1 In uno spazio vettoriale finito dimensionale tutte le norme sono equivalenti

In uno spazio vettoriale finito dimensionale V tutte le norme sono equivalenti. Bisogna capire che cosa si intende per "equivalenti"e giustificare l'uso di questo termine.

Cominciamo dalla definizione: Due norme N_1 e N_2 si dicono equivalenti se esistono due numeri positivi A e B tali che per ogni $x \in V$ risulti:

$$AN_1(x) \leq N_2(x) \leq BN_1(x). \tag{1}$$

Che questa sia una relazione di equivalenza si verifica facilmente (provare).

Esaminiamo alcune conseguenze di questa definizione di equivalenza:

1. ogni successione di punti di $\{x_n\} \in V$ convergente secondo una norma converge anche nell'altra , cioe' $N_1(x_n - x_0) \longrightarrow 0$ implica $N_2(x_n - x_0) \longrightarrow 0$ e viceversa. Infatti

$$N_2(x_n - x_0) \leq BN_1(x_n - x_0) \tag{2}$$

e per il viceversa

$$N_1(x_n - x_0) \leq \frac{1}{A} N_2(x_n - x_0). \tag{3}$$

2. se un insieme $\mathcal{A} \subset V$ e' aperto secondo N_1 , e' aperto anche secondo N_2 e viceversa. Ricordato che $\mathcal{A}$ aperto e' costituito da tutti punti interni l'affermazione si dimostra agevolmente (provarlo).

3. Ogni insieme limitato secondo N_1 e' limitato anche secondo N_2 e viceversa. Limitato significa contenuto in una sfera di raggio finito e la dimostrazione dell'affermazione e' immediata.

4. In uno spazio *finito dimensionale*, da 2) e 3) segue che ogni insieme compatto secondo N_1 e' compatto anche secondo N_2 e viceversa. Infatti in uno spazio *finito dimensionale* la compattezza e' equivalente alla chiusura congiunta alla limitatezza e la dimostrazione dell'affermazione e' immediata. In uno spazio infinito dimensionale l'affermazione resta vera ma la dimostrazione è diversa.

5. Le funzioni continue rispetto a N_1 sono continue anche rispetto a N_2. Infatti, se

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \ \ ; \forall x : N_1(x - x_o) \leq \delta,$$

poiche' risulta dall'equivalenza delle due norme che $\frac{1}{B} N_2(x - x_o) \leq N_1(x - x_o) \leq \delta$, si ha anche

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \ \ ; \forall x : N_2(x - x_o) \leq B\delta.$$

Il viceversa si ottiene scambiando il ruolo di N_1 e N_2 .

Si vede dai precedenti esempi che per quanto riguarda le caratteristiche degli insiemi (aperti, chiusi, compatti, limitati ecc.), dei limiti, delle funzioni (continuita', derivabilita' ecc.), l'uso di due norme equivalenti porta agli stessi risultati. Tutte le conclusioni che si possono ottenere facendo uso di una norma si possono ottenere anche facendo uso di una norma equivalente. Questo giustifica l'uso del termine "*equivalenti*" nella definizione.

Le norme sono tuttavia diverse; assegnano valori numerici diversi alla distanza tra gli stessi punti dello spazio.

Teorema: *In ogni spazio vettoriale finito dimensionale V le norme sono tutte equivalenti* .

Dimostrazione

Basta mostrare che ogni norma e' equivalente ad una fissata N_0 .

Definiamo N_0 : scegliamo una base dello spazio $\{e_i\}_1^n$, ogni vettore x si rappresenta come $x = \sum_i x^i e_i$, e definiamo

$$N_0(x) = \max_{i=1,..,n} \left|x^i\right| \quad .$$

Per una norma generica N si ha

$$N(x) = N(\sum\nolimits_i x^i e_i) = \sum\nolimits_i \left|x^i\right| N(e_i) \leq kMN_0(x) = BN_0(x)$$

in cui $M = \max_{i=1,..,n} N(e_i)$ e $k = \dim V$.

Per minorare $N(x)$ in modo da ottenere l'altra disuguaglianza nella definizione di equivalenza, dalla relazione di sopra si vede immediatamente che N e' una funzione continua rispetto alla norma N_0. Infatti se $x_n \to x_0$, se cioe' $N_0(x_n - x_0) \to 0$, si ha

$$\lim |N(x_n) - N(x_0)| \leq \lim N(x_n - x_0) \leq \lim BN_0(x_n - x_0) = 0$$

da cui $\lim N(x_n) = N(x_0)$.

Ora, per il teorema di Weierstrass, ogni funzione continua su un compatto, in uno spazio finito dimensionale un chiuso e limitato, è ivi dotata di massimo e minimo. (Per un contro esempio di una funzione continua in uno spazio infinito dimensionale che su un chiuso e limitato non possiede massimo vedi un esercizio sulla mia Homepage)

In particolare N assume il suo massimo M e il suo minimo m sull'insieme S chiuso e limitato (rispetto a N_0)

$$S = \{x \in V : N_0(x) = 1\}.$$

Si ha perciò, tenuto conto che $\frac{x}{N_0(x)} \in S$ per ogni $x \neq 0$

$$N(\frac{x}{N_0(x)}) = \frac{1}{N_0(x)} N(x) \geq m$$

e si ottiene

$$mN_0(x) \leq N(x)$$

che e' vera per ogni x (anche $x = 0$). Si ha dunque:

$$mN_0(x) \leq N(x) \leq BN_0(x) \quad \forall x \in V. \qquad \square$$