

Estensione ai gradi di libertà trasversi dell'approccio statistico alle distribuzioni dei partoni

C. Bourrely, F. Buccella e J. Soffer

Molti anni fa Niegawa e Sisiki e Feynman e Field fecero la seguente osservazione: "Ci sono più \bar{d} che \bar{u} nel protone perché per il principio di Pauli è più difficile produrre una coppia $u\bar{u}$ che $d\bar{d}$, dato che ci sono 2 quark u di valenza e un solo quark d"

Tale affermazione trova conforto nell'evidenza sperimentale di un difetto nella regola di somma di Gottfried:

$$\int_0^1 \frac{F_2^p(x) - F_2^n(x)}{x} dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\bar{u} - \bar{d}) = .235.$$

E nel fatto che è più facile produrre coppie Drell Yan in p-n che in p-p infatti il processo $u\bar{u}$ che è favorito avviene

p	p	p	n
u	\bar{u}	u	\bar{d}
\bar{u}	u	\bar{u}	d

Anche l'andamento ad alti x dei rapporti

$$\frac{F_2^n(x)}{F_2^p(x)} = \frac{4d(x) + u(x) + \dots}{4u(x) + d(x) + \dots} \xrightarrow{x \rightarrow 1} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{g_1^p(x)}{F_1^p(x)} = \frac{4u^\uparrow(x) - 4u^\downarrow(x) + d^\uparrow(x) - d^\downarrow(x) \dots}{4u(x) + d(x) + \dots} \xrightarrow{x \rightarrow 1} < 1$$

indica che ad alti x domina $u^\uparrow(x)$

Se consideriamo le regole di somma

$$u - \bar{u} = 2$$

$$d - \bar{d} = 1$$

$$u^\uparrow - u^\downarrow - d^\uparrow + d^\downarrow + \dots = F + D \approx \frac{5}{4}$$

$$u^\uparrow - u^\downarrow + d^\uparrow - d^\downarrow - 2s^\uparrow + 2s^\downarrow + \dots = 3F - D \approx \frac{3}{5}$$

Limitandosi ai quark di valenza si otterrebbe

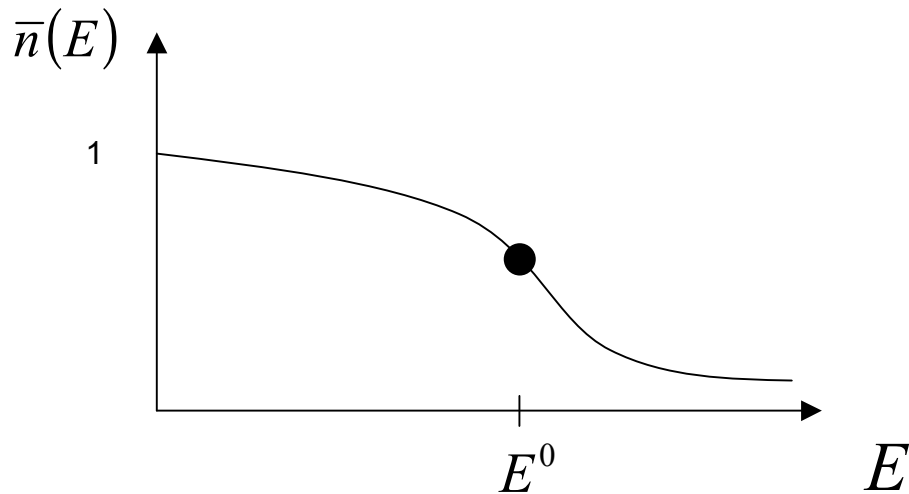
$$u^\uparrow = 1 + F \approx 1.46 \qquad d^\uparrow = \frac{1 + F - D}{2} \approx .335$$

$$u^\downarrow = 1 - F \approx 0.54 \qquad d^\downarrow = \frac{1 - F + D}{2} \approx .665$$

Si vede che il partone $u^\uparrow(x)$ è di gran lunga il più presente

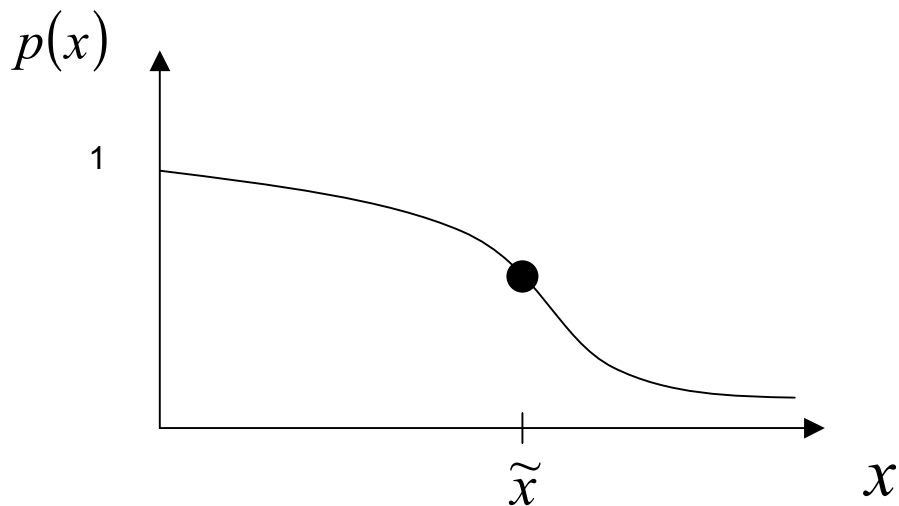
Analogia:

Se in un gas di Fermi degenere l'andamento del numero di occupazione medio è:



Tanto a più alte energie, quanto più stati sono presenti.

Visto che i partoni si ripartiscono l'impulso del protone, possiamo supporre un andamento simile



Con \tilde{x} tanto più grande, quanto più è presente il partone in questione

E' legittimo l'impiego di funzioni di Fermi-Dirac e Bose-Einstein

$$p(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} + 1} \quad e \quad G(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} - 1}$$

Inoltre dati i processi elementari della QCD

$$q^\uparrow \rightarrow q^\uparrow + G^{\uparrow(\downarrow)}$$

$$G^{\uparrow(\downarrow)} \rightarrow q^\uparrow + \bar{q}^\downarrow \quad e \quad q^\downarrow + \bar{q}^\uparrow$$

$$\tilde{x}(G^{\uparrow(\downarrow)}) = 0$$

$$\tilde{x}(q^\uparrow) + \tilde{x}(\bar{q}^\downarrow) = 0$$

$$\tilde{x}(q^\downarrow) + \tilde{x}(\bar{q}^\uparrow) = 0$$

$$xq^\uparrow(x) = \frac{3}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} + 1}$$

$$x\bar{q}^\downarrow(x) = \frac{3}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} + 1}$$

$$xG(x) = \frac{8x}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} - 1}$$

Aggiungiamo la parte diffrattiva, introduciamo una potenza per tutti i termini e modifichiamo l'espressione per essere in accordo con i dati

$$xq^{\uparrow}(x) = \frac{Ax^b \tilde{x}(q^{\uparrow})}{e^{\frac{x-\tilde{x}(q^{\uparrow})}{\bar{x}}} + 1} + \frac{\tilde{A}x^{\tilde{b}}}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} + 1}$$

$$x\bar{q}^{\downarrow}(x) = \frac{\bar{A}x^{2b} \frac{1}{\tilde{x}(q^{\uparrow})}}{e^{\frac{x+\tilde{x}(q^{\uparrow})}{\bar{x}}} + 1} + \frac{\tilde{A}x^{\tilde{b}}}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} + 1}$$

$$xG(x) = \frac{A_G x^{\tilde{b}+1}}{e^{\frac{x}{\bar{x}}} - 1}$$

Dalle condizioni

$$u - \bar{u} = 2$$

$$d - \bar{d} = 1$$

E quella che i partoni fermioni e bosonici portino l'impulso del protone

$$\sum_{i=q,\bar{q},G} \int_0^1 xp_i(x) dx = 1$$

risultano fissati A \bar{A} e A_G

$$A = 1.75$$

$$\bar{A} = 1.91$$

$$A_G = 14.3$$

Restano da determinare per descrivere una selezione di dati molto precisi sulle distribuzioni non polarizzate e polarizzate dei partoni

$$\begin{aligned} \tilde{x}(u^\uparrow) &= .460 & \tilde{x}(d^\downarrow) &= .301 & \tilde{x}(u^\downarrow) &= .298 & \tilde{x}(d^\uparrow) &= .228 \\ \bar{x} &= .1 & b &= .41 & \tilde{b} &= -.25 & \tilde{A} &= .08 \end{aligned}$$

Per spiegare i fattori $[\tilde{x}(q)]^{\pm 1}$ consideriamo uno studio ispirato alla statistica della produzione multiadronica nelle reazioni di altissima energia, ad esempio



Si può pensare che nell'attraversarsi si frenino a vicenda nel sistema del baricentro. Dopo essersi attraversate per la conservazione dell'impulso, la somma delle componenti lungo la direzione iniziale delle particelle che vanno nella direzione opposta siano uguali e se un'interazione ha avuto luogo, inferiore agli impulsi iniziali anche se di poco. Non considerando la particella di massima energia, possiamo scrivere che la somma degli impulsi delle particelle prodotte nella direzione longitudinale sia

$$\sum p_{zi} = \sum x_i p_z < p_z$$

Mentre la somma delle loro energie nell'approssimazione verificata sperimentalmente è dominata dal contributo dei P_{zi}

$$E_i = \sqrt{p_{zi}^2 + p_{Ti}^2 + m_i^2} = p_{zi} + \frac{p_{Ti}^2 + m_i^2}{2p_{zi}}$$

La condizione che le particelle prodotte trasportino una certa percentuale del momento

$$\sum x_i p_z = a p_z$$

$$\sum \frac{p_{Ti}^2 + m_i^2}{2 x_i p_z} = E_T$$

Si ha

$$e^{-Kx_i} e^{-\frac{p_{Ti}^2 + m_i^2}{x_i \mu^2}}$$

Per le singole specie

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\tilde{M}^2} \int e^{-Kx_i} e^{-\frac{p_{Ti}^2 + m_i^2}{x_i \mu^2}} \frac{dx_i}{x_i} dp_T^2$$

Integrando rispetto a p_{Ti}^2

$$\bar{n}_i = \frac{\mu^2}{\tilde{M}^2} \int e^{-Kx_i} e^{-\frac{m_i^2}{x_i \mu^2}} dx_i$$

La funzione da integrare va a 0 per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow \infty$, pertanto ha un massimo e l'integrale può essere approssimato da un integrale Gaussiano

$$f(x) = -Kx - \frac{m_i^2}{\mu^2 x}$$

$$f'(x) = -K + \frac{m_i^2}{\mu^2 x^2}$$

$$f'(x_0) = 0 \quad x_0 = \sqrt{K} \frac{m_i}{\mu}$$

$$f''(x) = -\frac{2m_i^2}{\mu^2 x^3} = -\frac{2m_i^2}{\mu^2} \frac{\mu^3}{K^{3/2} m_i} = \frac{-2\mu}{K^{3/2} m_i}$$

Da cui si ottiene

$$\sqrt{K^{3/2} \frac{m_i}{\mu}} e^{-K^{3/2} \frac{m_i}{\mu}}$$

Si ha inoltre la proprietà:

$$\langle p_{Ti}^2 \rangle = \mu^2 \langle x_i \rangle$$

Inoltre si trova che $\langle p_{Ti}^2 \rangle$ è una funzione crescente della massa della particella prodotta così come confermato dagli esperimenti

Queste considerazioni possono essere applicate anche alle distribuzioni dei partoni.

Infatti nel regime profondamente anelastico si considera

$M \ll P_z$ che implica

$$E_p = \sqrt{p_z^2 + M^2} = p_z + \frac{M^2}{2p_z}$$

La stessa approssimazione può essere assunta per i partoni

$$E_i = \sqrt{p_{zi}^2 + p_{Ti}^2 + m_i^2} = p_{zi} + \frac{p_{Ti}^2 + m_i^2}{2p_{zi}} = x_i p_z + \frac{p_{Ti}^2 + m_i^2}{2x_i p_z}$$

Insieme alla condizione usuale

$$\sum_i \int x p_i(x, p_T^2) dx dp_T^2 = 1$$

si ha anche

$$\sum_i \int \frac{p_T^2 + m_i^2}{x} p_i(x, p_T^2) dx dp_T^2 = M^2$$

Le distribuzioni per i quark leggeri dovrebbero essere

$$x q^\uparrow(x, p_T^2) = \frac{f(x)}{e^{\frac{x - \tilde{x}(q^\uparrow)}{\bar{x}} + 1}} \frac{1}{e^{\frac{p_T^2}{x\mu^2} - \tilde{Y}(q^\uparrow)}}$$

È ragionevole assumere la proporzionalità $Y(q^\uparrow) = Kx(q^\uparrow)$

La proporzionalità $\tilde{Y}(q^\uparrow) = K\tilde{x}(q^\uparrow)$

significa che i partoni che hanno una distribuzione in x più larga, per un dato x hanno anche una distribuzione in p_T più larga.

Integrando per p_T^2 fino all'infinito si ottiene

$$xq^\uparrow(x) = \int_0^\infty xq^\uparrow(x, p_T^2) dp_T^2 = \frac{f(x)\mu^2}{e^{\frac{x-\tilde{x}(q^\uparrow)}{\bar{x}}} + 1} \int_0^\infty \frac{dy}{e^{y-\tilde{Y}(q^\uparrow)}}$$

$$= \frac{f(x)\mu^2 R[\tilde{Y}(q^\uparrow)]}{e^{\frac{x-\tilde{x}(q^\uparrow)}{\bar{x}}} + 1}$$

$R(z)$ è la funzione di Riemann

$$R(z) = \log(1 + e^z) \approx \begin{cases} z & \text{Per valori di } z \text{ grandi positivi} \\ e^{-z} & \text{Per valori di } z \text{ grandi negativi} \end{cases}$$

Per i quark nel limite di grande $\tilde{Y}(q^\uparrow)$

$$= \frac{f(x)\mu^2 K\tilde{x}(q^\uparrow)}{e^{\frac{x-\tilde{x}(q^\uparrow)}{\bar{x}}} + 1} \quad !!$$

Per \tilde{Y} negativi, come per il caso degli antiquark, abbiamo un fattore più piccolo per \tilde{Y} più negativi in modo simile a quanto avviene per il fattore spurio introdotto

Possiamo fissare $K \sim 4$ in modo tale che il rapporto $\frac{\bar{u}}{\bar{d}}$ (per piccoli x) risulti essere così come confermato per la produzione Drell Yan per piccoli x per gli antiquark

Per la parte diffrattiva si può assumere un potenziale nullo. Tuttavia si ha un contributo divergente per

$$\left\langle \frac{p_T^2}{x} \right\rangle$$

Questo andrebbe regolarizzato mettendo un limite inferiore su p_T^2 , legato al “principio d’indeterminazione” che proibisce di fissare $p_T=0$

L'estensione ai gradi di libertà trasversi apre alla possibilità dello studio dei sapori pesanti.

In questo caso la massa non va trascurata e l'espressione

$$x s^\uparrow(x, p_T^2) = \frac{f(x)}{e^{\frac{x-\tilde{x}(s^\uparrow)}{\bar{x}}} + 1} \frac{1}{e^{\frac{p_T^2 + m_s^2}{x\mu^2} - \tilde{Y}(s^\uparrow)}}$$

Integrando su p_T^2 si ottiene

$$x s^\uparrow(x) = \frac{x\mu^2 f(x)}{e^{\frac{x-\tilde{x}(s^\uparrow)}{\bar{x}}} + 1} R\left[-\frac{m_s^2}{x\mu^2} + \tilde{Y}(s^\uparrow)\right]$$

Che decresce rapidamente per piccoli x

Pertanto ci aspettiamo un aumento con x del rapporto

$$\frac{\bar{s}(x)}{\bar{u}(x) + \bar{d}(x)}$$

che dipende dal limite inferiore su p_T^2

Conclusioni

- L'estensione ai gradi di libertà trasversi conduce al fattore

$$R \left[Y \left(q^\uparrow \right) \right] \rightarrow Y \left(q^\uparrow \right) = Kx \left(q^\uparrow \right) \quad ***$$

considerando che il fattore

$$R \left[- Y \left(q^\uparrow \right) \right] \rightarrow e^{-Y \left(q^\uparrow \right)}$$

da confrontare con

$$\frac{1}{Y \left(q^\uparrow \right)}$$

E' possibile fissare K in modo da ottenere lo stesso rapporto

$$\frac{\bar{u}(x \approx 0)}{\bar{d}(x \approx 0)} \quad **$$

- Il limite inferiore su p_T^2 per il principio d'indeterminazione è necessario per regolarizzare la distribuzione dei gluoni ed il contributo loro e della parte diffrattiva dei fermioni a $\left\langle \frac{p_T^2}{x} \right\rangle$ *
- Si apre la possibilità dell'estensione ai sapori pesanti *