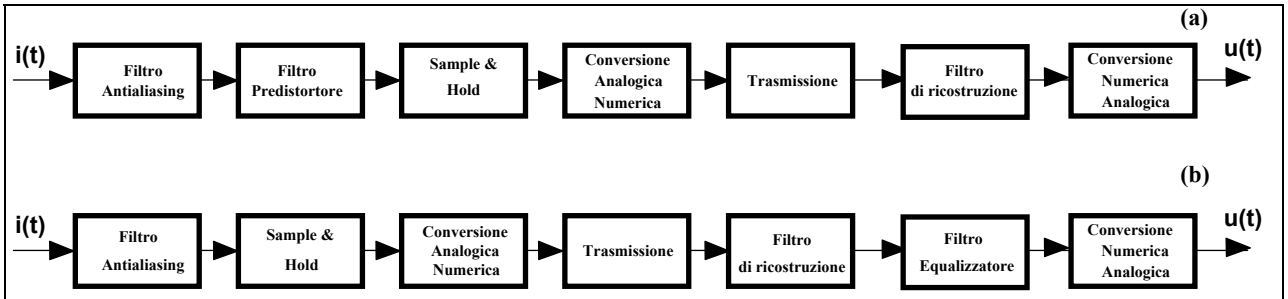

Fig.1.8-5

Un modo leggermente diverso è quello di Fig.1.8-5b nella quale non si mette il filtro di predistorsione a monte ma un filtro equalizzatore a valle che ha la stessa funzione del predistorsore ma sui dati ricevuti, anziché su quelli trasmessi.

BIBLIOGRAFIA

[AL] - Alberigi Quaranta, Rispoli - Elettronica - Zanichelli - 196ý2
[BAH] - Baher - Analog & Digital Signal Processing - J.Wiley - 1990
[BAR] - Barabaschi, Tasselli - Elementi di Servomeccanismi e Controlli - Zanichelli - 1966
[BO] - Bononcini - Esercizi di Analisi Matematica - CEDAM - 1961
[CA] - Cadzow, Van Landingham - Signals, Systems, and Trasforms - Prentice Hall - 1985
[CH] - Chang - Fundamental Handbook of Electronics and Computer Engineering - J.Wiley
[DE] - Desoer, Kuh - Fondamenti di Teoria dei Circuiti - Angeli -1990
[DI] - Di Stefano, Stubberud, Williams - Regolazione Automatica - Etas Libri - 1974
[FO] - Fodor - Nodal Analysis of Electric Networks - Elseviere - 1988
[KW] - Kwakernaak, Sivan - Modern Signals and Systems - Prentice Hall - 1991
[MAS] - Mason, Zimmermann - Electronic Circuits, Signals, and System - J.Wiley - 1964
[MAR] - Magrab - Computer Integrated Experimentation - Springere-Verlag - 1991
[MOS] - Moschytz - Linear Integrated Networks - Van Nostrand
[OTN] - Otnes, Enochson - Applied Time Series Analysis - J.Wiley - 1978
[SA] - Sansone, Conte - Lezioni di Analisi Matematica - CEDAM - 1959
[SP1] - Spiegel - Manuale di Matematica - Etas Libri - 1974
[SP2] - Spiegel - Trasformata di Laplace - Etas Libri - 1976
[HP] - The Fundamental of Signal Analysis - Hewlett Packard - Appl.Note 243 - 1982