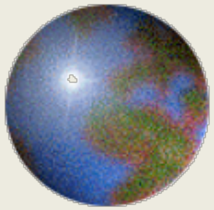
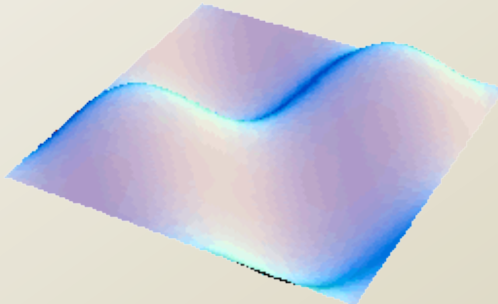


Dall'esperienza alle idee

Storie di famiglia



E’ chiaro che in origine le attività dell’uomo erano totalmente di tipo pratico, legate alla necessità di procurare cibo e condizioni di vita più favorevoli a se stesso ed alla propria prole. E’ per scopi pratici che l’homo sapiens ha iniziato il suo cammino di ispezione e modifica a suo vantaggio dell’ambiente esterno.

Luna crescente o plenilunio?

Aveva sicuramente la capacità di fare confronti in merito a ***quantità***, ***grandezza*** e ***forma***, perché tali capacità erano già presenti in una specie precedente quella umana, e, come sembra, sono presenti anche in alcune specie animali attuali (corvi o altri uccelli).

Homo numericus

Quando, al di là di ogni evidenza, si arriva ad accettare che giorno = pietra, nasce l'idea di APPLICAZIONE.

E quando un ulteriore passaggio porta a sostituire la pietra con un'intaccatura, SEGNO, non preesistente, personale, inventato, volontario, si entra in una magica sala di attesa.

E quando una stessa sequenza di intaccature serve ad indicare indifferentemente un gregge di pecore da mungere, o un branco di lupi uccisi, o un mucchio di radici da piantare, o l'intervallo tra due pleniluni…,

vuol dire che è nata l'idea di NUMERO.

E non si conosceva ancora l'uso dei metalli, non si conosceva la ruota, non c'era la scrittura! Saranno lussi del 4000 a.C. E qui siamo a 30000 anni fa! Ancora nell'età della pietra!

Temi di riflessione

Il passaggio dai segni numerici alle parole che designano i numeri stessi, ed a una loro scrittura soddisfacente è molto laborioso e quindi lungo. Ciò è legato alla necessità di un *linguaggio* sufficientemente sviluppato per esprimere concetti astratti, alla difficoltà di inventare una *numerazione* con un fissato numero base, alla difficoltà di concepire una scrittura del numero in cui i simboli avessero un valore legato anche alla *posizione* occupata (scrittura posizionale).

Homo pauper sed elegans

Tracce di un primordiale istinto geometrico si ritrovano in disegni, graffiti e decorazioni di terraglie e vari manufatti. Si nota una certa ricerca di relazioni spaziali e la presenza di congruenze e simmetrie non sempre giustificate dal rendere più agevole l’uso di un oggetto, ma piuttosto dal puro gusto, da un bisogno di armonia di linee.
Tutto ciò prima che l’homo sapiens avesse la necessità di misurare terreni (come vuole Erodoto) o di tracciare piante per la costruzione di templi (come vuole Aristotele).

Homo potamicus

Homo potamicus

Passano i millenni. L'homo sapiens continua il suo cammino di civiltà, impiega i metalli, inventa la ruota e la scrittura.
In Egitto, Mesopotamia, India e Cina si hanno gli sviluppi più consistenti. Nasce l'esigenza di una numerazione sempre più agile, di misurazioni sempre più accurate, di metodi di calcolo sempre più elaborati sia per dividere pagnotte tra operai (vedi papiro di Rhind), sia per misurare e confrontare aree, per determinare date onde poter fare previsioni di piene e straripamenti, per fissare confini precedenti onde poterli ridisegnare dopo una piena (Nilo, Tigri, Eufrate).

Nascono e si sviluppano conoscenze in ambito di astronomia, alchimia ed anche geometria, aritmetica, algebra.

Nel papiro di Mosca (1890 a.C.) il problema 14 espone il calcolo del volume di un tronco di piramide a basi quadrate. La formula non compare, ma il risultato è esatto.

I pochi documenti mostrano che gli egizi usavano alcune frazioni, avevano rudimenti di trigonometria, di operazioni su proporzioni, di equazioni lineari.

Tutto ad uno stadio per noi poco soddisfacente, perché manca l'idea di precisione, ossia non è ben chiara la consapevolezza di certe approssimazioni, e manca l'idea di dimostrazione formale rigorosa.

Si tratta di, più o meno, abili procedimenti **numerici** applicati a problemi **specifici**.

Che babilonia!

La tavoletta Plimpton 322 (circa 1800 a.C.) è in scrittura cuneiforme. Appartiene alla collezione di G.A. Plimpton alla Columbia University.

Numerose tavolette di argilla testimoniano che sumeri e babilonesi conoscevano tutte le frazioni, ed adottarono anche per esse la scrittura posizionale. Ciò facilitò il raggiungimento di un buon grado di precisione nei calcoli.

Statuetta sumera.

Svilupparono molti algoritmi, tra cui uno per l'estrazione della radice quadrata, e un'algebra agile, che consentiva di risolvere equazioni anche di terzo grado, una sorta di tavole logaritmiche, ma senza un numero da usare sistematicamente come base.
Conoscevano le terne pitagoriche e sapevano che un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.
Alcuni problemi lasciano intravedere che essi avessero nozioni di similitudine.
Sapevano fare abilmente tante belle cose, MA…

Ciò che mancava alla pratica di conteggi e di misurazioni sia egizie che mesopotamiche era la presenza di una attività intellettuale specifica ed unitaria che supportasse ogni sia pur geniale artificio ed ogni sia pur accurata tabulazione. Mancavano i principi di base, e la discussione filosofica di essi.

Dai fiumi al mare

Dai fiumi al mare

Nel periodo 800 a.C. - 800 d.C. i centri di sviluppo del sapere si spostano nelle terre bagnate dal Mediterraneo: Ionia e Grecia.

Si incontrano figure come Talete di Mileto, Pitagora di Samo.

Talete (624-548 a.C.) viene presentato da Eudemo di Rodi, secondo quanto dice Proclo, come *il primo vero matematico, colui che ha iniziato ad usare il procedimento deduttivo nelle dimostrazioni, ed ha insegnato ai suoi successori i principi basilari di un metodo generale, sia deduttivo che empirico.*

A parte le leggende, di lui si sa poco, ma è molto probabile, per la stima di cui godeva fra i greci della sua epoca e successiva, che abbia dato un notevole contributo iniziale alla *organizzazione razionale* della matematica.

Pitagora, venuto dopo di lui, trasformò questa scienza in una forma di educazione liberale, riconducendone i principi a idee ultime e dimostrandone i teoremi in maniera astratta e puramente intellettuale. Fu lui a scoprire la teoria delle proporzioni e la costruzione delle figure cosmiche

Proclo

Tutto è numero

E’ il presunto motto della scuola fondata a Crotone da Pitagora di Samo (580-500 a.C.) di ritorno da molti viaggi in Egitto, a Babilonia e, pare, anche in India, viaggi informativi sugli sviluppi locali della conoscenza e formativi di una personalità così notevole.

La scuola era una sorta di società segreta per pochi iniziati, dove sia i risultati delle indagini speculative che i beni materiali erano in comune.

La dottrina sosteneva che tutte le cose che si possono conoscere hanno un numero, e quindi ogni fenomeno di fisica, astronomia, biologia, musica è comprensibile in termini di numeri.

L’aritmetica è la base di unificazione di ogni sapere.

Si determina con il pensiero pitagorico un decisivo cambio di direzione rispetto a quello egizio-babilonese, che usava numeri e figure per problemi specifici di vita pratica.
Qui c’è la conoscenza per amore della conoscenza, vittoria completa del generale-astratto sullo specifico-concreto.
Sembra che i termini stessi di “matematica” e “filosofia” siano dovuti a Pitagora.
Così anche l’idea di un universo ordinato in maniera armoniosa (cosmo).
E così ancora le osservazioni sui suoni prodotti dalle corde vibranti con rapporti di lunghezza opportuni, spore delle future leggi dell’acustica.

Temi di riflessione

Carl B.Boyer, nella sua Storia della Matematica, dice che:

I pitagorici furono tra i primi a ritenere che il modo di operare della natura potesse essere capito per mezzo della matematica.

L’influsso del pensiero cosmologico pitagorico nello sviluppo dell’astronomia: il fuoco centrale di Filolao, l’eliocentrismo di Aristarco contrastato da Archimede, . …, Copernico, Keplero, Galileo ….

I dubbi metafisici di Socrate

Non posso sentirmi soddisfatto quando so che, se si aggiunge uno a uno, l'uno con cui viene fatta l'addizione diventa due, o che le due unità sommate insieme fanno due. Non riesco a capire come avvenga che, quando erano separate l'una dall'altra, ciascuna di esse era uno, e non due, ed ora, quando sono unite insieme, la loro giustapposizione o il loro semplice incontro debba essere la causa del loro diventare due.

Dal *Fedone* ***Bibl***. *Dialogues of Plato*, 1875, vol I pp. 476-477

Questa aritmetica ad oltranza, questa personificazione e mitizzazione del numero da un lato incanta per l'ordine e l'armonia che genialmente disegna, ma dall'altro produce un senso di sconcerto.
Un mondo **discreto** è difficile da manovrare, un mondo costituito da atomi numerici pensabili sia come punti dello spazio che come istanti di tempo.
Lo scandalo degli incommensurabili e i paradossi di Zenone mettono in evidenza che la ***discrezione*** del mondo dei numeri mal si accorda con la naturale, intuitiva, **continuità** del mondo delle grandezze. Quest'ultimo necessita di un metodo di trattamento più fluido, più flessibile, più morbido: il metodo geometrico.

Temi di riflessione

Il problema degli infinitesimi: il metodo di esaustione di Eudosso, Archimede, il metodo degli indivisibili di Cavalieri, …, il calcolo infinitesimale.

Un insegnante di successo

Nel 306 a.C. dopo lotte seguite alla morte di Alessandro Magno (323) che aveva favorito, con lo sviluppo culturale, una sapiente amalgama di costumi e idee orientali ed elleniche, la parte egiziana del distrutto impero viene affidata a Tolomeo I, sovrano illuminato.

Tolomeo fonda ad Alessandria lo splendido Museo, scuola-accademia che subentra, come ruolo, all'Accademia di Atene, dove avevano insegnato Platone ed Aristotele.

In questa scuola chiama ad insegnare studiosi "di chiara fama". Tra questi Euclide.

Euclide era un abile divulgatore, pare avesse una grande capacità espositiva e modi gentili e suadenti.
Era un vero **INSEGNANTE**.
Scrisse molte opere che trattavano argomenti di astronomia, ottica, musica, meccanica, geometria.
Ci sono giunti **Elementi**, **Dati**, **Divisione delle figure**, **Fenomeni**, **Ottica**.

Gli **Elementi** non sono un manuale conclusivo, ma introduttivo allo studio della matematica. Tra quelli del suo genere, è l'unico che è rimasto nel tempo, proprio per l'abilità architettonica con cui è stato scritto.

Si compone di 13 libri:

I÷VI	geometria piana elementare
VII÷IX	teoria dei numeri
X	segmenti incommensurabili
XI÷XIII	geometria solida

Il libro I inizia senza introduzione, presentando in maniera lapidaria, come il primo tema della Quinta, 23 *definizion*i tra cui:

un punto è ciò che non ha parti,
una linea è una lunghezza senza larghezza.

Seguono 5 *postulati,* che vanno accettati come verità evidenti.

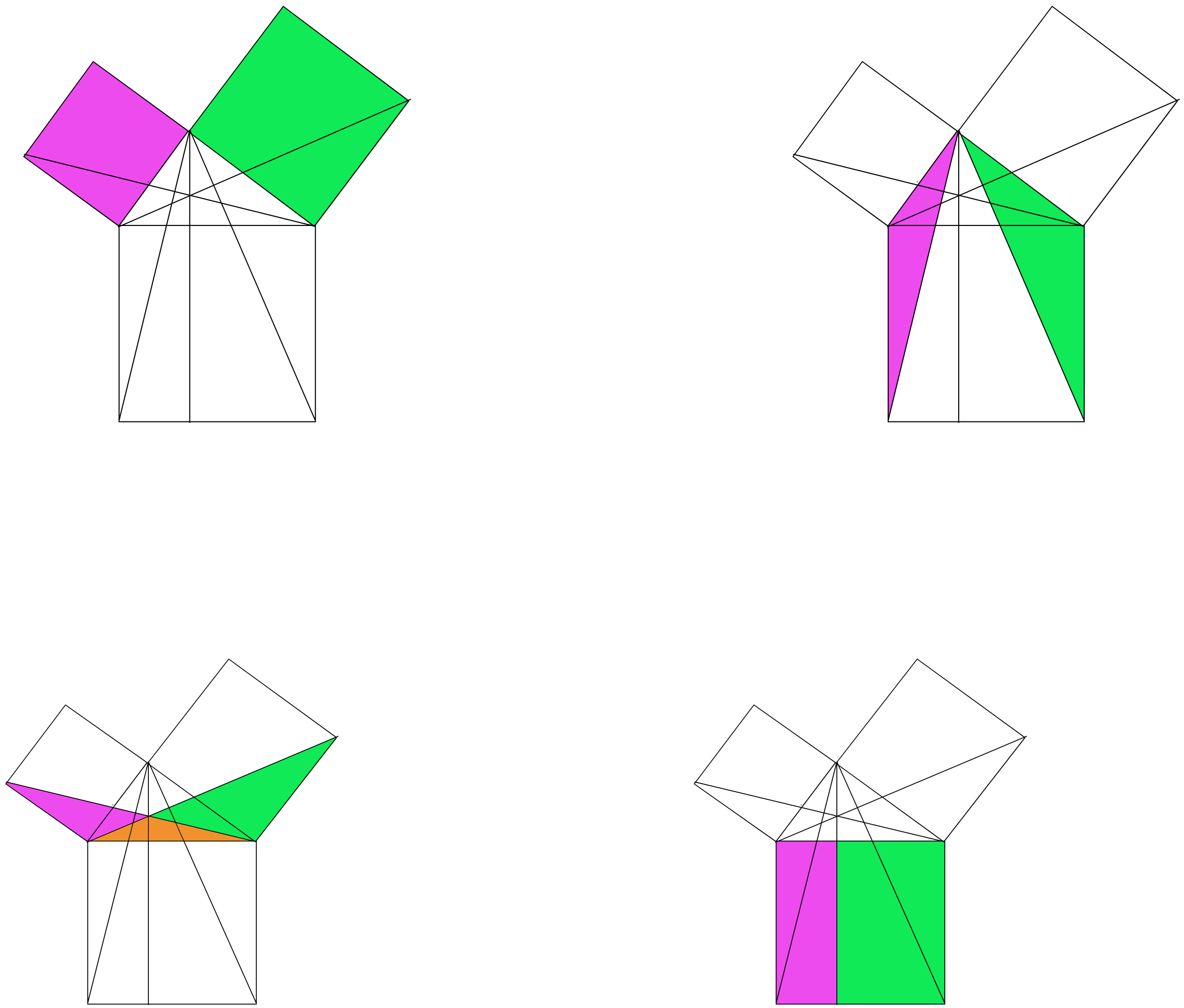
Seguono 5 *nozioni comuni* tra cui:

cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una con l'altra (principio di identità aristotelico),
il tutto è maggiore della parte.

Seguono proposizioni familiari ad uno studente di scuola media, i criteri di congruenza dei triangoli e il teorema di Pitagora in doppia versione (proposizioni 47 e 48) dimostrato in maniera da evitare l'uso delle proporzioni, per le difficoltà implicite nella commensurabilità.

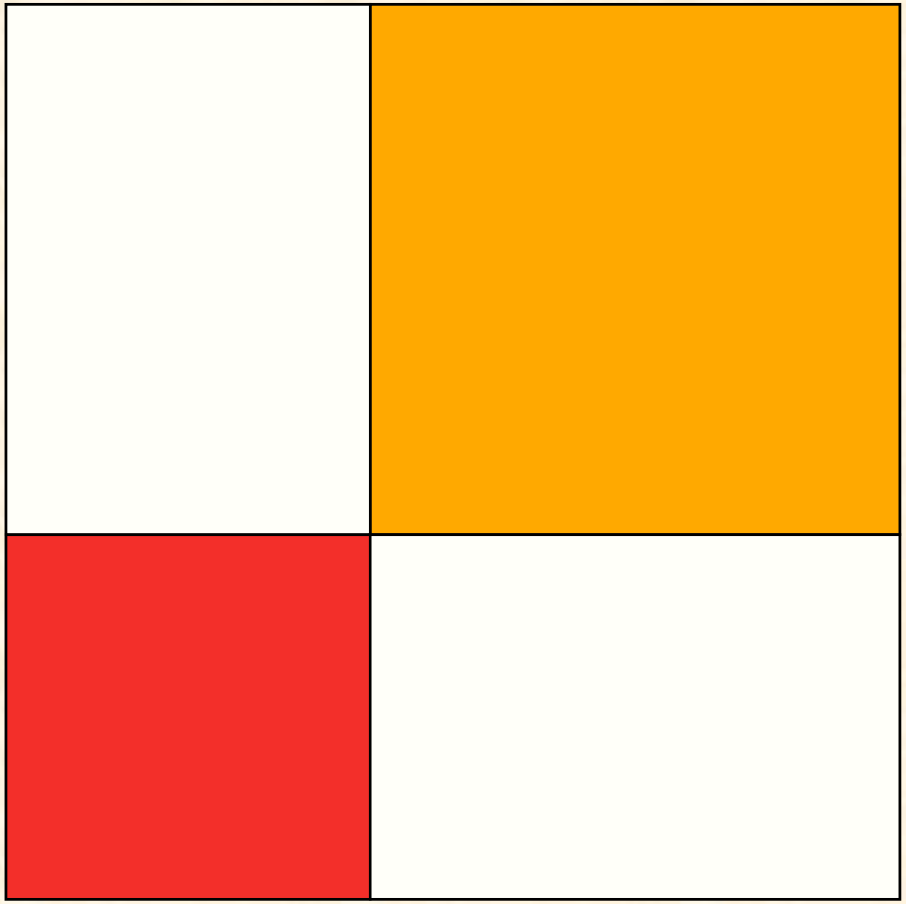
E' nel libro V che Euclide espone la teoria delle proporzioni, dovuta a Eudosso, con un rigore degno di grande ammirazione. Idem per il libro X sugli incommensurabili.

Nei libri sui numeri ogni numero è rappresentato da un segmento, e si dice "*AB è misurato da CD*" oppure "*CD misura AB*", al posto di *"multiplo di"* e *"sottomultiplo di"*.



Proposizione n. 47 del libro I degli *Elementi*

Il libro II ha 14 proposizioni, oggi non usate perché oggi possediamo l’algebra simbolica e la trigonometria, però è interessante vederne qualcuna come la n. 4 in figura.



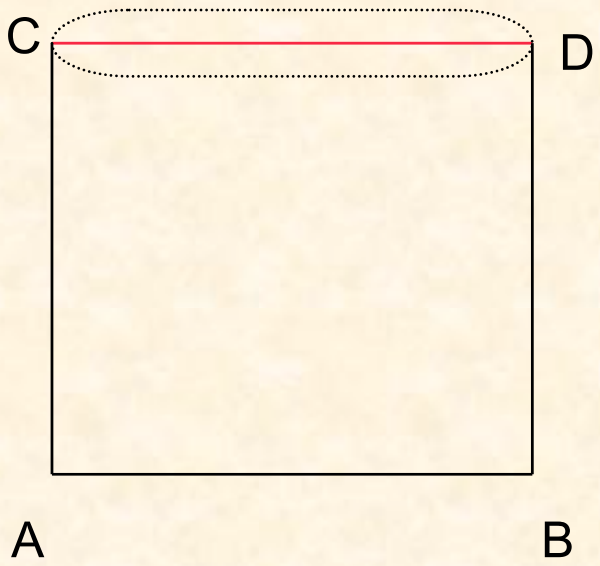
I postulati

1) si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi;
2) si possa prolungare indefinitamente una retta;
3) si possa descrivere un cerchio…;
4) tutti gli angoli retti siano uguali;
5) se una retta che interseca altre due rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due retti, le due rette prolungate si incontrano da quella parte.

Evidenza misteriosa

L'ultimo dei cinque postulati non sembrava essere una verità così evidente, anche allo stesso Euclide, che ne fece uso solo dopo molte proposizioni. Studiosi successivi tentarono allora di dimostrarlo, e la questione si protrasse per molti secoli. Nei primi anni del '700 si pensò di affrontare il problema con un diverso ragionamento: ***per assurdo***.

Ipse dixit

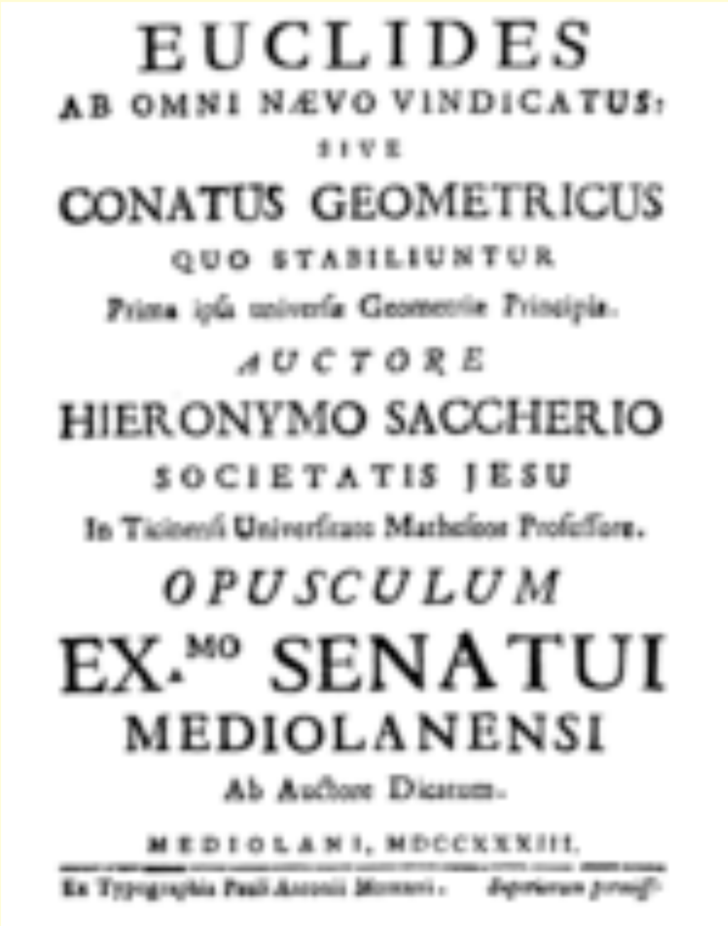


Gli angoli in C e in D sono uguali e sono:

1) acuti
2) retti
3) ottusi.

G. Saccheri voleva provare che la negazione del V postulato porta ad una contraddizione.
Esaminò ciascuno dei due modi di negare la tesi di Euclide. In uno dei due casi trovò anche numerosi, interessanti ed armoniosi risultati, coerenti tra di loro, ma non con quelli euclidei. La profonda e cieca fiducia nell’opera di Euclide gli impedì di trarre le giuste conclusioni.

Aria di novità


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Ma i tentativi di Saccheri, e di altri dopo di lui, avevano aperto la strada proprio alla ipotesi di non dimostrabilità del quinto postulato ed all'idea nuova che **la validità di una geometria si fonda sulla sua non contraddittorietà logica e non sulla sua evidenza intuitiva**.

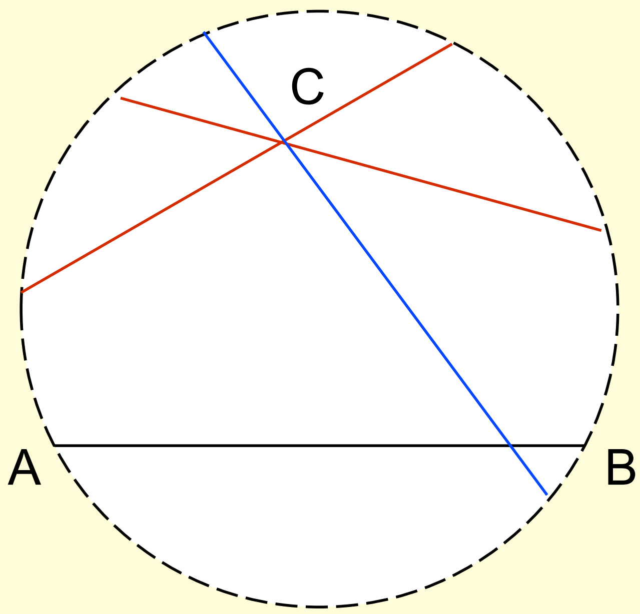
Tu sarai postulato in eterno

Nel XIX secolo il clima culturale è dinamico e fecondo.

Esigenza di **rigore logico** e ricerca di **universalità** preparano alla nascita dell'**impostazione assiomatica** delle varie discipline matematiche, ed alla ricerca di **modelli unificanti** interni alle varie scienze applicate.

Una maggiore flessibilità intellettuale rende possibile a due studiosi coraggiosi, in maniera indipendente l'uno dall'altro, di ridare all'opera di Euclide il suo giusto valore di modello di una possibile teoria geometrica, bella, comoda, maneggevole, ma non unica.

Nicolaj Ivanovic Lobacevskij



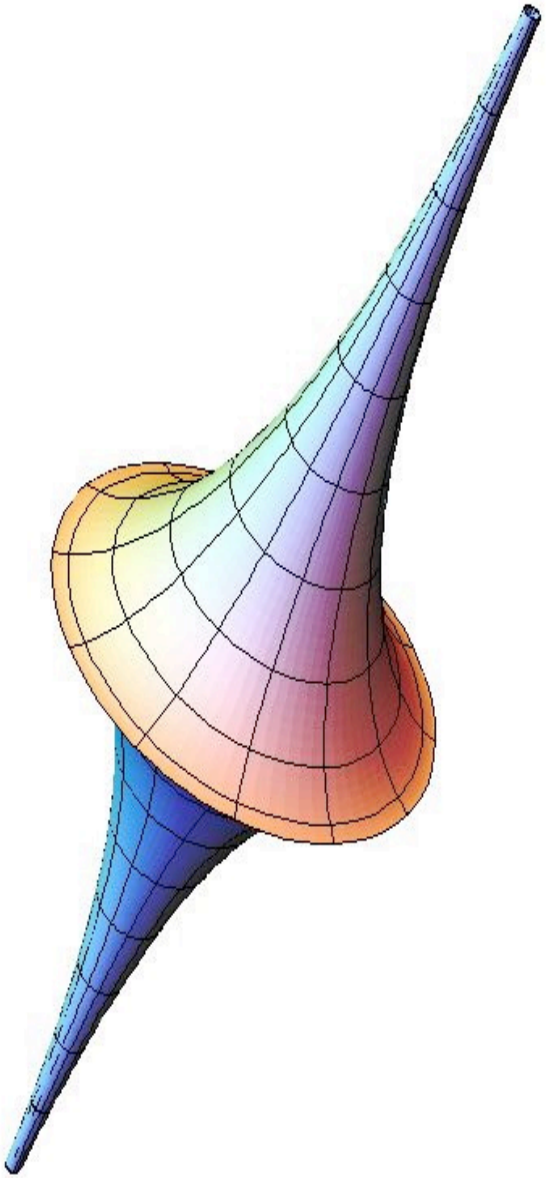
Modello di Klein

Nel 1829 pubblica sulla Gazzetta di Kazan il saggio *Sui principi della geometria,* in cui al mitico V postulato euclideo sostituisce:

per un punto C fuori di una retta AB si può tracciare, nello stesso piano, più di una retta che non incontri la retta AB

e riesce a costruire una teoria geometrica armoniosa, priva di contraddizioni logiche. Modelli per tale geometria, detta *iperbolica,* furono dati da Beltrami, Klein, Poincaré.

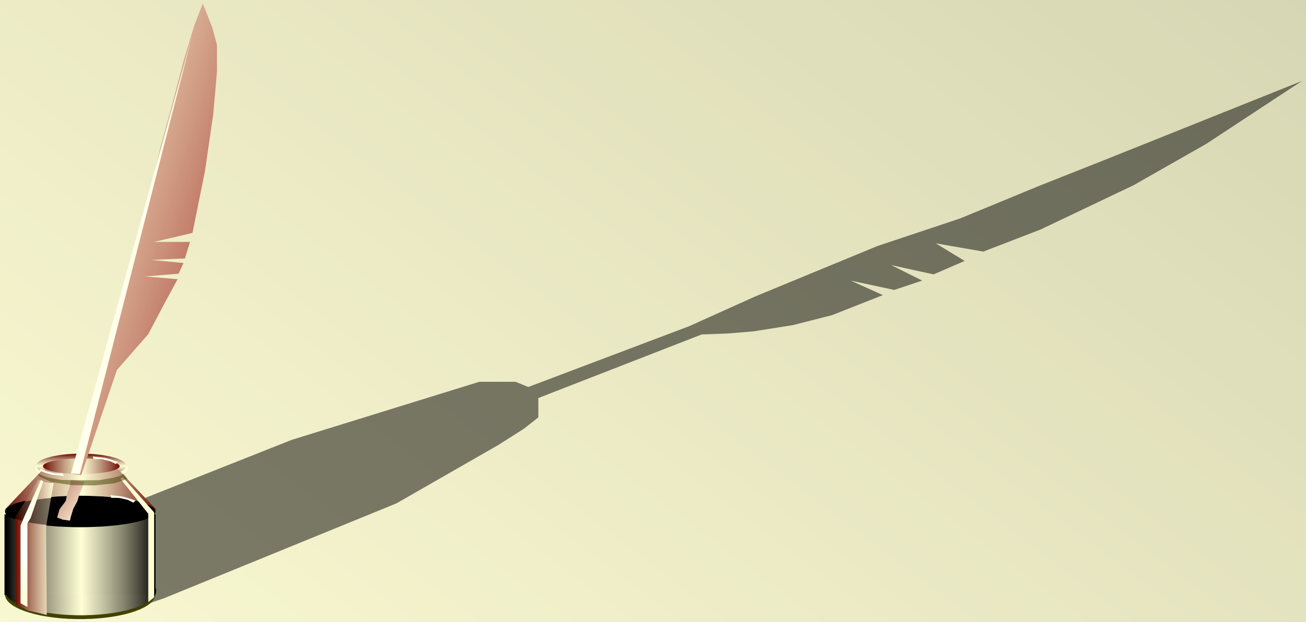
Jànos Bòlyai



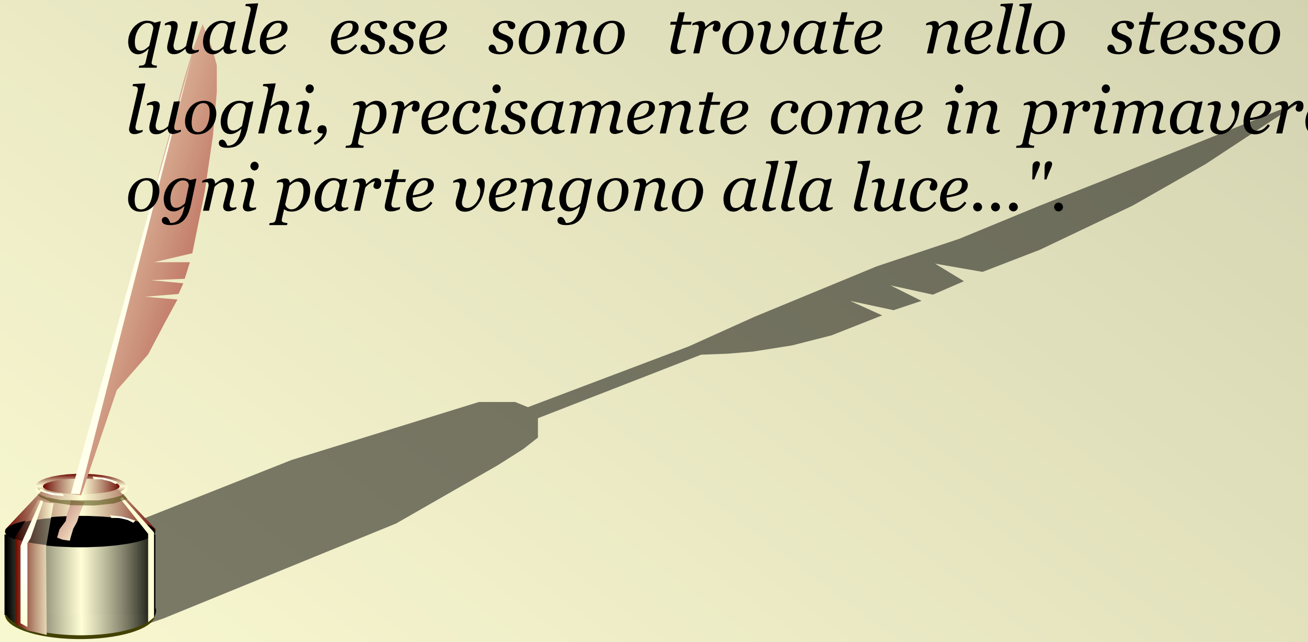
La cuffia della nonna

Al padre, amico di Gauss, non sorrideva l'idea che il giovane dedicasse tempo al problema delle parallele, per cui lui stesso aveva perso la testa.
Ma Jànos non si lasciò convincere, ed elaborò la *Scienza assoluta dello spazio,* partendo dallo stesso postulato di Lobacevskij, ma indipendentemente.
Il suo elaborato fu pubblicato nel 1832, come appendice ad un lavoro del padre, che voleva proteggerlo dal rischio di critiche.

Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch’esso può rubarti tutto il tuo tempo e privarti della salute, della serenità di spirito, e della felicità.



"…se la cosa è perfettamente riuscita, è conveniente affrettarsi a renderla di pubblica ragione per due motivi: primo perché le idee passano facilmente da uno all'altro, che in seguito le può pubblicare prima; in secondo luogo, perché c'è anche qualche verità in questo fatto, che parecchie cose hanno un' epoca, nella quale esse sono trovate nello stesso tempo in più luoghi, precisamente come in primavera le violette da ogni parte vengono alla luce…".



Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria

E’ il titolo della tesi che Riemann presentò nel 1854, per l’abilitazione alla docenza, all’Università di Gottinga. In essa sosteneva essere il concetto di **metrica** quello che determina il tipo di ambiente geometrico. Ad esso si può ricondurre il concetto di retta (come **geodetica)** e di **curvatura** di una superficie**.** L’ambiente piano diventa allora una superficie a curvatura costante **k,** e la geometria in esso sviluppata sarà quella euclidea se **k** è nulla, quella iperbolica se **k** è negativa, mentre se **k** è positiva si avrà una geometria detta *ellittica.* Si ottiene in tal modo una unificazione tra le nuove geometrie e quella euclidea.

L’idea di Riemann dello studio generale di uno spazio metrico curvo produce effetti che vanno molto al di là di questa, sia pur piacevole, unificazione di geometrie.

E’ l’idea che ha reso possibile ad Albert Einstein di organizzare la sua teoria. Lo spazio-tempo, ambiente della teoria della relatività generale, è infatti uno spazio semi-riemanniano di dimensione 4.

E questo è solo uno dei tanti esempi di come un’idea solo teorica possa servire da “esperienza” per un’altra idea, che trova applicazione, in un certo senso, pratica.

E la teoria dei gruppi?

E’ teoria pura, nata all’interno della matematica, prima, e indipendentemente dal fatto, che i fisici vi si appoggiassero pesantemente per creare ordine nel mondo subnucleare, popolato di particelle che vivono per milionesimi di miliardesimi di secondo. E la loro esistenza e le loro trasformazioni possono essere previste proprio in base alle simmetrie che la teoria suddetta suggerisce.
E’ così che, tanto per fare un nome, Luciano Maiani è riuscito ad ipotizzare l’esistenza del **quark c,** una particella elementare che successivamente è stata confermata sperimentalmente.

E la teoria dei nodi?

Le topoisomerasi sono enzimi che intervengono, con operazioni di **tagli e cuci,** durante il processo di replicazione della molecola del DNA, ultraannodata dentro ogni nostra cellula. Per studiare tale azione, la si riproduce su un piccolo **tratto** chiuso del DNA, e si osserva come cambia la sua **configurazione**. Ma il tratto chiuso è, geometricamente, un **nodo,** e il cambio di configurazione si traduce in un cambio di **classe** nell’ambito della **topologia,** ramo della geometria.

E la teoria dei numeri?

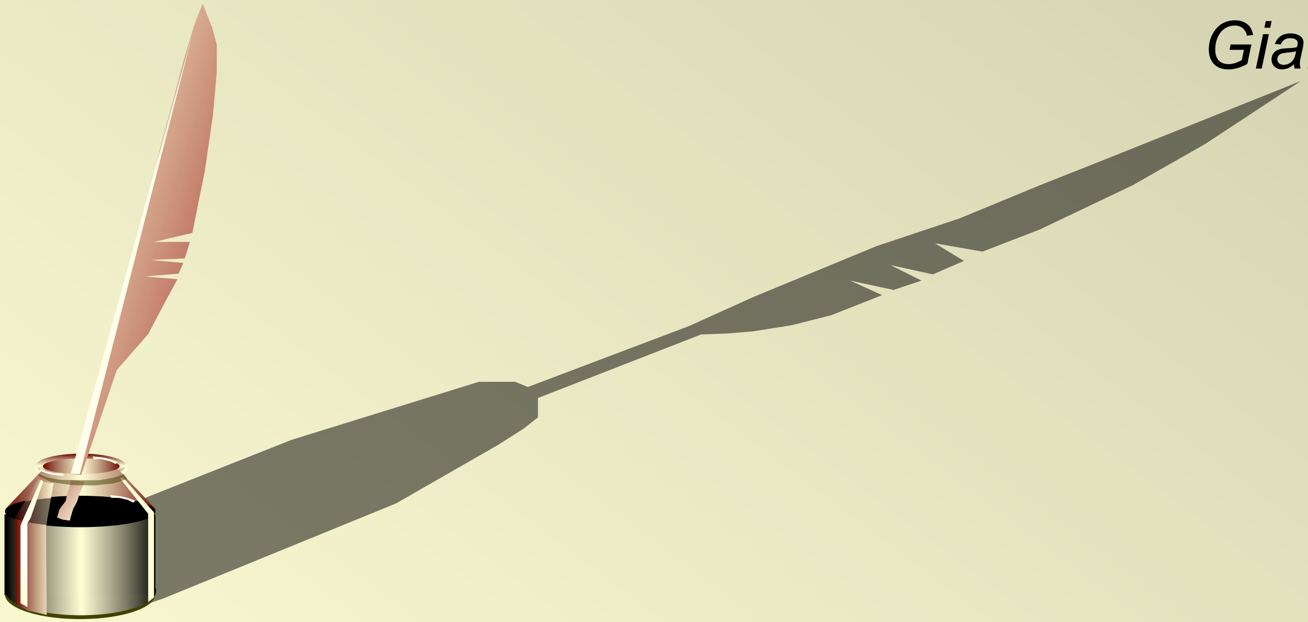
E’ forse la più antica tra le discipline matematiche, ritenuta da sempre un semplice gioco pieno di fascino e di mistero.

Così anche è molto antica la crittografia, utilizzata per esigenze di segretezza militare e commerciale.

Oggi che le reti di comunicazione digitale consentono transazioni a distanza, bancomat, firma digitale, alla crittografia si richiede di diventare sempre più affidabile. E ciò si realizza “pescando” nella teoria dei numeri algoritmi che richiedano tempi lunghissimi di calcolo.

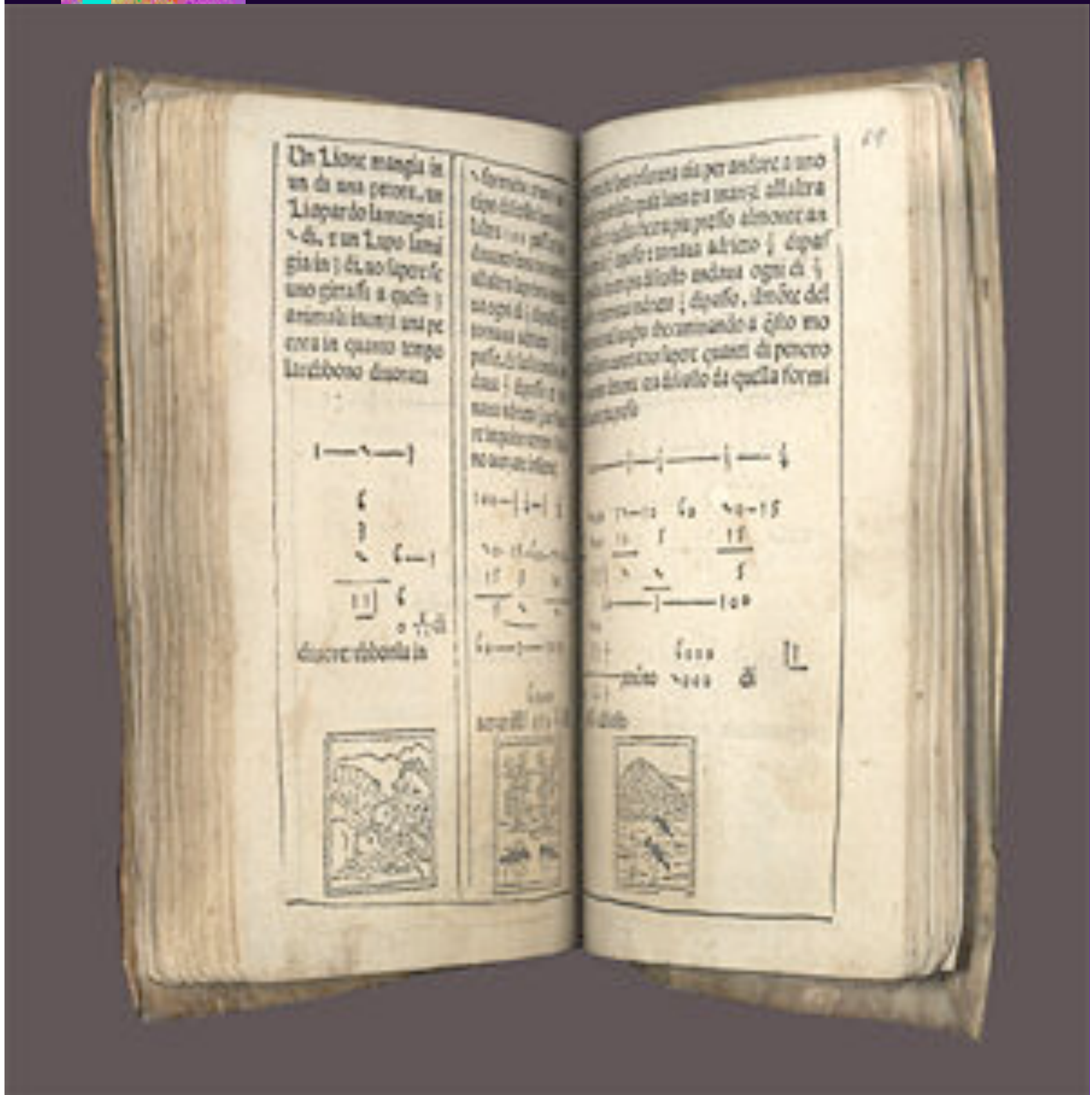
La matematica ha un ruolo centrale nella cultura...
L'ideale di tutta la scienza è di diventare matematica.
L'ideale delle leggi fisiche è di diventare teoremi matematici, la matematica è *the end of science.*

Giancarlo Rota



Dal libro di M.Fontana *Percorsi calcolati*

BIbliografia



Carl B. Boyer
Storia della matematica
oscar saggi Mondadori

Michela Fontana
Percorsi calcolati
Le Mani