Considerazioni dimensionali e di scala sulle Teorie alternative della gravitazione

C. Rubano

Napoli 31 gennaio 2008

1) metrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

$g_{\mu\nu} \Rightarrow$ adimensionale

$x^\mu \Rightarrow$ lunghezza

2) curvatura scalare

$$R = R_\mu{}^\mu \rightarrow \ell^{-2}$$

3) Azione di Einstein-Hilbert

$$S = \int\left(\frac{c^3 R}{16\pi G} - \frac{2c^3 \Lambda}{16\pi G} + \frac{\mathcal{L}_m}{c}\right)\sqrt{-g}\, d^4x$$

$G \rightarrow \ell^3 m^{-1} t^{-2}$

$\Lambda \rightarrow \ell^{-2}$

$\mathcal{L}_m \rightarrow$ densità di energia $\ell^{-1} m t^{-2}$

$S \rightarrow$ azione $\ell^2 m t^{-1}$

4) Equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu} \Rightarrow \ell^{-1} m t^{-2}$

Osservazioni astronomiche, test sperimentali, sistema GPS ecc.

Due situazioni in cui RG è ottimamente verificata

1) Sistema solare e Pulsar binarie

$$r = 10^9 - 10^{12}\ m$$

2) Nucleosintesi

$$T = 10^9 \div 10^8 \text{ Kelvin}$$

$$3H_N^2 = \frac{8\pi G}{c^2}\rho_N + \underbrace{\Lambda - \frac{k}{a^2}}_{\text{trascurabili}}$$

$$3H^2 = \frac{8\pi G}{c^2}\frac{4}{c}\sigma T^4 \qquad \boxed{\sigma = \text{Stefan Boltzman}}$$

quindi raggio di Hubble alla nucleosintesi

$$r_N \sim \frac{c}{H_N} = \sqrt{\frac{3c^5}{32\pi\sigma G T^4}}$$

$$r_N = 10^{11}\ m$$

Cosa possiamo dire di R?

Cosa possiamo dire di R?

1) Nucleosintesi

$$R = -\frac{6}{c^2}\left(2H^2 + \dot{H}\right) \qquad \text{metrica FRW}$$

epoca dominata dalla radiazione

$a \propto t^{\frac{1}{2}}$ si ottiene $R = 0$

2) Sistema Solare e P.B.

metrica di Schwarz.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2$$

si ottiene $R = 0$

Gli unici due casi in cui RG è ben verificata corrispondono alle stesse scale di distanze.

Inoltre il valore di R è nullo (o quasi...)

Aumentiamo la scala

Scale di galassie e cluster

$r = 10 - 100$ KPc $= 10^{19}_{m}$ galassie
$10^{21} \div 10^{22}_{m}$ cluster

Problema delle velocità periferiche e
↓
Materia oscura

La materia oscura è necessaria anche per la formazione di strutture

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_B \delta = 0$$

dopo il decoupling $a \propto t^{2/3}$ $\rho_B \propto a^{-3}$

soluzione $\delta \propto t^{2/3}$ al decoupling $\delta \sim 10^{-5}$

quindi "non c'è tempo" per la formazione di strutture. $\frac{a_{dec}}{a_0} \sim 10^{-3}$

La materia oscura, disaccoppiata dalla radiazione, entra in azione prima

epoca dopo equivalenza fino al decoupling

$T \sim 6\,10^4 \div 3\,10^3$ K $r \sim 10^{18} \div 10^{22}$!

Possiamo valutare R ?

1) Cosmologica

in termini di redshift si ha

$$R = -\frac{3H_0^2}{c^2}\left(4 + (z^3+3z^2+3z-3)\Omega_{0m}\right)$$

all'equivalenza $z \sim 10^5$ al decoupling $z \sim 10^3$

quindi $R \simeq -\frac{3H_0^2}{c^2} z^3 \Omega_{0m} \sim -\frac{z^3}{r_{H_0}^2}$

se consideriamo

$r_{H_0} = 13$ miliardi anni/luce

$R \sim 10^{-37} \div 10^{-31}\ m^{-2}$

2) Galassie e cluster

difficile stimare – lavori in corso

Aumentiamo ancora le scale
resta solo la cosmologica

$r \sim 100$ Mpc $\div$ Hubble radius $\to 10^{24} \div 10^{26}$ m.

Bisogna considerare la costante cosmologica
o la dark energy (campo scalare)

Valutiamo R

$$R_0 \approx -\frac{9 H_0^2}{c^2} \sim 10^{-51}\, m^{-2} \quad \Omega_m \sim 1/3$$

N.B. si ha $\Lambda \sim \frac{H_0^2}{c^2}$ quindi $\Lambda \sim R_0$

questo è il motivo per cui Λ è importante a grande scala

Ora passiamo a piccola scala

Inflazione

In questo periodo H è circa costante

possiamo fare una stima del numero di e-folding

$$N \approx 60 \simeq H_{inf}\, \Delta t$$

$$H_{inf} \approx 60 \cdot 10^{34} \sim 10^{35}\ s^{-1}$$

quindi $r_{inf} = \frac{c}{H} \sim 10^{-27}\, m$

essendo $\dot{H} \sim 0$ otteniamo

$$R = -12 \frac{H_{inf}^2}{c^2} \approx 10^{55}\, m^{-2}$$

Scala di Planck

$$\varepsilon \sim l_p \sim 10^{-35}\ m$$

$$R \sim \varepsilon^{-2} \sim 10^{+70}\ m^{-2}$$

Conclusioni parte prima

Abbiamo applicato RG ad un range di scale che varia di 60 ordini di grandezza, usando un principio variazionale basato su R che varia di 120 ordini di grandezza.

Tutto questo basandosi su dati certi solo su un range di scale di 4÷5 ordini e con valori di R molto piccoli

Nessuna meraviglia che troviamo qualcosa che non va!

Proviamo ad introdurre una modifica

$$S = \int \sqrt{-g}\left(f(R) + \frac{L_m}{c} \right) d^4 x$$

così <u>non va bene</u> le dimensioni non tornano. Introduciamo una lunghezza "universale" λ.

Come la scegliamo? discussione

poniamo quindi $\mathcal{R} = \lambda^2 R$

$$\mathcal{L}_m = \frac{\lambda^4}{c\hbar} L_m \quad ; \quad x^\mu = \lambda^2 \xi^\mu$$

abbiamo

$$S = \hbar \int \sqrt{-g}\left(f(\mathcal{R}) + \mathcal{L}_m \right) d^4 \xi$$

ora nell'integrale tutto è adimensionale e sembra naturale introdurre $\hbar$ per dare le dimensioni di una azione

$$S = k \int \sqrt{-g}\left(f(R) + \mathcal{L}_m\right) d^4\xi$$

osservazione:

Inglobiamo in $f(R)$ sia la costante di accoppiamento con la materia che l'energia (eventuale) del vuoto.
In $f(R)$ saranno quindi contenuti dei parametri (adimensionali). A causa di questa posizione, non è detto che questi parametri siano ~ 1, come sarebbe lecito aspettarsi da una teoria fondamentale. Anche la scelta di λ risulta critica in tal senso.
Cosa possiamo dire di $f(R)$?

Supponiamo di occuparci di un range di fenomeni in cui R non varia molto (e non sempre ciò accade). Allora posso sviluppare $f(R)$ intorno ad un valore $\tilde{R}$ ottenendo

$$f(R) = \alpha(\tilde{R})R + \beta(\tilde{R})$$

riscriviamo l'azione ripristinando le quantità dimensionali

$$S = \int \left(\alpha\hbar\lambda^{-2}R + \frac{\hbar\beta}{\lambda^4} + \frac{L_M}{c} \right) \sqrt{-g}\, d^4x$$

confrontiamo con Einst. Hilb.

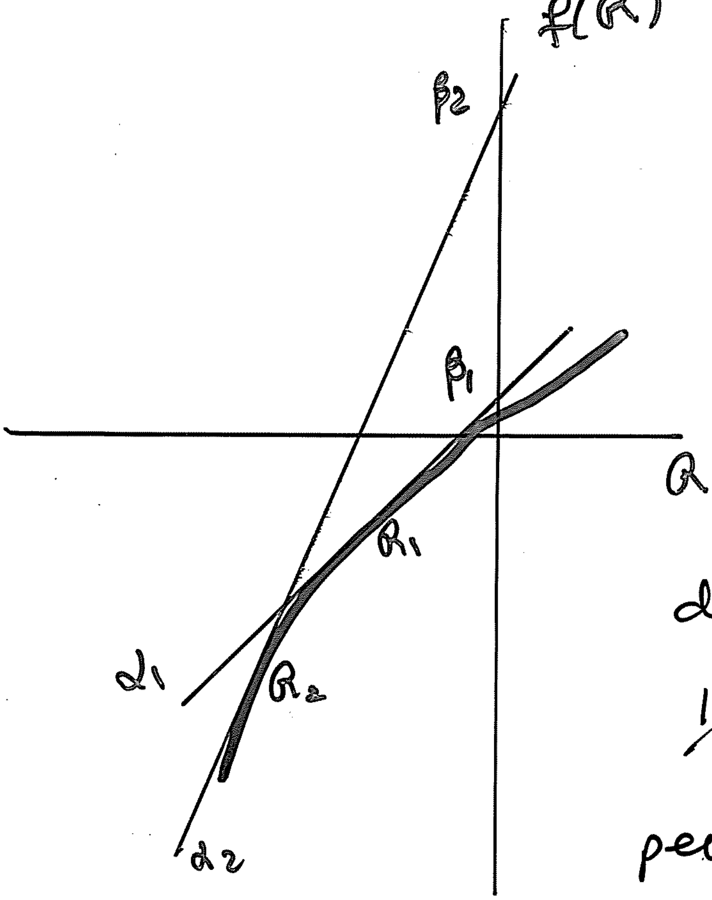
$$S_{EH} = \int \left(\frac{c^3 R}{16\pi G} - \frac{2c^3\Lambda}{16\pi G} + \frac{L_M}{c} \right) \sqrt{-g}\, d^4x$$

otteniamo

$$G_{eff} = \frac{c^3\lambda^2}{\alpha\hbar 16\pi}$$

$$\Lambda_{eff} = \frac{\beta}{\alpha\lambda^2}$$

quindi viene emulata la RG standard ma con G e Λ **diversi**



vediamo che $f(R)$ è approssimata dalle tangenti in $\tilde{R}$. la pendenza delle rette ci fornisce $1/G_{eff}$ quindi forte pendenza $\rightarrow$ G_{eff} piccola

l'intercetta è invece legata a Λ_{eff} attraverso $\beta \propto \Lambda_{eff}$ $\alpha \propto \frac{\Lambda_{eff}}{G_{eff}}$.

In figura abbiamo p.esempio

$|R_2|, \alpha_2, \beta_2$ grandi $\rightarrow$ G_{eff} piccola

$\Lambda_{eff} \rightarrow$? possibilmente grande

possibile inflazione

$|R_1|, \alpha_1, \beta_1$ piccoli $\rightarrow$ G_{eff} "grande"

$\Lambda_{eff} \rightarrow$? possibilmente piccola

fine dell'inflazione

Ma ci sono dei problemi!

Consideriamo la metrica statica a simmetria sferica

$$ds^2 = c^2 B(r)\, dt^2 - A(r)\, dr^2$$

ancora una volta non tornano le dimensioni

dobbiamo introdurre una distanza riscalata

$\rho = \cancel{r_*/r_*}\ r_*/r$. <u>Dove prendiamo r_*?</u>

in RG classica dobbiamo usare G, M, c

quindi r_* non può che essere il raggio

di schw. $r_* = r_S = \frac{2GM}{c^2}$

~~Nelle~~ Poiché nei casi standard $r_S \ll r$, $\rho \ll 1$

possiamo sviluppare e studiare i parametri

PPN

Se introduciamo $f(R)$, G perde significato.

Inoltre abbiamo λ e t_1

Quindi non sappiamo bene come valutare i parametri PPN

Se G perde significato non abbiamo più le unità di Planck

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 10^{19}\ \mathrm{GeV}$$

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim 10^{-43}\ \mathrm{s}$$

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 10^{-35}\ \mathrm{m}$$

andranno sostituite con

$$\lambda = \ ? \qquad t_\lambda = \lambda / c = \ ?$$

$$m_\lambda = \frac{\hbar}{c\lambda} = \ ?$$

quindi, finchè non specifichiamo λ, non sappiamo più a quale scala introdurre la quantum gravity

Last but not least....

torniamo alla metrica sferica

$$ds^2 = c^2 B(r/r_*) - A(r/r_*) dl^2$$

in RG applichiamo le eq. di Einstein nel vuoto a questa metrica e imponiamo che tenda asintoticamente a Minkowski

si ottiene $A = 1/B$ una equazione del II ordine (ordinaria) per B con due costanti di integrazione: una è fissata dalle condiz. di asintoticità, la seconda è evid. il raggio di Schw. per ottenere Newton su campi deboli.

Se usiamo $f(R)$ le equazioni sono del $\underline{\text{IV}}$ ordine.

di nuovo $A = 1/B$ e vale Minkowski a ∞

ne restano $\underline{\underline{3}}$

Per un corpo puntiforme, come introdurre altre quantità intrinseche diverse dalla massa?

Si può obiettare che le equazioni da risolvere non sono quelle nel vuoto, per cui introducendo il tensore energia impulso di un corpo puntiforme

$$T_{\mu\nu} = \delta^0_\mu \, \delta^0_\nu \, M \, \delta^3(x)$$

Tutte e 3 le costanti risultano legate alla massa.

Ma questa forma di $T_{\mu\nu}$ presuppone appunto che solo la massa di un corpo (neutro) si accoppi con la gravità.

Il ragionamento si morde la coda

Conclusioni:

1) Semplici considerazioni di scala, insieme con i dati osservativi, portano a ritenere plausibile la necessità di modificare RG

2) le teorie $f(R)$ sembrano molto promettenti ma:

a) richiedono l'introduzione di una lunghezza universale λ che non sappiamo determinare

b) come conseguenza, non sappiamo più a quale scala introdurre la gravità quantistica

c) la discussione della metrica sferica si fa molto più complessa.