

TEORIA RELATIVISTICA DI PARTICELLE CON MOMENTO INTRINSECO ARBITRARIO

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - *L'autore stabilisce equazioni d'onda lineari nell'energia e relativisticamente invarianti per particelle aventi momento angolare intrinseco comunque prefissato.*

La teoria di DIRAC dell'elettrone fa uso, come è noto, di una funzione d'onda a quattro componenti delle quali, quando si considerino movimenti lenti, due hanno valori trascurabili mentre le altre due obbediscono in prima approssimazione all'equazione di SCHRÖDINGER.

In modo analogo una particella con momento angolare intrinseco $s \frac{h}{2\pi}$ ($s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) è descritta nella meccanica quantistica mediante un complesso di $2s + 1$ funzioni d'onda che soddisfano separatamente all'equazione di SCHRÖDINGER. Tale rappresentazione è naturalmente valida finchè si trascurano gli effetti relativistici, e ciò è lecito per particelle mobili con velocità piccola di fronte a quella della luce. Un altro caso in cui la teoria elementare è ancora utilizzabile è ovviamente quello in cui la velocità della particella pur essendo comparabile con c rimane quasi costante in direzione e grandezza, poichè allora è possibile ricondursi allo studio di movimenti lenti scegliendo opportunamente il sistema di riferimento.

Il caso invece in cui la velocità delle particelle pur essendo quasi costante entro regioni sufficientemente estese del continuo spazio-tempo varia da una regione all'altra lentamente ma fra valori estremi lontani, sotto l'azione di campi esterni deboli, non si lascia trattare immediatamente con l'equazione non relativistica di SCHRÖDINGER.

Una generalizzazione relativistica della teoria precedente deve soddisfare successivamente alle condizioni seguenti al crescere del suo grado di accuratezza:

(a) La teoria permette lo studio di particelle aventi velocità quasi determinata in grandezza e direzione, dando risultati equi-

valenti alla teoria non relativistica, senza tuttavia la necessità di scegliere un sistema particolare di riferimento.

(b) La teoria permette inoltre di studiare processi in cui la velocità delle particelle varia lentamente, ma entro limiti comunque estesi, per l'azione di campi esterni deboli.

(c) La teoria è valida in generale comunque indeterminata sia la velocità delle particelle.

È probabile che una teoria rigorosa soddisfacente alla condizione (c) sia incompatibile con il mantenimento dell'attuale schema quantistico. La teoria di DIRAC dell'elettrone che pure ha dimostrato la sua fecondità nello studio di fenomeni schiettamente relativistici come la diffusione di raggi γ duri, soddisfa certo imperfettamente alla (c), come prova la nota difficoltà delle transizioni a stati di energia negativa. Al contrario è verosimile che una teoria soddisfacente a (b) e solo parzialmente a (c) non urti in difficoltà sostanziali, il suo contenuto fisico potendo essere essenzialmente quello stesso che giustifica l'equazione di SCHRÖDINGER. L'esempio più notevole di tali generalizzazioni relativistiche ci è dato appunto dalla teoria di DIRAC, ma poichè questa è applicabile soltanto a particelle

con momento intrinseco $s = \frac{1}{2}$, ho cercato equazioni analoghe nella forma a quelle di DIRAC, sebbene alquanto più complicate, le quali permettono la considerazione di particelle con momento angolare arbitrario, e in particolare nullo.

L'equazione d'onda, in assenza di campo, di una particella materiale, deve avere secondo DIRAC la forma:

$$(1) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0.$$

Equazioni di questo tipo presentano una difficoltà di principio. L'operatore β^{-1} deve infatti trasformarsi come la componente temporale di un quadrivettore e così β non può essere semplicemente multiplo della matrice unità ma deve avere almeno due autovalori differenti, supponiamo β_1 e β_2 ; ma da ciò segue che l'energia di riposo della particella, che si ottiene da (1) ponendo $p = 0$ deve avere almeno due valori differenti, cioè $\beta_1 mc^2$ e $\beta_2 mc^2$. Secondo le equazioni di DIRAC i valori possibili della massa di riposo sono, come è noto, $+m$ e $-m$ dal che segue per l'invarianza relativistica che l'energia può avere due valori differenti per il segno per ogni valore di p : $W = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$.

L'indeterminazione nel segno dell'energia può essere in realtà superata, usando equazioni del tipo fondamentale (1), solo se la

funzione d'onda ha infinite componenti che *non* si lasciano spezzare in tensori o spinori finiti.

1. L'equazione (1) può essere dedotta dal principio variazionale

$$(2) \quad \delta \int \tilde{\Psi} \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \phi dV dt = 0.$$

Una delle condizioni dell'invarianza relativistica è ovviamente che sia invariante la forma $\tilde{\Psi}\beta\phi$.

Se ora vogliamo che l'energia di riposo risulti sempre positiva, gli autovalori di β devono essere tutti positivi e la forma $\tilde{\Psi}\beta\phi$ sarà definita positiva. È allora possibile mediante una trasformazione *non* unitaria $\psi \rightarrow \varphi$ ridurre detta forma alla forma unità:

$$(3) \quad \tilde{\Psi}\beta\phi = \tilde{\varphi}\varphi.$$

Sostituendo in (2) a ψ la sua espressione mediante φ si avrà

$$(4) \quad \delta \int \tilde{\varphi} \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi dV dt = 0,$$

da cui seguono le equazioni equivalenti alla (1):

$$(5) \quad \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi = 0.$$

Dobbiamo ora determinare la legge di trasformazione di φ di fronte una rotazione di LORENTZ e l'espressione delle matrici γ_0 , γ_x , γ_y , γ_z in modo che sia rispettata l'invarianza relativistica del principio variazionale (4) e quindi che sia ivi invariante la funzione integranda.

Cominciamo con lo stabilire la legge di trasformazione di φ osservando anzitutto che l'invarianza di $\tilde{\varphi}\varphi$ significa che dobbiamo considerare solo trasformazioni unitarie. Per evitare complicazioni esagerate diamo inoltre la legge di trasformazione solo per trasformazioni di LORENTZ infinitamente piccole, una trasformazione finita potendo ottenersi per integrazione di quelle. Introduciamo le trasformazioni infinitesime nelle variabili ct, x, y, z :

$$(6) \quad \left(\begin{array}{l} S_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ T_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right)$$

e poniamo

$$(7) \quad \begin{cases} a_x = iS_x; & a_y = iS_y; & a_z = iS_z \\ b_x = -iT_x; & b_y = -iT_y; & b_z = -iT_z. \end{cases}$$

Gli operatori a e b devono essere Hermitiani in una rappresentazione unitaria, e viceversa; inoltre perchè le trasformazioni infinitesime siano integrabili devono soddisfare a certe relazioni di scambio che si deducono da (6) e (7):

$$(8) \quad \begin{cases} (a_x, a_y) = ia_z \\ (a_x, b_x) = 0 \\ (a_x, b_y) = ib_z \\ (a_x, b_z) = -ib_y \\ (b_x, b_y) = -ia_z \end{cases}$$

e le altre che si ottengono per permutazione circolare di x, y, z .

La più semplice soluzione delle (8) mediante operatori Hermitiani è data dalle seguenti matrici infinite in cui gli elementi diagonali sono numerati con due indici j e m e bisogna distinguere due possibilità, secondo che si faccia $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots; m = j, j-1, \dots, -j$, oppure $j = 0, 1, 2, \dots; m = j, j-1, \dots, -j$:

$$(9) \quad \begin{cases} (j, m | a_x - ia_y | j, m+1) = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \\ (j, m | a_x + ia_y | j, m-1) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \\ (j, m | a_z | j, m) = m \\ (j, m | b_x - ib_y | j+1, m+1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} \\ (j, m | b_x - ib_y | j-1, m+1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j+1, m-1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j-1, m-1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j+m-1)} \\ (j, m | b_z | j+1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)} \\ (j, m | b_z | j-1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j-m)}. \end{cases}$$

Se assumiamo che per riflessione nell'origine le φ_j, m restano

inalterate o cambiano segno alternativamente al variare di j , b risulta un vettore polare, mentre a è un valore assiale.

Chiameremo le grandezze su cui operano a e b tensori o spinori infiniti di indice zero secondo che j è intero o mezzo. La denominazione « di indice zero » significa che è nullo l'invariante:

$$(10) \quad Z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Spinori o tensori infiniti più generali possono definirsi per qualunque valore di Z . Gli spinori possono essere ottenuti semplicemente nel modo seguente. Si consideri una soluzione generica $\psi(q, t)$ delle equazioni di DIRAC senza campo e la si assoggetti a una trasformazione relativistica:

$$(11) \quad \psi(q, t) \rightarrow \psi'(q, t).$$

Allora la trasformazione nello spazio:

$$(12) \quad \psi(q, 0) \rightarrow \psi'(q, 0)$$

è unitaria, e se invece di funzioni arbitrarie $\psi(q, 0)$ consideriamo solo quelle che appartengono a un determinato autovalore z_0 dell'operatore (10), che ha uno spettro continuo che si estende da $-\infty$ a $+\infty$, noi troviamo funzioni che si trasformano mediante (12) come spinori infiniti, ognuno di questi ottenendosi esattamente due volte.

Gli operatori a_x e b_x hanno nella rappresentazione (12) la forma:

$$a_x = \frac{2\pi}{h} (yp_x - zp_y) + \frac{1}{2} \sigma_x$$

$$b_x = \frac{2\pi}{h} x \frac{H}{c} + \frac{i}{2} \alpha_x$$

e analogamente a_y , a_z , b_y , b_z .

2. Dobbiamo ora determinare gli operatori γ_0 , γ_x , γ_y , γ_z in modo che (4) sia invariante. Poichè consideriamo solo trasformazioni unitarie, detti operatori si trasformano come le forme Hermitiane ad essi collegate ed è quindi necessario per l'invarianza della funzione integranda in (4) che essi costituiscano un vettore covariante ($\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z \propto ct, -x, -y, -z$).

È ovvia l'interpretazione di $\tilde{\varphi} \gamma_0 \varphi$ e $-\tilde{\varphi} \gamma \varphi$ come densità di carica e di corrente. Gli operatori γ devono soddisfare alle relazioni di

scambio :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_0, a_x) = 0 \\ (\gamma_0, b_x) = i\gamma_x \\ (\gamma_x, a_x) = 0 \\ (\gamma_x, a_y) = i\gamma_z \\ (\gamma_x, a_z) = -i\gamma_y \\ (\gamma_x, b_x) = i\gamma_0 \\ (\gamma_x, b_y) = 0 \\ (\gamma_x, b_z) = 0 \end{array} \right.$$

e alle altre che si ottengono per permutazione circolare di x, y, z .
Le relazioni di scambio (13) determinano, come è facile dimostrare,
 $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ a meno di un fattore costante. Si trova

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = j + \frac{1}{2} \\ (j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j+1, m+1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} \\ (j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j-1, m+1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \\ (j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j+1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} \\ (j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j-1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j+m)(j+m-1)} \\ (j, m | \gamma_z | j+1, m) = \frac{i}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)} \\ (j, m | \gamma_z | j-1, m) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j+m)(j-m)}. \end{array} \right.$$

Le componenti non indicate di $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ essendo nulle. Si noti che la forma Hermitiana $\varphi \gamma_0 \varphi$ è definita positiva come richiede l'interpretazione fisica.

Vogliamo ora passare dalle equazioni scritte nella forma (5) alle equazioni (1). Basta per ciò porre

$$(15) \quad \varphi_{j, m} = \frac{\psi_{j, m}}{\sqrt{j + \frac{1}{2}}}$$

poichè allora la forma collegata a γ_0 si riduce alla forma unità. Otteniamo così equazioni della forma desiderata

$$(16) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0$$

in cui $\beta = \frac{1}{j + \frac{1}{2}}$ mentre le componenti diverse da zero di $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

sono date da

$$(17) \left\{ \begin{aligned} (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j + 1, m + 1) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j + m + 2)}{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j - 1, m + 1) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m)(j - m - 1)}{\left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j + 1, m - 1) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m + 1)(j - m + 2)}{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j - 1, m - 1) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j + m - 1)}{\left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_z | j + 1, m) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j - m + 1)}{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right)}} \\ (j, m | \alpha_z | j - 1, m) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j - m)}{\left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right)}} \end{aligned} \right.$$

Quando si cercano le soluzioni di (16) corrispondenti a onde piane con massa positiva si trovano tutte quelle che derivano per trasformazione relativistica dalle onde di momento nullo. Per queste l'energia è data da

$$(18) \quad W_0 = \frac{mc^2}{j + \frac{1}{2}}$$

Abbiamo così per valori mezzi di j stati corrispondenti a valori della massa: $m, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \dots$, e per j intero: $2m, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{5}, \dots$

È da notare che particelle con massa differente hanno momento angolare intrinseco differente, il momento angolare intrinseco avendo un valore determinato solo nel sistema in cui le particelle sono in riposo.

Se si considera il complesso degli stati appartenenti al valore

$\frac{m}{s + \frac{1}{2}}$ della massa di riposo come realizzato in natura, tutti gli altri stati non avendo significato, otteniamo una teoria invariante di particelle con momento angolare s che in assenza di campo può riguardarsi come soddisfacente. Si verifica senza difficoltà che per movimenti lenti e particelle di momento intrinseco s solo le $\psi_{s,m}$ sono sensibilmente diverse da zero e obbediscono all'equazione di SCHRÖDINGER con il valore $M = \frac{m}{s + \frac{1}{2}}$ della massa, mentre le $\psi_{s+1,m}$ e $\psi_{s-1,m}$ sono dell'ordine di $\frac{v}{c}$, le $\psi_{s+2,m}$ e $\psi_{s-2,m}$ dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$, e così via.

Otteniamo così solo due equazioni d'onda di cui l'una è adatta per la descrizione di particelle con momento angolare non intero e l'altra per particelle senza momento angolare o con momento intero.

Oltre agli stati appartenenti a valori positivi della massa, ve ne sono altri in cui l'energia è legata al momento da una relazione del tipo

$$(19) \quad W = \pm \sqrt{c^2 p^2 - k^2 c^4}$$

e ne esistono per tutti i valori positivi di k ma solo per $p \geq kc$.

Questi stati possono riguardarsi come appartenenti al valore immaginario ik della massa.

Le funzioni di « spin » appartenenti a onde piane con $p \neq 0$ hanno un'espressione particolarmente semplice nel caso di particelle senza momento intrinseco se $p_x = p_y = 0$, $p_z = p$.

Per queste si trova a meno di un fattore di normalizzazione

$$(20) \quad \begin{cases} \psi_{j,0} = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right) \left(i \frac{\eta - j}{\varepsilon}\right)^j} \\ \psi_{j,m} = 0 \quad \text{per } m \neq 0 \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

essendo

$$(21) \quad \varepsilon = \frac{p}{Mc}, \quad \eta = \frac{\sqrt{M^2 c^2 + p^2}}{Mc}$$

e $M = 2m$ la massa di riposo.

3. Vogliamo ora considerare brevemente l'introduzione del campo elettromagnetico nell'equazione (16).

Il passaggio dalle equazioni senza campo alle equazioni con campo esterno avviene nel modo più semplice sostituendo a W e p , $W - e\varphi$ e $p - \frac{e}{c} A$, se e è la carica della particella e φ e A i potenziali scalare e vettore. Ma altre possibilità sono aperte. Possiamo ad es. aggiungere dei termini invarianti, analoghi a quelli introdotti da PAULI (1) nella teoria del neutrone magnetico, che portano a fattore le forze del campo in luogo dei potenziali elettromagnetici così da non turbare l'invarianza delle equazioni di fronte all'indeterminazione dei potenziali.

Tale artificio permette di attribuire a particelle con momento angolare non nullo un momento magnetico comunque prefissato. Nel caso dell'elettrone per es. si trova mediante la semplice sostituzione $W, p \rightarrow W - e\varphi, p - \frac{e}{c} A$ un momento magnetico $+\frac{1}{2}\mu_0$ in luogo di $-\mu_0$.

Se si vuole specializzare la nostra teoria in una teoria dell'elettrone che si accordi fin dove è possibile con i dati sperimentali dobbiamo quindi modificare il momento magnetico con termini aggiunti. Ma la teoria dell'elettrone così ottenuta è un doppione inutile della teoria di DIRAC che resta assolutamente da preferire in grazia della sua semplicità e del largo suffragio dell'esperienza. Il vantaggio della presente teoria è per contro la sua applicabilità a particelle con momento angolare differente da $\frac{1}{2}$.

Le equazioni con il campo e termini aggiunti per modificare il momento magnetico intrinseco hanno la forma

$$(22) \quad \left[\left(\frac{W}{c} - \frac{e}{c} \varphi \right) + \left(a, p - \frac{e}{c} A \right) - \beta mc + \lambda(a', H) + \lambda(b', E) \right] \psi = 0$$

in cui a' sta per (a_x', a_y', a_z') e b' per (b_x', b_y', b_z') mentre E e H rappresentano il campo elettrico e magnetico.

La matrice a'_x si deduce da a_x (9), mediante la regola

$$(23) \quad (j, m | a'_x | j', m') = \frac{1}{\sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(j' + \frac{1}{2}\right)}} (j, m | a_x | j', m')$$

e analogamente a'_y, a'_z, b'_y, b'_z .

(1) Citato da OPPENHEIMER, « Phys. R. » **41**, 763, 1932.

Per particelle con momento angolare intrinseco $s = \frac{1}{2}$ si deve porre $\lambda = \frac{2}{c} \mu$ se μ è il momento magnetico che si vuole aggiungere a quello che sorge naturalmente dall'introduzione dei potenziali elettromagnetici nell'equazione d'onda. Quest'ultimo vale in tal caso, come si è detto, $-\frac{1}{2} \frac{eh}{4\pi mc}$. Per particelle senza momento angolare intrinseco è naturale porre $\lambda = 0$.

Per quanto riguarda la soluzione pratica dell'equazione d'onda ricordiamo che per movimenti lenti sono finite e obbediscono all'equazione di SCHRÖDINGER solo le $\psi_{j,m}$ per il valore di j che misura il momento angolare intrinseco in unità $\frac{h}{2\pi}$.

Per particelle senza momento, ad es. si ha una sola componente grande e cioè $\psi_{0,0}$, mentre le $\psi_{1,m}$ sono dell'ordine di $\frac{v}{c}$, se v è la velocità della particella, le $\psi_{2,m}$ dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$ e così via. Si riesce così a eliminare per successive approssimazioni le componenti piccole e in particolare si giunge a espressioni molto semplici per il calcolo della prima correzione relativistica.

Ringrazio particolarmente il Prof. E. FERMI per la discussione della presente teoria.