

Liceo cantonale di Locarno

# Cosmologia: evoluzione e modelli dell'universo

Lavoro di maturità

Vanessa Mordasini

2006-2007

Professore responsabile: Christian Ferrari





# Ringraziamenti

*I miei ringraziamenti vanno in particolare al Professore, Christian Ferrari che ha dimostrato grande pazienza e disponibilità, sia durante le ore lezione sia al di fuori, nel rispondere alle mie domande e nell'aiutarmi nella comprensione dei concetti, non sempre evidenti del soggetto. Vorrei inoltre ringraziare Camille Bonvin, dell'università di Ginevra, per la sua disponibilità e per il suo aiuto.*



# Indice

<b>Indice</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2 L'universo osservato</b>	<b>9</b>
2.1 La nascita dell'universo . . . . .	9
2.1.1 L'era di Planck . . . . .	10
2.1.2 L'inflazione e la nascita della materia . . . . .	11
2.1.3 L'era adronica . . . . .	12
2.1.4 L'era leptonica . . . . .	13
2.1.5 La nucleosintesi primordiale . . . . .	15
2.1.6 La nascita degli elementi . . . . .	16
2.2 La composizione dell'universo oggi . . . . .	16
2.2.1 La massa . . . . .	16
2.2.2 La radiazione e il corpo nero . . . . .	20
2.2.3 Il vuoto e la costante cosmologica . . . . .	22
2.3 L'universo in espansione: la costante di Hubble . . . . .	30
2.3.1 La paralasse trigonometrica . . . . .	33
2.3.2 Magnitudine, cefeidi e giganti rosse . . . . .	34
2.3.3 Metodi fisici per ricavare la costante di Hubble . . . . .	38
2.4 Isotropia e omogeneità . . . . .	40
<b>3 Relatività e geometria</b>	<b>43</b>
3.1 Lo spazio-tempo di Minkowski . . . . .	43
3.2 La relatività generale e le equazioni di Einstein . . . . .	45
3.3 Curvatura e "embedding diagrams" . . . . .	46

---

3.3.1	La curvatura . . . . .	46
3.3.2	Embedding e rappresentazione 2D . . . . .	50
<b>4</b>	<b>I modelli cosmologici</b>	<b>55</b>
4.1	Le possibili geometrie . . . . .	55
4.2	Il redshift cosmologico . . . . .	58
4.3	Il primo principio della termodinamica per i modelli FRW	60
4.4	L'equazione di Friedman . . . . .	63
4.5	Evoluzione del fattore di scala nel modello FRW piatto .	64
4.6	Soluzioni dell'equazione di Friedman (FRW piatto) . . .	66
4.6.1	Casi particolari . . . . .	66
4.6.2	Spazi delle fasi . . . . .	68
4.7	Modelli FRW con curvatura . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Come si comporta il nostro universo?</b>	<b>77</b>
5.1	Il diagramma fondamentale della cosmologia . . . . .	77
5.2	Valori dei parametri cosmologici . . . . .	80
5.3	Altre prove sperimentali a favore di un Universo piatto .	83
<b>A</b>	<b>La magnitudine</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>89</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Chi non si è mai chiesto da dove ebbe origine l'universo nel quale viviamo? Come è fatto? Da cosa è composto? Quale forma abbia? Se sia eterno oppure se un giorno finirà? Penso che tutti almeno una volta ci siamo poste alcune di queste domande. In questo testo cercherò di proporvi una panoramica generale sul nostro universo e di rispondere ad alcune di queste domande.

Cominceremo con una breve storia sulla nascita dell'universo, e cercheremo in seguito di presentare le tre componenti le più importanti che lo compongono: *materia, radiazione, vuoto*; in seguito cercheremo di farci un'idea sulla *scala delle distanze cosmiche*, ossia il metodo che ci permette di determinare le distanze degli oggetti celesti dalla Terra e determinare in seguito la costante di Hubble, e sul concetto di isotropia e omogeneità sul quale si basano i modelli cosmologici. Ci occuperemo in seguito di aspetti di geometria, basata su una tra le più grandi scoperte del secolo scorso: *la teoria della relatività*, che potremo poi applicare ai tre casi particolari possibili per rappresentare la possibile forma del nostro universo. Per concludere analizzeremo i dati empirici attualmente disponibili che ci permetteranno di determinare l'attuale geometria dell'universo e la sua evoluzione.

Spero che alla fine della lettura di questo lavoro sarò riuscita ad appassionare il lettore ad un argomento, secondo me, affascinante, che ha interessato l'uomo dalle epoche più antiche e che è stato oggetto di studio

di uno tra i più grandi personaggi rappresentanti la fisica del XX secolo: Albert Einstein. Vorrei inoltre renderlo attento a come anche l'universo che sembra essere qualcosa di estremamente stabile, esiste così come è soltanto perché tre parametri hanno assunto nel corso dei secoli un valore che corrisponde precisamente al nostro universo, se avessero avuto valori leggermente diversi avrebbero completamente cambiato la nostra storia!

# Capitolo 2

## L'universo osservato

### 2.1 La nascita dell'universo

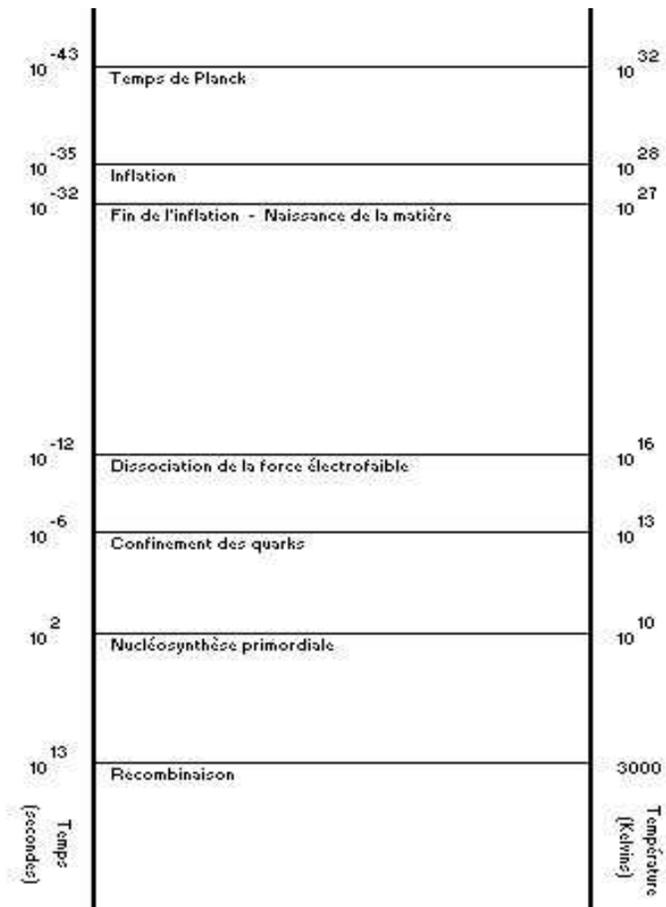


Figura 2.1: Evoluzione dell'universo dal Big Bang fino ad oggi.

### 2.1.1 L'era di Planck

La storia della materia cominciò 13,7 miliardi di anni fa quando nacque l'universo, durante il periodo del Big Bang. Questo periodo è inizialmente caratterizzato da un'altissima densità di energia e dunque da temperature eccezionalmente elevate che superano i  $10^{32}$  K. Le condizioni fisiche presenti in questo periodo non possono essere spiegate con le conoscenze fisiche che possediamo attualmente; questa difficoltà è dovuta in particolare al fatto che, le quattro forze che governano oggi la natura - forza gravitazionale, forza elettromagnetica e forze nucleari forte e debole - non erano indipendenti ma unificate in un'unica forza fondamentale. La fisica attuale può essere utilizzata per descrivere quello che accadde a partire da  $10^{-43}$  s dal Big Bang quando, essendo diminuita la densità, l'universo raggiunse una temperatura che permette alla forza gravitazionale di dissociarsi dalle altre tre interazioni. Otteniamo dunque due forze equivalenti, ed è per questo che l'universo è detto simmetrico. Da questo momento la forza gravitazionale potrà essere descritta dalla relatività generale, mentre le altre tre forze dalla meccanica quantistica. Durante l'era di Planck la materia non esiste ancora, l'universo, apparentemente vuoto, è popolato da migliaia di particelle e antiparticelle, dette virtuali, che si creano dal nulla rubando una piccolissima quantità di energia all'universo e si disintegrano all'incirca  $10^{-22}$  s dopo, restituendo all'universo la poca energia che avevano "rubato"; è proprio questo periodo di vita estremamente corto che le distingue dalle normali particelle di materia. Questo particolare fenomeno può essere spiegato attraverso un principio della meccanica quantistica noto come disuguaglianza di Heisenberg

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2. \quad (2.1)$$

### 2.1.2 L'inflazione e la nascita della materia

Quando l'universo compie  $10^{-35}$  s la temperatura raggiunge i  $10^{-27}$  K, permettendo alla forza nucleare forte (che tiene legati tra di loro protoni e neutroni all'interno dei nuclei atomici) di dissociarsi dalla forza nucleare debole (responsabile della radioattività) e dalla forza elettromagnetica, unificate nella forza elettrodebole, rompendo la situazione di simmetria in cui ci trovavamo fino ad ora; le forze non sono dunque più equivalenti. Questo passaggio da uno stadio simmetrico ad uno asimmetrico è definito come una transizione di fase che, però, non avverrà in modo immediato. L'universo passerà infatti da uno stadio intermedio chiamato "falso" vuoto caratterizzato da una grandissima densità di energia che, secondo leggi della relatività generale, si tradurrà con una forte forza di repulsione che causerà un'espansione particolarmente veloce e brutale (la dimensione dell'universo sarà moltiplicata per un fattore  $10^{50}$ ). Si tratta del *fenomeno dell'inflazione*, che terminerà soltanto quando avverrà la transizione di fase e l'universo acquisterà finalmente una configurazione stabile. La fine dell'era inflazionaria sarà caratterizzata dalla nascita della materia. Infatti, durante la transizione di fase verrà liberata un'importante quantità di energia che sarà catturata dalle particelle virtuali permettendo loro di diventare reali. È in questo modo che dal vuoto si creerà la materia come la conosciamo noi oggi. Un altro importantissimo fenomeno, reso possibile dalla dissociazione della forza nucleare forte dalle forze elettrodeboli, è l'asimmetria materia-antimateria. Durante questo periodo la materia prende infatti il sopravvento, per un miliardo e un quark si contano soltanto un miliardo di antiquark. Questa differenza sarà in seguito ancora presente a livello di protoni e neutroni e determinerà lo sviluppo dell'universo come lo conosciamo oggi.

Dopo l'inflazione l'universo continua ad espandersi in modo molto più lento e regolare; nulla di speciale si produce fino a  $10^{-12}$  s. È a questo punto che la temperatura ha infatti raggiunto i  $10^{15}$  K, tem-

peratura che rende possibile l'ultima transizione di fase che consiste nella dissociazione delle interazioni elettromagnetiche dalle interazioni deboli. Da questo momento l'universo è controllato da quattro forze ben distinte che possono essere osservate ancora oggi all'interno dell'universo.

### 2.1.3 L'era adronica

Dopo l'ultima transizione di fase l'universo continua ad espandersi causando una diminuzione della temperatura. Quando questa raggiunge  $10^{13}$  K , all'incirca  $10^{-6}$  s dopo il Big Bang, avrà luogo il confinamento dei quark. Quando la temperatura è superiore a  $10^{13}$  K, infatti, le particelle sono troppo agitate e la forza nucleare forte non è abbastanza intensa per legare i quark. Quando si scende sotto a  $10^{13}$  K l'agitazione delle particelle diminuisce permettendo alla forza nucleare forte di dominare. I quark si riuniscono dunque in gruppi di due e tre formando due tipi di adroni: i mesoni (formati da un quark e un antiquark) e i barioni (formati da tre quark), di cui sono esempi i protoni e i neutroni. Il periodo che comincia ora, e che si protrarrà fino all'età di  $10^{-5}$  s, è *l'era adronica*.

Le reazioni che caratterizzano questo periodo sono quelle che trasformano adroni in fotoni (reazione di annichilazione) e viceversa. Questo sistema di equilibrio è possibile, perché quando la temperatura a un valore di  $10^{13}$  K, la massa della coppia adrone-antiadrone è equivalente all'energia di due fotoni. Questo significa che da due fotoni è possibile creare una coppia adrone-antiadrone. Questa reazione smetterà, però, non appena l'energia media dei fotoni diminuirà e non sarà dunque più sufficiente ad innescare la reazione inversa. Questa riduzione di energia è direttamente legata al calo di temperatura, infatti, se la temperatura si abbassa e scende sotto i  $10^{13}$  K , l'energia media del fotone diminuisce e la reazione inverso è bloccata. A questo punto solo le reazioni di annichilazione, che non necessitano energia, avranno luogo portando ad una scomparsa quasi totale dei barioni. Questa scomparsa quasi totale si verifica perché l'asimmetria riscontrata nei quark alla fine del periodo

dell'inflazione si riscontra anche negli adroni; avremmo dunque per ogni miliardo di antiadroni un miliardo e un adrone. Queste particelle in eccedenza non troveranno nessun "partner" e non potranno dunque annichilarsi. La fine dell'era adronica causa così la definitiva scomparsa delle particelle di antimateria ma non della materia, in particolare un milionesimo di protoni e neutroni sono sopravvissuti.

#### 2.1.4 L'era leptonica

Questo periodo, è caratterizzato dalle reazioni di produzione e di annichilazione di paia di leptoni (3 diversi tipi di neutrini, elettroni, muoni e particelle tau). Queste particelle hanno una massa minore rispetto agli adroni, l'energia necessaria a due fotoni per creare un leptone è dunque minore (per esempio l'elettrone ha una massa 2000 volte più piccola di un protone, un fotone necessita dunque di una quantità 2000 volte inferiore per creare un elettrone). **L'era leptonica** è caratterizzata da due avvenimenti fondamentali:

- Il primo è il disaccoppiamento dei neutrini. Quando la temperatura è superiore ai  $10^4$  K, i neutrini reagiscono con il resto della materia e, grazie alle forze di interazione deboli, si trovano in una situazione di equilibrio con il resto della materia. La forza di interazione debole possiede però un "raggio" d'azione relativamente ristretto e dunque non appena la distanza tra particelle aumenta, a causa dell'espansione dell'universo, questa forza non permette più nessuna reazione tra neutrini e il resto della materia. Durante la formazione dell'universo la distanza tra particelle che non permette più nessuna interazione è raggiunta quando il valore della temperatura corrisponde a  $10^4$  K, a questo punto i neutrini si comporteranno dunque come se tutte le altre particelle non esistessero; si dice che queste particelle si disaccoppiano dalla materia. Visto che non interagiscono più con nessun tipo di materia queste particelle sono

ancora presenti oggi nell'universo.

- Il secondo avvenimento importante è l'annichilazione degli elettroni. Quando la temperatura scende al di sotto della soglia che rende possibile le reazioni che permettono la nascita di un elettrone e di un antielettrone da due fotoni, nello stesso modo in cui questo avviene nell'era adronica, avrà luogo la progressiva distruzione delle coppie elettrone antielettrone. Ma dall'asimmetria materia-antimateria instauratasi alla fine dell'era di Planck, una piccolissima parte di elettroni non troverà la particella complementare e, perciò non si disintegreranno. A partire da questo momento l'antimateria è completamente scomparsa dall'universo e l'universo contiene soltanto materia composta da protoni, neutroni e elettroni. Questa scomparsa quasi totale degli elettroni ha una conseguenza molto importante sull'equilibrio tra protoni e neutroni presente sino a questo momento.

Il protone può essere considerato una particella stabile, il suo tempo di dimezzamento corrisponde all'incirca a  $10^{30}$  anni. Il neutrone è invece una particella instabile; quando è isolato si dimezza in circa quindici minuti producendo un protone, un elettrone e un antineutrino. In questo modo partendo da una situazione in cui protoni e neutroni sono in proporzioni uguali, la tendenza sarà un aumento del numero di protoni contemporaneamente alla diminuzione del numero di neutroni. Prima dell'annichilazione degli elettroni, quando questi erano ancora molto abbondanti, il numero di barioni era regolato da una reazione che, grazie alle forze di interazioni deboli, permetteva di creare neutroni a partire dalla collisione di un elettrone ed i un protone. In questo modo i due tipi di barioni mantengono delle proporzioni simili. Con la scomparsa della maggior parte degli elettroni questo equilibrio è rotto, e poco a poco i neutroni si trasformeranno in elettroni e la proporzione tra i due tipi di particelle cambia in modo progressivo. In questo

modo, da questo momento, la materia sarà dominata dai protoni.

### 2.1.5 La nucleosintesi primordiale

Nel momento in cui la temperatura raggiunge il  $10^{10}$  K, e l'universo esiste ormai da un centinaio di secondi avviene la nucleosintesi primordiale, cominciano cioè a crearsi i primi nuclei atomici a partire da protoni e neutroni che fino a quel momento erano indipendenti gli uni dagli altri. Bisognerà però aspettare che la temperatura diminuisca ancora per avere finalmente dei nuclei atomici stabili. Infatti fintanto che l'universo possiede una temperatura uguale o leggermente superiore a  $10^{10}$  K i fotoni possiedono un'energia sufficiente per rompere i legami presenti tra protoni e neutroni disintegrando così il nucleo atomico. Non appena scendiamo al di sotto di questa soglia critica i fotoni non sono più abbastanza energetici da rompere i legami e le strutture che si formano sono stabili; si possono così creare strutture sempre più complesse: Deuterio, composto da un protone e un neutrone, elio-3, composto da due protoni e un neutrone e elio-4 (l'elemento presente in quantità maggiore, composto da due protoni e due neutroni). La nucleosintesi non produrrà, però, elementi più complessi di quelli sopra elencati. In effetti anche se la collisione fra due nuclei può crearne altri più pesanti, contenenti dai 5 agli 8 costituenti, questi ultimi sono molto instabili e si disintegrano molto rapidamente. L'instabilità di questi nuclei di elementi porrà dunque un freno alla creazione di atomi sempre più complessi impedendo la nascita di nuclei più pesanti quali l'ossigeno e il carbonio; bisognerà infatti aspettare la nascita delle stelle per vedere apparire atomi più complessi nell'universo. Inoltre, essendo l'universo in espansione, le condizioni favorevoli all'unione tra protoni e neutroni saranno presenti durante un periodo assai breve.

I due principali elementi presenti nell'universo alla fine della nucleosintesi sono dunque idrogeno -i protoni- e elio-4 in un rapporto, di circa, 4:1.

### 2.1.6 La nascita degli elementi

Quando la temperatura scende sotto i 3000 K, cessano le interazioni tra materia e radiazione; gli elettroni si legano ai nuclei e l'universo diventa "trasparente". I primi atomi sono nati. La sintesi di atomi più pesanti quali ossigeno (O<sub>2</sub>) e carbonio (C) continuerà poi in seguito quando si creeranno galassie e stelle in quella che viene chiamata nucleosintesi stellare.

## 2.2 La composizione dell'universo oggi

### 2.2.1 La massa

Esistono due tipi materia che determinano la massa dell'Universo: la materia visibile e la materia oscura.

La materia visibile è conosciuta e osservata dagli astronomi ed è costituita da galassie, stelle, pianeti e tutti gli oggetti celesti che è possibile osservare mediante i telescopi e gli strumenti di misurazione a nostra disposizione. Questi oggetti visibili costituiti da materia barionica, ossia da He<sub>4</sub> da H e da De (7% He<sub>4</sub>; 92% H; 1% De), costituiscono soltanto il 10% della materia che compone il nostro universo e hanno una densità  $\rho_{visibile}$  pari a  $5 \cdot 10^{-31} h_0^2 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Inoltre riferendoci ai modelli cosmologici, che ipotizzano un universo piatto come modello più probabile per il nostro universo, e tenendo conto del risultato delle equazioni di Einstein che ipotizzano un parametro per la materia pari a  $\Omega_m = 0.3$ , possiamo ricavare il parametro  $\Omega_{visibile} \leq 0.01\Omega_m$  che corrisponde alla densità di materia visibile; questo significa che ci manca una quantità di materia pari  $\Omega_{oscura} = 0.29$ . Dobbiamo quindi ipotizzare la presenza di materia che non ci è possibile osservare con le tecnologie attualmente

---

<sup>1</sup> $h_0 = H_0/100 \text{ Km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$

disponibili per le osservazioni, e che viene chiamata *materia oscura*.

La densità di massa delle galassie o più precisamente della materia visibile si può stimare calcolando il valore medio  $\langle \frac{M}{L} \rangle$  dove  $M$  è la massa e  $L$  la luminosità delle galassie più vicine. Moltiplicando la luminosità di una galassia per  $\langle \frac{M}{L} \rangle$  otteniamo la sua massa. La luminosità vera di una galassia si deduce dalla luminosità apparente  $F$

$$L = 4\pi F d^2$$

dove  $F$  è misurato sperimentalmente ma  $d^2$  è dedotto da una misura di spostamento verso il rosso e dipende da  $H_0$ , nota come costante di Hubble. Questo significa che conosciamo la massa di ogni galassia proporzionalmente a  $H_0^2$ .

La densità di massa corrispondente alla materia delle galassie si può dunque scrivere come

$$\rho_{galassie} = N_{galassie} \left\langle \frac{M}{L} \right\rangle \langle L \rangle$$

I risultati che si ottengono da questa relazione sono molto incerti, ma si è sicuri che non possono superare  $5 \cdot 10^{-31} h_0^2 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$  ossia qualche centesimo della densità critica. Otteniamo dunque  $\Omega_{visibile} \leq 0.01 \Omega_m$ .

### La materia oscura

I primi indizi dell'esistenza di materia oscura risalgono al 1930 quando, l'astronomo svizzero Fritz Zwicky stava studiando il moto di ammassi di galassie lontani e di grande massa. Zwicky stimò la massa di ogni galassia basandosi sulla sua luminosità e sommò tutte le masse galattiche per ottenere la massa totale dell'ammasso. Decise poi di effettuare una seconda stima basandosi questa volta sulla dispersione di velocità delle galassie, che è direttamente legata alla massa dell'ammasso, e ottenne, come risultato, che la massa dinamica era 400 volte maggiore rispetto alla massa luminosa. Nonostante l'evidenza sperimentale già presente al tempo di Zwicky, bisognerà aspettare il 1970 affinché gli studiosi prendano sul serio il problema della materia oscura. Negli anni '70

per verificare che le osservazioni effettuate da Zwicky fossero corrette si analizzarono gli spettri delle galassie a spirale dai quali è possibile ricavare la curva di rotazione, vedi figura 2.2, che descrive la velocità della rotazione della galassia in funzione della distanza dal suo centro. Solitamente, secondo le leggi della gravitazione universale, la velocità massima si trova a qualche kiloparsec dal centro e diminuisce mano a mano che la distanza dal centro aumenta; la curva di rotazione è dunque curva. Quello che invece si osserva per quanto riguarda le galassie è una curva di rotazione orizzontale, questo significa che la velocità rimane costante e non diminuisce.

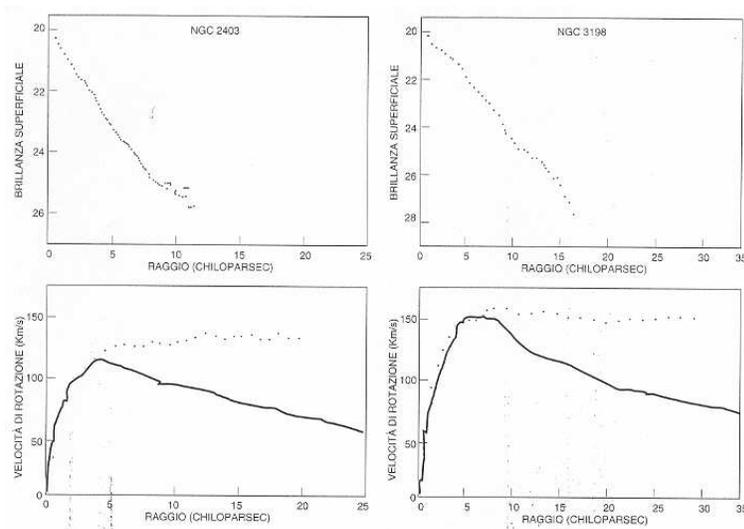


Figura 2.2: Curva di rotazione di 2 galassie a spirale in funzione della distanza dal centro. La linea piena rappresenta il calcolo teorico ricavato in base alla distribuzione di massa luminosa riportata sopra; la linea punteggiata invece rappresenta le misure effettive delle velocità di rotazione delle stelle. È evidente che a grandi distanze dal centro, anche quando ormai la galassia è praticamente buia, alcune stelle continuano a ruotare in modo del tutto inatteso. In questo scenario è necessario postulare una presenza di **materia oscura** che aumenti con il raggio.[9]

Un modo per spiegare questo fenomeno è di ipotizzare l'esistenza di un alone di materia poco luminosa, e dunque non osservabile, che racchiuda la galassia in una morsa gravitazionale e che potrebbe rappresentare fino al 90% della massa della galassia stessa. Inoltre il movimento delle

galassie all'interno degli ammassi a rivelato lo stesso problema riscontrato con il movimento delle stelle all'interno delle galassie e un recente studio stima la densità di materia oscura a un terzo della densità critica, il resto essendo composto da energia oscura (vuoto).

Esistono diverse ipotesi per spiegare la natura della materia oscura. Si ipotizza che la materia oscura galattica, ossia quella che compone l'alone che attornia le galassie, sia composta da materia barionica sotto forma di nane brune, nane bianche, buchi neri super massicci e stelle di neutrini, oggetti che gli astronomi riassumono con la sigla MACHO (*Massive Compact Halo Object*) ossia oggetti di alone compatti dotati di massa. Attraverso la teoria del Big Bang si è però calcolato che la materia barionica può rappresentare al massimo il 4% della materia presente all'interno del nostro universo, il restante 26% deve dunque essere di natura non barionica. Questo significa che la materia oscura cosmologica non può essere barionica. Sulla natura di questa materia non barionica si sono sviluppate due teorie: la prima ipotizza una materia oscura composta da una particella quasi priva di massa, che viaggia ad una velocità prossima a quella della luce, da cui il nome di **materia oscura calda**, e debolmente interagente con il resto della materia: il neutrino; la seconda invece ipotizza una materia oscura composta da particelle dotate di massa, con una velocità molto inferiore a quella della luce, da cui il nome di **materia oscura fredda**, e debolmente interagenti, chiamate WIMP's (*Weakly Interactive Massive Particles*); oggi si pensa che la particella che componga le WIMP's sia una particella supersimmetrica<sup>2</sup> chiamata neutralino (non ne siamo ancora sicuri perchè la loro debole interazione con il resto della materia le rende delle particelle estremamente difficili da rivelare, infatti, non sono ancora state osservate). Attualmente è la teoria della materia oscura fredda che sembra essere la più probabile. Infatti se è la materia oscura fredda a dominare, lo scenario di formazione dell'universo sarebbe quello chiamato dal basso verso l'alto ossia dalle

---

<sup>2</sup>La teoria di supersimmetria suppone che ogni particella che osserviamo ha una particella "ombra" (in inglese, "shadow"), massiva. Per esempio, per ogni quark ci dovrebbe essere un corrispondente "quark" (shadow-quark) che lo segue dappertutto.

strutture più piccole (stelle, galassie) a quelle più grandi (ammassi); se, invece, fosse quella calda a dominare lo scenario sarebbe quello chiamato dall'alto verso il basso, vale a dire che si sarebbero formate prime le strutture più massicce quali gli ammassi che si sarebbero, in un secondo tempo, frantumati creando le galassie. Ora dalle osservazioni risulta che le galassie siano tutte in equilibrio dinamico al contrario degli ammassi e perciò devono, probabilmente, essersi formate prima, da cui la preferenza per il modello di materia oscura fredda. È importante notare che è però necessario che una piccolissima parte di materia oscura calda sia comunque presente altrimenti non sarebbe stata possibile la nascita degli ammassi di galassie in così breve tempo. Questo modello che ipotizza una materia oscura costituita in prevalenza da materia oscura fredda, da una piccola parte di materia oscura calda e da materia barionica viene detto *modello della materia oscura mista*.

### 2.2.2 La radiazione e il corpo nero

La radiazione presente nell'universo, composta da fotoni, neutrini, onde gravitazionali e scoperta nel 1964 da A. Penzias e R. Wilson, comporta le stesse caratteristiche della radiazione di un corpo nero. Durante le prime osservazioni ci si rese conto che il grafico della densità spettrale di energia  $u(\nu, T)$  in funzione di  $\nu$  per ogni valore  $T$  della temperatura era molto simile a quello di un corpo nero. Questa radiazione è stata originata circa 300000 anni dopo il Big Bang quando l'universo aveva una temperatura di circa 3000 K. Come sappiamo è precisamente in questo momento che ebbe luogo la separazione tra materia e radiazione. Fino a questo momento infatti la materia era interamente ionizzata (gli elettroni erano dunque liberi) e i fotoni interagivano continuamente con le particelle di materia garantendo un equilibrio. Vi era, cioè un'interazione tra i fotoni e gli elettroni liberi che componevano questo gas ionizzato, e quindi i fotoni non potevano propagarsi liberamente. Questo significa che il gas non permetteva alle radiazioni di passare ed era dunque opaco e non trasparente. Dal momento in cui l'universo rag-

giunse questa fatidica temperatura materia e radiazione si separarono: gli elettroni si legarono ai protoni creando gli atomi, il gas cosmico, neutro, diventa quindi trasparente e la radiazione poté propagarsi all'interno dell'universo senza più incontrare ostacoli arrivando fino a noi.

Questo particolare tipo di radiazione prende il nome di radiazione cosmica di fondo (CMB, sigla di *Cosmic Microwave Background*) oppure radiazione cosmica a 3 K, nome che deriva dalla sua temperatura che, grazie alle osservazioni compiute negli ultimi decenni è stata stimata a  $2.725 \pm 0.0001$  K. Il CMB possiede diverse caratteristiche che la contraddistinguono:

- appartenenza alle microonde radio; possiede dunque una lunghezza d'onda  $\lambda$  di qualche millimetro soltanto,
- irraggiamento diffuso estremamente omogeneo,
- il suo carattere termico,
- la sua estrema isotropia.

### Il corpo nero e la legge di Planck

Nell'anno 1900 Max Planck scoprì che lo spettro della luce può essere descritto dalla densità spettrale di energia  $u(\nu, T)$  in un determinato intervallo di frequenza  $\nu$  a  $\nu + d\nu$  e a una temperatura  $T$  data e ottenne il seguente risultato teorico

$$u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu, \quad (2.2)$$

dove  $h$  è la costante di Planck. Questa predizione si rivelò essere perfettamente in accordo con le osservazioni sperimentali.

Dal grafico fornito dalla radiazione del corpo nero, integrando su tutte le frequenze otteniamo la legge di Stefan-Boltzman

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T)d\nu = \sigma T^4$$

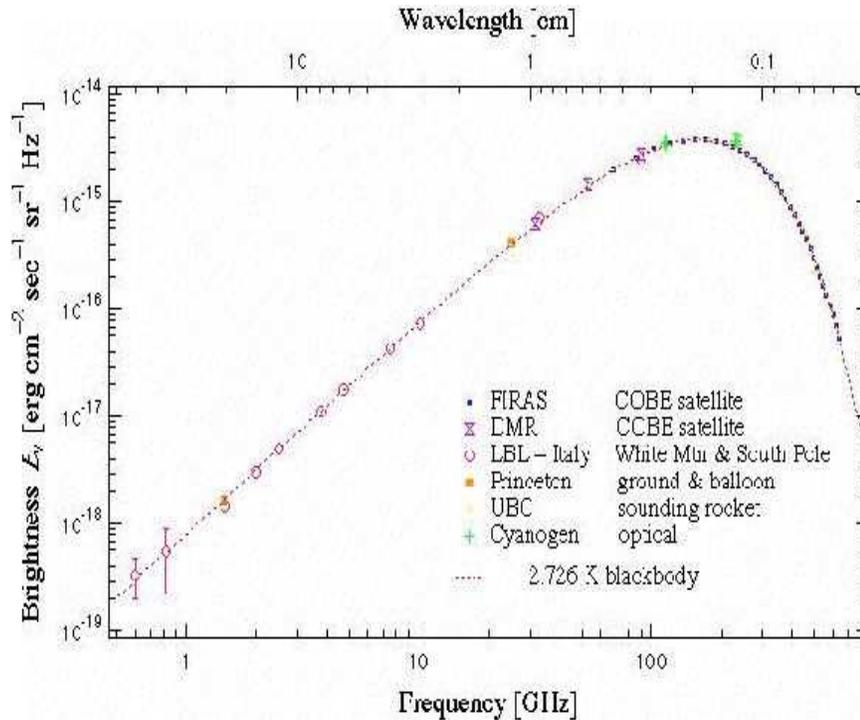


Figura 2.3: Radiazione del corpo nero del CMB, misurata dal satellite Cobe. [12]

Se cerchiamo il massimo di  $u(\nu, T)$  otteniamo la legge di Wien

$$\nu_{max} = 2.81 \frac{k_B T}{h}$$

Grazie a queste due leggi è dunque stato possibile ricavare la temperatura e la lunghezza d'onda proprie al CMB, e, applicandole al risultato ottenuto da Planck, è possibile dedurre la densità di energia della radiazione cosmica di fondo

$$\rho_{rad} = g \frac{\pi^2 (K_B T)^4}{30 (\hbar c)^3} \sim 10^{-34} \text{g/cm}^3$$

### 2.2.3 Il vuoto e la costante cosmologica

L'energia oscura è un ipotetica forma di energia che riempie l'intero spazio in modo omogeneo. È stata introdotta per spiegare i risultati

ottenuti da ricerche effettuate su supernovae di tipo Ia nel 1998 da alcuni astrofisici, che indicavano un aumento della velocità di espansione dell'universo e non una diminuzione.

“Nel tentativo di ottenere un universo statico, Einstein tentò di manipolare la sua equazione aggiungendo un termine costante, che chiamò costante cosmologica. Questo termine, usualmente indicato con il simbolo  $\Lambda$ , è perfettamente consistente da un punto di vista matematico, e funziona come un termine di repulsione (cambiato di segno può funzionare come termine di attrazione). Si otteneva una soluzione statica a patto che la costante  $\Lambda$  avesse un valore preciso, tale da compensare esattamente l'attrazione gravitazionale della materia su sé stessa. Perché dovesse avere proprio quel valore risultava indeterminato; inoltre, come si capì successivamente, la soluzione così ottenuta era instabile, nel senso che una perturbazione anche infinitesima avrebbe finito per amplificarsi e fare allontanare sempre di più la soluzione da quella statica. Quando fu scoperta l'espansione dell'universo da parte di Hubble, Einstein ammise che la costante cosmologica era stato il più grande errore della sua vita.

Anche se matematicamente una costante con effetto repulsivo è perfettamente coerente, rimane il problema di sapere se è possibile interpretarla in modo coerente anche per quanto riguarda la fisica. Il suo effetto sarebbe quello di una sorta di antigravità, e quindi a prima vista assurdo. In relatività generale, la sorgente di gravità non è data solo dalla materia-energia, ma anche dalla pressione, che si combinano nel termine  $\rho + 3p$  [15]. Per avere antigravità abbiamo dunque bisogno o di una massa-energia negativa, o di una pressione negativa. Il problema è che non conosciamo particelle che abbiano massa o energia negativa; possiamo però ottenere una pressione negativa dalla teoria delle particelle elementari. Uno dei metodi più semplici conosciuti al giorno d'oggi per produrre antigravità, è quello che viene chiamato effetto Casimir (scoperto nel 1948 e verificato nel 1997).

Prendiamo una coppia di lastre di metallo immerse nel vuoto; noteremo che oltre alla minima forza gravitazionale che tende ad avvicinarle esiste anche un altro tipo di forza, spiegabile solo mediante la fisica quantistica, che avrà tendenza ad attrarle una verso l'altra. Cerchiamo ora di spiegare questo effetto. Secondo la visione classica una regione spaziale è vuota quando non è presente materia e ci troviamo in una situazione di minima energia in cui l'energia totale  $E_0 = 0$ . Secondo la fisica quantistica, è possibile interpretare il vuoto come lo stato fondamentale, vale a dire di minima energia, di un campo elettromagnetico; in questo modo è possibile associare al vuoto un'energia di punto zero (un'energia minima) e fluttuazioni di questa energia. La possibilità di associare un'energia alla situazione di minima energia di un campo elettromagnetico è dovuta al fatto che la forza elettromagnetica può essere quantificata assumendo caratteristiche molto simili ad un oscillatore armonico per il quale si ha:

$$E_0 = \left(0 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega.$$

Otteniamo così una configurazione di minima energia con  $E_0 \neq 0$  al contrario della teoria classica in cui si ottiene  $E_0 = 0$ . Inoltre, come conseguenza diretta della disequazione di Heisenberg (2.1) l'energia del vuoto subisce continuamente variazioni spontanee, le fluttuazioni, che portano alla creazione di coppie di elettroni e positroni (le antiparticelle dell'elettrone che hanno dunque carica positiva), dal nulla, che dopo aver "vissuto" per un breve periodo si annichiliscono. Queste quasi particelle sono chiamate particelle virtuali (abbiamo già accennato di questo fatto nella sezione 1.1).

Possiamo ora tornare alle nostre due lastre di metallo. Vediamo che esse delimitano chiaramente tre porzioni di spazio: una interna, con uno spazio delimitato e due esterne, con uno spazio "illimitato". Ora qualsiasi campo elettromagnetico possiede un proprio "spettro" contenente diversi tipi di frequenze. all'esterno delle due lastre metalliche, ossia in una regione "libera" tutte le frequenze possono esistere. All'interno della cavità, dove le onde sono riflesse da una parte all'altra tra le due lastre, invece la situazione è diversa; alcune frequenze, sono amplificate

mentre altre sono soppresse. Si sviluppa quindi una pressione negativa che permette alle due placche di attrarsi. È questa pressione negativa che crea antigravità.

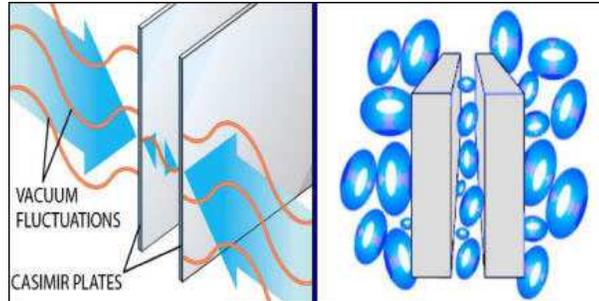


Figura 2.4: Rappresentazione grafica dell'effetto Casimir.[14]

L'energia del vuoto, generando pressione negativa, potrebbe quindi fornire l'antigravità che cerchiamo. Si dimostra infatti che un termine di energia di vuoto inserito nelle equazioni di Einstein genera un termine di costante cosmologica.

È possibile ottenere un limite superiore per  $\Lambda$ , imponendo che la densità totale di massa-energia (inclusa quella di vuoto) non sia molto maggiore del valore della densità critica; se così non fosse, l'Universo sarebbe in espansione ad un ritmo molto maggiore di come lo vediamo oggi. Possiamo esprimere questo limite come  $\Omega_v \equiv \Omega_\Lambda \lesssim 1$ . Dalla teoria delle particelle elementari è possibile calcolare il valore atteso della costante cosmologica, dati tutti i campi di particelle noti. Otteniamo qualcosa come  $\Omega_\Lambda \sim 10^{120}$ . Confrontando il valore ottenuto dall'energia di vuoto con il limite superiore dato dalla cosmologia, otteniamo un risultato sorprendente: il primo supera il secondo per ben 120 ordini di grandezza! Probabilmente il disaccordo più disastroso mai trovato tra teoria ed osservazione! È chiaro che la fisica delle particelle che non conosciamo deve fornire dei termini che rendono questo disaccordo minimo. Come e perché questo avvenga non è però per niente chiaro. Dal punto di vista cosmologico, però, il problema principale non consiste nel dimostrare che la costante cosmologica non è 120 ordini di grandezza più grande di quello che dovrebbe essere (l'evidenza osser-

vativa ci basta!), ma nel fatto se essa possa o meno essere diversa da zero.

“Una spiegazione molto interessante della piccolezza innaturale della costante cosmologica, a cavallo tra la filosofia e la cosmologia scientifica, viene data dal principio antropico. Fu Paul Dirac a notare una strana coincidenza numerica: il rapporto tra forza elettrostatica e forza gravitazionale tra un protone ed un elettrone, elevato al quadrato, è circa uguale al numero di particelle contenute nel nostro Universo osservabile. Questa equivalenza potrebbe essere una strana coincidenza, ma potrebbe sottointendere una legge fondamentale della fisica che ancora ci sfugge. Ma mentre il primo numero (rapporto tra forza elettrica e gravitazionale) è costante nel tempo, il secondo (numero di particelle osservabili) cambia nel tempo (vedremo questo tra breve). La nuova legge fondamentale implicherebbe quindi la variazione della forza di gravità o di quella elettromagnetica. Questa variazione è oggi esclusa dalle osservazioni. Robert Dicke propose una soluzione ben diversa per questa coincidenza: l'uguaglianza di Dirac risulta valida nell'epoca in cui le stelle bruciano idrogeno in elio, che è l'epoca in cui viviamo. Ma questo non è un caso: l'esistenza di esseri biologici come noi richiede che le stelle abbiano già sintetizzato abbastanza carbonio, ossigeno ed elementi pesanti da permettere l'esistenza di un pianeta solido con atmosfera e acqua, in cui si possa sviluppare la vita biologica basata sul carbonio. Molto prima di questo periodo non potremmo esistere perché non sono stati prodotti abbastanza metalli, successivamente le stelle si spengono e l'universo va verso la morte termica. Questa spiegazione “antropica” ispirò alcuni cosmologi ad introdurre il cosiddetto principio antropico, che, nella sua forma “debole”, richiede che una teoria cosmologica per essere accettabile debba produrre un universo in cui è possibile la vita biologica, e quindi la presenza di un osservatore. Perché questo avvenga è necessario che l'universo contenga abbastanza materia barionica (protoni, neutroni) ed elettroni a densità sufficientemente alta da formare stelle, e che duri abbastanza a lungo in modo che si generino stelle di seconda generazione (cioè di composizione

non primordiale, arricchite di metalli), attorno alle quali si possano formare pianeti ricchi di metalli, ed in essi la vita. Se il valore delle costanti della natura non è fissato dalla fisica ma è assegnato secondo una certa distribuzione di probabilità, la condizione di ospitare la vita biologica selezionerà particolari combinazione di “costanti della natura”. Tornando alla costante cosmologica, gli universi in cui essa assume il suo valore “naturale” (ossia  $10^{120}$ ) non sono idonei ad ospitare la vita poiché si espandono troppo in fretta, impedendo la formazione di qualsiasi stella. Questo potrebbe giustificare un valore molto basso di  $\Lambda$ . Questi argomenti sono spesso stati accolti in modo ostile, soprattutto oltreoceano, perché troppo filosofici: se non è nota la distribuzione di probabilità delle costanti della natura, né teoricamente (perché le teorie non ci sono!) né osservativamente (perché è impossibile!) l'intera impostazione del problema non è scientifica.” [17]

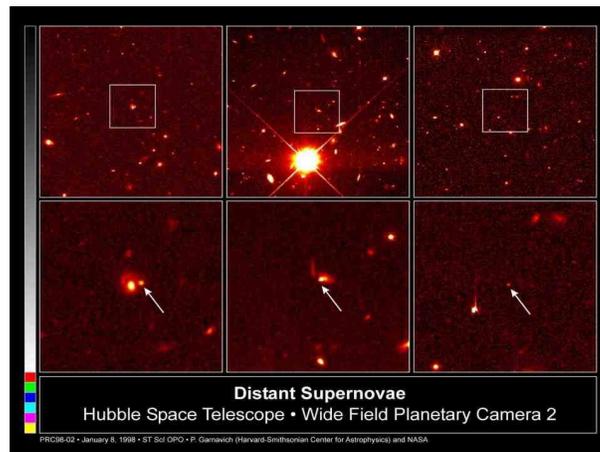
È importante notare che vi sono però anche prove sperimentali a favore della costante cosmologica, anche se fino ai primi anni 90 la risposta sarebbe stata negativa, a parte un aspetto a prima vista secondario. Alcune argomentazioni teoriche, basate sulla teoria dell'inflazione, portano a pensare che l'Universo sia piatto. Questo “pregiudizio teorico”, molto radicato nei cosmologi teorici, rischiava nei primi anni '90 di andare in crisi su tre fronti:

- l'età dell'Universo, per un possibile valore alto della costante di Hubble appariva in contrasto con l'età degli ammassi globulari (per  $\Omega_m = 1$  abbiamo  $t_0 \simeq 6.5h^{-1}$  Gyr)<sup>3</sup>;
- alcune misure dinamiche di  $\Omega_m$  davano un valore di 0.3;
- le misure di fluttuazioni nella distribuzione spaziale delle galassie erano in disaccordo con la misura delle fluttuazioni del fondo cosmico misurate dal satellite COBE.

---

<sup>3</sup>La costante  $h$  è stata introdotta dai cosmologici in modo da poter parametrizzare ed esprimerla come  $H_0 = h \times 100 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

Tutti questi problemi venivano risolti o assumendo un'Universo aperto oppure supponendo che l'Universo fosse effettivamente piatto, ma pervaso al 70% da un termine di costante cosmologica, qualsiasi cosa essa fosse. In questo caso  $t_0 \simeq 9h^{-1}$  Gyr,  $\Omega_m$  può essere minore di uno, e la predizione delle fluttuazioni torna. La proposta non era stata accolta con molta convinzione perché sembrava un tentativo artificiale di salvare un pregiudizio teorico. Per questo la costante cosmologica sembrò dunque una delle più grandi sciocchezze mai inventate: introdotta da Einstein per salvare il suo pregiudizio estetico, era stata accantonata alla scoperta dell'espansione dell'Universo. Reintrodotta dai cosmologi-particellari come termine di energia di vuoto, risultava in disaccordo con il limite osservativo per 120 ordini di grandezza, a meno di non metterla a zero per motivi ignoti o di appellarsi ad argomenti incerti basati sul principio antropico. Infine, era stata reintrodotta con valori ad-hoc sostanzialmente per salvare il pregiudizio teorico sulla piatezza dell'Universo, che appariva in contrasto con l'evidenza osservativa. Molte persone rimasero sorprese quando si dimostrò, nel 1998, che, al giorno d'oggi, il  $\simeq 70\%$  della massa-energia dell'Universo è sotto forma di costante cosmologica!



*Figura 2.5: Osservazione di supernovae lontane effettuate dal telescopio spaziale Hubble.[15]*

La dimostrazione venne dal diagramma di Hubble delle supernove di tipo Ia lontane, vedi figura 2.5, osservate da due gruppi indipendenti.

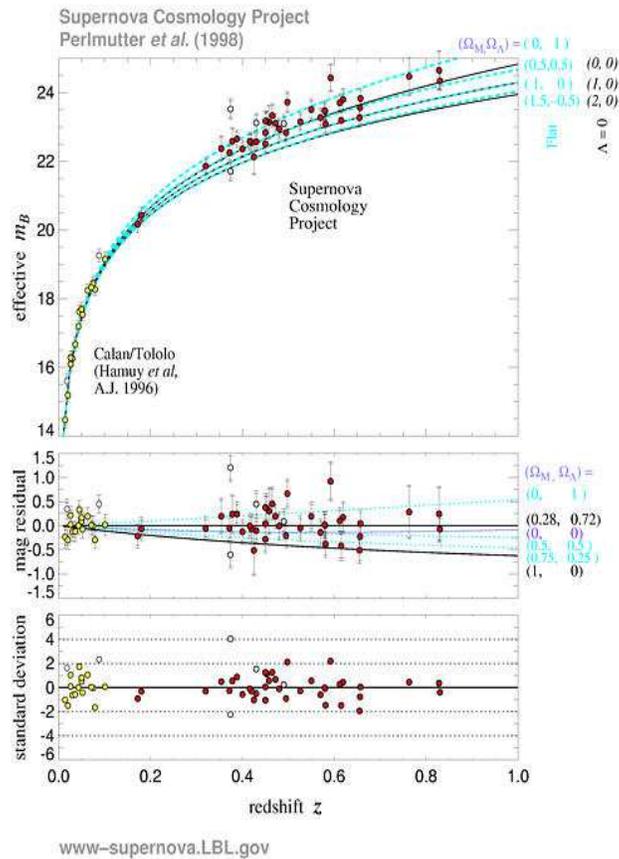


Figura 2.6: Diagramma di Hubble per le supernovae lontane.[15]

Questo è mostrato nella figura 2.6 : le supernove hanno magnitudini superiori a quelle che ci si aspetta in un universo con  $\Omega_m = 1$ . La differenza con la curva relativa ad  $\Omega_m = 1$  ammonta in termini di luminosità a circa mezza magnitudine. Questo vuol dire che le supernove sono più lontane di quanto ci si aspetti, e che quindi l'Universo si è espanso di più di quanto faccia per  $\Omega_m = 1$ . Siccome l'attrazione gravitazionale della materia è responsabile per il rallentamento dell'espansione di Hubble, questo vuol dire che  $\Omega_m < 1$ . Ma perfino un universo vuoto ( $\Omega_m = 0$ ) non riesce a riprodurre la minore luminosità apparente delle supernove. Questo vuol dire che l'espansione dell'universo è accelerata; in altri termini il

parametro di decelerazione  $q^4$  è negativo. Per avere un'espansione accelerata è però necessaria una sorgente di “antigravità”; ovvero un termine di costante cosmologica.

Una possibile spiegazione alternativa potrebbe essere data da un diverso comportamento delle supernove di tipo Ia lontane, o dalla presenza di polvere intergalattica, che fa apparire la luminosità apparente delle supernove più debole di quanto sia veramente; ma la scoperta di SNe a  $z > 1^5$  porta ad escludere questa possibilità, vedi figura 2.6. Inoltre, la presenza di un termine di costante cosmologica viene oggi confermata da analisi dettagliate delle fluttuazioni del fondo cosmico nelle microonde (vedi dopo) e della struttura a grande scala delle galassie. A quanto pare, viviamo in un Universo che ha appena iniziato una fase di espansione accelerata, e per il quale  $\Omega_m \simeq 0.3$  e  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ .

Questa scoperta ha dato un nuovo impulso alla ricerca teorica sulla natura della costante cosmologica. L'alternativa più in voga in questo momento è la cosiddetta quintessenza: la maggiorparte dell'energia dell'universo sarebbe immagazzinata in un campo quantistico scalare, il quale non è in una configurazione di equilibrio ma evolve lentamente verso l'equilibrio. In queste condizioni il campo non può oscillare, dando così origine a particelle osservabili. Questo campo di ricerca è in piena espansione, e potrà dare più di una sorpresa nei prossimi anni.

## 2.3 L'universo in espansione: la costante di Hubble

La costante di Hubble  $H_0$ , è uno dei parametri più importanti nell'ambito della cosmologia moderna. Questo parametro, espresso in chilometri per secondo per megaparsec (questo significa che per ciascun megaparsec di distanza, la distanza di un oggetto aumenta di una certa quantità) ci indica la velocità di espansione dell'universo a partire dal Big Bang fino ai giorni nostri e permette di stimare:

---

<sup>4</sup> $q_0 = -\frac{\ddot{a}a}{(\dot{a})^2}$  è chiamato parametro di decelerazione e misura l'accelerazione o il rallentamento dell'espansione dell'Universo.

<sup>5</sup> $z$  è il parametro di redshift ed è definito come  $1 + z \equiv \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}$ .

- Le dimensioni dell'Universo, ossia la distanza dell'orizzonte<sup>6</sup>, mediante quella che viene chiamata distanza di Hubble

$$d_H = cH_0^{-1}$$

e da cui si può ricavare la relazione tra la distanza e il *redshift* delle galassie  $d = cH_0^{-1}z$ , dove  $d$  è la distanza.

- L'età dell'universo che oggi è stimata a  $t_0 = 1.2 \cdot 10^{10}$  anni ( $t_0 = H_0^{-1}$ ), che corrisponde al suo inverso,

$$t_0 = H_0 f(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$$

dove  $f(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  tiene conto dell'accelerazione o della decelerazione dell'espansione dell'universo.

- Calcolare la densità critica (argomento che svilupperemo nel prossimo capitolo)

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Il valore presente della costante di Hubble si ottiene da una semplice relazione, scoperta nel 1929 da Edwin Hubble: la **legge di Hubble**

$$H_0 = \frac{v}{d}. \quad (2.3)$$

Mediante questa legge, valida soltanto per oggetti con un debole redshift ( $z \leq 0.1$ ), è possibile mettere in relazione velocità di allontanamento  $v$  di una galassia e la sua distanza  $d$  dalla Terra.

Hubble scoprì che esisteva una relazione lineare tra la distanza delle galassie, calcolata mediante delle stelle cefeidi, e la loro velocità, calcolata tramite lo spostamento verso il rosso che risultava dall'osservazione delle loro linee spettrali, interpretata come velocità di allontanamento grazie alla legge dell'effetto Doppler. La scoperta di questa legge fornì, inoltre,

---

<sup>6</sup>Quando si parla di orizzonte si indica una linea fittizia che divida l'universo visibile da quello invisibile. Questo significa che qualsiasi oggetto che abbia emesso una radiazione e che si trovi oltre questa linea non può essere visto in quanto la radiazione non riesce ad arrivare sino a noi.

dei valori numerici che rappresentavano l'espansione dell'Universo. È importante accorgersi che, anche se con questa legge si ha l'impressione che la Terra sia il centro dell'Universo. Si tratta, infatti, di un'idea completamente sbagliata, in quanto non esiste un vero e proprio centro. Pensiamo ai punti disegnati su un palloncino che viene gonfiato; essi si allontanano l'uno dall'altro con velocità proporzionale alla loro distanza, ogni punto può essere considerato come il centro dell'espansione. Allo stesso modo, noi non siamo al centro dell'espansione dell'Universo, ma in un suo punto qualsiasi. Un altro osservatore, posto in un punto qualsiasi su un'altra galassia, vedrebbe esattamente le stesse cose che vediamo noi.

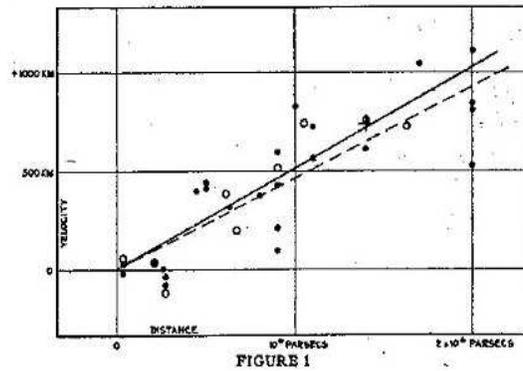


Figura 2.7: Relazione tra velocità di allontanamento e distanza delle galassie rappresentata graficamente da Edwin Hubble. Questa rappresentazione permise ad Hubble di enunciare quella che oggi è nota come la legge di Hubble.[18]

Ottenere il valore presente di  $H_0$  non è però cosa da poco; infatti se applichiamo la legge di Hubble a oggetti vicini è semplice trovare la distanza degli oggetti osservati ma otteniamo valori delle velocità molto incerti perché oltre all'espansione dell'universo bisogna anche tenere conto dell'attrazione gravitazionale tra gli oggetti e di altri effetti che ne modificano la velocità. Se invece applichiamo questa legge a oggetti relativamente lontani, ma per i quali è ancora valido il criterio  $z \leq 0.1$ , è facile calcolare la velocità della galassia attraverso osservazioni spettroscopiche che ci forniscono dati sul redshift cosmologico (che spiegheremo più dettagliatamente nel capitolo 4) di ogni una e dal quale è possibile

ricavare la velocità dalla relazione

$$z = \frac{v}{c} \quad (2.4)$$

ma è molto difficile calcolare la distanza degli oggetti osservati. A questo scopo gli astronomi hanno creato **la scala delle distanze cosmiche** che ci permette di calcolare la distanza di oggetti distanti anche centinaia di migliaia di parsec dalla Terra.

Per calcolare la distanza di oggetti lontani, abbiamo diverse possibilità, ma i metodi maggiormente utilizzati sono le tecniche geometriche e l'utilizzo di **candele standard o campione**. Un buon esempio che mostra il funzionamento della scala delle distanze è cercare di calcolare la distanza della nube di magellano (galassia la cui distanza risulta essere necessaria per poter poi misurare le distanze delle variabili cefeidi e delle super novae di tipo Ia).

Per le stelle vicine, distanti all'incirca 200 pc dalla Terra, si utilizza il metodo della **parallasse trigonometrica** che oggi, grazie alla grande precisione del telescopio Hipparcos, ci permette di conoscere la distanza di circa  $10^5$  stelle in un raggio di 200 pc.

### 2.3.1 La parallasse trigonometrica

La parallasse trigonometrica è un metodo di triangolazione che utilizza l'orbita terrestre come linea di base (in questo modo otteniamo una base sufficientemente lunga  $3 \cdot 10^8$  m, ossia 2 unità astronomiche (2AU), che ci permette di ottenere un risultato relativamente preciso; infatti maggiore è la lunghezza della base maggiore è la precisione della distanza misurata) per calcolare la distanza delle stelle vicine, vedi figura 2.8. La posizione angolare della stella, osservata da due punti dell'orbita terrestre con sei mesi di intervallo, fornisce la misura degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  dai quali è possibile ricavare la parallasse  $p$  dalla relazione

$$p = \frac{\pi - (\alpha + \beta)}{2}.$$

La parallasse di una stella, misurata in secondi d'arco, ha sempre dei valori molto piccoli; il seno coincide dunque con la parallasse stessa misurata in radianti; la distanza di una stella è quindi

$$\sin p \simeq p = \frac{\text{AU}}{d} \Rightarrow d = \frac{\text{AU}}{p}.$$

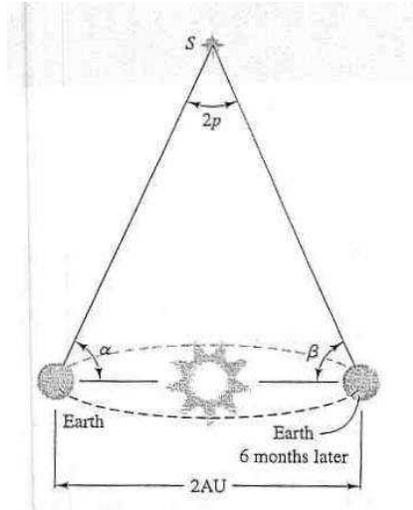


Figura 2.8: Misura della distanza di una stella mediante il sistema della parallasse (le proporzioni del disegno non sono reali, infatti per rappresentare la misura dalla parallasse di  $\alpha$ -centauri (la stella più vicina a noi dopo il sole che dista all'incirca  $7 \cdot 10^4$  AU dalla Terra) dovremmo posizionare il punto  $s$  a diversi chilometri di distanza dalla cima del foglio.[30]

### 2.3.2 Magnitudine, cefeidi e giganti rosse

Per le cefeidi e le giganti rosse, delle quali conosciamo la distanza, è possibile calcolare la luminosità conoscendo il flusso di fotoni  $\phi$ , ossia la quantità di energia ricevuta per secondo e per unità di superficie dall'oggetto osservato, grazie a

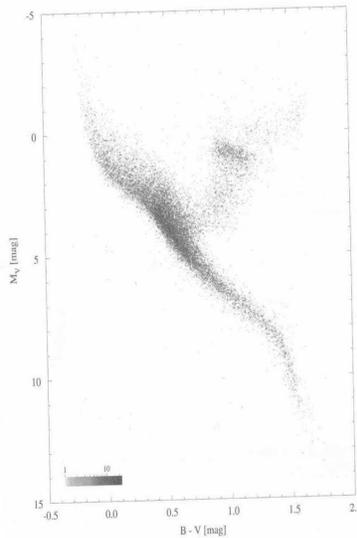
$$\phi = L/4\pi d^2. \quad (2.5)$$

La luminosità di queste stelle in funzione della temperatura della superficie stellare (espressa come la differenza tra la magnitudine della banda

di frequenza B con  $\lambda = 450$  nm e la banda di frequenza V<sup>7</sup> con  $\lambda = 550$  nm, chiamata indice di colore) fornisce il diagramma colore-luminosità, dove la luminosità è espressa in scala logaritmica inversa in funzione della *magnitudine assoluta*<sup>8</sup>  $M_V$ :

$$M_V = -2.5 \log L_v + \text{costante}$$

La correlazione fra colore e luminosità rende inevitabile la correlazione



*Figura 2.9: Diagramma luminosità-colore di stelle la cui parallasse è stata calcolata grazie al satellite Hipparcos. L'asse delle ordinate riporta l'indice di luminosità espressa in magnitudine assoluta, mentre l'ascissa indica l'indice di colore B-V (Le stelle con un valore di B-V alto sono stelle che hanno una temperatura superficiale bassa e sono dunque stelle piccole e poco luminose le stelle con un valore di B-V basso, invece, hanno una temperatura superficiale alta e sono stelle massicce e molto luminose.[18])*

tra colore e flusso  $\phi$ , infatti il flusso si può esprimere anch'esso come funzione logaritmica inversa in funzione della magnitudine relativa  $m$ :

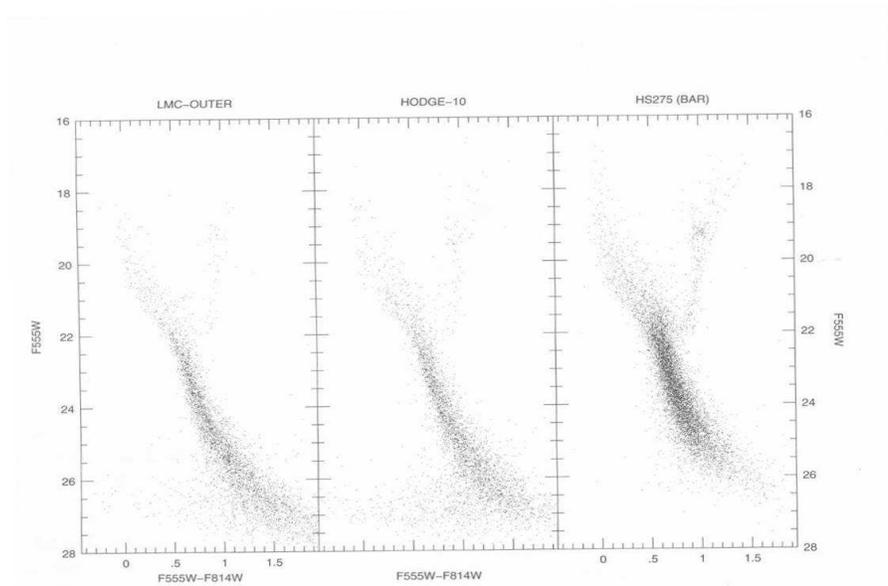
$$m = -2.5\phi + \text{costante}$$

La figura 2.9 rappresenta il diagramma colore-luminosità (luminosità osservata nella banda di lunghezza d'onda V) delle stelle appartenenti

<sup>7</sup>Ossia la lunghezza d'onda visibile

<sup>8</sup>Per un approfondimento sulla magnitudine vedi l'appendice A.

alla grande nuvola di magellano (LMC). Si può notare facilmente la similitudine presente tra questo diagramma e quello della figura 4.2 e osservando più attentamente noteremo che la sequenza principale e le giganti rosse sono posizionate all'incirca allo stesso posto nei due casi.



*Figura 2.10: Si tratta del diagramma colore-magnitudine per le stelle di tre regioni della grande nuvola di magellano (LMC) misurata dal telescopio spaziale Hubble. L'ordinata rappresenta la magnitudine apparente nella banda F555W:  $F555W = -2.5 \log(\phi_{555W}) + \text{costante}$  dove  $\phi_{555W}$  è il flusso nella banda 555W (la lunghezza d'onda media di questa banda vale 525 nm, valore simile a quella della banda V. Per questo è possibile metterli a confronto). L'ascissa rappresenta l'indice di colore (ossia la differenza di magnitudine tra la banda F555W e F814W). Comparando la magnitudine apparente delle stelle di LMC con la magnitudine assoluta nella via lattea è possibile stimare la distanza di LMC .[18]*

Questa similitudine ci permette di ipotizzare che la luminosità intrinseca delle stelle (ossia quello che espresso in magnitudine corrisponde alla magnitudine assoluta) sia uguale sia per le stelle vicine al nostro sistema solare e osservate da Hipparcos, sia per le stelle della grande nuvola di magellano. Questa ipotesi è facilmente verificabile in modo abbastanza semplice. Infatti le costanti che entrano in gioco nella definizione di magnitudine sono state scelte in modo che la magnitudine apparente sia

uguale alla magnitudine assoluta ad una distanza di 10pc:

$$m_V = M_V + 5 \log(d/10\text{pc}) + A$$

Grazie a questa uguaglianza è possibile sfruttare  $\phi_V = L_V/4\pi d^2$  per calcolare la distanza della grande nuvola di magellano. Se utilizziamo la magnitudine delle giganti rosse otteniamo:

$$d_{LMC} \simeq 10\text{pc} \times 10^{0.2(19.25-0.75)} \simeq 50\text{Kpc}$$

Questo risultato ha un margine di errore del 10%.

Le tecniche tradizionali che permettono di calcolare le distanze, sono dunque una variante del calcolo effettuato sopra per calcolare la distanza di LMC. È però importante sapere che le giganti rosse possono essere utilizzate soltanto per distanze maggiori o uguali ad 1 Mpc, più in là infatti la loro luminosità è troppo debole e non sono più visibili. A delle distanze che possono raggiungere i 50 Mpc si utilizza un altro tipo di stella: *le variabili cefeidi*. Questo tipo di stelle, molto giovani e molto luminose, possiede una magnitudine assoluta di circa  $-4$  (questo significa che sono 100 volte più brillanti delle giganti rosse utilizzate per determinare la distanza di LMC e sono dunque visibili a distanze maggiori), sono delle stelle pulsanti, ossia la loro luminosità varia nel tempo con un periodo compreso tra 2 e 40 giorni. Grazie ad Enrietta Swann Leavitt, nel 1912 si scoprì che la luminosità delle variabili cefeidi è una funzione del periodo di pulsazione:

$$L_v = n - m \log P + q(B - V) \quad (2.6)$$

dove  $P$  è il periodo  $n, m, q$  sono costanti e  $B - V$  è l'indice di colore. La magnitudine assoluta delle variabili cefeidi si può calcolare dal numero limitato di cefeidi osservate da Hipparcos e per le quali si conosce la parallasse, oppure dalle cefeidi presenti nella grande nuvola di magellano. È chiaro che se vengono usate le cefeidi di LMC sarà necessario determinarne la distanza mediante altri sistemi che non utilizzino le cefeidi, per esempio le giganti rosse utilizzate nell'esempio discusso sopra.

Gli unici oggetti sufficientemente lontani per permettere di determinare  $H_0$  sono però le supernova di tipo Ia, che hanno una luminosità massima uniforme (la luminosità di ogni supernovae nel suo momento di massima luminosità è uguale per qualsiasi supernovae) in questo modo possono essere utilizzate in modo efficace nella scala delle distanze per determinare la distanza delle galassie nel quale si trovano. Un altro metodo per calcolare la distanza di queste galassie è calcolarne la distanza attraverso leggi che mettono in relazione la luminosità e la dispersione di velocità, come la relazione di **Tully-Fisher** per le galassie a spirale. È importante sapere che entrambi i metodi (supernovae Ia e relazione di Tully-Fisher) devono essere calibrate attraverso le misure effettuate con le variabili cefeidi.

Il valore della costante di Hubble che risulta da queste misurazioni è per la supernovae Ia

$$H_0 = 68 \pm 2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

e per la relazione di Tully-Fisher

$$H_0 = 71 \pm 4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

### 2.3.3 Metodi fisici per ricavare la costante di Hubble

Fino qui sono stati elencati i metodi astrofisici, che si basano cioè sulla scala delle distanze, che permettono di determinare le distanze galattiche. Riassumiamoli brevemente:

- Dalla paralasse possiamo ricavare la distanza  $d$  delle stelle a noi relativamente vicine, e in seguito è poi possibile ricavare  $L$ , conosciti il flusso e la distanza.
- Ora sapendo che la luminosità intrinseca propria ad un determinato gruppo di stelle è sempre uguale, possiamo ricavare la distanza  $d$  da (2.5) per le stelle per le quali la paralasse non è più utilizzabile.

- Conoscendo la distanza  $d$  e la velocità di allontanamento  $v$  si ricava  $H_0$ .

Esistono però tre altri metodi detti “fisici” che permettono di evitare l'utilizzo della scala delle distanze (non sempre molto precisa).

- Il primo è il metodo della **fotosfera in espansione** (EPM) applicato alle supernovae di tipo II: dopo l'esplosione la superficie (fotosfera) della supernovae si dilata con una velocità  $v \simeq 10^{-2}c$ , la velocità può essere calcolata dallo spostamento Doppler delle linee dello spettro della supernovae. Conoscendo il tempo  $t_i$  dell'esplosione della supernovae è possibile calcolare il diametro della fotosfera  $D = 2v(t - t_i)$ .

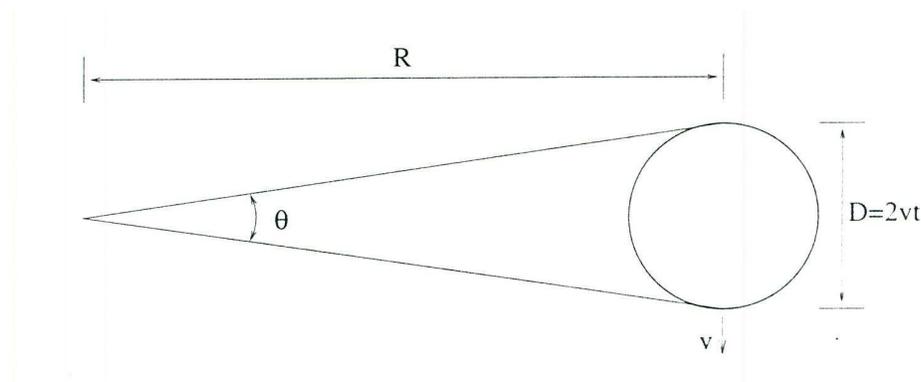


Figura 2.11: Questo diagramma rappresenta schematicamente la fotosfera di una supernovae in espansione ad una velocità  $v$ . La velocità può essere dedotta dalla posizione e dalla forma delle linee spettrali. Conoscendo il momento dell'esplosione della supernovae  $t_{exp}$  si può dedurre il diametro  $D = 2v(t - t_{exp})$ . Stimando il valore dell'angolo  $\theta$  grazie alla legge di Stefan Boltzma è possibile, in seguito, stimare la distanza  $R$ . [18]

Conoscendo l'angolo  $\theta$  è possibile calcolare direttamente la distanza della stella  $d = 2v(t - t_i)/\theta$ . per le stelle extragalattiche l'angolo  $\theta$  è troppo piccola per essere determinata direttamente ma lo si può ricavare dal flusso di fotoni emesso dalla stella mediante la legge di Stefan-Boltzman:

$$\Delta\theta = \frac{D}{d} = 2\left(\frac{\phi}{\sigma T_s^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

modificata in modo appropriato tenendo conto che la fotosfera non si comporta esattamente come un corpo nero. Il risultato ottenuto con questo metodo fornisce un valore per  $H_0$ :

$$H_0 = 73 \pm 15 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}.$$

- Il secondo metodo utilizza lo sfasamento temporale tra la stessa immagine di un quasar e fornisce un valore

$$H_0 = 60 \pm 20 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$$

- Infine, si sfrutta l'effetto Sunyaev-Zel'dovich e si ottiene

$$H_0 = 54 \pm 14 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}.$$

La media di tutti i valori della costante di Hubble permette di stimare il valore odierno di  $H_0$  utilizzato oggi ha[18]

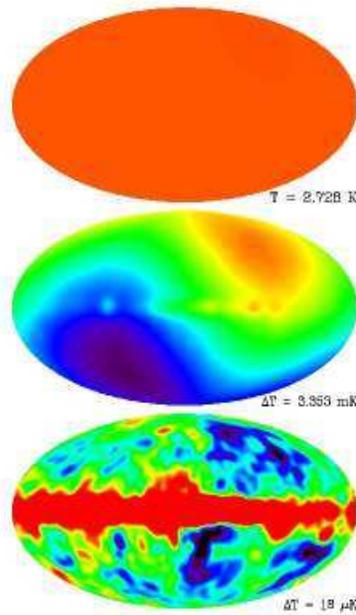
$$H_0 = \mathbf{72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}.$$

## 2.4 Isotropia e omogeneità

Osservando la distribuzione di materia e di radiazione, si è potuto notare che il nostro universo è isotropo e omogeneo, ossia è uguale in qualsiasi *direzione* e in qualsiasi *punto* lo si osservi, sia per quanto riguarda la radiazione sia per quanto riguarda la materia.

L'evidenza dell'isotropia dell'universo è data dalle osservazioni e dallo studio della temperatura del CMB (radiazione cosmica di fondo o radiazione a 3 k). Misurazioni compiute dal satellite COBE (*Cosmic Background Explorer*) con diversi gradi di precisione (kelvin, millikelvin e microkelvin) hanno permesso di creare delle mappe che mostrano chiaramente l'isotropia dell'universo, vedi figura 2.12.

È interessante notare che con delle misurazioni con una precisione al kelvin si ottiene la rappresentazione di un universo perfettamente isotropo, ma aumentando la precisione delle misurazioni al millikelvin e al microkelvin, appaiono delle anisotropie. Queste anisotropie sono dovute allo spostamento Doppler del nostro sistema solare e alle radiazioni emesse dalla nostra galassia.



*Figura 2.12: Temperature del CMB registrate dal satellite COBE, prova dell'isotropia dell'universo. [22]*

Lo stesso risultato (ossia l'isotropia dell'universo) si ottiene creando una mappa che rappresenti la distribuzione delle galassie (materia) in una determinata regione dell'universo. La rappresentazione della distribuzione angolare delle galassie fornisce, infatti, un risultato molto simile al CMB, vedi figura 2.13.

Per quanto riguarda l'omogeneità dell'universo è importante sapere che l'isotropia dell'universo non implica direttamente la sua omogeneità.

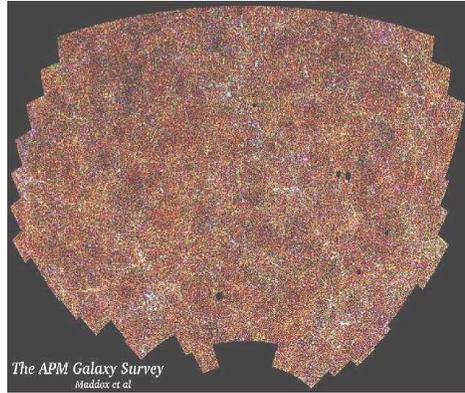


Figura 2.13: Distribuzione angolare delle galassie (materia) secondo l'APM survey.[21]

Questa proprietà dell'universo è però verificabile se si osserva la distribuzione su larga scala delle galassie al suo interno. Si noterà infatti che la loro distribuzione è uguale in tutte le parti dell'universo, esso è dunque omogeneo.

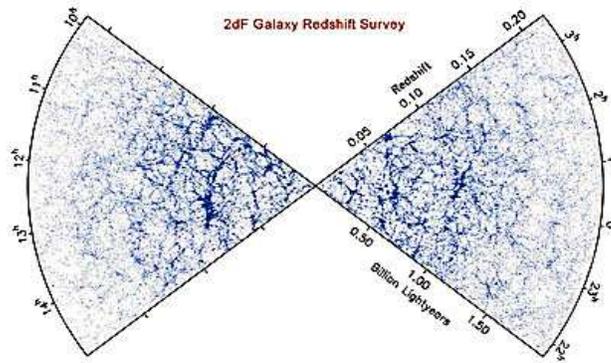


Figura 2.14: Distribuzione angolare delle galassie, che dimostra l'omogeneità dell'universo su larga scala.[23]

Come vedremo queste due proprietà sono fondamentali per poter costruire i modelli cosmologici nel capitolo 4.

# Capitolo 3

## Relatività e geometria

### 3.1 Lo spazio-tempo di Minkowski

Dal punto di vista formale *lo spazio-tempo di Minkowski* (o semplicemente spazio di Minkowski) è uno spazio vettoriale reale quadri-dimensionale munito di forma bilineare simmetrica<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (y, z) &\mapsto \eta(y, z) = -y_0 z_0 + \sum_{i=1}^3 y_i z_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

di matrice (rispetto alla base canonica)

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma bilineare  $\eta$  induce una forma quadratica  $q_\eta$  data dall'applicazione

$$q_\eta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad y \mapsto q_\eta(y) = \eta(y, y)$$

---

<sup>1</sup>Una forma bilineare simmetrica  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  su un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale  $V$  soddisfa

$$\begin{aligned} \beta : (\lambda x + y, z) &= \lambda \beta(x, z) + \beta(y, z) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \beta(y, x) &= \beta(x, y) & \forall x, y, z \in V. \end{aligned}$$

che applicata ad un vettore  $y$  fa corrispondere un numero reale. Abbiamo quindi

$$q_\eta(y) = {}^t y \eta y$$

e in termini di componenti possiamo scrivere

$$q_\eta(y) = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} y_\mu y_\nu = -(y_0)^2 + (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2.$$

Se applicata a  $\Delta x$  otteniamo che  $q_\eta(\Delta x)$  non è nient'altro che l'intervallo invariante  $(\Delta s)^2$ . A livello infinitesimale abbiamo

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

chiamato ***elemento di linea*** della geometria dello spazio tempo di Minkowski.

Per concludere lo spazio tempo di Minkowski è valido soltanto per descrivere sistemi fisici privi di gravità; nei sistemi nei quali la gravità assume valori significativi lo spazio-tempo diventa curvo e questo impone di passare dalla relatività speciale alla relatività generale, abbandonando il modello spazio-temporale di Minkowski.

Nonostante ciò è però possibile utilizzare lo spazio-tempo di Minkowski per descrivere lo spazio tangente ad ogni punto dello spazio-tempo curvo della relatività generale. Lo spazio-tempo in presenza di gravità è quindi ***localmente piatto***.

Quando la gravità è molto debole o addirittura inesistente lo spazio-tempo diventa piatto, in questo modo può essere descritto interamente da uno spazio di Minkowski e non solo localmente; per questo uno spazio di Minkowski viene definito come uno ***spazio-tempo piatto***.

## 3.2 La relatività generale e le equazioni di Einstein

Esistono due tipi di relatività:

- **La relatività ristretta**, che non comprende lo studio della forza gravitazionale e permette di studiare la fisica soltanto relativamente ad un sistema di riferimento inerziale (dunque non accelerato) rispetto all'osservatore.
- **La relatività generale**, che al contrario comprende lo studio della forza gravitazionale e permette di studiare la fisica anche relativamente ai sistemi di riferimento accelerati. In questo modo tutti i sistemi di riferimento diventano equivalenti per poter descrivere le leggi della natura.

Come noteremo in seguito la relatività generale è essenziale per poter spiegare la curvatura dello spazio-tempo, infatti una delle conseguenze più importanti di questa teoria è la relazione stretta che esiste tra la gravità e la geometria dello spazio-tempo: *la gravità appare come una proprietà geometrica dello spazio-tempo associata alla sua curvatura.*

La relatività generale si basa sul principio di equivalenza, che può essere espresso nel modo seguente: *localmente è impossibile riconoscere un movimento di caduta libera (accelerato) in un campo gravitazionale da un movimento uniformemente accelerato in assenza di un campo gravitazionale.* L'intervallo invariante può dunque essere espresso localmente come in relatività ristretta

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (3.2)$$

Questo significa che localmente gli effetti della gravità possono essere trascurati. In generale questo non è però possibile, diventa necessario tenere conto degli effetti della gravità, l'intervallo  $ds^2$  deve dunque essere espresso come

$$ds^2 = \sum g_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu \quad (3.3)$$

dove  $g_{\nu\mu}$  è in funzione della posizione e del tempo e determina la geometria dello spazio-tempo e quindi la sua curvatura, ossia la gravità. L'equazione (3.3) descrive la metrica dello spazio tempo, che nella relatività speciale è rappresentata dall'equazione (3.2) e  $g_{\nu\mu}$  è chiamato componente del tensore<sup>2</sup> metrico.

Il risultato finale degli studi sulla relatività generale effettuati da Einstein, che corrispondono all'equazione completa per descrivere il campo gravitazionale, portano ***all'equazione di Einstein*** o equazione del campo gravitazionale:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\nu\mu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\nu\mu} \quad (3.4)$$

dove  $R_{\nu\mu}$  è chiamato tensore di Ricci,  $R$  la curvatura scalare di Ricci,  $G$  la costante gravitazionale e  $T_{\nu\mu}$  il tensore energia quantità di moto, che rappresenta la materia presente nell'universo (dalla relatività ristretta sappiamo che  $E^* = Mc^2$ ) e le sue caratteristiche. È dunque possibile descrivere la geometria dello spazio-tempo attraverso  $T$ , ossia la materia. Questo significa che la geometria del nostro universo è strettamente legata alla quantità di materia contenuto in esso.

### 3.3 Curvatura e “embedding diagrams”

In questa sezione ci occupiamo di alcuni aspetti geometrici fondamentali per lo studio dei modelli cosmologici trattati nel capitolo 4; essi sono il concetto di curvatura e di “embedding”.

#### 3.3.1 La curvatura

Per cominciare è importante notare che si possono distinguere due tipi essenziali di curvature:

---

<sup>2</sup>I tensori possono essere rappresentati in termini di sistema di coordinate come vettori di scalari, in termini matematici come una matrice, ma sono definiti in modo tale da permettere la scrittura di equazioni indipendenti da qualsiasi sistema di coordinate scelto.

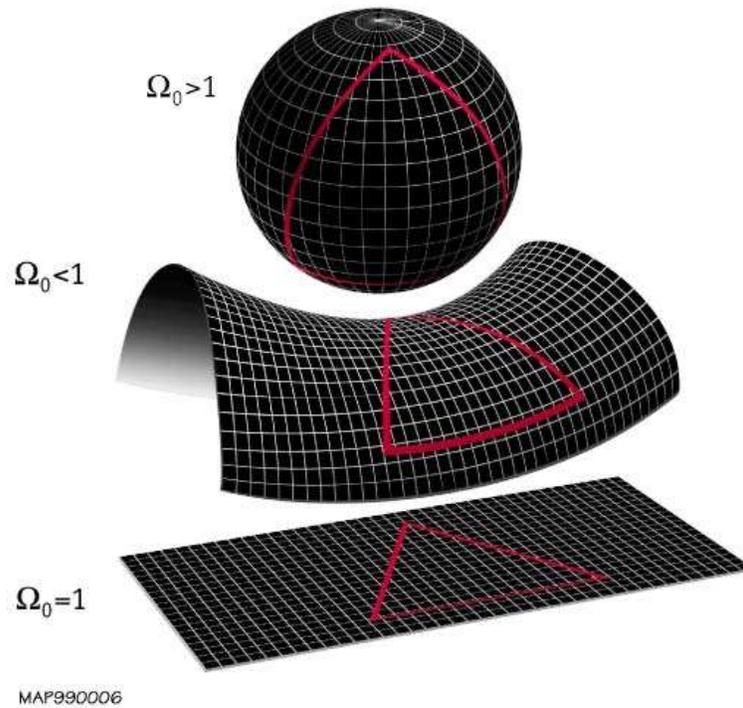


Figura 3.1: Rappresentazione delle tre possibili curvatures e di come appaiono gli angoli interni di un triangolo a seconda della curvatura intrinseca dell'oggetto studiato. Abbiamo  $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v$ . [27]

- **La curvatura estrinseca:** La curvatura estrinseca è legata al modo in cui la superficie è immersa in uno spazio di dimensioni maggiori rispetto all'oggetto studiato.
- **La curvatura intrinseca:** La curvatura intrinseca, invece, dipende dalla struttura stessa della superficie in questione. Si tratta della curvatura propria all'oggetto. Così, un essere il cui spazio è costituito da tale superficie e che quindi non ha percezione di ciò che sta all'esterno di essa, può facendo delle misure interne -per esempio misurando gli angoli interni di un triangolo- vedere di quanto il risultato si discosta da  $\pi$  per avere una misura della curvatura intrinseca del suo mondo, vedi figura 3.4. La curvatura intrinseca dipende dal tensore di curvatura di Riemann.

Vediamo ora quali sono gli elementi indispensabili che permettono di descrivere e studiare la curvatura di un oggetto.

In geometria differenziale l’elemento che studia la generalizzazione delle superfici è chiamato *varietà*. Dalla geometria analitica del piano, sappiamo che l’operazione fondamentale è il prodotto scalare, che permette di calcolare in particolare le distanze tra punti,

$$d(a,b) = \|\vec{x}_b - \vec{x}_a\| = \sqrt{(\vec{x}_b - \vec{x}_a) \cdot (\vec{x}_b - \vec{x}_a)}.$$

Anche in geometria differenziale esiste l’analogo del prodotto scalare; essa è chiamata matrice ed è data da una forma bilineare simmetrica  $g$  che definisce l’elemento di lunghezza

$$ds^2 = \sum_{\nu\mu=0}^3 g_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu.$$

Un esempio è  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e otteniamo lo spazio-tempo di Minkowski.

Il concetto di varietà è un concetto abbastanza generale definito con lo scopo di modellizzare “spazi a più dimensioni”, eventualmente curvi, che localmente possono essere rappresentati da uno spazio di Minkowski o euclideo, sono quindi spazi localmente piatti, ma che visti globalmente possono assumere le forme più svariate. Un semplice esempio di varietà è la superficie terrestre. Per noi infatti la Terra appare come una superficie piatta in quanto ne vediamo soltanto una piccola parte, in realtà però essa è sferica. Lo spazio e lo spazio-tempo sono esempi di varietà di dimensione 3 e rispettivamente 4.

In  $g_{\mu\nu}$  è contenuta tutta l’informazione sulla geometria delle varietà, in particolare da  $g_{\mu\nu}$  è possibile calcolare le curvatures mediante formule complesse che fanno intervenire le derivate prime e seconde di  $g_{\mu\nu}$ . L’oggetto nel quale è contenuta l’informazione sulla curvatura è chiamato  *tensore di curvatura di Riemann*   $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ . Nel caso di uno spazio euclideo o di Minkowski, ossia uno spazio senza curvatura, abbiamo  $R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$  questo oggetto possiede dunque tutte le proprietà necessarie alla descrizione della curvatura.

Analizzeremo ora il concetto di curvatura intrinseca per un classe particolare di varietà, quelle legate ai modelli cosmologici che tratteremo

in seguito. Prima di fare questo è però importante notare che l'ipotesi di isotropia e omogeneità implica che la curvatura dello spazio sia uguale in qualsiasi punto; questo significa che lo spazio è **una varietà di curvatura costante**.

Per classificare gli spazi tri-dimensionali che godono di questa proprietà si utilizza la curvatura scalare di Ricci (costante in ogni punto dello spazio). Si può infatti dimostrare che

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{12}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu})$$

Questo significa che possiamo classificare le varietà tridimensionali secondo il segno di  $R$ .

Ora se prendiamo in considerazione le possibili geometrie spaziali, compatibili con l'ipotesi di isotropia e omogeneità, abbiamo solo una delle tre seguenti possibilità per l'elemento di linea

$$d\sigma^2 = a^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\} \quad k \in \{+1, 0, -1\} \quad (3.5)$$

Si può dimostrare, vedi capitolo 4.1, che (3.5) si può anche scrivere, effettuando un cambiamento di variabili, come

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + S_k(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

Per questo elemento di linea la curvatura scalare di Ricci vale

$$R = 6 \frac{k}{a^2} \quad (3.6)$$

da cui risulta chiaro che

$$\text{sign}(R) = \text{sign}(k)$$

possiamo quindi classificare i tre modelli secondo il segno di  $R$  nel modo seguente:

- Se  $k = 0$  si ha  $R = 0$ . Si tratta del modello privo di curvatura.
- Se  $k = -1$  si ha  $R = -1$ . Si tratta del modello con curvatura negativa.
- Se  $k = +1$  si ha  $R = +1$ . Si tratta del modello con curvatura positiva.

### 3.3.2 Embedding e rappresentazione 2D

Cerchiamo ora di analizzare le proprietà geometriche date dall'elemento di linea

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad k \in \{+1, 0, -1\}$$

Per prima cosa dobbiamo introdurre delle coordinate cartesiane  $X^\alpha = (W, X, Y, Z)$  in uno spazio euclideo o pseudo euclideo (Minkowskiano) fittizio quadri-dimensionale<sup>3</sup>  $(\mathbb{R}^4, \delta_{\alpha\beta})$  o  $(\mathbb{R}^4, \eta_{\alpha\beta})$  con metrica  $\delta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$  o  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  e dimostrare che, con la scelta corretta dei parametri  $X^\alpha = (W, X, Y, Z)$  e della relazione tra loro, è possibile ricostruire l'elemento di linea  $d\sigma^2$ . La particolare relazione esistente tra  $(W, X, Y, Z)$  definisce quindi una superficie tridimensionale immersa (**embedding**) in  $\mathbb{R}^4$ .

Prima di analizzare singolarmente i tre casi è opportuno indicare che l'elemento di linea corrispondente alla metrica  $\delta_{\alpha\beta}$  in  $\mathbb{R}^4$  è dato da

$$dl^2 = \delta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta = dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (3.7)$$

e nel caso di  $\eta_{\alpha\beta}$

$$dl^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta = -dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (3.8)$$

---

<sup>3</sup>È importante non confonderlo con lo spazio quadridimensionale che rappresenta lo spazio tempo.

Per prima cosa analizzeremo il caso in cui  $k = 0$ ; abbiamo

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= a(t)^2 \{d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\} \\ &= a(t)^2 \{dx^2 + dy^2 + dz^2\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

In questo caso notiamo che l'elemento di linea corrisponde a quello della geometria euclidea; lo spazio può quindi esser interpretato come un iperpiano<sup>4</sup>. La rappresentazione di una superficie bidimensionale immersa (embedded) nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  è semplicemente un piano, vedi figura 3.2, ed il modello in questione è piatto.



Figura 3.2: Embedding 2D della geometria spaziale del modello FRW con  $k=0$ : il modello è detto piatto.

Il secondo caso che analizzeremo è quello in cui  $k = +1$ ; abbiamo

$$d\sigma^2 = a(t)^2 \{d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\}. \quad (3.10)$$

---

<sup>4</sup>Nello spazio tridimensionale euclideo un piano è un insieme di punti che soddisfa un'equazione lineare e separa i punti rimanenti dell'intero spazio in due semispazi. Una nozione corrispondente in uno spazio bidimensionale, come nel piano cartesiano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, è data da quella di retta, insieme che soddisfa un'equazione lineare e separa lo spazio in due semipiani. In uno spazio monodimensionale, ovvero in una retta si ha un punto che separa lo spazio in due semirette. Questa situazione si può riscontrare in uno spazio di 4 o più dimensioni e l'insieme lineare che separa i punti rimanenti in due insiemi viene detto iperpiano. Più formalmente, dato uno spazio di dimensione finita  $n$  è detto iperpiano un sottospazio di dimensione  $n - 1$ . [34]

Ponendo (generalizzando in coordinate sferiche)

$$\begin{aligned}
 W &= \cos \chi \\
 X &= \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\
 Y &= \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\
 Z &= \sin \chi \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

con  $0 \leq \chi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  si dimostra che

$$\delta_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \tag{3.12}$$

(3.2) descrive una sfera tridimensionale.

Si dimostra pure<sup>5</sup> che l’elemento di linea corrispondente alla superficie tridimensionale embedded in  $(\mathbb{R}^4, \delta_{\alpha\beta})$  secondo (3.12) corrisponde a (3.10) (ponendo  $a(t) = 1$ ).

Risolvendo secondo  $(\chi, \theta, \varphi)$  otteniamo:

$$\begin{aligned}
 dX^2 &= \cos \chi \sin \theta \cos \varphi d\chi + \sin \chi \cos \theta \cos \varphi d\theta - \sin \chi \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\
 dY^2 &= \cos^2 \chi \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\chi^2 + \sin^2 \chi \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2 \\
 dZ^2 &= \cos^2 \chi \cos^2 \theta d\chi^2 - \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\theta^2 \\
 dW^2 &= -\sin^2 \chi d\chi^2
 \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\delta_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2$$

in seguito

$$\delta_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

---

<sup>5</sup> Se  $M \subset C$  è una sottovarietà di dimensione  $m$  di una varietà  $N$  di dimensione  $n$  e  $g^M$  e  $g^N$  le rispettive metriche. Allora se  $f : M \rightarrow N$  è un’embedding di  $M$  in  $N$ , la metrica indotta da  $g^N$  su  $M$  via  $f$  è data da

$$g_{\mu\nu}^M(x) = g_{\alpha\beta}^N(f(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} x \in M$$

Nel caso considerato qui l’embedding è l’applicazione  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^4$  con  $f(\chi, \theta, \varphi) = (W, X, Y, Z)$  ed i calcoli sono semplici considerato che  $g^N$  è diagonale.

che corrisponde a  $d\sigma$  nel caso  $k = 1$

L'equazione (3.12) è la parametrizzazione di una sfera tridimensionale, fissando  $\theta = \pi/2$  otteniamo una sfera bidimensionale, vedi figura 3.3, ed il modello FRW in questione è detto *chiuso*.

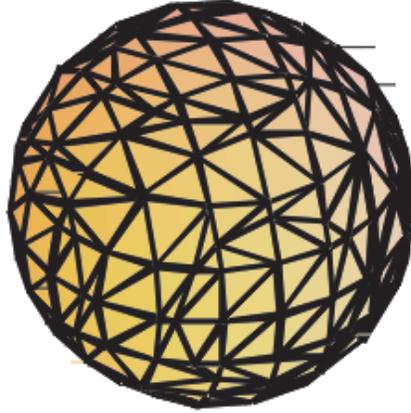


Figura 3.3: Embedding 2D della geometria spaziale del modello FRW con  $k=+1$ : il modello è detto chiuso.

L'ultimo caso che analizzeremo è quello in cui  $k = -1$ ; abbiamo:

$$d\sigma^2 = a(t)^2 \{d\chi^2 + \sinh^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2)\} \quad (3.13)$$

Ponendo

$$\begin{aligned} W &= \cosh \chi \\ X &= \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ Y &= \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ Z &= \sinh \chi \cos \theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

con  $0 \leq \chi \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  si dimostra che

$$\delta_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} = -W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -1 \quad (3.15)$$

Si dimostra pure che l'elemento di linea corrispondente alla superficie tridimensionale immerso (embedded) in  $(\mathbb{R}^4, \eta_{\alpha\beta})$  secondo (3.15) corrisponde a (3.13) (ponendo  $a(t) = 1$ )

L'equazione (3.15) è la parametrizzazione di una iperboloide tridimensionale, dal quale otteniamo un iperboloide, vedi figura 3.4, ed il modello FRW in questione è detto **aperto**, poiché l'iperbole è una superficie aperta<sup>6</sup>.

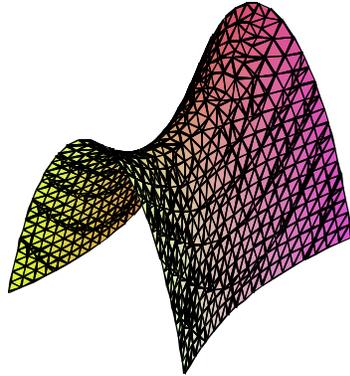


Figura 3.4: Embedding 2D della geometria spaziale del modello FRW con  $k=-1$ : il modello è detto aperto.

---

<sup>6</sup>In geometria un iperboloide è una quadrica, cioè un tipo di superficie in tre dimensioni, descritto da un'equazione della forma  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (iperboloide ad una falda) oppure  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$  (iperboloide a due falde)

# Capitolo 4

## I modelli cosmologici

### 4.1 Le possibili geometrie

Lo scopo dei modelli cosmologici è di descrivere dal punto di vista geometrico lo spazio-tempo, per fare questo è dunque necessario specificare la geometria tramite l'elemento di lunghezza  $ds^2$ . Ricordiamo che nella relatività ristretta abbiamo, in coordinate cartesiane,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Per ottenere uno spazio isotropo ed omogeneo, proprietà richieste dalle osservazioni dell'universo discusse nel capitolo 2, è necessario che la geometria sia sfericamente simmetrica in ogni punto dello spazio (isotropia) ed identica in ogni punto dello spazio (omogeneità). Per i possibili modelli cosmologici scriveremo quindi l'elemento di lunghezza per la *geometria dello spazio-tempo* come

$$ds^2 = -cdt^2 + d\sigma^2 \tag{4.1}$$

con  $d\sigma^2$  l'elemento di lunghezza che definisce la geometria dello spazio e che deve dunque rappresentare uno spazio isotropo ed omogeneo. La separazione della coordinata temporale dalla parte spaziale permette di vedere la geometria dello spazio tempo come  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$  abbiamo uno spazio tridimensionale  $\Sigma$  determinato.

Cominciamo dalla soluzione più semplice,  $k = 0$ , che ci permette di ottenere esattamente la metrica di uno spazio euclideo, che secondo le

osservazioni sembra anche essere la più probabile (si veda il capitolo 5), ossia quella che consiste a porre

$$d\sigma^2 = a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.2)$$

che è invariante per rotazione (isotropia) e per traslazione (omogeneità) dello spazio e dove  $a(t)$  è una funzione della coordinata temporale  $t$  chiamata **fattore di scala** che ci indica la “grandezza” della parte spaziale  $\Sigma$  dello spazio-tempo al tempo  $t$ . Questa geometria è chiamata **geometria di Robertson-Walker piatta** ed è uno dei tre modelli FRW (Friedman-Robertson-Walker) che sono ammissibili quali modelli cosmologici e per i quali il fattore di scala  $a(t)$  si deduce dalle equazioni di Einstein della relatività generale.

Osserviamo che matematicamente i tre possibili modelli si differenziano per il tipo di curvatura, che può essere positiva, negativa o nulla, in questo ultimo caso si parla di geometria piatta (RW).

La distribuzione delle galassie (e della radiazione) nei modelli FRW è considerata come un fluido in cui le galassie possono essere considerate come delle particelle localizzate in un punto  $(x,y,z)$  identico per ogni tempo  $t$ , infatti se le velocità delle galassie non fossero nulle si avrebbe una contraddizione con l’ipotesi di isotropia. Le coordinate  $(x,y,z)$  sono chiamate **coordinate comoventi**, esse non parametrizzano la posizione fisica delle galassie poiché con il cambiare del parametro temporale  $t$  quest’ultima è data da  $(a(t)x, a(t)y, a(t)z)$ . Per esempio se due galassie hanno una distanza in coordinate  $d_{coord} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$  allora la distanza fisica  $d(t)$  al tempo  $t$  è data da

$$d(t) = a(t)d_{coord}$$

via (4.2). In questo senso la geometria fissata da (4.2) rappresenta un Universo in espansione come suggerita dalle osservazioni cosmologiche di redshift.

Osserviamo che le coordinate  $(x,y,z)$  sono da interpretare come un

sistema di coordinate in cui le galassie sono immobili e il CMB è isotropo, esse definiscono il sistema di riposo dell'universo.

### Metrica di Friedman-Robertson-Walker

L'elemento di lunghezza per la geometria dello spazio tempo  $ds^2$ , scritto in coordinate sferiche, utilizzato per descrivere le proprietà geometriche del cosmo è chiamato metrica. In cosmologia viene utilizzata la metrica di Friedman-Robertson-Walker (o metrica FRW):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (4.3)$$

dove  $(r, \theta, \phi)$  sono coordinate sferiche, e  $r$  è stato scelto in modo che sia una variabile radiale comovente definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} r &= \sinh \chi & \text{se } k &= -1 \\ r &= \chi & \text{se } k &= 0 \\ r &= \sin \chi & \text{se } k &= 1 \end{aligned}$$

$a(t)$  è il fattore di scala dell'universo ad un certo tempo  $t$ ,  $k$  è **il parametro di curvatura** (rappresenta la curvatura spaziale) e, come abbiamo visto può assumere tre valori,  $-1, 0, +1$ , che corrispondono alle tre possibili geometrie che può assumere l'universo. È anche possibile riscrivere l'elemento  $ds^2$  effettuando un cambiamento di variabili e scriverlo dunque come:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + S_k(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (4.4)$$

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases}$$

Per fare questo è sufficiente introdurre la nuova variabile  $\chi$  nel modo seguente

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - k^2 r^2}}$$

che per integrazione dà  $r = S_k(\chi)$ , infatti

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - k^2 r^2}} = \left\{ \begin{array}{ll} \arcsin r & k = +1 \\ r & k = 0 \\ \operatorname{arcsinh} r & k = -1 \end{array} \right\}$$

che permette un'interpretazione geometrico/fisica più chiara, come si è visto nella sezione 3.3.2.

## 4.2 Il redshift cosmologico

Consideriamo un fotone emesso da una galassia  $\mathcal{G}_e$  che faremo coincidere con  $r = 0$  e ricevuto su una galassia  $\mathcal{G}_r$  ad una distanza coordinata e non fisica,  $r = R$ . Se  $\nu_e$  corrisponde alla frequenza del fotone emesso al tempo  $t_e$  dalla galassia  $\mathcal{G}_e$  e ricevuto al tempo  $t_r$  dalla galassia  $\mathcal{G}_r$  otterremo che la frequenza  $\nu_r$  del fotone che ha viaggiato nello spazio tempo della geometria spaziale

$$d\sigma^2 = a(t)^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (4.5)$$

La luce si propaga lungo una curva radiale, ossia con  $\theta$  e  $\phi$  costanti, e caratterizzata da  $ds^2 = 0$ . Otteniamo quindi

$$0 = -dt^2 + a^2(t)dr^2$$

integrando otteniamo quindi

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^R dr = R \quad (4.6)$$

ossia una relazione che lega i tempi di emissione e ricezione alla distanza-coordinata  $R$  dei due eventi.

Se consideriamo l'emissione di due fotoni successivi separati da  $\delta t_e$ , vale a dire con una frequenza  $\nu_e = \frac{1}{\delta t_e}$  e visto che gli impulsi percorrono tutti la stessa distanza-coordinata (la coordinata  $r = R$  è costante) si ha

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_r + \delta t_r} \frac{dt}{a(t)} = R = \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)}$$

e supponendo  $\delta t_e$  e  $\delta t_r$  piccolissimi possiamo scrivere

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_r + \delta t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} + \frac{\delta t_r}{a(t_r)} - \frac{\delta t_e}{a(t_e)}$$

da cui  $\frac{\delta t_r}{a(t_r)} - \frac{\delta t_e}{a(t_e)} = 0$  e quindi

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_r)}$$

In un universo in espansione  $a(t)$  cresce con il tempo, quindi,  $\frac{a(t_e)}{a(t_r)} < 1$  da cui possiamo dedurre

$$\nu_r > \nu_e$$

questo determina uno spostamento delle frequenze osservate, noto come **redshift cosmologico**. È importante osservare che il redshift cosmologico non è dovuto al moto delle galassie (sorgente) rispetto alla Terra (ricevitore) ma all'espansione dell'Universo; infatti si vede bene il legame esistente fra la frequenza e il fattore di scala da cui dipende direttamente il redshift cosmologico.

Si introduce il **parametro di redshift**  $z$  definito come

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}.$$

Se considerano delle galassie vicine al nostro sistema si ottiene un effetto molto simile all'effetto Doppler, ossia

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{c \pm v_r}{c \pm (-v_r)}} = \frac{v}{c} \ll 1$$

e si introduce la velocità  $v = cz$ . Considerando questo caso, al momento della ricezione la distanza fisica  $d$  tra le galassie è

$$d(t_r) = a(t_r)R$$

Sappiamo che, in generale  $v(t) = \dot{d}(t) = \dot{a}(t)R$  e quindi

$$v = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d \quad (4.7)$$

e da cui otteniamo dunque, per un segnale ricevuto al tempo  $t_r$ ,

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda} = \frac{\dot{a}(t_r)}{a(t_r)} \frac{d}{c}. \quad (4.8)$$

Se consideriamo come tempo di ricezione il tempo presente  $t_0$  allora dalle equazioni (4.8) e (4.7) otteniamo la **legge di Hubble**

$$v = H_0 d$$

dove

$$H_0 = H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad (4.9)$$

### 4.3 Il primo principio della termodinamica per i modelli FRW

Tutte le quantità interessanti per descrivere l'evoluzione di un universo in espansione si possono derivare dal fattore di scala che appare nei modelli FRW discussi nei paragrafi precedenti e vista l'ipotesi di omogeneità dipendono unicamente dal parametro  $t$ . L'ipotesi di isotropia e omogeneità riduce le variabili associate al contenuto dell'Universo interessanti da studiare a due, ossia la pressione  $p$  e la densità di energia  $\rho$ . Grazie al primo principio della termodinamica è possibile legare tra di loro la pressione, la densità di energia e il fattore di scala. Se consideriamo un volume fisico  $V$  che contiene un'energia  $E = \rho V$ , dove  $\rho$  è la

densità di energia, otteniamo allora

$$dE = -pdV \quad (4.10)$$

perchè l'unico lavoro compatibile con l'ipotesi di isotropia è quello di compressione uniforme  $\delta W = -pdV$ ; il termine  $\delta Q$  (calore) deve invece essere nullo, infatti per l'ipotesi di omogeneità non vi devono essere differenze di temperatura per ogni  $t$  fissato. Il volume  $V$  contiene un numero fissato di particelle dato  $e$ , ad esso, corrisponde un determinato  $V_{coord}$  che rimane costante, infatti le coordinate comoventi delle particelle costituenti il fluido cosmico non cambiano. Il volume fisico  $V$  è legato a  $V_{coord}$  da

$$V(t) = a^3(t)V_{coord}$$

Dalla relazione (4.10) abbiamo

$$\frac{d(\rho a^3 V_{coord})}{dt} = -p \frac{da^3 V_{coord}}{dt}$$

Otteniamo dunque **il primo principio della termodinamica per la cosmologia**

$$\frac{d\rho a^3}{dt} = -p \frac{da^3}{dt} \quad (4.11)$$

Applicando il primo principio della termodinamica alle diverse componenti dell'universo (materia, radiazione e vuoto), possiamo ricavarne le rispettive pressioni e densità, in funzione del parametro di scala  $a(t)$ .

## Materia

La materia è definita come un fluido, di pressione trascurabile, composto da galassie; possiamo dunque porre  $p_m = 0$  ottenendo

$$\frac{d\rho_m a^3}{dt} = 0$$

da cui

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 \quad (4.12)$$

dove  $t_0$  è il tempo presente.

## Radiazione

Abbiamo visto che la radiazione cosmica di fondo si comporta come un corpo nero, e sapendo che per un corpo nero alla temperatura  $T$  la temperatura e la pressione sono legate da

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r$$

dove

$$\rho_r = g \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3} \quad (4.13)$$

e  $g = 2$  per i fotoni, ma globalmente  $g = 3.4$ . Utilizzando la relazione tra pressione e densità per il corpo nero si ottiene

$$\rho_r = \rho_r(t_0) \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 \quad (4.14)$$

È interessante notare che dalla definizione di densità della radiazione (equazione 4.13) è possibile ricavare un'informazione sull'evoluzione della temperatura del CMB in funzione del fattore di scala

$$T(t) = T(t_0) \frac{a(t_0)}{a(t)}$$

osserviamo quindi che l'espansione dell'universo provoca una diminuzione della temperatura del CMB.

Inoltre paragonando  $\rho_m$  e  $\rho_r$  si può stabilire se ad un determinato tempo  $t$  l'universo è dominato dalla materia oppure dalla radiazione.

## Vuoto

Non vi sono ancora dati certi, ma alcune osservazioni, come visto nel capitolo precedente, sembrano indicare che  $\rho_v \geq 0$  è costante nel tempo, da cui possiamo ricavare

$$p_v = -\rho_v$$

e questo porta ad una pressione negativa, il cui lavoro corrisponde ad una espansione piuttosto che ad una compressione (vedi l'effetto Casimir).

## 4.4 L'equazione di Friedman

L'equazione di Friedman

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}a^2 = -k$$

che è derivata dall'equazione di Einstein, permette di studiare la dinamica dell'universo, ossia la sua evoluzione. Da questa equazione è infatti possibile dedurre l'accelerazione o decelerazione dell'Universo, che corrisponde a  $\ddot{a}(t)$ , e il fattore di scala che ne determina l'espansione in funzione del tempo. Si può inoltre notare che tutta la dinamica dell'universo è strettamente legata alla densità giocano un ruolo cruciale nella dinamica dell'universo. Vedremo ora come è possibile derivare questa equazione utilizzando la fisica newtoniana ottenendo un risultato molto vicino a quello ottenuto utilizzando la relatività generale e le equazioni di Einstein.

### Derivazione con metodo newtoniano

Sia  $d$  la distanza media fra le galassie (di massa  $m$ ) nell'Universo,  $R$  il raggio di una regione sferica  $S$  dell'Universo. Ora consideriamo una galassia  $\mathcal{G}$  situata sul bordo di  $S$ . Secondo la legge della gravitazione newtoniana la sua energia potenziale  $E_{pot}$  è dovuta alle sue interazioni con le galassie presenti all'interno della regione  $S$  e vale

$$E_{pot} = -\frac{GMm}{R} = -\frac{4\pi G\rho}{3}R^2m$$

dove  $M$  corrisponde alla massa contenuta in  $S$  e  $\rho$  è la densità di materia (supposta costante). Essendo la sfera  $S$  in espansione la galassia possiede un'energia cinetica che vale

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{R}^2.$$

Otteniamo allora dalla relazione  $E = E_{cin} + E_{pot}$

$$E = \frac{m}{2} \left( -\frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \dot{R}^2 \right)$$

da cui

$$\frac{2E}{m} = \left( -\frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \dot{R}^2 \right).$$

Essendo il sistema isolato, l'energia totale è costante e dunque anche il rapporto  $\frac{2E}{m}$ . Possiamo dunque porre  $\frac{2E}{m} \equiv -k$  ottenendo

$$\frac{8\pi G \rho}{3} = \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}.$$

Se identifichiamo  $R = a$  si ottiene *l'equazione di Friedman*.

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho}{3} a^2 = -k$$

È importante sottolineare che l'analisi svolta sopra è valida soltanto se  $R$  soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{aligned} R &\gg d \simeq 1 \text{ Mpc} \\ R &\ll \frac{c}{H_0} \simeq 3000 h^{-1} \text{ Mpc} \end{aligned}$$

ossia se ci occupiamo di una piccola porzione di Universo.

## 4.5 Evoluzione del fattore di scala nel modello FRW piatto

Per poter studiare l'evoluzione temporale del fattore di scala è necessario, oltre all'equazione di Friedman anche il primo principio della termodinamica.

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} = -k \tag{4.15}$$

Scrivendo la densità come

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_v.$$

Dall'equazione di Friedman per  $t = t_0$  otteniamo

$$H_0^2 - \frac{8\pi G \rho_0}{3} = 0$$

da cui (scrivendo  $\rho_0 = \rho_{cr}$ ) possiamo ricavare la densità attuale del modello FRW piatto chiamata **densità critica** e notata  $\rho_{cr}$  ponendo  $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_v$  e dalla quale si possono definire le tre grandezze

$$\Omega_m = \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_{cr}} \quad \Omega_r = \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{cr}} \quad \Omega_v = \frac{\rho_v(t_0)}{\rho_{cr}} \quad (4.16)$$

dove  $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = 1$  per il modello FRW piatto.

Essendo, nel modello FRW piatto,  $k = 0$ , moltiplicando  $a(t)$  per una costante l'equazione di Friedman non cambia. Possiamo dunque porre arbitrariamente  $a(t_0) = 1$ . Utilizzando il risultato del primo principio della termodinamica otteniamo un'espressione della densità in funzione del fattore di scala  $a(t)$

$$\begin{aligned} \rho(a(t)) &= \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_v(t) \\ &= \rho_{cr} \left( \frac{\Omega_m}{a^3(t)} + \frac{\Omega_r}{a^4(t)} + \Omega_v \right) \end{aligned}$$

dove utilizziamo l'ipotesi  $\rho_v(t) = \rho_v(t_0)$  per ogni  $t$ .

Possiamo dunque riscrivere l'equazione di Friedman come

$$\frac{1}{2H_0} \dot{a}^2 + U_{\text{eff}}(a) = 0 \quad (4.17)$$

dove

$$U_{\text{eff}}(a) = -\frac{1}{2} \left( \Omega_v a^2 + \frac{\Omega_m}{a} + \frac{\Omega_r}{a^2} \right). \quad (4.18)$$

Si tratta di un'equazione che assomiglia molto ad una equazione della meccanica newtoniana del tipo energia cinetica più energia potenziale, con energia meccanica nulla.

## 4.6 Soluzioni dell'equazione di Friedman (FRW piatto)

### 4.6.1 Casi particolari

Possiamo verificare, dati  $a(t)$  nel caso di un Universo dominato da materia, radiazione o vuoto che l'equazione (4.17) è verificata.

Nel caso di un Universo dominato dalla materia abbiamo

- $\Omega_m = 1; \Omega_r = 0; \Omega_v = 0$  e  $a(t) = a(t/t_0)^{2/3}$

L'equazione (4.17) può dunque essere riscritta come:

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{a} H_0^2 \quad (4.19)$$

Abbiamo

$$\dot{a}^2(t) = \frac{4}{9} t^{-2/3} \left( \frac{1}{t_0} \right)^{4/3}$$

Sappiamo che

$$H_0^2 = \frac{\dot{a}^2(t_0)}{a^2(t_0)} = \dot{a}^2(t_0) \quad (4.20)$$

abbiamo infatti  $a(t_0) = 1$ , otteniamo dunque

$$H_0^2 = \dot{a}^2 = \frac{4}{9} \frac{1}{t_0^2}$$

Ora da (4.19) otteniamo

$$\dot{a}^2 = \frac{4}{9} \frac{t_0^{2/3}}{t_0^2} t^{-2/3}$$

visto che  $(\frac{1}{t_0})^{4/3} = \frac{t_0^{2/3}}{t_0^2}$ . Abbiamo verificato che  $\dot{a}^2 = \frac{1}{a} H_0^2$  e dunque, in questo caso (4.17), è verificata.

Nel caso di un Universo dominato dalla radiazione abbiamo

- $\Omega_m = 0; \Omega_r = 1; \Omega_v = 0$  e  $a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$

e l'equazione (4.17) può essere riscritta come

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{a^2} H_0^2 \quad (4.21)$$

Abbiamo

$$\dot{a}^2(t) = \frac{1}{4} \frac{t_0}{t}$$

e da (4.20) possiamo scrivere

$$H_0^2 = \dot{a}^2(t_0) = \frac{1}{4} \left(\frac{t_0}{t_0}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

da cui grazie all'equazione (4.21) otteniamo

$$\dot{a}^2(t) = \frac{1}{4} \frac{t_0}{t} = \frac{H_0^2}{a^2}.$$

Nel caso di un Universo dominato dal vuoto abbiamo

- $\Omega_m = 0; \Omega_r = 0; \Omega_v = 1$  e  $a(t) = e^{H(t-t_0)}$

dove  $H^2 = \frac{8\pi\rho_v}{3} = \frac{\Lambda}{3} = \text{costante}$ , e  $H$  corrisponde alla costante di Hubble per questo caso particolare.

L'equazione (4.17) può dunque essere riscritta come

$$\dot{a}^2 = a^2 H_0^2. \quad (4.22)$$

Abbiamo

$$\dot{a}^2(t) = H^2 \frac{(e^{Ht})^2}{(e^{Ht_0})^2}$$

anche in questo caso da (4.20) possiamo scrivere

$$H_0^2 = \dot{a}^2(t_0) = H^2$$

e da (4.17) otteniamo

$$\dot{a}^2(t) = H^2 e^{H(t-t_0)}.$$

E quindi anche in questo caso l'equazione di friedmann è verificata.

### 4.6.2 Spazi delle fasi

Dalla definizione di  $U_{\text{eff}}$  è possibile osservare che

$$U_{\text{eff}}(a) > 0$$

(eccezion fatta nel caso  $U_{\text{eff}} = 0$  per  $a = 0$  nel caso di un Universo dominato dal vuoto). In questo modo è possibile affermare che

$$\dot{a} \neq 0$$

infatti  $\dot{a}^2 = -2H_0^2 U_{\text{eff}}(a) > 0$ .

Analizzando il potenziale effettivo ( $U_{\text{eff}}$ ) è possibile fare un'analisi qualitativa della funzione e rappresentarla nello spazio  $(\dot{a}, a)$ ; ossia l'analogo dello spazio delle fasi di un sistema meccanico non dissipativo (in questo caso con  $E = 0$ ).

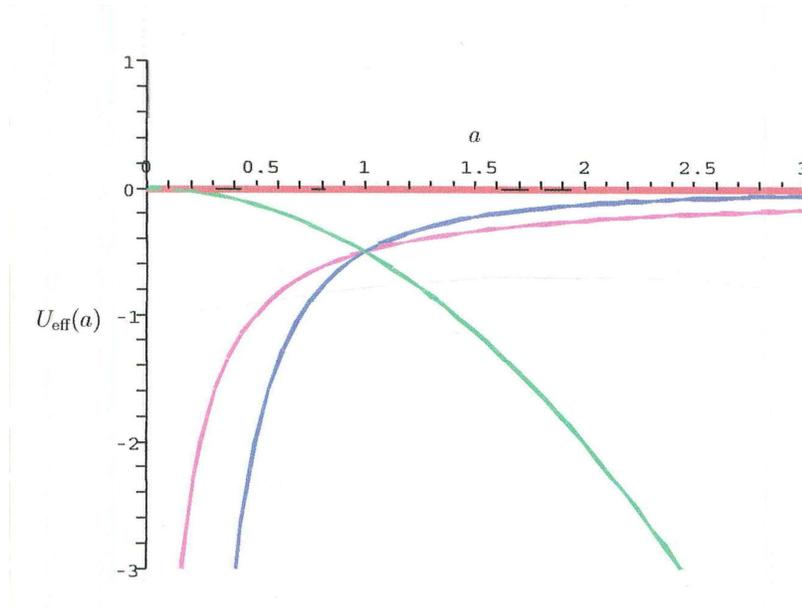


Figura 4.1: Potenziale effettivo del modello FRW piatto. In magenta il caso  $\Omega_m = 1$ , in blu il caso  $\Omega_r = 1$ , in verde il caso  $\Omega_v = 1$ , in rosso l'equivalente del valore dell'energia meccanica ( $k = 0$ ).

- **Caso  $\Omega_m = 1$  o  $\Omega_r = 1$ :**

Nel caso di un Universo dominato dalla materia o dalla radiazione, otteniamo due situazioni molto simili dallo studio di  $U_{\text{eff}}$ . In entrambi i casi notiamo che  $\dot{a}$  diminuisce, questo significa che velocità diminuisce; il fattore  $a$ , invece aumenta abbiamo quindi un espansione. Otteniamo quindi che con  $\Omega_m = 1$  o  $\Omega_r = 1$  l'Universo si espande con una velocità sempre minore fino a diventare nulla e quindi arrivare ad una situazione di "equilibrio statico".

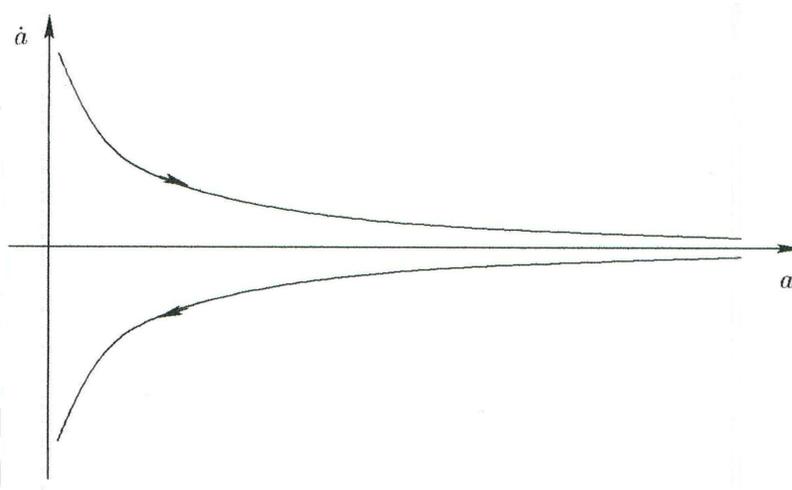


Figura 4.2: Spazio delle fasi per il potenziale effettivo del modello FRW piatto: nel caso di un Universo dominato dalla materia o dall radiazione le orbite hanno questo comportamento.

- **Caso  $\Omega_v = 1$**

Nel caso di un Universo dominato dal vuoto, invece notiamo che  $\dot{a}$  aumenta e non diminuisce, visto che anche in questo caso  $a$  cresce, si vede che in questo caso l'Universo si espande con una velocità sempre maggiore. Questo significa che dopo un certo tempo  $t$  gli oggetti presenti nell'Universo saranno distanziati in modo tale che l'Universo si potrà definire come vuoto.

Possiamo quindi discutere il caso generale a partire dall'analisi dello spazio delle fasi associato al potenziale effettivo  $U_{\text{eff}}$ , ecco un esempio.

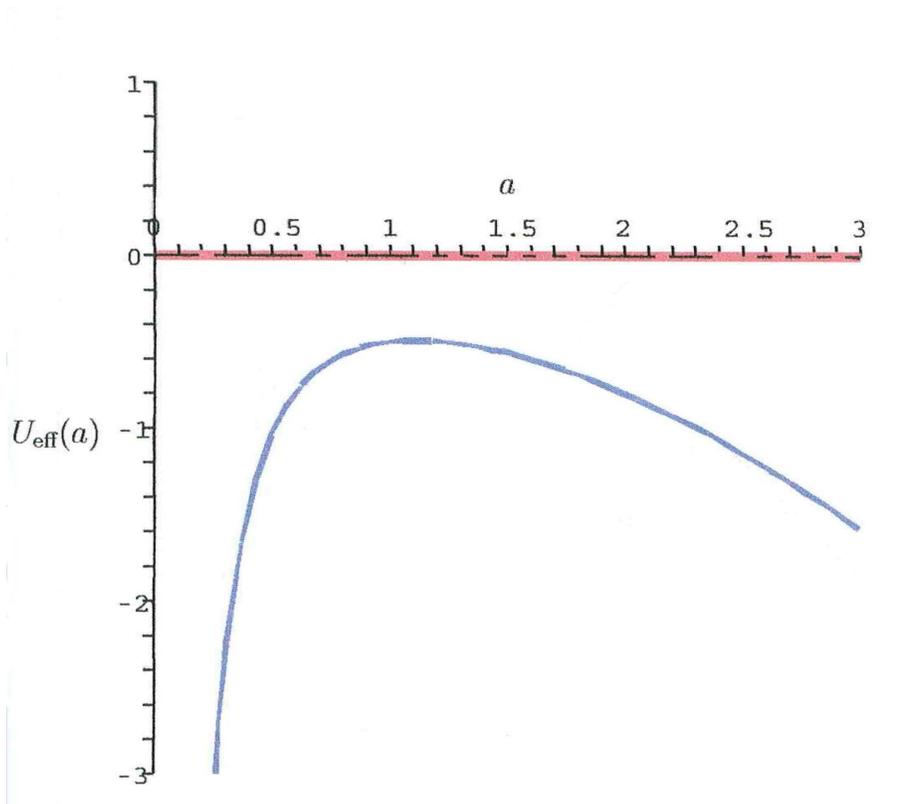


Figura 4.3: Potenziale effettivo del modello FRW piatto con  $\Omega_m = \Omega_r = \Omega_v = \frac{1}{3}$  (blu), l'equivalente dell'energia meccanica (rosso) è sovrapposta all'asse orizzontale.

In questo caso abbiamo la situazione seguente (ricordiamo che  $a(t_0) = 1$  dove  $t_0$  rappresenta il tempo presente).

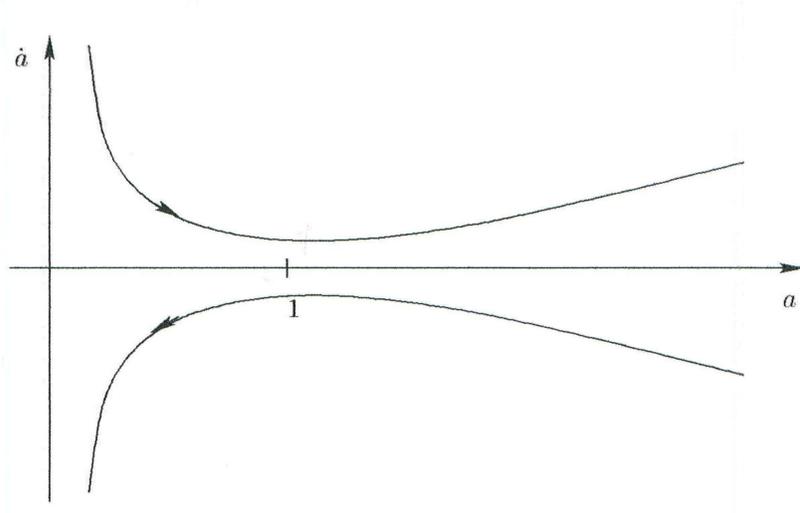


Figura 4.4: Orbite del modello FRW piatto con  $\Omega_m = \Omega_v = \frac{1}{3}$ .

## 4.7 Modelli FRW con curvatura

### Soluzioni dell'equazione di Friedman

Ora possiamo scrivere le soluzioni delle equazioni di Friedman nel caso  $k \neq 0$ , utilizzando i risultati del primo principio della termodinamica (nel caso  $k \neq 0$ ).

L'equazione di Friedman è

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}a^2 = -k$$

dove  $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_v$ . Dove queste  $\rho_m$  e  $\rho_r$  in funzione di  $a(t)$  sono date da (4.12) e (4.14), con  $\rho_v$  costante. Sostituendo queste espressioni e definendo i parametri  $\Omega$  come in (4.16) otteniamo

$$\dot{a}(t)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_{cr} \left\{ \Omega_m \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 + \Omega_r \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 + \Omega_v \right\} a^2(t) = -k$$

riscrivendo il fattore di scala nel modo seguente

$$b(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)}$$

si ottiene

$$a_0^2 \dot{b}^2 - a_0^2 H_0^2 \left( \Omega_v b^2 + \frac{\Omega_m}{b} + \frac{\Omega_r}{b^2} \right) = -k$$

che assomiglia al caso FRW piatto per quel che concerne il potenziale (equazione (4.18)) e il fatto che si ponga  $b(t_0) = 1$ .

Introducendo

$$\Omega_c \equiv -\frac{k}{(H_0 a(t_0))^2} \quad (4.23)$$

si ottiene

$$\frac{1}{2} \dot{b}^2 + U_{\text{eff}}(b) = \frac{\Omega_c}{2} \quad (4.24)$$

dove

$$U_{\text{eff}}(b) = -\frac{1}{2} \left( \Omega_v b^2 + \frac{\Omega_m}{b} + \frac{\Omega_r}{b^2} \right). \quad (4.25)$$

Questa equazione è molto simile al modello FRW piatto e anche in questo caso abbiamo un'equazione del tipo energia cinetica più energia potenziale con energia meccanica data da  $\frac{\Omega_c}{2}$ .

Al tempo  $t_0$  ( $b(t_0)=1$ ) l'equazione si riduce diventando semplicemente:

$$\underbrace{\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v}_{\equiv \Omega} + \Omega_c = 1$$

Per rendere questa struttura ancora più simile poniamo

$$\tau = H_0 t \quad (4.26)$$

in modo tale che

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = H_0 \frac{d}{d\tau}$$

Solitamente per risolvere l'equazione (4.24) e dunque costruire un modello cosmologico si procede nel modo seguente:

1. Si specificano i parametri  $\Omega_v, \Omega_r, \Omega_m, H_0$

2. Si determina  $b(\tau)$  integrando

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_c - 2U_{\text{eff}}(b)}} db = d\tau$$

3. Si riscalda utilizzando  $H_0$  per trasformare  $\tau$  in  $t$  mediante (4.26). In questo modo si può determinare il valore di  $a(t_0)$  con

$$a(t_0) = \sqrt{\frac{k}{\Omega_c H_0^2}} \quad \Omega_c = 1 - \Omega$$

e si ottiene così

$$a(t) = \frac{1}{H_0 \sqrt{|1 - \Omega|}} b(H_0 t) \quad (4.27)$$

Discutiamo alcuni casi ricordando che il potenziale effettivo  $U_{\text{eff}}(b) < 0$

- **Modello FRW piatto ( $\Omega = 1$ )**

In questo caso abbiamo  $\Omega_c = 1 - \Omega = 0$  e quindi non ci sono casi in cui  $\dot{b} = 0$  (e quindi  $\dot{a} = 0$ ). Questo modello è caratterizzato da  $k = 0$  poiché  $\Omega_c = 0$ . Ed è presente una singolarità<sup>1</sup> ad  $a = 0$  chiamata **Big Bang**.

- **Modello FRW aperto ( $\Omega < 1$ )**

In questo caso abbiamo  $\Omega_c = 1 - \Omega > 0$  e quindi non ci sono casi in cui  $\dot{b} = 0$  (e quindi  $\dot{a} = 0$ ).

Questo modello è caratterizzato da  $k = -1$ , poiché  $\Omega_c > 0$  e come nel caso di un Universo piatto ( $k = 0$  oppure  $\Omega_c = 0$ ) è presente una singolarità ad  $a = 0$  chiamata, anche in questo caso Big Bang.

- **Modello FRW chiuso ( $\Omega > 0$ )**

In questo caso  $\Omega_c = 1 - \Omega > 0$ . Questo modello è caratterizzato da  $k = +1$ , poiché  $\Omega_c < 0$ . Possono perciò esistere dei punti in cui  $\dot{b} = 0$  (e quindi  $\dot{a} = 0$ ), questo dipende però da  $\Omega_c/2$ . Si possono, infatti distinguere due casi:

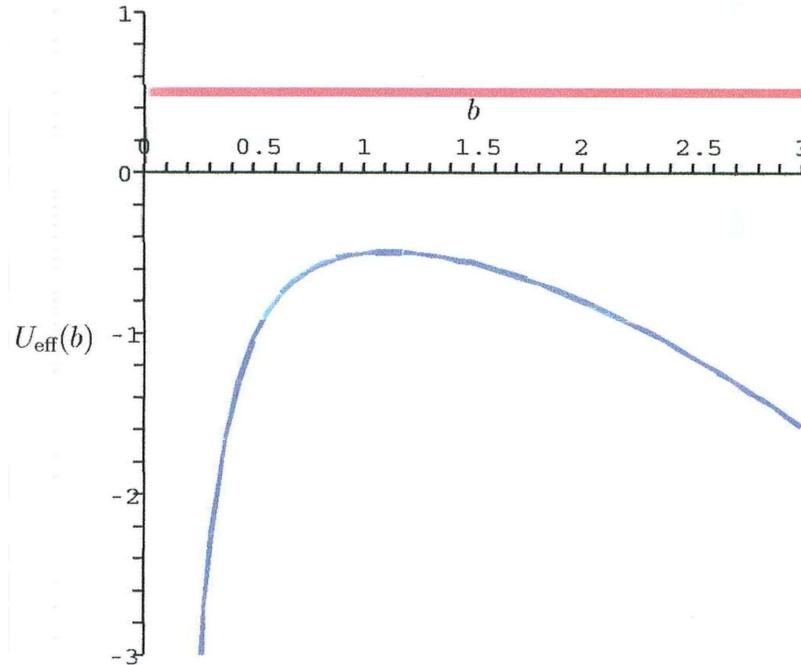


Figura 4.5: Potenziale effettivo del modello FRW aperto con  $\Omega_m = \Omega_r = \Omega_v = \frac{1}{3}$  (blu), l'equivalente dell'energia meccanica (rosso) corrisponde a  $\Omega_c/2$

1. Se  $\Omega_c/2 > \max_B U_{\text{eff}}(b)$  allora  $\dot{b} \neq 0 \forall t$ . Questo significa che l'Universo evolve da una singolarità in cui  $a = 0$  espandendosi all'infinito.
2. Se  $\Omega_c/2 < \max_B U_{\text{eff}}(b)$  allora esistono due valori di  $t$  per i quali  $\dot{b} = 0$ . In questo caso possono esistere due tipi di modelli: Il primo comincia anch'esso da una singolarità in cui  $a = 0$  (Big Bang) ma al contrario del caso 1 non si espande all'infinito ma, arriverà ad un punto di massimo per poi collassare nella singolarità  $a = 0$  (**Big Crunch**). Il secondo modello è un modello che rappresenta un Universo periodico, infatti si espande e si contrae all'infinito. Visto che in questo caso non ci sono singolarità l'espansione comincia da un valore  $a > a_1$  dove  $a_1$  corrisponde al primo punto in cui  $\dot{b} = 0$ . È importante notare che il valore di  $\Omega$  deve essere in accordo con  $b(t_0) = 1$  e le osservazioni empiriche dimostrano che questo modello è da escludere per il tempo  $a(t_0)$  presente.

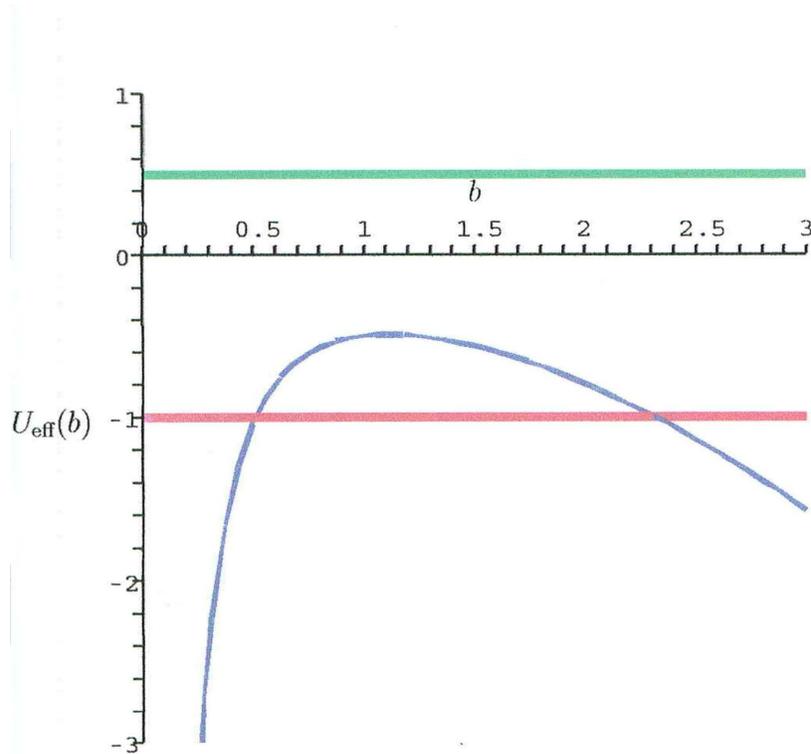


Figura 4.6: Potenziale effettivo del modello FRW piatto con  $\Omega_m = \Omega_r = \Omega_v = \frac{1}{3}$  (blu), l'equivalente dell'energia meccanica corrisponde a  $\Omega_c/2 > 0$  in verde e corrispondente invece a  $\Omega_c/2 < \max_B U_{\text{eff}}(b)$  in rosso

Come vedremo nel capitolo 4 il modello più probabile per quanto riguarda il nostro Universo è quello con geometria piana ( $k = 0$ ), questo significa che ha avuto inizio ad una singolarità  $a = 0$  e decelerata fino ad oggi (il massimo di  $U_{\text{eff}}$ , infatti corrisponde all'incirca ad  $a = 1$ ). A partire da questo punto, l'Universo comincia poi una fase di espansione leggermente accelerata.

Dall'equazione (4.25) è possibile ricavare in quali periodi dell'evoluzione dell'Universo abbiamo dominazione di materia radiazione o vuoto. Scriviamo

$$U_{\text{eff}} = U_m + U_r + U_v.$$

Possiamo subito notare che per  $a \rightarrow 0$

$$U_r \gg U_m, U_v$$

<sup>1</sup>Una singolarità è un punto dello spazio-tempo in cui la forza gravitazionale diventa infinita e la relatività generale non vale più. Nei punti di singolarità si ha dunque anche una densità infinita.

questo significa che l'Universo si comporta come un Universo dominato dalla radiazione (questo è suggerito anche dalle osservazioni empiriche). In seguito abbiamo un periodo nel quale

$$U_m \gg U_v, U_r$$

e dunque l'Universo si comporterà come un Universo dominato dalla materia, ed infine quando  $a \rightarrow \infty$  abbiamo

$$U_v \gg U_m, U_r$$

e l'Universo sarà dominato dal vuoto.

# Capitolo 5

## Come si comporta il nostro universo?

### 5.1 Il diagramma fondamentale della cosmologia

Per rispondere alla domanda del titolo di questo capitolo è necessario conoscere i valori empirici dei parametri cosmologici  $\Omega_v, \Omega_m, \Omega_r, H_0$ . Da essi è poi possibile ricavare  $k$ , che può essere positivo negativo o nullo, e quindi il tipo di modello. Risolvendo l'equazione di Friedman e poi possibile determinare il fattore di scala  $a(t)$ .

Vediamo ora quali sono i tre casi possibili:

- Se  $\rho < \rho_{cr}$ , abbiamo  $\Omega < 1$  da cui  $\Omega_c > 0$  e perciò avremo un Universo con curvatura negativa ( $k = -1$ ) che corrisponde al modello **aperto**.
- Se  $\rho = \rho_{cr}$ , abbiamo  $\Omega = 1$  da cui,  $\Omega_c = 0$  e perciò avremo un Universo con curvatura nulla ( $k = 0$ ) che corrisponde al modello **piatto**.
- Se  $\rho > \rho_{cr}$ , abbiamo  $\Omega > 1$ , da cui  $\Omega_c < 0$ , e perciò avremo un Universo con curvatura positiva ( $k = +1$ ), che corrisponde al modello **chiuso**.

Da qui si deduce che conoscendo la densità, che deve essere ricavata empiricamente, è possibile ricavare quale dei tre modelli FRW descrive il nostro Universo.

Cerchiamo ora di riassumere le caratteristiche dei tre diversi modelli FRW in funzione di  $\Omega_m$  e  $\Omega_v$ ,  $\Omega_r$  può essere trascurato in quanto il suo valore è diversi ordini di grandezza minore rispetto agli altri due (vedi oltre). Ora, trascurando  $\Omega_r$ , abbiamo  $\Omega = \Omega_m + \Omega_v$ ; sappiamo che per poter definire il valore di  $k$  dobbiamo conoscere  $\Omega$ . Prendendo in considerazione un Universo con geometria euclidea, il cui valore limite per  $\Omega$  vale  $\Omega = 1$ , otteniamo:

$$\Omega_v = 1 - \Omega_m \quad (5.1)$$

che corrisponde all'equazione della retta che rappresenta un Universo piatto e che separa il caso con geometria sferica ( $k = +1$ ) da quello con geometria iperbolica ( $k = -1$ ).

Proviamo ora a classificare i modelli in funzione del comportamento del fattore di scala, ossia determinare quando un Universo ha un espansione infinita oppure quando è destinato a collassare su se stesso ad un certo tempo  $t$ . Per far sì che un Universo collassi, si deve avere un certo tempo  $t$  per il quale  $\dot{a} = 0$ , e dunque  $\dot{b} = 0$  (si veda il paragrafo sullo studio delle orbite); se utilizziamo l'equazione (4.25) possiamo dire che questo accade per un certo  $b$  risultante dalla seguente equazione di terzo grado:

$$\Omega_v b^3 + (1 - \Omega_m - \Omega_v)b + \Omega_m = 0. \quad (5.2)$$

Ora da questa equazione è possibile ricavare i valori di  $\Omega_v$  per i quali, dato  $\Omega_m$  esistono o non esistono soluzioni dell'equazione (5.2).  $\dot{a} \neq 0$  se l'equazione non ha soluzioni.

I valori di  $\Omega_v$  per i quali abbiamo un Universo con un espansione infinita

sono dati da:

$$\Omega_v \geq \begin{cases} 0 & 0 \leq \Omega_m \leq 1 \\ q\Omega_m \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] & \Omega_m > 1 \end{cases}.$$

Questa equazione definisce il limite che divide i modelli con un espansione infinita e i modelli per i quali è previsto un collasso.

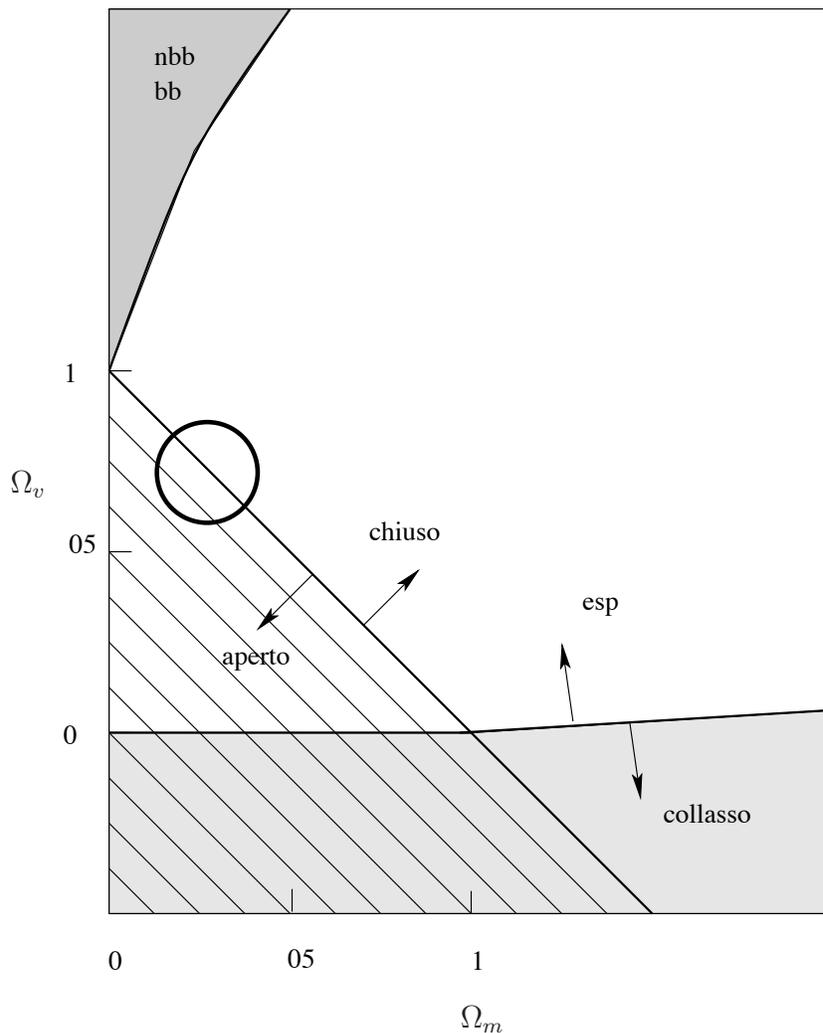


Figura 5.1: **Diagramma fondamentale della cosmologia.** Proprietà degli universi per i quali  $\Omega_m$  e  $\Omega_v$  sono dominanti. La zona circolare rappresenta i valori più attesi per il nostro Universo in base ai dati empirici (2003).

Una volta determinato il tipo di modello cosmologico è possibile determinare il fattore di scala

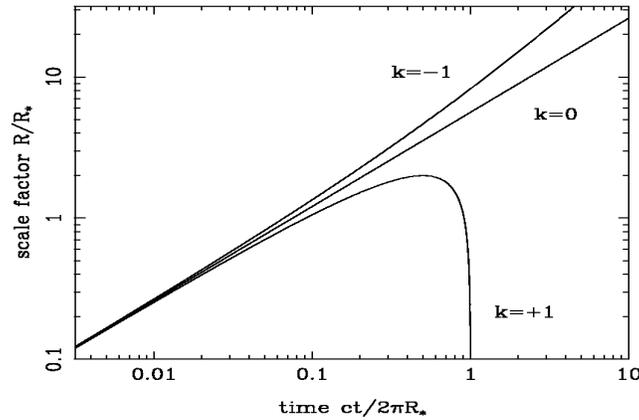


Figura 5.2: Evoluzione del fattore di scala (qui indicato con  $R$  invece di  $a$ ) per universi aperti, piatti o chiusi.[35]

## 5.2 Valori dei parametri cosmologici

Vogliamo ora indicare quali sono i valori attualmente più attendibili per i parametri cosmologici e definire quale sia la geometria più probabile del nostro Universo.

- Come abbiamo visto nel capitolo 2, il valore attuale più attendibile e relativamente affidabile, per la costante di Hubble, calcolato mediante la velocità di recessione delle supernovae di tipo Ia, è

$$H_0 \simeq 72(\text{km/s})/\text{Mpc}.$$

- Anche il valore di  $\Omega_r$ , ricavato è piuttosto preciso

$$\Omega_r \simeq 8 \cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \rho \simeq 8 \cdot 10^{-31} \text{kg/m}^3.$$

La densità di radiazione è stata determinata mediante l'osservazione della radiazione cosmica di fondo.

- Il valore approssimativo del parametro di densità della materia è

$$\Omega_m \simeq 0.3 \quad \Rightarrow \quad \rho_m \approx 3 \cdot 10^{-27} \text{kg/m}^3.$$

Quello che è importante notare nel caso della materia, è che il contributo di materia barionica (ossia della materia che compone stelle pianeti e esseri viventi) è molto piccolo:

$$\Omega_{\text{barionica}} \simeq 0.01$$

Inizialmente si è cercato di determinare la densità di materia barionica stimando il valore medio di materia presente nelle galassie (capitolo 2.2.1); si ottiene però un risultato molto incerto. È stato possibile determinare un valore di densità di materia barionica relativamente preciso, grazie all'analisi degli elementi creati durante la nucleosintesi primordiale; in questo modo risulta che circa il 90% della densità di materia (come già accennato nel capitolo 2) è composta da materia oscura, risultato confermato dall'osservazione della velocità di rotazione delle galassie (sezione 2.2) che impone l'esistenza di un alone di materia che non ci è però ancora possibile osservare.

- L'ultimo parametro cosmologico di cui dobbiamo conoscere il valore per poter determinare la geometria dell'Universo è quello della componente del vuoto (o costante cosmologica).

L'esistenza di un parametro  $\Omega_v \neq 0$  è oggi evidenziato dal valore del parametro di decelerazione attuale  $q_0$

$$q_0 = -\frac{a_0 \ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2} \quad (5.3)$$

che risulta essere negativo, implicando così l'esistenza di un oggetto che causi un espansione accelerata ( $\ddot{a} > 0$ ). Il valore del parametro

di decelerazione è calcolato sperimentalmente mediante l'ausilio di candele standard delle quali è possibile ricavare il redshift e infine il parametro di decelerazione mediante l'equazione

$$d = \frac{c}{H_0} [z + (1 - q)z^2 + O(z^3)] \quad (5.4)$$

dove  $d$  è la distanza e  $z$  il redshift della galassia;  $q_0$  vale [36]

$$q_0 \simeq -0.55$$

ed è dunque negativo.

Ora, dall'equazione di Einstein si può dimostrare che

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (5.5)$$

Quindi utilizzando i parametri  $p_m = 0$  e  $p_v = -\rho_v$ , e trascurando  $\rho_r$  si ottiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 2\rho_v) = -\frac{4\pi G}{3}\rho_{cr}(\Omega_m + 2\Omega_v)$$

da cui si ricava

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_v.$$

Questo significa che un Universo in espansione accelerata è possibile soltanto quando  $\Omega_v > \Omega_m/2$ . Utilizzando  $q_0 = -0.55$  e l'equazione sopra si ottiene

$$\Omega_v \approx 0.7 \quad \Rightarrow \quad \rho_v \approx 7 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$$

è perciò questo valore è plausibile.

Ora possiamo utilizzare questi valori per determinare quale sia la geometria del nostro Universo, sommando i valori delle tre densità otteniamo infatti:

$$\rho = \rho_v + \rho_m + \rho_r \approx 10^{26} \text{ kg/m}^3 = \rho_{cr}$$

e

$$\Omega = \Omega_v + \Omega_m \simeq 1 \quad (\Omega_r = 8 \cdot 10^{-5} \text{ è trascurabile}).$$

Abbiamo dunque

- $\rho = \rho_{cr}$
- $\Omega_m + \Omega_v = 1$

che come visto nel capitolo 4.5 corrispondono al modello FRW piatto.

### 5.3 Altre prove sperimentali a favore di un Universo piatto

Una delle più importanti scoperte degli ultimi anni, e che ha permesso di accertare con una ancor maggiore sicurezza quale sia il modello FRW che rappresenta il nostro Universo, è stata quella effettuata dai palloni aerostatici Boomerang e Maxima nel dicembre del 1998. Mediante un telescopio millimetrico Boomerang è infatti stato capace di analizzare il CMB in modo molto più preciso rispetto al satellite COBE evidenziando chiaramente le anisotropie presenti nella radiazione cosmica di fondo a microonde e misurandone le dimensioni che si sono rivelate perfettamente in accordo con le previsioni effettuate nel caso in cui l'Universo fosse piatto. La misura di queste chiazze era già stata calcolata grazie alle equazioni di equilibrio gravitazione-pressione in modo molto preciso ed affidabile; da questi calcoli risultava che la relazione tra le misure fisiche effettuate e la misura angolare<sup>1</sup>, che dipende totalmente dalla geometria dell'Universo, nel caso di una geometria Euclidea dovesse indicare una misura apparente delle chiazze pari ad 1° d'arco; nel caso di un Universo con curvatura spaziale negativa la grandezza sarebbe minore, mentre in un Universo con curvatura positiva sarebbe maggiore. Ora come appena detto le osservazioni di BOOMERANG e MAXIMA

---

<sup>1</sup>La misura apparente di un oggetto espressa in termini di angoli e misurata in gradi, secondi e minuti d'arco.

indicano che la misura angolare corrisponde esattamente ad  $1^\circ$  d'arco; la geometria del nostro Universo è dunque euclidea!

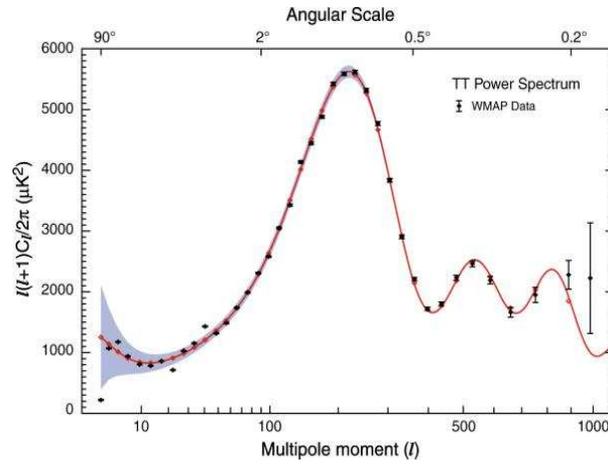


Figura 5.3: La posizione del massimo dello spettro dipende dalla geometria dell'Universo. Dal grafico fornito dalle osservazioni si nota come il massimo corrisponda esattamente ad una misura angolare pari ad  $1^\circ$  d'arco ( $l = 200$  sul grafico).

Gli esperimenti effettuati sul CMB ci indicano quindi che la geometria dell'Universo è piatta, risultato che impone  $k = 0$ . In questo modo il risultato ottenuto grazie ai valori dei parametri cosmologici è confermato. Possiamo dunque essere quasi sicuri di vivere in un Universo con una geometria euclidea!

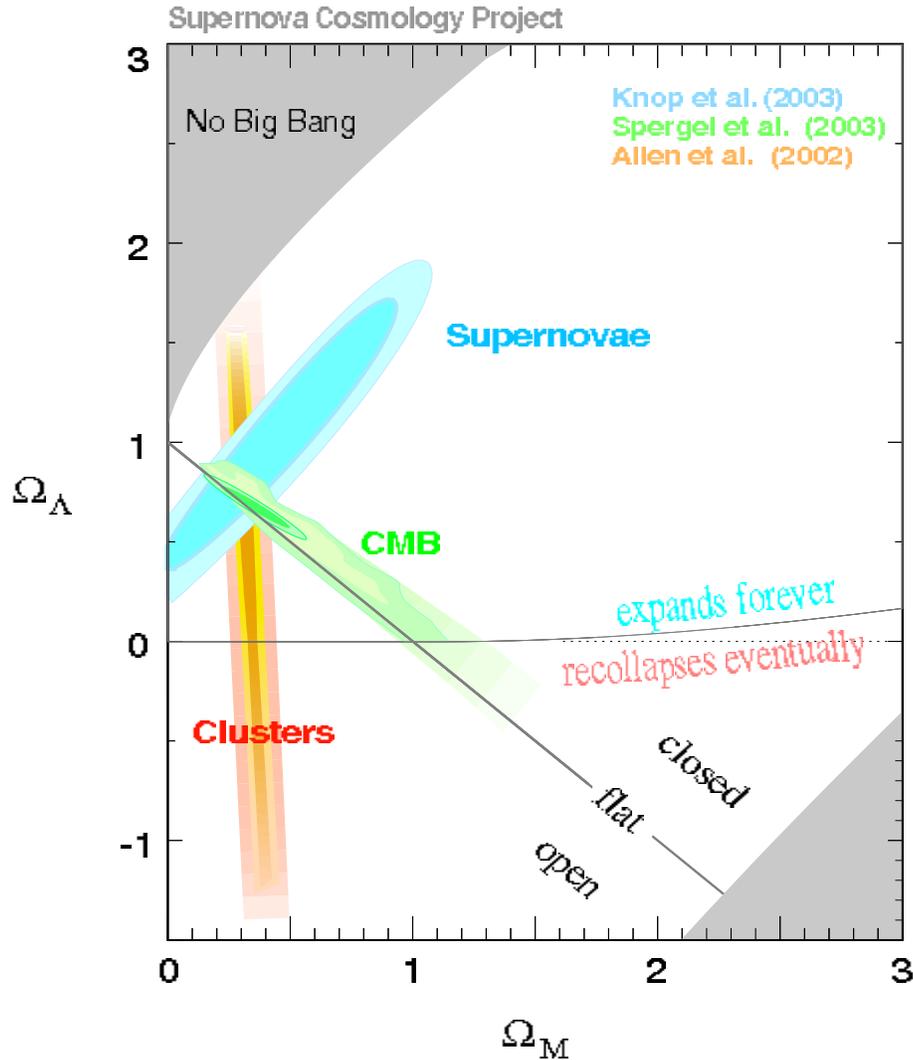


Figura 5.4: Questo diagramma rappresenta le diverse possibilità di modelli FRW nel caso in cui  $\Omega_r$  sia trascurabile. L'intersezione tra le tre regioni ottenute misurando il CMB, la distanza delle supernovae e la densità degli ammassi di galassie, suggeriscono che la geometria dell'Universo deve essere piatta con una composizione dell'Universo di  $\Omega_m = 0.3$  e  $\Omega_\nu = 0.7$ . Questo significa che deve esistere una costante cosmologica diversa da zero, ossia deve esistere energia oscura (o del vuoto). Su questa rappresentazione si possono anche osservare tre regioni distinte: In alto a destra abbiamo il caso di un Universo periodico, al centro il modello di Universo con espansione infinita e in basso a destra il modello in cui abbiamo un Big Bang con una successiva espansione fino ad un determinato valore massimo e, in seguito, un collasso in un Big Crunch.



# Appendice A

## La magnitudine

A causa della grande variazione di luminosità stellare, in astronomia queste luminosità vengono normalmente espresse in scala logaritmica di “magnitudine assoluta”. Per un oggetto di luminosità totale  $L$  abbiamo dunque una magnitudine assoluta (o più correttamente “magnitudine bolometrica assoluta”)

$$M_{ass} \equiv -2.5 \log(L/L_{\odot}) + 4.76$$

dove  $L_{\odot}$  è la luminosità totale del Sole e 4.76 la sua magnitudine. Si noterà che, a causa del segno meno, maggiore è la luminosità della stella minore è la sua magnitudine.

È molto difficile misurare la “magnitudine assoluta” di oggetto. Gli astronomi la osservano generalmente osservando questi oggetti attraverso speciali filtri capaci di selezionare una sola banda spettrale (o “colore” particolare). Per un oggetto di luminosità  $L_C$  nella banda spettrale  $C$ , la magnitudine assoluta è quindi definita da:

$$M_C \equiv -2.5 \log(L_C/L_{C\odot}) + M_{C\odot} \quad C = U, B, V, R, I, \dots$$

La differenza tra due magnitudini, per esempio  $M_B - M_V$ , è l’“indice di colore di un oggetto”. Per convenzione l’indice di colore corrisponde sempre al valore di magnitudine della lunghezza d’onda minore meno il valore di magnitudine della lunghezza d’onda maggiore.

Come per la luminosità in astronomia anche il flusso viene espresso secondo una scala logaritmica chiamata “magnitudine apparente”. Per una stella di flusso  $\phi_C$  (al di fuori dall’atmosfera terrestre) della banda di frequenza  $C$ , “la magnitudine apparente”  $m_C$  è definita da

$$m_C \equiv C = -2.5 \log \phi_C + \alpha_C \quad C = U, B, V, R, I$$

dove  $\alpha_C$  è una costante. Nel caso in cui non ci sia assorbimento interstellare (non ci sia polvere interstellare che assorbe una parte delle radiazioni luminose) abbiamo  $\phi_C = L_C / (4\pi d^2)$  dove  $d$  è la distanza della stella. Questo implica  $m = M + 5 \log d + \text{costante}$ . La costante  $\alpha_C$  nella definizione di  $m_C$  è stata scelta in modo che in assenza di assorbimento la magnitudine apparente sia uguale alla “magnitudine assoluta” se  $d = 10 \text{ pc}$

$$m_C = M_C + 5 \log(d/10 \text{ pc}) + A_C \quad C = U, B, V, R, I$$

dove il “coefficiente di spegnimento”  $A_C$  tiene conto dell’assorbimento interstellare o intergalattico.

# Bibliografia

[1] [http://www.astronomes.com/c7\\_bigbang/p700\\_main.html](http://www.astronomes.com/c7_bigbang/p700_main.html)

[2] M. Lachièze-Rey; *Initiation à la cosmologie*; Dunod; (2004)

## La massa

[3] [http://fr.wikipedia.org/wiki/mati%A8re\\_noire](http://fr.wikipedia.org/wiki/mati%A8re_noire)  
(25.06.2006)

[4] [http://it.wikipaedia.org/wiki/materia\\_oscura](http://it.wikipaedia.org/wiki/materia_oscura)  
(25.06.2006)

[5] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Weakly\\_interacting\\_massive\\_particles](http://fr.wikipedia.org/wiki/Weakly_interacting_massive_particles)  
(25.06.2006)

[6] J. Gribbin; *Enciclopedia dell'astronomia e della cosmologia*; Le Garzantine(2005)

[7] <http://www.eclipse.net/~cmmiller/DM/>

[8] C. Rubin; *La materia oscura nelle galassie a spirale* ; Quaderni le scienze **38**; (1987)

[9] [http://www.robertofantini.it/Materia\\_Oscura/Materia\\_oscura4.htm](http://www.robertofantini.it/Materia_Oscura/Materia_oscura4.htm)  
(27.09.2006)

[10] <http://www.lnf.infn.it/> (27.09.2006)

### **La radiazione e il corpo nero**

- [11] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet; *Physique statistique*; Herman; (1989)
- [12] [http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe\\_home.html](http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html)

### **Il vuoto e la costante cosmologica**

- [13] A. Lambrecht; *The casimir effect: force from nothing*; Physics World;(2002)  
<http://physicsweb.org/articles/world/15/9/6/1#pw1509061>
- [14] [http://en.wikipedia.org/wiki/Casimir\\_effect.htm](http://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect.htm)  
(25.09.2006)
- [15] <http://physics.infis.univ.trieste.it/monaco/node31.html>  
(25.09.2006)
- [16] D. Louapre et F. Rincon*Les propriétés du vide quantique*;  
(30.10.2006)
- [17] <http://physics.infis.univ.trieste.it/monaco/node31.html>

### **L'Universo in espansione**

- [18] J. Rich; *Principes de la cosmologie*; Les édition de l'école polytechnique; (2004)
- [19] James B. Hartle; *Gravity an introduction to Einstein's General Relativity*; Addyson-Wesley; (2003)

### **Isotropia e omogeneità**

- [20] James B. Hartle; *Gravity an introduction to Einstein's General Relativity*; Addyson-Wesley; (2003)
- [21] <http://universe-review.ca/I03-02-apm.jpg>

- [22] [http://www.thphys.uni-heidelberg.de/cosmo/pub/Main/CosmicMicrowaveBackground/dipole\\_klein2.jpg](http://www.thphys.uni-heidelberg.de/cosmo/pub/Main/CosmicMicrowaveBackground/dipole_klein2.jpg)
- [23] <http://www.phys.ucl.ac.uk/department/AnnRev2004/ASTRfig6.jpg>

### **Relatività e geometria**

- [24] Christian Ferrari; *relatività ristretta*; (2005-2006)
- [25] [http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio-tempo\\_di\\_Minkowski](http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio-tempo_di_Minkowski);  
(24.08.2003)
- [26] C. Ferrari; *Modelli cosmologici dell'Universo*; (2006)
- [27] [http://it.wikipedia.org/wiki/Immagine:End\\_of\\_universe.jpg](http://it.wikipedia.org/wiki/Immagine:End_of_universe.jpg)  
**I modelli cosmologici**
- [28] C. Ferrari; *Modelli cosmologici dell'Universo*; (2006)
- [29] J. Rich; *Principes de la cosmologie*
- [30] James B. Hartle; *Gravity an introduction to Einstein's General Relativity*; Addyson-Wesley; (2003)
- [31] R. Durrer; *cosmologie*; UNIGE (2001)
- [32] M. Rowan-Robinson; *Cosmology*; Clarendon Press Oxford; (2004)
- [33] [http://it.wikipedia.org/wiki/Variet%C3%A0\\_%28geometria%29](http://it.wikipedia.org/wiki/Variet%C3%A0_%28geometria%29)
- [34] <http://it.wikipedia.org/wiki/Iperpiano>

## Come si comporta il nostro universo?

- [35] <http://physics.infis.univ.trieste.it/~monaco/node30.html>
- [36] J. Rich; *Principes de la cosmologie*; Les édition de l'école polytechnique; (2004)