

Effetto Casimir

in un campo gravitazionale debole

Luigi Rosa

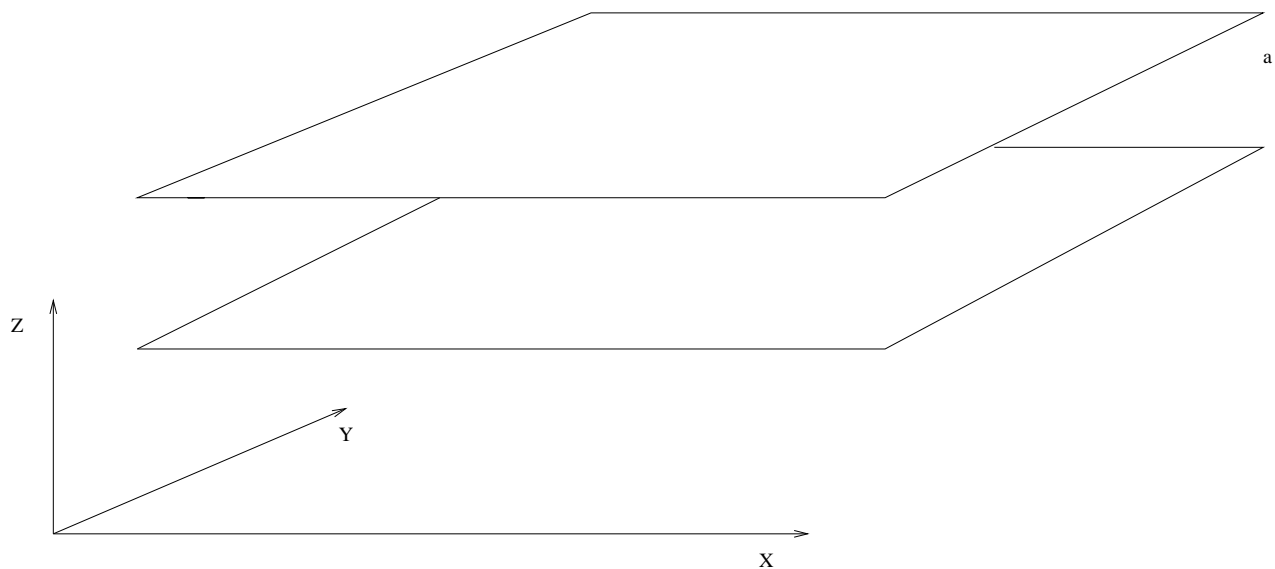
Università di Napoli "Federico II"

Phys. Rev. D-74 085011 (2006)

con G.Bimonte, E. Calloni, and G. Esposito

Napoli 16-11-2006

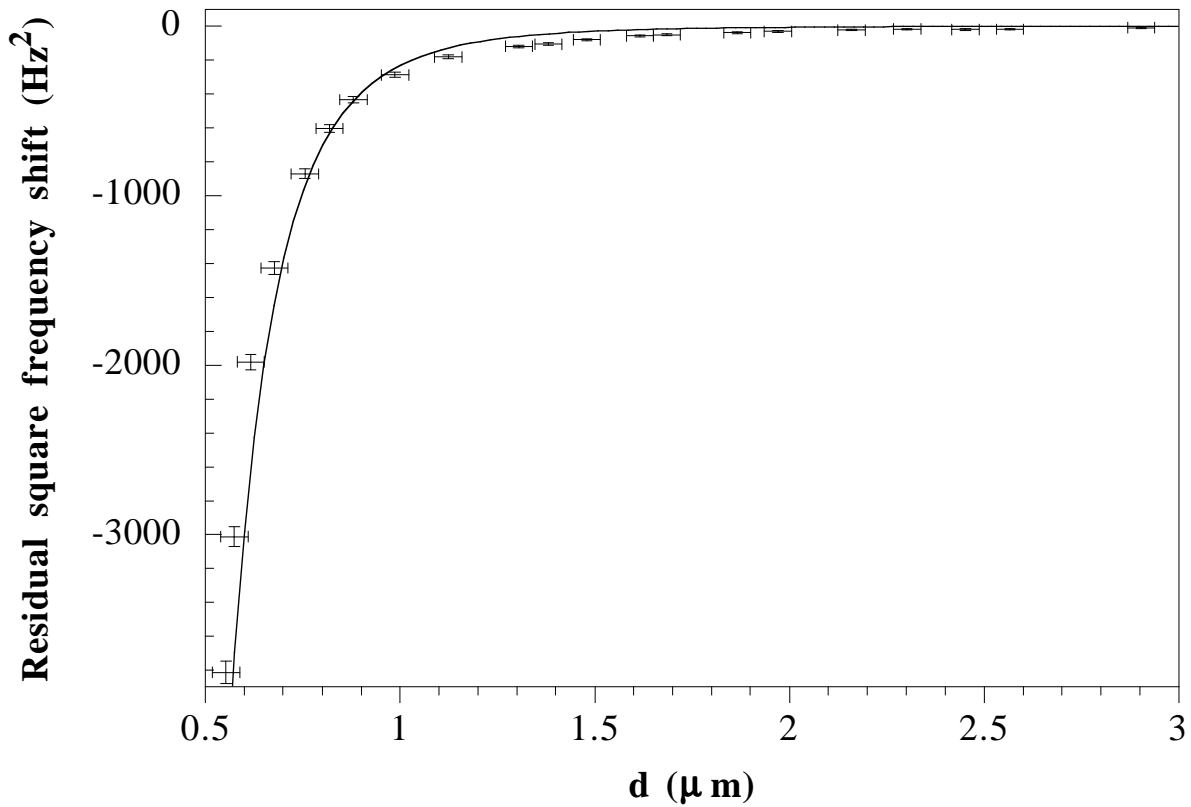
- Introduzione all'effetto Casimir;
- Tensore Energia-Impulso in spazi piatti:
 - procedura di *point-splitting*: (campo scalare);
 - campo Elettromagnetico;
 - risultati.
- background curvi;
- sviluppi perturbativi;
- risultati.



$$E = \sum \frac{1}{2} \hbar \omega = A \frac{\hbar c}{2} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[|\mathbf{k}_{\parallel}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \right]$$

dopo aver regolarizzato e rinormalizzato

$$E = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}$$



◇ G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio e G. Ruoso:
“Measurement of the Casimir Force between Parallel
Metallic Surfaces” ,
Phys. Rev. Lett. 88, (2002) 041804.

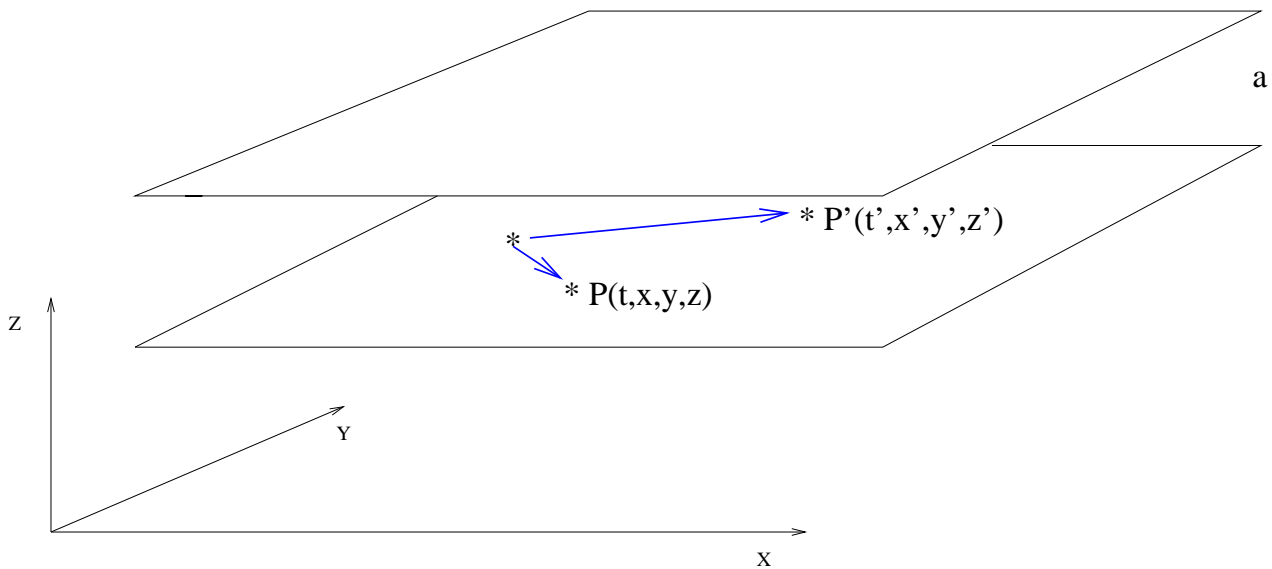
CAMPO SCALARE

Per un campo scalare $\varphi(x)$ il valore di aspettazione sullo stato di vuoto del tensore energia-impulso è dato da

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \langle \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \varphi(x) \partial^\lambda \varphi(x) \rangle$$

definiamo una nuova funzione (un bivettore):

$$T_{\mu\nu'}(x, x') = \partial_\mu \varphi(x) \partial_{\nu'} \varphi(x') - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \varphi(x) \partial^{\lambda'} \varphi(x')$$



ovviamente potremo scrivere

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu'}(x, x') \rangle &= \langle [\partial_\mu \partial_{\nu'} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu'} \partial_\lambda \partial^{\lambda'}] \varphi(x) \varphi(x') \rangle \\ &\equiv D(x, x') \langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle \quad \text{con} \\ D(x, x') &= [\partial_\mu \partial_{\nu'} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu'} \partial_\lambda \partial^{\lambda'}]\end{aligned}$$

$$\langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle = \frac{1}{i} H(x, x')$$

dove $H(x, x')$ è la funzione di Hadamard.

Si definisce

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \langle T_{\mu\nu'}(x, x') \rangle$$

✦ Divergenze?

✓ Come effettuare il limite

Campo Elettromagnetico

Dato il funzionale di azione

$$S[A_\mu, \chi, \psi] = \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\nabla^\mu A_\mu)^2 + \chi^{i\alpha} \psi_{; \alpha} \right] \sqrt{-g} d^4 x, \quad (1)$$

il tensore energia-impulso si ottiene derivando S rispetto alla metrica:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2)$$

T risulta la somma di tre termini T_A, T_B, T_{gh} relativi rispettivamente al settore di Maxwell, di gauge-breaking e di ghost. In questo modo, per il valore di aspettazione otteniamo:

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \langle T_A^{\mu\nu} \rangle + \langle T_B^{\mu\nu} \rangle + \langle T_{\text{gh}}^{\mu\nu} \rangle, \quad (3)$$

Usando la *procedura di point-splitting* otteniamo

$$\langle T_A^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left[-\frac{1}{4} \left(g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\tau\rho} \right) g^{\alpha\beta} \langle F_{\rho\alpha} F_{\tau\beta} \rangle \right] \quad (4)$$

con

$$\langle F_{\rho\alpha} F_{\tau\beta} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{4} \left[H_{\alpha\beta';\rho\tau'} + H_{\beta\alpha';\tau\rho'} - H_{\alpha\tau';\rho\beta'} - H_{\tau\alpha';\beta\rho'} - H_{\rho\beta';\alpha\tau'} - H_{\beta\rho';\tau\alpha'} + H_{\rho\tau';\alpha\beta'} + H_{\tau\rho';\beta\alpha'} \right], \quad (5)$$

$$H_{\mu\nu}(x, x') \equiv \langle [A_\mu(x), A_\nu(x')]_+ \rangle \equiv H_{\mu\nu'},$$

$$[A_{\alpha;\rho}, A_{\beta;\tau}]_+ = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} \left\{ [A_{\alpha';\rho'}, A_{\beta;\tau}]_+ + [A_{\alpha;\rho}, A_{\beta';\tau'}]_+ \right\}.$$

La funzione di Hadamard, $H(x, x')$, è legata alla funzione di Feynmann, $G(x, x')$, dalla seguente relazione:

$$H(x, x') = -2i[G(x, x') - \bar{G}(x, x')] \quad (6)$$

con $\bar{G}(x, x') = \frac{1}{2}[G^+ + G^-]$.

La funzione $G_{\mu\nu'}$ è soluzione dell' equazione

$$\square_x G_{\mu\nu'} = -\eta_{\mu\nu}\delta(x, x'). \quad (7)$$

Le condizioni al bordo

$$\vec{E}_t|_S = 0, \quad \vec{H}_n|_S = 0, \quad (8)$$

sono automaticamente soddisfatte richiedendo l'annullarsi di $A_0(\vec{x})$, $A_1(\vec{x})$, $A_2(\vec{x})$ sulla frontiera S : $z = 0$, $z = a$.

La condizione su A_3 si determina richiedendo che la scelta di gauge (Lorenz) continui a valere sulla frontiera, questo implica:

$$A_{;\mu}^\mu|_S = 0 \Rightarrow A_{;3}^3|_S = 0 \quad (9)$$

La soluzione è data da

$$G_{\lambda\nu'} = \eta_{\lambda\nu'} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} g_{D,N}(z, z'), \quad (10)$$

con

$$g_D(z, z'; \kappa) \equiv \frac{\sin \kappa(az_{<}) \sin \kappa(a - z_{>})}{\kappa \sin \kappa a}, \quad 0 < z, z' < a,$$
$$g_N(z, z'; \kappa) \equiv -\frac{\cos \kappa(az_{<}) \cos \kappa(a - z_{>})}{\kappa \sin \kappa a}, \quad 0 < z, z' < a,$$

- D, N indicano condizioni al contorno omogenee di tipo Dirichlet o Neumann,
- $z_{>}$ ($z_{<}$) rappresenta la maggiore (minore) tra z and z' ,
- $\vec{k}_\perp \equiv (k_x, k_y)$, $\vec{x}_\perp \equiv (x, y)$ e $\kappa = \sqrt{\omega^2 - k^2}$,

Il valore di aspettazione del tensore energia-impulso si può scrivere nella forma

$$\langle T^{\mu\nu'} \rangle = 2i \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x} - \vec{x}')_\perp} \tilde{T}^{\mu\nu'}[\omega, \vec{k}; z, z'], \quad (11)$$

♣ $2i$ viene dalla relazione tra le funzioni di Hadamard e di Feynman;

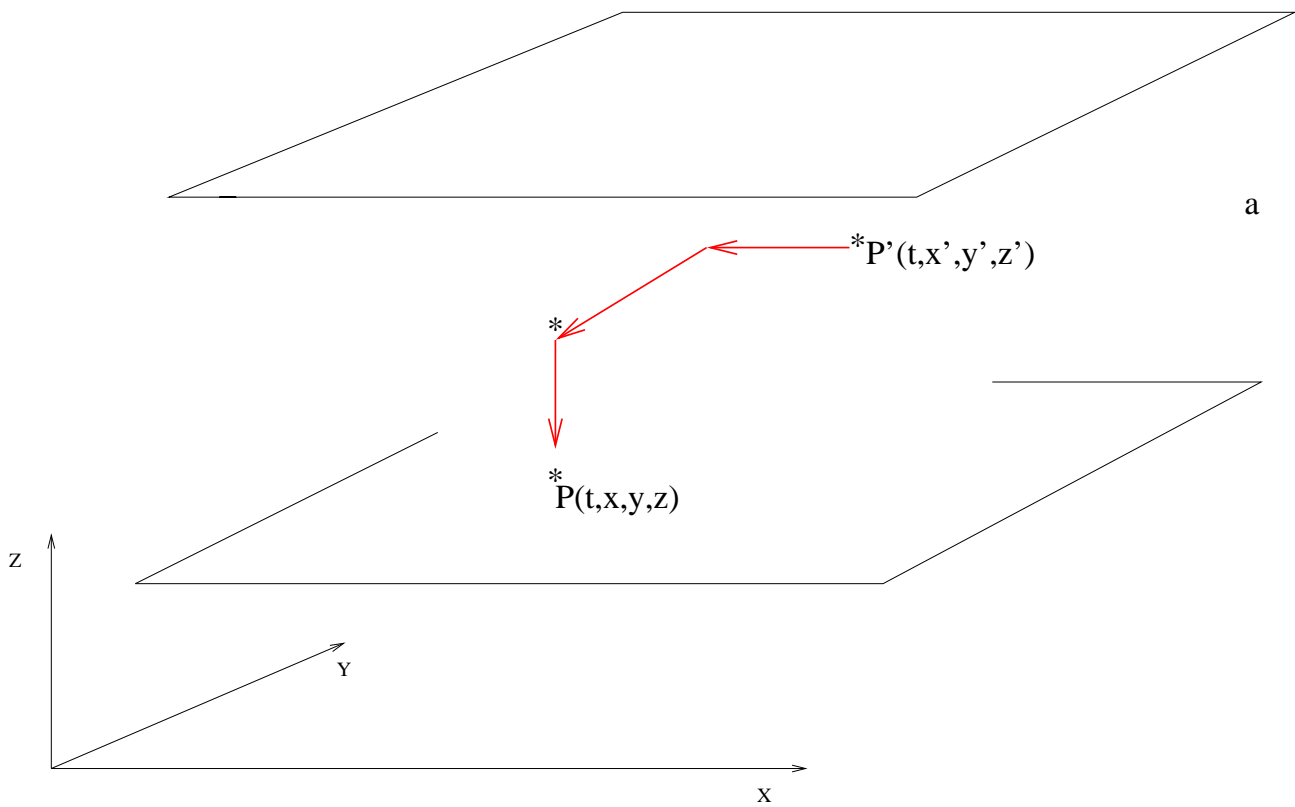
♠ $\tilde{T}^{\mu\nu'}$ è un tensore simmetrico le cui componenti sono date da:

nel seguito ($\xi \equiv a\kappa$, $s(\xi) \equiv z\kappa = \frac{z\xi}{a}$ and $s'(\xi) \equiv z'\kappa = \frac{z'\xi}{a}$,
 $\kappa \equiv \sqrt{\omega^2 - k^2}$)

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{00'} &= -\frac{a\omega^2}{2\xi} \cos(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{01'} &= -\frac{ak_x\omega}{2\xi} \cos(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{02'} &= -\frac{ak_y\omega}{2\xi} \cos(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{03'} &= -\frac{i}{2}\omega \operatorname{csc}(\xi) \sin(\xi + s - s') \\
\tilde{T}^{11'} &= \frac{\xi^2 + a^2(k_y^2 - \omega^2)}{2a\xi} \cos(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{12'} &= -\frac{ak_xk_y}{2\xi} \cos(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{13'} &= -\frac{i}{2}k_x \sin(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{22'} &= -\frac{ak_y^2}{2\xi} \cos(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{23'} &= -\frac{i}{2}k_y \sin(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi) \\
\tilde{T}^{33'} &= -\frac{\xi}{2a} \cos(\xi + s - s') \operatorname{csc}(\xi)
\end{aligned}$$

i) $t' \rightarrow t$ e $\vec{x}'_{\perp} \rightarrow \vec{x}_{\perp}$;

ii) mantenendo $z \neq z'$ passiamo il limite sotto l'integrale;



Posto $\omega \rightarrow i\omega$, ($\kappa \rightarrow i\kappa$) e passando in coordinate sferiche $\omega^2 \rightarrow -\xi^2 \cos^2 \theta$, $k_y^2 \rightarrow \xi^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi$ dopo l'integrazione sulle variabili angolari otteniamo

$$\langle T^{\mu\nu'} \rangle [z, z'] = \frac{1}{6\pi^2} \frac{1}{a^4} \text{diag}(-1, 1, 1, -3) \quad (12)$$

$$\times \int d\xi \xi^3 \times \cosh(\xi - s - s') \text{csch}(\xi).$$

Infine, eseguendo l'integrale su ξ otteniamo:

$$\langle T^{\mu\nu'} \rangle = \frac{1}{16a^4\pi^2} \text{diag}(-1, 1, 1, -3)$$

$$\times \left[\zeta_H \left(4, \frac{2a + z - z'}{2a} \right) + \zeta_H \left(4, \frac{z' - z}{2a} \right) \right]$$

✠ ζ_H è la funzione ζ di Hurwitz:

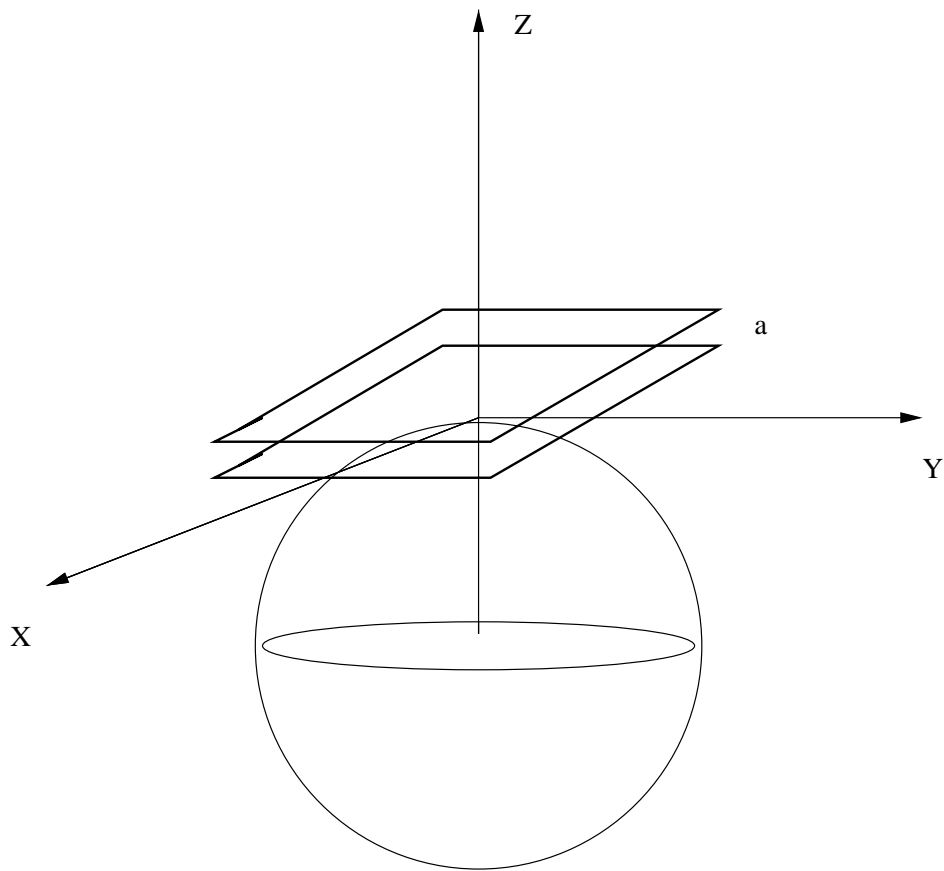
$$\zeta_H(x, \beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n + \beta)^{-x}.$$

Nel limite $z' \rightarrow z^+$ si trova

$$\begin{aligned} \lim_{z' \rightarrow z^+} \langle T^{\mu\nu'} \rangle &= \left(\frac{\pi^2}{720a^4} \right) \text{diag}(-1, 1, 1, -3) \\ &+ \left(\lim_{z' \rightarrow z^+} \frac{1}{\pi^2(z - z')^4} \right) \text{diag}(-1, 1, 1, -3) \end{aligned}$$

✓ il termine che diverge nel limite di coincidenza può essere eliminato “*sottraendo il contributo dello spazio infinito (assenza di lamina)*”

BACKGROUND CURVI



✓ I piatti sono rappresentati dai piani di equazioni $z = 0$ e $z = a$ rispettivamente.

Il generico elemento di linea sarà, (trascurando la rotazione e la curvatura) in coordinate di Fermi

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -c^2 \left(1 + \epsilon \frac{z}{a} \right) dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \mathcal{O}(|x|^2) \\
 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \epsilon \frac{z}{a} c^2 dt^2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

con $\epsilon \equiv 2ga/c^2$, e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Dato $S[A_\mu, \chi, \psi]$

$$S[A_\mu, \chi, \psi] = \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\nabla^\mu A_\mu)^2 + \chi^{;\alpha} \psi_{;\alpha} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (14)$$

$\langle T \rangle$ é dato da

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \langle T_A^{\mu\nu} \rangle + \langle T_B^{\mu\nu} \rangle + \langle T_{\text{gh}}^{\mu\nu} \rangle, \quad (15)$$

con

$$\langle F_{\rho\alpha} F_{\tau\beta} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{4} \left[H_{\alpha\beta';\rho\tau'} + H_{\beta\alpha';\tau\rho'} - H_{\alpha\tau';\rho\beta'} - H_{\tau\alpha';\beta\rho'} - H_{\rho\beta';\alpha\tau'} - H_{\beta\rho';\tau\alpha'} + H_{\rho\tau';\alpha\beta'} + H_{\tau\rho';\beta\alpha'} \right],$$

$$\langle T_A^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left[-\frac{1}{4} \left(g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\tau\rho} \right) g^{\alpha\beta} \langle F_{\rho\alpha} F_{\tau\beta} \rangle \right]$$

$$\langle T_B^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left[-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} + g^{\mu\tau} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\tau\rho}) (H_{\beta\tau';\alpha\rho} + H_{\tau\beta';\rho\alpha'}) \right]$$

$$\langle T_{\text{gh}}^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left[-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) (H_{;\alpha\beta'} + H_{;\beta\alpha'}) \right]$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}(x, x') &\equiv \langle [A_\mu(x), A_\nu(x')]_+ \rangle \equiv H_{\mu\nu}, \\ H(x, x') &\equiv \langle [\chi(x), \psi(x')]_+ \rangle. \end{aligned}$$

$$H(x, x') = -2i[G(x, x') - \bar{G}(x, x')] \quad (16)$$

La funzione $G_{\lambda\nu'}$ è soluzione dell' equazione

$$\sqrt{-g}P_{\mu}^{\lambda}(x)G_{\lambda\nu'} = g_{\mu\nu}\delta(x, x'). \quad (17)$$

l'operatore d'onda P_{μ}^{λ} , è dato da:

$$P_{\mu}^{\lambda}(x) = -\delta_{\mu}^{\lambda}\square_x + R_{\mu}^{\lambda}(x), \quad (18)$$

dove $\square_x \equiv g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}(x)$.

Posto

$$G_{\lambda\nu'} \sim G_{\lambda\nu'}^{(0)} + \epsilon G_{\lambda\nu'}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (19)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \square_x G_{\lambda\nu'} &= g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta G_{\lambda\nu'} = \left(\eta^{\alpha\beta} + \epsilon \frac{z}{a} \delta_0^\alpha \delta_0^\beta \right) \nabla_\alpha \nabla_\beta \left[G_{\lambda\nu'}^{(0)} + \epsilon G_{\lambda\nu'}^{(1)} \right] \\ &= \eta^{\alpha\beta} \left[\partial_\alpha \partial_\beta G_{\lambda\nu'}^{(0)} + \epsilon \partial_\alpha \partial_\beta G_{\lambda\nu'}^{(1)} - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu G_{\mu\nu',\alpha}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu G_{\lambda\nu',\mu}^{(0)} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu G_{\mu\nu',\beta}^{(0)} \right] - \epsilon \frac{z}{a} \delta_0^\alpha \delta_0^\beta \partial_\alpha \partial_\beta G_{\lambda\nu'}^{(0)}. \end{aligned} \quad (20)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{a} (\eta^{\alpha 0} \delta_\beta^0 \delta_\gamma^3 + \eta^{\alpha 0} \delta_\gamma^0 \delta_\beta^3 - \eta^{3\alpha} \delta_\gamma^0 \delta_\beta^0). \end{aligned}$$

Pertanto, al primo ordine in ϵ :

$$\square^0 G_{\mu\nu'}^{(0)} = J_{\mu\nu'}^{(0)}, \quad (21)$$

$$\square^0 G_{\mu\nu'}^{(1)} = J_{\mu\nu'}^{(1)}, \quad (22)$$

dove

$$J_{\mu\nu'}^{(0)} \equiv -\eta_{\mu\nu}\delta(x, x'), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \epsilon J_{\mu\nu'}^{(1)} &\equiv \frac{z}{a}\epsilon \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} + \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \right) \delta(x, x') + 2\eta^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^\tau G_{\tau\nu',\rho}^{(0)} \\ &+ \eta^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^\tau G_{\mu\nu',\tau}^{(0)} - \frac{z}{a}\epsilon G_{\mu\nu',00}^{(0)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{e } \square^0 \equiv \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = -\partial_0^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2.$$

Le condizioni al bordo

$$\vec{E}_t|_S = 0, \quad \vec{H}_n|_S = 0,$$

$$A_{;\mu}^\mu|_S = 0 \Rightarrow A_{;3}^3|_S = (g^{33}\partial_3 A_3 - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^3 A_3)|_S = 0.$$

Al primo ordine in ϵ troviamo:

$$G_{\mu\nu'}^{(0)}|_S = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, \forall \nu',$$

$$\partial_3 G_{3\nu'}^{(0)}|_S = 0, \quad \forall \nu',$$

$$G_{\mu\nu'}^{(1)}|_S = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, \forall \nu',$$

$$\partial_3 G_{3\nu'}^{(1)}|_S = -\frac{1}{2a} G_{3\nu'}^{(0)}|_S, \quad \forall \nu',$$

La soluzione del problema è (all'ordine 0 in ϵ)

$$G_{\lambda\nu'}^{(0)} = \eta_{\lambda\nu'} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} g_{D,N}(z, z'),$$

con

$$g_D(z, z'; \kappa) \equiv \frac{\sin \kappa(az_{<}) \sin \kappa(a - z_{>})}{\kappa \sin \kappa a}, \quad 0 < z, z' < a,$$

$$g_N(z, z'; \kappa) \equiv -\frac{\cos \kappa(az_{<}) \cos \kappa(a - z_{>})}{\kappa \sin \kappa a}, \quad 0 < z, z' < a,$$

mentre al primo ordine abbiamo:

$$G_{\mu\nu'}^{(1)} = \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp)} \Phi_{\mu\nu'}, \quad (25)$$

✓ Le funzioni di Green soddisfano le identità di Ward:

$$G_{\nu';\mu}^\mu + G_{;\nu'} = 0, \quad G_{\nu'}^\mu{}_{;\nu'} + G^{i\mu} = 0, \quad (26)$$

in questo modo siamo sicuri che, a quest'ordine, l'invarianza di gauge è esplicitamente preservata.

posto: $\xi \equiv a\kappa$, $s(\xi) \equiv z\kappa = \frac{z\xi}{a}$ e $s'(\xi) \equiv z'\kappa = \frac{z'\xi}{a}$

$$\Phi^{00'} = \frac{a^2 \sin^{-2}(\xi)}{8\xi^4} \left[-a^2\omega^2 \cos(2\xi - s - s')s^2 + a^2\omega^2 \cos(s) \cos(s')s^2 + \right. \\ \left. \sin(s) \left(a^2\omega^2 ((s^2 - s'^2) \sin(2\xi - s') + (2\xi^2 - s'^2) \sin(s')) - \right. \right. \\ \left. \left. 2(\xi^2 + a^2\omega^2)(s + s') \sin(\xi) \sin(\xi - s') \right) \right]$$

$$\Phi^{03'} = -\frac{ia^3}{2\xi^3} \omega \sin^{-1}(\xi) \sin(s) ((s - s') \cos(\xi - s') - \sin(\xi - s'))$$

$$\Phi^{11'} = \frac{a^2 \sin^{-2}(\xi)}{8\xi^4} \left[a^2\omega^2 \cos(2\xi - s - s')s^2 - a^2\omega^2 \cos(s) \cos(s')s^2 + \right. \\ \left. \sin(s) \left(a^2\omega^2 ((s'^2 - s^2) \sin(2\xi - s') + (s'^2 - 2\xi^2) \sin(s')) - \right. \right. \\ \left. \left. 2(\xi^2 - a^2\omega^2)(s + s') \sin(\xi) \sin(\xi - s') \right) \right]$$

$$\Phi^{22'} = \Phi^{11'}$$

$$\Phi^{30'} = -\frac{ia^3\omega \sin^{-1}(\xi)}{2\xi^3} \left((s' - s) \cos(s) + \sin(s) \right) \sin(\xi - s')$$

$$\Phi^{33'} = \frac{a^2 \sin^{-1}(\xi)}{8\xi^4} \left[2(\xi^2 - a^2\omega^2(s^2 - 1)) \cos(\xi - s') \sin(s) + \right. \\ \left. \cos(s) \left(\csc(\xi) ((\xi^2 - a^2\omega^2(s'^2 - 1)) \cos(2\xi - s') + \right. \right. \\ \left. \left. \cos(s')(- (2a^2\omega^2 + 1)\xi^2 + a^2\omega^2(s'^2 - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. (\xi^2 - a^2\omega^2)(s + s') \sin(2\xi)) \right) + \right. \\ \left. 2(\xi^2 - a^2\omega^2)(s + s') \sin(\xi) \sin(s') \right]$$

Definito $T_{\mu\nu'} \sim T_{\mu\nu'}^{(0)} + \frac{\epsilon}{a} T_{\mu\nu'}^{(1)}$ otteniamo, all'ordine 0

$$\langle T^{(0)\mu\nu'} \rangle = \frac{1}{16 a^4 \pi^2} \left[\zeta_H \left(4, \frac{2a + z - z'}{2a} \right) + \zeta_H \left(4, \frac{z' - z}{2a} \right) \right] \text{diag}(-1, 1, 1, -3)$$

$$\lim_{z' \rightarrow z^+} \langle T^{(0)\mu\nu'} \rangle = \left(\frac{\pi^2}{720 a^4} + \lim_{z' \rightarrow z^+} \frac{1}{\pi^2 (z - z')^4} \right) \text{diag}(-1, 1, 1, -3)$$

Allo stesso modo, al primo ordine in ϵ troviamo:

$$\lim_{z' \rightarrow z^+} \langle T^{(1)\mu\nu'} \rangle = \text{diag}(T^{(1)00}, T^{(1)11}, T^{(1)22}, T^{(1)33}) \\ + \lim_{z' \rightarrow z^+} \text{diag}\left(-z'/\pi^2(z-z')^4, 0, 0, 0\right)$$

con

$$T^{(1)00} = -\frac{\pi^2}{1200 a^3} + \frac{\pi^2 z}{3600 a^4} + \frac{\pi \cot(\frac{\pi z}{a}) \csc^2(\frac{\pi z}{a})}{240 a^3}$$

$$T^{(1)11} = \frac{\pi^2}{3600 a^3} - \frac{\pi^2 z}{1800 a^4} - \frac{\pi \cot(\frac{\pi z}{a}) \csc^2(\frac{\pi z}{a})}{120 a^3}$$

$$T^{(1)22} = T^{(1)11}$$

$$T^{(1)33} = -\frac{(\pi^2 (a - 2z))}{720 a^4}$$

✓ gauge-breaking \rightarrow ghost

ENERGIA CASIMIR

La densità di energia Casimir (ρ) si ottiene proiettando $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ lungo la quadrivelocità della placchetta:

$$\rho = \langle T^{\mu\nu} \rangle u_\mu u_\nu$$

con $u_\mu = (\sqrt{-g_{00}}, 0, 0, 0)$ di modo che

$$\rho = -\frac{\pi^2}{720a^4} + 2\frac{g}{c^2} \left(-\frac{\pi^2}{1200a^3} - \frac{\pi^2 z}{900a^4} + \frac{\pi \cot(\frac{\pi z}{a}) \csc^2(\frac{\pi z}{a})}{240a^3} \right).$$

L'energia Casimir immagazzinata nella placchetta è data da

$$E = \int d^3\Sigma \sqrt{-g} \langle T^{\mu\nu} \rangle u_\mu u_\nu = -\frac{\hbar c \pi^2}{720} \frac{A}{a^3} \left(1 + \frac{5ga}{2c^2} \right),$$

dove A è l'area della placchetta e l'integrale è stato calcolato come valor principale.

FORZA RISULTANTE

Allo stesso modo, la pressione sui due piatti risulta

$$P_{(z=0)} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \left(1 + \frac{2ga}{3c^2} \right), \quad P_{(z=a)} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \left(1 - \frac{2ga}{3c^2} \right)$$

troviamo, quindi, una forza risultante che punta verso l'alto di valore

$$F = \frac{\pi^2 A \hbar g}{180 ca^3}.$$

TRACCIA

Notiamo, inoltre, che dalla espressione di $T^{\mu\nu}$ segue la seguente anomalia di traccia τ :

$$\tau = \frac{\hbar g}{c} \left(\frac{\pi^2 z}{160a^4} - \frac{\pi}{24a^3} \cot\left(\frac{\pi z}{a}\right) \csc^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) \right).$$

Ancora una volta l'integrale di volume di questa densità esiste come valor principale e il risultato è :

$$\int \tau d^3\Sigma = \frac{\pi^2}{360} \frac{\hbar g}{ca^2} A.$$

✠ Tende a zero quando $a \rightarrow \infty$ o $g \rightarrow 0$.

Conclusioni

- Questo è il primo studio del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico di una placchetta Casimir in un campo gravitazionale debole;
- usando le funzioni di Green abbiamo valutato l'influenza dell'accelerazione di gravità sul tensore confermando un precedente risultato in cui si prevedeva una leggera spinta verso l'alto da parte del campo gravitazionale;
- questo risultato è consistente col fatto che l'energia di Casimir, essendo negativa, si comporta in un campo gravitazionale come una massa negativa;
- abbiamo messo in evidenza una anomalia di traccia proporzionale alla accelerazione gravitazionale e che si annulla quando la separazione tra i due piani va all'infinito.
- Sarebbe interessante estendere queste considerazioni nel caso di presenza di (rotazione) curvatura: ordine successivo;
- capire se è possibile evidenziare sperimentalmente l'anomalia di traccia trovata.