

Il mondo in cui viviamo

Il modo in cui lo vediamo/
conosciamo

Dalle esperienze alle idee

Dalle idee alla comunicazione
delle idee

*Quando sono curioso di una cosa, matematica o no, **io le faccio delle domande**. Faccio delle domande, senza preoccuparmi se sono stupide o lo sembreranno, senza pensarci troppo. Spesso la domanda prende la forma di un'affermazione che, in verità, è piuttosto un colpo di sonda. Ci posso credere più o meno, alla mia affermazione, e questo dipende ovviamente dal punto a cui sono giunto come comprensione del problema. Spesso, soprattutto all'inizio di una ricerca, l'affermazione è completamente sballata, **eppure bisognava formularla per convincersene**.*

Ipotesi-congetture

Spesso, *basta scriverla perché salti agli occhi che è sbagliata*, eppure prima di scriverla c'era solo una sensazione sfumata, un malessere, al posto di questa evidenza. *Questo permette di tornare alla carica con un'ignoranza di meno, e una nuova "domanda-affermazione" forse un po' meno fuori bersaglio.* Più spesso, l'affermazione presa alla lettera si rivela falsa, ma l'intuizione che (ancora maldestramente) ha cercato di esprimersi attraverso di essa è giusta, anche se resta ancora vaga

Il lavoro, talvolta faticoso, ... a partire dai primi scostamenti rilevati tra l'immagine e certi fatti evidenti... è marcato da una tensione crescente... fino al momento in cui scoppia, con la scoperta dell'errore e il crollo di una determinata visione delle cose... La scoperta dell'errore è un momento cruciale, un momento creativo al massimo, di ogni lavoro di scoperta.

Alexandre Grothendieck (algebrista)

Il modo in cui lo vediamo/conosciamo

Dalle esperienze alle idee

Dalle idee alla comunicazione delle idee

Il modo in cui lo vediamo/ conosciamo

- prendere le distanze dalla situazione oggetto di studio;
- individuare i dati rilevanti trascurandone altri;
- **porre una domanda;**
- **dare forma alla domanda;**
- **trovare una risposta;**
- tornare alla situazione oggetto di studio.

Le parti in gioco

- ... un “mondo di fuori” che comunque funziona a modo suo in interazione continua con
- ... un “mondo di dentro” che cerca di capire attraverso la mediazione di
- ... un “mondo di interfaccia” in continua evoluzione che chiamiamo <cultura>

un “mondo di interfaccia”

... io credo piuttosto

*la natura aver fatto da prima le cose a modo suo e poi **fabbricato i discorsi** degli uomini abili a poter capire – però con fatica grande – alcuna parte de' suoi segreti ...*

La costruzione dei concetti richiede la disponibilità di sistemi di segni.

Non c'è conoscenza senza rappresentazione.

Un linguaggio è fatto di segni

Un segno è tale se c'è un soggetto che lo riconosce

Per segno si intende la minima forma percepibile.

Il segno è inventato, volontario, non preesistente



non si capisce cosa sia; se invece si scrive



non si capisce ancora, ma se si scrive



si capisce che si tratta di una a. Dove comincia ad essere una a e dove smette di essere una a? Quando si riconosce il segno!

Sono segni quelli dell'alfabeto scritto o orale

Il segno può essere anche un disegno

Il disegno e le varie forme espressive sono strumenti di comunicazione di saperi

Il segno è inventato, volontario non preesistente

Sono segni quelli dell'alfabeto scritto o orale

Il segno può essere anche un disegno

Il disegno e le varie forme espressive sono strumenti di comunicazione di saperi

- Con i segni dell'alfabeto scritto o orale si costruiscono nomi per le cose
- Poi si costruiscono frasi
- le frasi sono specchio e creatura della macchina più complicata che esista, la nostra mente

Linguaggio della matematica come
sistema multimodale

Testi verbali

Testi scritti

Figure, grafici

Espressioni simboliche

Espressioni simboliche

Decidibilità

Algoritmi

Correttezza e completezza

Calcolo delle 4 operazioni

Soluzione equazioni

Unicità di lettura

- n è pari
- n è dispari
- x è il doppio di y
- x supera y di 50
- m è maggiore o uguale di n
- m è maggiore di n

- $\exists k(n = 2k)$
- $\exists k(n = 2k+1)$
- $x = 2y$
- $x = y + 50$
- $\exists k(m = n+k)$
- $\exists k(m = n + k + 1)$

“ la differenza tra le terze potenze di ogni due numeri è uguale al prodotto delle differenze di questi due numeri per la somma di tre termini, il primo dei quali è il quadrato del primo numero, il secondo il prodotto dei due numeri e il terzo il quadrato del secondo”.

Con l'aiuto delle variabili sapete bene cosa diventa

Prima ipotesi

- I concetti si costruiscono indipendentemente e i sistemi di segni servono solo per rappresentarli.

Seconda ipotesi

- La costruzione dei concetti richiede la disponibilità di sistemi di segni.
- Il pensiero è una forma di comunicazione.
- Non c'è conoscenza senza rappresentazione.

- Per la prima ipotesi la povertà linguistica è un ostacolo alla comunicazione dei concetti ma non al loro sviluppo
- Minor interesse per la competenza linguistica
- La qualità del linguaggio non influenza la qualità del pensiero

- Per la seconda ipotesi la povertà linguistica è un grave ostacolo allo sviluppo del pensiero
- La qualità del linguaggio conta
povertà di linguaggio
↓
povertà di pensiero

Concetti \neq Rappresentazioni

- 3
- III
- 2+1
- tre
- $[\pi]$
- ...
- ... 

Ma cosa hanno in comune i linguaggi?

- Legge fondamentale:
un “frase” che vuole asserire qualcosa riguardo ad un certo oggetto, non contiene l’oggetto in se stesso ma un suo nome, una sua designazione.

Direbbe il professore Guidoni:

La parola gatto non graffia

L'analisi porterà a dimostrare teoremi, teoremi che andranno ad aggiungersi a quelli già noti, che non scompariranno più, ciò che può loro accadere è di diventare conseguenza di teoremi più generali

La forma studiata viene poi applicata a situazioni diverse dal problema iniziale per il quale era nata.

G. Saccheri voleva **provare** che la negazione del V postulato porta ad una contraddizione.

Esaminò ciascuno dei due modi di negare la tesi di Euclide. In uno dei due casi trovò anche numerosi, interessanti ed armoniosi risultati, coerenti tra di loro, ma non con quelli euclidei. La profonda e cieca fiducia nell'opera di Euclide gli impedì di trarre le giuste conclusioni.

Ma i tentativi di Saccheri, e di altri dopo di lui, avevano aperto la strada proprio alla ipotesi di non dimostrabilità del quinto postulato ed all'idea **nuova** che **la validità di una geometria si fonda sulla sua non contraddittorietà logica e non sulla sua evidenza intuitiva.**

<a velocità costante $s' : s'' = t' : t'' = \dots$ volte> (così la proporzione è “omogenea”)

In realtà se la relazione fra numeri funziona, funziona anche nell'altra forma

<a velocità costante $s' : t' = s'' : t'' = \dots$???> (così la proporzione è “disomogenea”)

Ora per Euclide (e per duemila anni) considerare un rapporto disomogeneo è “anomalo” in quanto privo di significato operativo (non ha senso voler dire quante volte un tempo è “contenuto” in uno spazio, così come non avrebbe di fatto alcun significato il prodotto

$$t' \times s'' = t'' \times s')$$

- *Alcune idee, alcune frasi possono essere di ostacolo*
- *Il tutto è maggiore della parte*
- *È sempre vero?*

- *Ci sono più punti in un segmento o su una retta?*
- *Ci sono più punti su una retta o su un piano?*

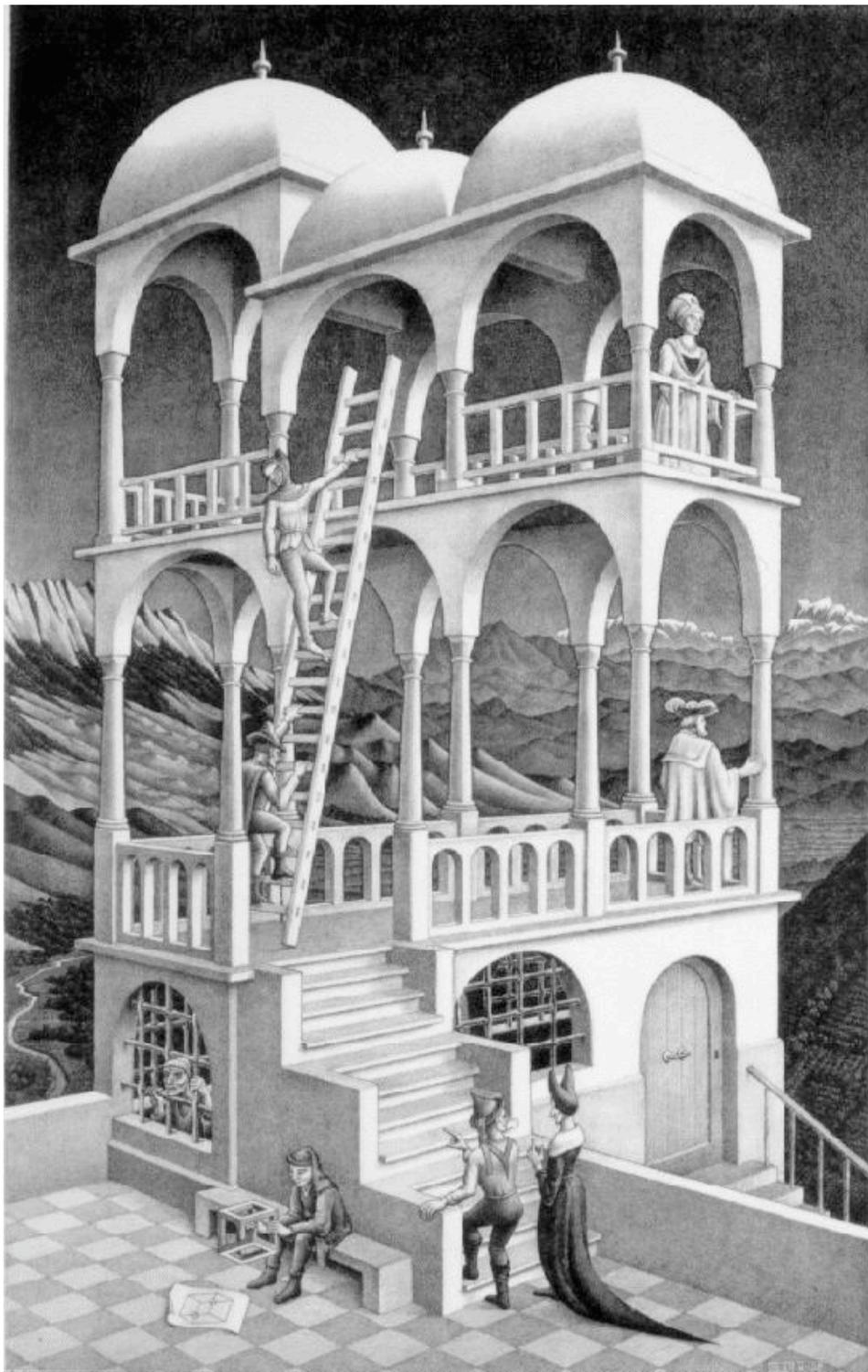
Il senso comune innato, e anche quello culturale, rispondono senz'altro che la retta contiene più punti del segmento, e il piano contiene più punti della retta.

1	2	3	4	5	6	7
1	4	9	16	25	36	49

La “visione delle cose” si modifica con la “scoperta dell’errore” e ciò comporta anche una radicale trasformazione del sistema di comunicazione delle idee, fino a mettere in crisi anche gli schemi ordinari più consolidati di percezione, comprensione e rappresentazione del mondo in cui viviamo.

La complessità dell'esperienza spaziale e la sua continua trasformazione, funzione diretta del divenire della realtà e del contesto temporale, richiede una sempre aggiornata e adeguata rappresentazione, intesa nella sua ampia accezione di "surrogato dell'esperienza visiva" in cui l'interpretazione di ciò che si vede passa attraverso il complesso processo della visione e della percezione, e produce quel delicato iter di ricostruzione della realtà dove l'occhio cattura le immagini e la mente ne dà un'interpretazione logica basandosi anche sulle precedenti esperienze.

I codici grafico-espressivi, si trovano di fronte al compito di evocare lo spazio dei fenomeni attraverso un'immagine fortemente allusiva della realtà tridimensionale concreta, in cui vengono spesso scavalcate le limitazioni imposte dal mondo fenomenologico e la rappresentazione è "costretta" a riprodurre non tanto e non più una semplice realtà delle cose, ma una realtà accresciuta e moltiplicata, arricchita, ma non snaturata, né tanto meno privata, del suo contenuto simbolico.

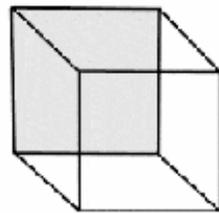


M. C. Escher, Belvedere - 1958, Litografia 46.2 x 29.5 cm

Una rappresentazione dove spesso vengono oltrepassati schemi mentali precostituiti e ci si trova proiettati in uno spazio che potrebbe anche non avere un'esistenza concreta, secondo la logica corrente, o che non potrebbe mai concretamente essere osservato da quel punto di vista da cui invece è rappresentato.

“In basso sulla sinistra giace un pezzo di carta su cui sono disegnati gli spigoli di un cubo. Due piccoli cerchi marcano le posizioni ove gli spigoli si intersecano. Quale spigolo è verso di noi e quale è sullo sfondo? E' un mondo tridimensionale allo stesso tempo vicino e lontano, è una cosa impossibile e quindi non può essere illustrato. Tuttavia è del tutto possibile disegnare un oggetto che ci mostra una diversa realtà quando lo guardiamo dal di sopra o dal di sotto”.

M. C. Escher



Nella parte inferiore è raffigurato un ragazzo, l'**osservatore** che compare in quasi tutte le raffigurazioni di Escher, testimone dell'evento di cui fa parte, cui è negato di poter svelare l'enigma che lo coinvolge, e che osserva perplesso ciò che tiene in mano, un cubo impossibile, senza riuscire a decifrarne ciò che non va, che non gli appare comprensibile: si tratta del **cubo di Necker**, una delle più famose illusioni ottiche della letteratura psicologica, in cui gli angoli o la faccia grigia scattano avanti e indietro con inversione della prospettiva e la faccia posteriore può alterantivamente diventare quella anteriore o viceversa.

La scoperta dell'errore e il crollo di una determinata visione delle cose...

(Alexandre Grothendieck)



Riflessioni

- Come lo studio della meccanica ha influenzato lo sviluppo del calcolo differenziale
- La numerazione
- Le geometrie non euclidee
- Il metodo di esaustione
- La rappresentazione tridimensionale con i software applicativi

