Soluzione degli esercizi d'esame di Meccanica e Termodinamica

Proff. Clarizia, Peliti, Piedipalumbo e Santamato

20 Luglio 2010

Esercizio 1

Si scelga un sistema di riferimento fisso il cui asse x è allineato con la velocità $\boldsymbol{v}$ della portaerei, e tale che il versore parallelo alla pista ha una componente y positiva. Indichiamo con $\boldsymbol{V}$ il vettore velocità dell'aereo nel sistema di riferimento fisso e con $\boldsymbol{V}'$ il corrispondente vettore nel sistema di riferimento solidale con la portaerei. Indichiamo inoltre con θ' l'angolo formato da $\boldsymbol{V}'$ e l'asse x.

a) Si ha

$$V'_x = V_x - v; \qquad V'_y = V_y,$$

dove

$$V_x = V\cos\theta; \qquad V_y = V\sin\theta.$$

b) Si ha quindi

$$\tan\theta' = \frac{V\sin\theta}{V\cos\theta - v} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - v/V}.$$

Imponendo la condizione $\theta' = \alpha$ si ottiene la seguente equazione per θ:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - v/V}.$$

Per risolvere questa equazione introduciamo le notazioni

$$x = \sin\theta; \quad \cos\theta = \sqrt{1-x^2}; \quad \tau = \tan\alpha; \quad u = v/V.$$

Isolando la radice ed elevando al quadrato ambo i membri l'equazione si trasforma in un'equazione di secondo grado:

$$\left(1+\tau^2\right)x^2 + 2u\tau\, x + \tau^2\left(u^2-1\right) = 0.$$

Per $|u| < 1$ l'equazione ammette una sola radice positiva, data da

$$x = \tau\,\frac{-u + \sqrt{1+\tau^2(1-u^2)}}{1+\tau^2}.$$

Per $u = 0$ si ottiene $x = \tau/\sqrt{1+\tau^2}$, come si deve. L'accelerazione a si ottiene dall'espressione (dove V' è il modulo della velocità dell'aereo nel sistema di riferimento della portaerei)

$$a = \frac{1}{2}\frac{V'^2}{\ell}.$$

Si ha ovviamente $\boldsymbol{a} = (a\cos\alpha, a\sin\alpha)$.

c) Il lavoro $\mathcal{L}$ è pari alla differenza dell'energia cinetica dell'aereo posato sulla portaerei e in volo. Si ha così

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(v^2 - V^2\right);$$
$$\mathcal{L}_\mathrm{T} = -\frac{1}{2}mV'^2 = -\frac{1}{2}m\left(V^2 - 2vV\cos\theta + v^2\right),$$

dove θ si ottiene dalla risposta alla domanda precedente.

Risultati numerici: $\theta = 14.20°$; $a = 12.87$ m/s^2; $\mathcal{L} = -1.84 \cdot 10^7$ J; $\mathcal{L}_\mathrm{T} = -1.332 \cdot 10^7$ J.

Esercizio 2

Considieriamo un sistema di riferimento "fisso", con l'asse x parallelo al binario, e un sistema di riferimento mobile, con l'asse x sempre parallelo al binario, ma solidale con il centro di massa del sistema carrello+blocco. In conseguenza dell'applicazione della forza, il centro di massa si muove con un'accelerazione $a_\mathrm{T} = F/(m+M)$. Indichiamo con x la coordinata del blocco e con X quella del carrello nel sistema di riferimento mobile: entrambe sono scelte in modo che la molla sia a riposo quando $x = X$. Si ha allora la relazione

$$mx(t) + MX(t) = 0; \quad \forall t.$$

a) Sul blocco, nel sistema di riferimento mobile, agisce la forza apparente $-ma_\mathrm{T}$ e la forza d'attrito f_a che soddisfa la relazione $|f_\mathrm{a}| \le \mu mg$. La forza elastica si annulla perché la molla è a riposo. Perché il blocco rimanga in quiete si deve avere quindi

$$|ma_\mathrm{T}| \le \mu mg,$$

e quindi

$$|F| \le F_\mathrm{max} = \mu g(m+M).$$

b) Se sul carrello agisce la forza F_1, l'accelerazione del centro di massa è pari ad $a_1 = F_1/(m+M)$. Sul blocco agiscono le seguenti forze: 1) La forza apparente $f_1 = -ma_1$; 2) la forza d'attrito $f_\mathrm{a} = \mu mg$ (almeno finché il blocco si muove verso le x negative rispetto al carrello); 3) la forza elastica $f_\mathrm{e} = -k(x-X)$. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica al blocco, e indichiamo con x^* la coordinata in cui esso ritorna in quiete. Si deve avere

$$\mathcal{L} = \int_0^{x^*} \mathrm{d}x\ \left(f_1 + f_\mathrm{a} + f_\mathrm{e}\right) = 0,$$

perché la differenza di energia cinetica alla fine e alli'inizio si annulla. Si ha

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x^*} \mathrm{d}x\ f_1 = -ma_1 x^*;\\
&\int_0^{x^*} \mathrm{d}x\ f_\mathrm{a} = \mu m g x^*;\\
&\int_0^{x^*} \mathrm{d}x\ f_\mathrm{e} = \int_0^{x^*} \mathrm{d}x\ \left(-k\left(x - X(x)\right)\right) = -k\left(1+\frac{m}{M}\right)\int_0^{x^*} \mathrm{d}x\ x\\
&\qquad\qquad = -\frac{1}{2}k\left(1+\frac{m}{M}\right)x^{*2}.
\end{aligned}$$

Nell'ultima relazione, abbiamo sfruttato la relazione esistente fra x e X. Abbiamo così l'equazione per x^*:

$$\left(-ma_1 + \mu m g - \frac{1}{2}k\left(1+\frac{m}{M}\right)x^*\right)x^* = 0,$$

che ammette le soluzioni

$$x^* = 0; \qquad x^* = \frac{2m(-a_1+\mu g)}{k(1+m/M)}.$$

Evidentemente la soluzione d'interesse è la seconda. La compressione massima della molla è data da $\delta = x^* - X(x^*) = x^*(1+m/M) = 2m(-a_1+\mu g)/k$.

c) Le equazioni del moto per x e X sono le seguenti (ammettendo che $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$):

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -k\left(x - X\right) - ma_1 + \mu m g;\\
M\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} &= k\left(x - X\right) - Ma_1 + F_1 - \mu m g.
\end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di X nella prima equazione otteniamo un'equazione del moto per la sola x:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(1+\frac{m}{M}\right)x - ma_1 + \mu m g.$$

Introducendo la notazione $\xi = x - x^*/2$ si ha un'equazione per ξ:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(1+\frac{m}{M}\right)\xi,$$

che ammette la soluzione

$$\xi(t) = \xi_0\cos(\omega t + \phi),$$

dove

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Le condizioni iniziali vengono fissate dalle condizioni $\xi(0) = -x^*/2$, $\dot\xi(0) = 0$. Si ha così $\xi_0 = -x^*/2$ e $\phi = 0$. Il tempo per raggiungere la massima compressione è quindi $\tau = \pi/\omega$. Alla massima compressione si ha $f_\mathrm{m} = f_\mathrm{e} + f_1 = -k(1+m/M)x^*/2 - ma_1$. La condizione perché il blocco rimanga in quiete è $|f_\mathrm{m}| < \mu m g$.

Risultati numerici: $F_\mathrm{max} = 2.2$ N; $\delta = -0.16$ m; $\tau = 1.05$ s; $|f_\mathrm{e}| = 16$ N, che è maggiore di $\mu m g = 2.2$ N, per cui il blocco si sposterà.

Esercizio 3

Poiché la velocità del corpo nel sistema di riferimento solidale con il disco è diretta radialmente, essa non contribuisce al momento angolare valutato rispetto al perno.

a) Il momento angolare è diretto parallelamente all'asse z e la sua unica componente non nulla vale

$$L = I\omega_0 + mR^2\omega_0,$$

dove $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento d'inerzia del disco.

b) Si conservano il momento angolare rispetto ad O e l'energia cinetica totale. Indicando con $\omega(r)$ la velocità angolare in funzione della distanza r del corpo dal perno, si ha

$$I\omega(r) + mr^2\omega(r) = L,$$

per cui

$$\omega(r_0) = \frac{L}{I + mr_0^2}.$$

c) Imponendo la conservazione dell'energia cinetica, si ha la condizione

$$\frac{1}{2}\left(I + mr_0^2\right)\omega^2(r_0) = \frac{1}{2}\left(I + mR^2\right)\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2,$$

per cui

$$v_0 = \left\{\left[\left(I + mr_0^2\right)\omega^2(r_0) - \left(I + mR^2\right)\omega_0^2\right]/m\right\}^{1/2}.$$

Risultati numerici: $L = -0.81$ kg m^2/s; $\omega(r_0) = -1.786$ rad/s; $v_0 = 0.9427$ m/s.

Esercizio 4

Poiché la temperatura finale è uguale a quella iniziale, e il gas è perfetto, si ha $\Delta U = 0$. Per il primo principio della termodinamica si ha allora $Q = \mathcal{L}$, dove $\mathcal{L}$ è il lavoro che il gas compie sull'ambiente nella trasformazione.

a) Si ha

$$\mathcal{L} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Poiché $V = nRT/p$ si ha quindi

$$Q = nRT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Otteniamo così $T = Q/(nR\ln(p_1/p2))$.

b) In questo caso si ha $\mathcal{L} = p_2(V_2 - V_1)$, dove i volumi $V_{1,2}$ sono gli stessi di prima. Si ha quindi

$$\mathcal{L} = nRTp_2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) = nRT\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right).$$

c) Si ha $\Delta S = \Delta S_{\text{serbatoio}} + \Delta S_{\text{gas}}$. Si ha ora

$$\Delta S_{\text{serbatoio}} = -\frac{\mathcal{L}}{T};$$
$$\Delta S_{\text{gas}} = nR\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Risultati numerici: $T = 284$ K; $\mathcal{L} = 6151$ J; $\Delta S_{\text{serbatoio}} = -21.73$ J/K; $\Delta S_{\text{gas}} = 35.26$ J/K; $\Delta S = 13.53$ J/K.