

Collezione di esami del corso di (Istituzioni di) Meccanica Quantistica del terzo anno della laurea in Fisica dell'Università di Napoli *Federico II*

Avvertenze Ogni esame ha alle sue spalle un corso, che ha una sua storia, quindi un esame scritto può essere facile o difficile a seconda di quanto detto nel corso. Il corso, ed gli esami, hanno come scopo la comprensione della meccanica quantistica, e non sono un concorso a premi. E se si e' capita la meccanica quantistica ci sono buone probabilità che l'esame venga superato con successo. In particolare bisogna evitare l'ossessiva ricerca di tutti i possibili problemi e della loro risoluzione "tecnica", senza nessuna analisi del significato fisico. Forse in questo modo sarà possibile prima o poi passare l'esame scritto, ma poi preparare l'orale diviene un compito improbo, e non solo questo in generale non va mai troppo bene, ma soprattutto si e' sprecato del tempo che poteva essere impegnato in maniera proficua ad apprendere la meccanica quantistica.

Dedico a tutti coloro i quali cercano di fare tutti i gli esami passati questo piccolo brano tratto dalla *Lezione* di Eugene Ionesco. E' un dialogo fra il professore e l'allieva:

P : Riconosco che non è facile, è molto, molto astratto ... , evidentemente ... ma come potrete arrivare, senza avere bene approfondito gli elementi, a calcolare mentalmente quanto fa, ed è il minimo che possa richiedersi a un ingegnere medio quanto fa, per esempio, tre miliardi settecentocinquantacinque milioni novecentonovantotto mila duecentocinquantuno moltiplicato per cinque miliardi centosessantadue milioni trecentotrentamila cinquecentootto?

A : (molto rapidamente) Fa diciannove quintilioni trecentonovanta quadrilioni due trilioni ottocentoquarantaquattro miliardi duecentodiciannove milioni centosessantaquattromila cinquecentootto.

P : (stupito) No, non mi pare. Deve fare diciannove quintilioni trecentonovanta quadrilioni due trilioni ottocentoquarantaquattro miliardi duecentodiciannove milioni centosessantaquattromila cinquecentonove.

A : No .. cinquecentootto..

P : sempre più stupito, calcola mentalmente) Sì... ha ragione ... il prodotto è giusto (Borbotta in modo inintelligibile) Quintilioni, quadrilioni, trilioni, miliardi, milioni (Distintamente) Centosessantaquattromilacinquecentootto (Stupito) Ma come lo sa lei, se non conosce i principi del ragionamento aritmetico?

A: Semplice. Non potendo fidarmi del mio ragionamento ho imparato a memoria tutti i risultati possibili di tutte le moltiplicazioni possibili.

Testi degli esami

17/02/2010

1) L'elettrone di un atomo d'idrogeno (con spin $s_z = -\hbar/2$) si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda orbitale:

$$\psi(x, y, z) = x e^{-r/a}$$

dove a è il raggio di Bohr. Calcolare:

a) il valore più probabile della sua distanza dal nucleo;

b) le probabilità di trovare ciascuno dei due valori più bassi possibili in una misura dell'energia.

Ricordiamo che la parte radiale delle funzioni d'onda di tali stati sono:

$$R_{10}(r) = e^{-r/a} \quad ; \quad R_{20}(r) = (2a - r)e^{-r/2a} \quad ; \quad R_{21}(r) = r e^{-r/2a}$$

e che si ha $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

c) Queste probabilità dipendono dal tempo? Motivare la risposta.

2) Un oscillatore armonico bidimensionale isotropo di frequenza ω è soggetto alla perturbazione:

$$V = \hbar\Omega(a_x^2 + a_x^{\dagger 2})/2$$

dove a_i sono gli op. di distruzione, e $\Omega \ll \omega$.

Calcolare al più basso ordine perturbativo non nullo in Ω la variazione di energia dello stato $|3, 0\rangle$. Se si riesce, la si confronti col risultato esatto.

10/12/2009

1) Una particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi = (x^2 + rz)e^{-r/a}$$

dove a è una costante. Calcolare la distribuzione di probabilità per L^2 ed L_x .

Si ricordi che, usando l'asse z come asse polare, si ha:

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad ; \quad Y_1^1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} = Y_1^{-1*}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad ; \quad Y_2^1 = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} = Y_2^{-1*} \quad ; \quad Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} = Y_2^{-2*}$$

2) Una particella di massa m che si trova in una buca di potenziale unidimensionale infinita tra 0 e a , viene sottoposta alla forza $F = \epsilon \cos(\pi x/a)$.

Calcolare al prim'ordine perturbativo in ϵ la variazione dei valori possibili per l'energia della particella.

29/09/2009

1) Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale unidimensionale infinita tra $-a$ e a . Sapendo che all'istante $T = 4ma^2/\pi\hbar$ si ha la stessa probabilità di trovare la particella nei primi due livelli di energia possibili e che $\langle x(T) \rangle = 32a/9\pi^2$, si determini lo stato iniziale del sistema.

2) Un oscillatore armonico bidimensionale isotropo si trova inizialmente nello stato $|10\rangle$ della base (n_x, n_y) . Se a $t = 0$ si accende la perturbazione

$$H_1(t) = \gamma xy^2 e^{-t/\tau}$$

si calcoli al prim'ordine perturbativo la probabilità che a un generico istante T il sistema transisca in ciascuno degli stati del secondo livello ($n=2$).

10/03/2009

1) Una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinita tra 0 e a si trova, a un certo istante, nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = Ae^{i2n\pi x/a} + Be^{i2m\pi x/a} + C$$

con m ed $n \neq m$ interi e $B = Ae^{i\varphi}$.

Determinato C in modo che ψ descriva uno stato fisicamente possibile del sistema, calcolare il valore medio del momento, $\langle p \rangle$, e il valore di φ per cui $\langle p \rangle$ risulta massimo.

Dato lo stato di partenza, $\langle p \rangle$ dipende dal tempo?

2) L'hamiltoniana di un sistema in una dimensione è data da

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p^2 + x^2 - 1) + gx - gx^3 + \frac{1}{2}g^2x^4 = \\ &= H_0 + gx - gx^3 + \frac{1}{2}g^2x^4 \end{aligned}$$

dove le variabili sono adimensionali e $\hbar = 1$.

Calcolare l'energia dello stato fondamentale di H fino al secondo ordine perturbativo in g .

17/02/2009

1) Un O. A. tridimensionale isotropo si trova all'istante t_0 nello stato

$$\psi = (a_x^\dagger + \gamma)^2 \psi_0$$

dove ψ_0 è lo stato fondamentale e γ è una costante.

Discutere la distribuzione di probabilità del quadrato del momento angolare, \vec{L}^2 , e della sua componente L_x . Queste quantità dipendono dal tempo?

Calcolare l'andamento temporale di $\langle x \rangle$.

2) Una particella di massa m che si muove in una dimensione soggetta alla forza $F = -kx$, e che si trova nel primo livello eccitato, a partire da $t = -2\tau$ viene sottoposta alla perturbazione $U(x) = \lambda x^3 e^{-t/\tau}$.

Calcolare al primo ordine perturbativo non nullo in λ la probabilità di transizione allo stato fondamentale e al secondo livello eccitato dopo un tempo $T \rightarrow \infty$.

27/01/2009

1) Un sistema quantistico, nello stato fondamentale con energia E_0 , è descritto al tempo $t = 0$ dall'autofunzione della hamiltoniana,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0 & x \leq 0 \\ \psi(x) &= N x e^{-x/x_0} & x > 0 \end{aligned}$$

a) Calcolare il valore medio su $\psi(x)$ del potenziale $V(x)$ e di x . Dipendono tali valori dal tempo?

b) Che potete dire del comportamento di $V(x)$ per $x < 0$ e $x \rightarrow \infty$?

2) Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo di frequenza ω , nello stato fondamentale al tempo $t = 0$, è sottoposto per $t \geq 0$ ad un campo elettrico uniforme lungo l'asse z

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \sin \beta t e^{-t/\tau}$$

Calcolare:

a) al 1° ordine perturbativo in \mathcal{E}_0 , la probabilità di transizione agli stati del 1° livello eccitato al tempo $t \rightarrow \infty$.

b) per quale valore di β si ha la massima probabilità di transizione.

25/11/08

1) Un atomo d'idrogeno si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi = Nx^2 e^{-r/a}$$

Calcolare le probabilità di trovare ciascuno dei due valori più bassi in una misura dell'energia.

Si ricordi che le autofunzioni relative agli stati di tali livelli, nella base H, L^2, L_z sono:

$$\psi_{100} = \frac{2}{\sqrt{4\pi a^3}} e^{-r/a} \quad ; \quad \psi_{200} = \frac{2}{\sqrt{8\pi a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a}$$

$$\psi_{210} = \frac{r e^{-r/2a}}{\sqrt{24a^5}} Y_1^0(\theta, \varphi) \quad ; \quad \psi_{21\pm 1} = \frac{r e^{-r/2a}}{\sqrt{24a^5}} Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi)$$

dove

$$Y_1^0 = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta \quad ; \quad Y_1^{\pm 1} = \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

2) Una particella di carica e , soggetta a una forza elastica isotropa, risente del potenziale vettore

$$A_x = -Byz \quad ; \quad A_y = Bxz \quad ; \quad A_z = 0$$

Si calcoli fino al 2° ordine perturbativo in B la variazione di energia degli stati del primo livello eccitato.

Si ricordi che l'Hamiltoniana totale del sistema è data da

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + V(\vec{r})$$

e che nella base $|n_1 n_2 n_3\rangle$ si ha $\langle x_a^2 \rangle = (2n_a + 1)\hbar/2m\omega$

15/7/2008

1) Un sistema quantistico in presenza di un potenziale centrale si trova all'istante iniziale nello stato descritto dalla funzione d'onda normalizzata

$$\Psi(r, \theta, \phi) = f(r) F(\theta, \phi)$$

autostato del momento angolare quadrato \vec{l}^2 con autovalore $2\hbar^2$ e con una distribuzione equiprobabile dei valori delle misura della componente z del momento angolare.

a) Scrivere la forma piú generale di $F(\theta, \phi)$

b) Se al tempo $t = T$ si effettua una misura di l_z trovando il valore \hbar , quale è la probabilità che una successiva misura sullo stesso sistema di l_x dia il valore \hbar ?

Note: Si supponga che $\int_0^\infty |f(r)|^2 r^2 dr = 1$

2) Un oscillatore armonico bidimensionale anisotropo

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 x_2^2$$

($\omega_1 < \omega_2$) posto nel piano xy è sottoposto alla perturbazione dipendente dal tempo

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \lambda l_z & 0 \leq t \leq T \\ H_1(t) &= 0 & t < 0 \quad t > T \end{aligned}$$

dove l_z è il momento angolare planare

Calcolare, al 1° ordine perturbativo in λ , in quali stati il sistema ha probabilità di transire al tempo $t > T$, se al tempo $t = 0$ si trova nel primo livello eccitato.

Nota: Per uniformare la notazione si usino le seguenti quantità:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1}} ; \quad \beta = \frac{\hbar}{m\omega_2}$$

24/6/2008

1) La hamiltoniana di un sistema quantistico è

$$H = E_1 a_1^\dagger a_1 + E_2 a_2^\dagger a_2 \quad E_1 \neq E_2$$

dove a_i^\dagger, a_i sono operatori di creazione e distruzione che obbediscono alle usuali relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [a_i, a_j] = 0 \quad i, j = 1, 2$$

Il sistema si trova al tempo $t = 0$ nello stato

$$\Psi = a_1^\dagger \psi_0 + a_2^\dagger \psi_0 \quad a_1 \psi_0 = a_2 \psi_0 = 0$$

Calcolare in funzione del tempo

a) lo scarto quadratico medio dell'energia

b) il valore medio dell'operatore $A = K(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)$ (K costante dimensionale)

2) Un oscillatore armonico 1-dim. è sottoposto alla perturbazione

$$\begin{aligned} H_1 &= \lambda x & 0 \leq x \leq L \\ H_1 &= 0 & 0 > x \quad x > L \end{aligned}$$

dove $x = 0$ corrisponde al punto il cui il potenziale armonico è nullo.

Calcolare al 1° ordine perturbativo le correzioni all'energia dello stato fondamentale e del 1 stato eccitato.

Funzione d'onda normalizzata dello stato fondamentale ($Q = x/x_0$, $x_0 = \sqrt{\hbar/\omega m}$)

$$\psi_0(Q) = \left(\frac{1}{x_0^2 \pi} \right)^{1/4} e^{-Q^2/2}$$

27/03/2007

1) Un Oscillatore Armonico unidimensionale di massa $m = 10^{-27}$ gr e pulsazione $\omega = 10^8$ hertz si trova in uno stato in cui si hanno probabilità $2/3$ e $1/3$ di trovare rispettivamente il valore più basso e il primo valore eccitato dell'energia. Sapendo che il valor medio della posizione vale $\langle x \rangle = 1/3 \cdot 10^4$ cm si calcolino gli scarti quadratici medi della posizione e dell'impulso.

(Si usi $\hbar = 10^{-27}$ ergs)

2) Un atomo d'idrogeno che si trova nello stato fondamentale viene sottoposto a un campo elettrico dipendente dal tempo diretto lungo x e di intensità $E = E_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t$.

Calcolare al prim'ordine perturbativo le probabilità di transizione al tempo T negli stati del primo livello eccitato per $T \rightarrow \infty$.

Si ricordi che le autofunzioni relative a tali stati nella base H, L^2, L_z sono:

$$\psi_{100} = 2a^{-3/2} e^{-r/a} Y_0^0 \quad ; \quad \psi_{200} = 2(2a)^{-3/2} (1 - r/2a) e^{-r/2a} Y_0^0$$

$$\psi_{210} = 1/\sqrt{3}(2a)^{-3/2} r/a e^{-r/2a} Y_1^0(\theta, \phi) \quad ; \quad \psi_{21\pm 1} = 1/\sqrt{3}(2a)^{-3/2} r/a e^{-r/2a} Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi)$$

dove $Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$; $Y_1^0 = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$; $Y_1^{\pm 1} = \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{\pm i\phi}$

20/11/2007

1) La funzione d'onda nello spazio degli spinori di una particella di spin $1/2$ é

$$\psi = \cos \theta \psi_+ + e^{-i\phi} \sin \theta \psi_- \quad (1)$$

dove ψ_+ (ψ_-) sono autovettori dell'operatore di spin lungo l'asse z , S_z , con autovalore $\hbar/2$ ($-\hbar/2$)

a) Calcolare i valori medi di S_z e S_x .

Si assuma che lo stato descritto in (1) sia lo stato al tempo $t = 0$ di un sistema descritto dalla hamiltoniana

$$H = \mu \cdot S_z$$

con μ costante dimensionale.

b) Calcolare l'andamento temporale dei valori medi di S_z e S_x .

2) Una particella di massa m , confinata in un segmento $(-L, L)$ da un potenziale infinito, è sottoposto al potenziale (K costante dimensionale)

$$V(x) = K(\lambda x + \lambda^2 x^2)$$

Calcolare con la teoria delle perturbazioni fino all'ordine λ^2 , la correzione al livello fondamentale dell'energia, prendendo in conto solo il contributo dello stato stesso e di quello più vicino in energia

Si ricordi che

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) + C \quad \int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + C$$

20/3/2007

1) Si consideri una particella di massa m sulla semiretta positiva con una barriera di potenziale infinita all'origine in presenza del potenziale

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & L > x > 0 \\ V(x) &= V_0 > 0 & x \geq L \end{aligned}$$

Si assuma che $E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} < V_0$ sia un autovalore della hamiltoniana.

Calcolare

- l'autofunzione normalizzata corrispondente all'autovalore E
- l'equazione che deve soddisfare k affinché E sia un autovalore della hamiltoniana.

2) Al tempo $t = 0$ un oscillatore armonico unidimensionale si trova nello stato fondamentale. Il sistema è sottoposto alla perturbazione

$$V(x, t) = 0 \quad t < 0, \quad t > T \quad V(x, t) = \lambda x \quad T \geq t \geq 0$$

Scrivere la funzione d'onda per $t > T$ al 1° ordine perturbativo.

22/2/2007

1) Lo stato quantistico di un atomo di idrogeno è descritto dalla funzione d'onda Ψ , combinazione lineare dello stato fondamentale (ψ_{100}) e del primo stato eccitato (ψ_{200}):

$$\Psi(r) = c_0 \psi_{100}(r) + c_1 e^{i\alpha} \psi_{200}(r)$$

con c_0, c_1 costanti reali. Il valore medio di H sullo stato Ψ è $E = 5E_1/8$, dove E_1 è il valore dell'energia, dello stato fondamentale.

Calcolare sullo stato Ψ :

- la probabilità che una misura di H dia il valore E_1
- il valore medio di r

Si ricordi ($a \equiv$ raggio di Bohr, $\rho = r/a$)

$$\psi_{100}(r) = a^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} 2 e^{-\rho} \quad \psi_{200}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{(2a)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-\rho/2}$$

2) Un oscillatore armonico 3-dim. isotropo, con carica q , é posto in un campo magnetico uniforme e costante di intensitá B e direzione lungo l'asse z positivo. Si consideri l'effetto del campo magnetico come una perturbazione

$$H_1 = \mu \vec{B} \cdot \vec{L}$$

Calcolare al 1° ordine perturbativo le correzioni all'energia del primo stato eccitato.

25/1/2007

1) Si consideri un sistema quantistico unidimensionale costituito da una particella di massa m in presenza di un potenziale $V(x)$

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & x \leq 0 \\ V(x) &= -\frac{K}{x} & x > 0 \end{aligned}$$

dove K é una costante dimensionale

a) Calcolare sotto quali condizioni la funzione d'onda $\psi(x)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0 & x \leq 0 \\ \psi(x) &= N x e^{-x/x_0} & x > 0 \end{aligned}$$

é autofunzione della hamiltoniana del sistema ed il corrispondente autovalore dell'energia.

b) il valore medio di $1/x$ nell'autofunzione $\psi(x)$

2) Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo é sottoposto alla perturbazione

$$H_1 = \varepsilon xy$$

Calcolare

a) la correzione al 1 ordine perturbativo non nullo all'energia dello stato fondamentale

9/11/2006

1) Calcolare l'indeterminazione dell'energia potenziale nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno.

Dipende l'indeterminazione dal tempo ? Motivare la risposta.

2) Una particella confinata in una buca unidimensionale di lunghezza L da un potenziale infinito ai punti $x = 0$, $x = L$ é sottoposta ad una perturbazione dipendente dal tempo data da ($L > a$)

$$\begin{aligned} V(t) &= 0 & t \leq 0, t \geq T \\ V(t) &= V(x) & T > t > 0 \\ V(x) &= \varepsilon & a \leq x \leq 2a \\ V(x) &= 0 & x > 2a, a > x \end{aligned}$$

Supponendo che la particella sia all'istante iniziale $t = 0$ nello stato $k - m_0$ di energia, calcolare al 1° ordine perturbativo, la probabilità, che, per $t \rightarrow \infty$, la particella sia nello stato $(k + 1) - m_0$.
Mostrare che per $a/L \ll 1$ la probabilità cresce quadraticamente con a .

28/9/2006

1) Un sistema quantistico è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = N (x + y + z) e^{-(r/a)^2}$$

dove N è la costante di normalizzazione Calcolare:

- a) la probabilità che una misura di \vec{L}^2 dia il risultato $2\hbar^2$ e di L_z 0.
 - b) il valore medio della componente x dell'osservabile momento lineare \vec{p}
- 2) Una particella confinata in una buca unidimensionale di lunghezza $2L$ da un potenziale infinito ai punti $x = \pm L$ è sottoposta ad una perturbazione dipendente dal tempo data da

$$V(t) = \varepsilon x e^{-\omega t}$$

Supponendo che la particella sia all'istante iniziale $t = 0$ nello stato fondamentale, calcolare al 1° ordine perturbativo, la probabilità, che, per $t \rightarrow \infty$, la particella sia nel 1° e 2° stato eccitato.

18/5/2006

1) Una particella in una buca unidimensionale infinita simmetrica di larghezza $2L$ si trova all'istante t_0 nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = \alpha \cos \frac{\pi x}{2L} + \beta \sin \frac{\pi x}{L}$$

Trovare l'andamento temporale dei valori medi della posizione e del momento.

2) Un atomo d'idrogeno si trova nello stato fondamentale. Dall'istante $t = 0$ viene sottoposto al campo elettrico uniforme lungo l'asse x

$$E = E_0 e^{-t/\tau}$$

Calcolare al 1° ordine perturbativo la probabilità di transizione agli stati del 1° livello eccitato per $t \rightarrow \infty$

23/2/2006

1) Una particella di massa m è descritta ad $t = 0$ dalla funzione d'onda (α , costante dimensionale reale)

$$\Psi(\vec{r}) = N (x + y) e^{-(\alpha r)^2}$$

Calcolare:

- a) la probabilità che una misura di momento angolare L^2 dia il valore $\hbar^2 2$ ed una misura della componente L_z il valore \hbar
 b) il valore medio di L_x .

2) Un oscillatore armonico bidimensionale é descritto dalla hamiltoniana ($E_2 > E_1$)

$$H_0 = \sum_i^2 E_i (a_i^\dagger a_i + 1/2)$$

L'oscillatore é sottoposto alla perturbazione

$$H_1 = \lambda (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)$$

Calcolare al 1 e 2 ordine perturbativo, la correzione allo stato fondamentale ed al primo livello eccitato.

26/1/2006

1) L'hamiltoniana di un sistema é:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x^2}{I_1} + \frac{L_y^2}{I_2} + \frac{L_z^2}{I_3} \right)$$

dove \mathbf{L} é il momento angolare del sistema.

Il sistema si trova all'istante iniziale nello stato

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{11} + \psi_{1-1})$$

dove ψ_{lm} sono le autofunzioni normalizzate del momento angolare.

Calcolare:

- a) gli autostati ed autovalori di H con momento angolare $L = 1$.
 b) lo stato del sistema al tempo t .
 c) i valori medi degli operatori L_x, L_y, L_z dipendono dal tempo ?

2) Un atomo d'idrogeno si trova per $t = 0$ nello stato fondamentale. Si calcoli al 1° ordine perturbativo la probabilità di transizione negli stati del 1° livello eccitato per $t \rightarrow +\infty$ se esso è soggetto ad un campo elettrico uniforme

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \exp -(t/\tau)^2$$

dove $\vec{E}_0 = E_0 \cos \theta \vec{e}_x + E_0 \sin \theta \vec{e}_z$

24/11/2005

1) Un'oscillatore armonico unidimensionale at tempo $t = 0$ é descritto dalla funzione d'onda (in unità adimensionali, N costante di normalizzazione)

$$\psi(Q, t = 0) = N (Q + 2) e^{-Q^2/2}$$

Calcolare:

- a) la probabilità che una misura di energia dia il valore E_1

b) il valore medio di P^2

2) Una particella in una dimensione é vincolata da un potenziale infinito in un segmento compreso tra i punti $-L < x < 0$. Si consideri una perturbazione descritta dal potenziale $V(x)$

$$V(x) = -\varepsilon x \quad |x| \leq L/2 \\ V(x) = 0 \quad |x| > L/2$$

Calcolare perturbativamente al primo ordine non nullo le correzioni:

a) all'energia dello stato fondamentale E_0

b) all'autofunzione dello stato fondamentale assumendo solo il primo contributo non nullo degli stati eccitati.

29/09/2005

1) Un atomo d'idrogeno si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi = N x e^{-r/2a_0}$$

dove r è la distanza dal nucleo e a_0 il raggio di Bohr. Calcolare:

a) la probabilità che una misura di L_z dia il valore \hbar ;

b) la probabilità che l'elettrone si trovi in un volume di raggio $2a_0$.

2) Un oscillatore armonico bidimensionale, posto nel piano yz , è sottoposto alla perturbazione

$$V(z) = \lambda z^4$$

Calcolare, al primo ordine in λ , le correzioni all'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato.

12/7/2005

1) Un oscillatore armonico bidimensionale isotropo si trova nello stato

$$\psi = N a_y^\dagger e^{\lambda_1 a_x^\dagger + \lambda_2 a_y^\dagger} \psi_0$$

dove a_i^\dagger sono gli operatori creazione e λ_i isono dei parametri. Calcolare la probabilità che una misura di trovare ciascuno dei tre valori piú bassi ($E_0 < E_1 < E_2$) in una misura dell'energia

2) Una particella di massa m e carica q é confinata in una buca di potenziale tridimensionale infinita con i tre spigoli di lunghezza l . Tra gli istanti $t = 0$ e $t = T$ viene soggetta a un campo elettrico uniforme parallelo all'asse z .

Calcolare, per un generico ostante $t > T$; al 1 ordine perturbativo le probabilità di transizione dallo stato fondamentale agli stati del primo e secondo livello eccitato.

N.B. Si ricordi che per la buca tridimensionale una base di autostati della hamiltoniana é data da prodotti degli autostati relativi ai tre casi unidimensionali.

19/5/2005

1) Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo, con carica q , si trova a $t = 0$ nello stato fondamentale. Si calcoli, al 1° ordine perturbativo, la probabilità di transizione a $t \rightarrow +\infty$ negli stati del 1° livello eccitato se esso è soggetto ad un campo elettrico uniforme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \quad 0 < t \leq T$$

$$\vec{E} = 0 \quad 0 > t, \quad t > T$$

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$$

2) Un sistema quantistico è descritto dalla hamiltoniana $H = \mu \vec{S} \cdot \vec{B}$, dove \vec{S} è l'operatore di spin e \vec{B} è un campo magnetico costante, uniforme, parallelo all'asse z . Il sistema si trova, al tempo $t = 0$, in un autostato di \vec{S}^2 con spin $s = 1/2$, tale che

$$\langle S_x \rangle = \sqrt{2}\hbar/4, \quad \langle S_z \rangle = 0$$

- a) Calcolare, a $t = 0$, la probabilità che una misura di S_z dia il valore $\hbar/2$.
 b) Scrivere lo stato, a $t = 0$, compatibile con i dati del problema.

10/2/2005

1) Un oscillatore armonico isotropo in 3 dimensioni è sottoposto alla perturbazione

$$V = \varepsilon z$$

Calcolare la correzione al I e II ordine in ε all'energia dello stato fondamentale.

2) Una particella di spin $1/2$ è descritta a $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi = \cos \theta \chi_+ + \sin \theta e^{i\varphi} \chi_-$$

dove χ_{\pm} sono gli autovettori di S_z rispettivamente con autovalore $\pm \hbar/2$.

- a) Calcolare la probabilità che una misura di S_y su ψ dia il valore $\hbar/2$.
 b) Supponendo che una misura di S_y a $t = 0$ abbia dato il valore $-\hbar/2$ e che la hamiltoniana del sistema sia $H = AS_z$, scrivere la funzione d'onda al generico istante t .

27/1/2005

1) Un oscillatore armonico in 3 dim. isotropo, con centro nell'origine, si trova nello stato

$$\psi(x, y, z) = N(x+a) \psi_0(x, y, z)$$

dov N ed a sono costanti e $\psi_0(x, y, z)$ è la funzione d'onda normalizzata dello stato fondamentale

$$\psi_0(x, y, z) = (\sqrt{\pi}r_0)^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}$$

Trovare i possibili valori di una misura di l^2 e di l_z e le rispettive probabilità.

2) Una particella in una buca unidimensionale infinita compresa tra $-a/2$ e $a/2$, è soggetta alla perturbazione $V(x) = Ax$.

Si calcoli al secondo ordine perturbativo il contributo alla variazione di energia dello stato fondamentale dovuto ai primi due livelli eccitati.

18/11/2004

1) Si consideri un'oscillatore armonico tridimensionale isotropo descritto dalla hamiltoniana

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 \omega \left\{ a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right\}$$

dove gli operatori di creazione e distruzione a_i^\dagger, a_j soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$

L'oscillatore è perturbato dal termine di accoppiamento

$$V = \varepsilon (a_1 a_2^\dagger + a_2 a_1^\dagger)$$

Calcolare:

1. perturbativamente al primo ordine la correzione all'energia:

- a) dello stato fondamentale
- b) del primo stato eccitato

2. è possibile calcolare esattamente lo spettro di $H = H_0 + V$? Motivare la risposta ed, in caso affermativo, indicare il procedimento

2) Calcolare con il metodo variazionale l'energia dello stato fondamentale di una particella in presenza di un potenziale

$$V(r) = K r$$

usando come funzione di prova

$$\psi(r) = N e^{-(r/a)^2}$$

30/9/2004

1) Si consideri l'Hamiltoniana un atomo di idrogeno perturbata;

$$H = H_0 + \epsilon x^2$$

si calcolino le correzioni dello stato fondamentale e del primo livello eccitato.

2) La funzione d'onda al tempo $t = 0$ di un sistema quantistico confinato nel segmento $x = \pm L$ è

$$\psi(x) = N \left(1 + \cos \frac{\pi x}{L} \right)$$

Calcolare in funzione del tempo lo scarto quadratico medio $(\Delta x)^2$ e la distribuzione in energia.

8/7/2004

1) Una particella di massa m si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x, y, z) = N r e^{-r/a}$$

dove $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Si determinino gli scarti quadratici medi nella misura di ciascuna coordinata cartesiana e delle relative componenti della quantità di moto.

Quale il valore più probabili per r ?

2) Un Oscillatore armonico 3-dim. isotropo con carica e si trova per $t = 0$ nello stato $|100\rangle$ della base (n_x, n_y, n_z) . Si calcoli al 1° ordine perturbativo la probabilità di transizione negli stati del 2° livello eccitato per $t \rightarrow +\infty$ se esso viene soggetto a un campo elettrico uniforme diretto lungo y e dipendente dal tempo:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp -(t/\tau)$$

Quando è affidabile il risultato trovato?

21/6/2004

1) Si consideri una particella di massa m costretta in una buca a pareti infinite $0 \leq x \leq a$ in presenza di un potenziale

$$V = \lambda e^{\alpha x}$$

1. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni esattamente nel caso $\alpha = 0$.
2. Calcolare perturbativamente al primo ordine nel caso generale le correzioni all'energia dello stato fondamentale.

2) Una particella è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = N (x + 3z) e^{-(r/a)^2}$$

dove N è la costante di normalizzazione

Calcolare:

- a) la probabilità che una misura di \vec{L}^2 e di L_z dia rispettivamente il risultato $2\hbar^2$ e 0,
- b) la probabilità che la particella si trovi tra r e $r + dr$

6/5/2004

1) Una particella quantistica é descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = N(x+z)e^{-(r/a)^2}$$

dove N é la costante di normalizzazione

Calcolare:

- la probabilità che una misura di \vec{L}^2 e di L_z dia rispettivamente il risultato $2\hbar^2$ e 0,
- la probabilità che la particella si trovi tra r e $r + dr$

2) Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale (in variabili adimensionali) perturbato da un potenziale esponenziale:

$$H = H_0 + \lambda H_1 = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \lambda e^{\alpha x}$$

Il sistema si trova nello stato fondamentale a $t = 0$.

Calcolare la probabilità di trovarlo ad un generico t nel primo stato eccitato:

- Esattamente per $\lambda = 0$, $\alpha > 0$ generico.
- Perturbativamente al primo ordine per λ e $\lambda\alpha$.

Suggerimento: Può essere utile esprimere x in termini di a e a^\dagger e ricordare la formula: $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$, valida nel caso in cui $[A, B]$ è un numero.

22/3/2004

1) Una particella con spin, in presenza di un potenziale isotropo armonico, é descritta, a $t = 0$, dalla funzione d'onda

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_+(r) \\ \psi_-(r) \end{pmatrix} = \phi_0(r) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dove $\phi_0(r)$ é la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico isotropo tridimensionale

$$\phi_0(r) = (\sqrt{\pi}r_0)^{-3/2} e^{-(r/\sqrt{2}r_0)^2} \quad r_0 = \sqrt{\hbar/\omega m}$$

e $a = 1/\sqrt{2}$ e $b = 1/\sqrt{2}$.

Calcolare:

- la probabilità che una misura dello spin dia il valore $-\hbar/2$
- il valore medio di S_z .

2) Un oscillatore armonico unidimensionale, é sottoposto alla perturbazione

$$V(x) = \varepsilon |x|$$

Calcolare:

- la correzione al primo ordine perturbativo al livello energetico dello stato fondamentale $\psi_0(x)$.

Si assuma $x_0 = 1$.

b) Se la perturbazione é accesa a $t = 0$ e spenta a $t = T$, calcolare la probabilitá che al tempo $t = 2T$ l'oscillatore si trovi nel primo stato eccitato.

26/2/2004

1) Un oscillatore armonico unidimensionale é descritto dalla funzione d'onda Ψ , combinazione lineare dello stato fondamentale (ψ_0) e del primo stato eccitato (ψ_1):

$$\Psi = c_0 \psi_0 + c_1 e^{i\theta} \psi_1$$

con c_0, c_1 costanti reali. Il valore medio di H sullo stato Ψ é $5\hbar\omega/6$.

Calcolare sulla stato Ψ :

- a) la probabilitá che una misura di H dia il valore $\hbar\omega/2$
- b) il valore medio x

2) Un'atomo di idrogeno, inizialmente nello stato fondamentale ($\psi_{100}(r)$), é sottoposto ad una perturbazione dipendente dal tempo data da

$$V(t) = V_0 x \quad 0 \leq t \leq T$$

$$V(t) = 0 \quad t \leq 0 \quad t \geq T$$

dove V_0 é una costante dimensionale

Calcolare la probabilitá, al primo ordine perturbativo in V_0 , che, per $t \rightarrow \infty$, l'atomo si trovi nelle seguenti autofunzioni del 1 stato eccitato:

- a) $\psi_{210}(r, \theta, \phi)$
- b) $\psi_{211}(r, \theta, \phi)$

22/1/2004

1) Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo, nel primo livello energetico eccitato ($E = \hbar\omega 5/2$), é descritto dalla funzione d'onda normalizzata Ψ , la cui espressione in termini degli autostati del momento angolare L_z

$$L_z \psi_i = m\hbar \psi_i \quad m = \pm 1, 0$$

é

$$\Psi = c_+ \psi_1 + c_0 \psi_0 + c_- \psi_{-1}$$

Sullo stato Ψ , la probabilitá che una misura di L_z dia $m\hbar$, é la stessa per tutti i valori m . Tale condizione determina completamente tale funzione d'onda ?

Calcolare, sulla funzione d'onda Ψ la generica espressione del valore medio di:

- a) z
- b) L_x

2) Una particella confinata in una buca unidimensionale di lunghezza $2L$ da un potenziale infinito ai punti $x = \pm L$ é sottoposta ad una perturbazione dipendente dal tempo data da

$$V(t) = V_0 x \sin \omega t \quad 0 \leq t \leq T$$

$$V(t) = 0 \quad t \leq 0 \quad t \geq T$$

Supponendo che la particella sia inizialmente nello stato fondamentale, calcolare la probabilità che, per $t \rightarrow \infty$, la particella sia nel 1 stato eccitato.

13/11/2003

1) Un sistema descritto da una hamiltoniana H_0 , invariante per rotazioni, viene sottoposto a una perturbazione $V = g\vec{l} \cdot \vec{B}(t)$, con $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos\omega t$ e \vec{B}_0 diretto lungo l'asse z . All'istante t_0 il sistema si trova nell'autostato di H_0 , $|\psi\rangle = |E_0, l = 2, l_y = 0\rangle$.

Calcolare al primo ordine perturbativo la probabilità di transizione al tempo $T > t_0$, in un generico autostato di H_0 distinto da quello iniziale. Quali probabilità non sono identicamente nulle?

2) Un sistema quantistico in presenza di un potenziale centrale $V(r)$ è descritto, in un certo istante, dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \left(Y_{00}(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \right)$$

dove $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sono le armonica sferiche standard, autofunzione di l_z .

Calcolare:

- la probabilità che una misura di l^2 dia il valore 2 (in unità \hbar);
- lo scarto quadratico medio di l_y .

9/10/2003

1) Una particella di spin 1/2 è descritta, al tempo $t = 0$, dalla funzione d'onda di spin

$$\psi(t = 0) = \cos\theta \chi_+ + e^{i\phi} \sin\theta \chi_-$$

dove χ_{\pm} sono gli autovettori normalizzati di S_z con autovalore $\pm\hbar/2$. Nella rappresentazione con vettori colonna di χ_{\pm}

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'evoluzione del sistema è determinata dalla hamiltoniana

$$H = E \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare:

- il valore medio di S_y al tempo $t = 0$
- la probabilità che una misura di S_y al tempo $t = 0$ dia il valore $\hbar/2$
- le risposte al punto a) e b) dipendono dal tempo? Motivare la risposta.

2) Un sistema quantistico unidimensionale è sottoposto ad un potenziale $V(x)$ ($K > 0$)

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty & x > 0 \\ V(x) &= K/x & x \leq 0 \end{aligned}$$

Calcolare:

a) con il metodo variazionale il valore piú basso dell'energia, in funzione del parametro b , corrispondente alle funzioni d'onda di prova

$$\psi(x) = x e^{bx} \quad b > 0$$

b) per quali valori di x la densità di probabilità $|\psi(x)|^2$ é massima per la funzione d'onda dello stato fondamentale calcolata in a).

Formule utili per la soluzione dei problemi precedenti

Atomo d'idrogeno

Autofunzioni della hamiltoniana $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$:

Autofunzione normalizzata dello stato fondamentale ($\rho = r/a$, a raggio di Bohr = $\frac{\hbar^2}{me^2}$)

$$\Psi_{100} = a^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} 2 e^{-\rho}$$

Parte radiale delle funzioni d'onda del primo stato eccitato (n=2)

$$R_{20}(r) = \frac{2}{(2a)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \quad ; \quad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}(2a)^{3/2}} \left(\frac{r}{a}\right) e^{-r/2a}$$

Oscillatore armonico

Gli autostati dell'oscillatore armonico per i primi 3 livelli sono (unità adimensionali):

$$(Q = x/x_0, \quad x_0 = \sqrt{\hbar/\omega m})$$

$$\begin{aligned} \psi_0(Q) &= (\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-Q^2/2} & \psi_1(Q) &= (2\sqrt{\pi})^{-1/2} 2Q e^{-Q^2/2} \\ \psi_2(Q) &= (8\sqrt{\pi})^{-1/2} (4Q^2 - 2) e^{-Q^2/2} & \psi_3(Q) &= (48\sqrt{\pi})^{-1/2} (8Q^3 - 12Q) e^{-Q^2/2} \end{aligned}$$

Armoniche sferiche per $l = 1$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} = -Y_{1,-1}^*$$

Integrali

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-px^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2p)^n} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x \sin(kx) dx = \frac{2}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{k} \cos \frac{k\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x \sin(kx) \cos x dx = \frac{(-2)^{k/2}}{(k^2 - 1)^2}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$