Prova Intercorso di Meccanica e Termodinamica n. 3: Soluzioni

L. P.

1° Giugno 2010

Esercizio 1

Nel sistema di riferimento solidale con l'asta ruotante, poniamo l'asse x in coincidenza con l'asta, e diretto da O a C. Il corpo è sottoposto a due forze:

1. La forza centrifuga diretta lontano dall'origine O e la cui componente x è pari a $f_c = m\omega_0^2 x$;
2. La forza elastica diretta verso il punto di ascissa ℓ_0 e la cui componente x è pari a $f_e = -k(x - \ell_0)$.

Se il corpo è in movimento, su di esso agisce anche la forza di Coriolis: ma poiché essa è normale all'asta, ad essa si oppone la reazione vincolare dell'asta, che è uguale ed opposta ad essa. Non è quindi necessario tenerne conto.

a) Imponendo $f_c + f_e = 0$ otteniamo l'equazione per x_c:

$$m\omega_0^2 x_c - k(x_c - \ell_0) = 0.$$

Otteniamo così

$$x_c = \frac{k\ell_0}{k - m\omega_0^2}.$$

Si ha $\omega_0 = (33 + \frac{1}{3}) \cdot 2\pi/60 = 3.4907$ rad/s. Sostituendo nell'espressione otteniamo $x_c = 13.40$ cm.

b) Per piccole deviazioni da x_c, l'equazione del moto è

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} = -k(x - \ell_0) + m\omega_0^2 x = -\left(k - m\omega_0^2\right)(x - x_c)\,.$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = x - x_c$ e dividendo per m otteniamo l'equazione dell'oscillatore armonico

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\,\xi,$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{k - m\omega_0^2}{m}} = 2.9923 \text{ rad/s}.$$

Il periodo T si ottiene dall'espressione $T = 2\pi/\omega$ ed è quindi uguale a 2.0998 s.

c) Il punto C di coordinate x_c corrisponde a un punto d'equilibrio stabile fin tanto che $k - m\omega^2 > 0$. Per $k = m\omega^2$ la forza risultante non si annulla mai, e per $k < m\omega^2$ il punto C è un punto d'equilibrio instabile. Per avere soluzioni oscillatorie si deve avere quindi

$$\omega < \omega_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 6.9282 \text{ rad/s}.$$

Esercizio 2

Poiché la forza esercitata sul corpo è sempre parallela all'asse x, la componente y della quantità di moto del corpo si conserva. D'altra parte si conserva anche l'energia meccanica. Tenendo conto dell'espressione della forza, l'energia potenziale della forza applicata dipende solo da x ed è tale che $U(x > d) - U(x < 0) = f_0 d$. Otteniamo così le seguenti equazioni:

$$mv_y = mv_{0y};$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + f_0 d = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

a) Otteniamo così

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2f_0 d/m} = 69.46 \text{ cm/s}.$$

b) Si ha $v_y = v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$, e $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta_0 - 2f_0 d/m}$. Quindi

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{\sqrt{v_0^2 - 2f_0 d/m}} = \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1 - 2f_0 d/mv_0^2}}.$$

Si ottiene $\sin\theta = 1.1822$ per cui $\theta = 49.7719°$.

c) L'equazione per v_x ammette soluzioni reali solo per $\cos\theta_0 > \sqrt{2f_0 d/mv_0^2}$. Quindi si richiede che $\theta < \theta_{\max} = \cos^{-1}\sqrt{2f_0 d/mv_0^2} = 67.84°$.

Esercizio 3

N.B.: Poiché la parte superiore del carrello non esercita attrito, si assume nel seguito che la sferetta si muova senza rotolare.

Disponiamo l'asse x orizzontale e orientato verso destra, e l'asse z verticale e diretto verso l'alto. Poniamo la quota $z = 0$ all'altezza del punto B, e l'ascissa $x = 0$ in corrispondenza della posizione iniziale della sferetta. Il sistema conserva l'energia meccanica e la componente x della quantità di moto. Poiché il sistema è inizialmente in quiete, il centro di massa rimane in quiete durante tutto il processo.

a) Nel punto B, la velocità della sferetta e quella del carrello sono entrambe orizzontali. Indichiamo rispettivamente con v e V le loro componenti x. Si ha $mv + MV = 0$ per la conservazione della componente x della q.d.m. e $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgh$ per la conservazione dell'energia meccanica. Otteniamo così, p.es.,

$$\frac{1}{2}m\left(1 + \frac{m}{M}\right)v^2 = mgh,$$

per cui

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + m/M}} = 4.1284 \text{ m/s};$$

$$V = -\sqrt{\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{2gh}{1 + M/m}} = -0.1474 \text{ m/s}.$$

b) Nel punto C, la sferetta è animata da una velocità $\boldsymbol{v}_1 = (v_{1x}, v_{1z})$ e il carrello da una velocità orizzontale, la cui componente x è pari a V_1. Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 = mg(h - R).$$

D'altra parte, per la conservazione della componente x della q.d.m. si deve avere $mv_{1x} + MV_1 = 0$. Inoltre, nel sistema di riferimento inerziale animato dalla velocità V_1 del carrello, il vincolo impone che la componente x della velocità della sferetta si annulli: quindi $v_{1x} = V_1$. Otteniamo così $v_{1x} = V_1 = 0$, e quindi

$$v_{1z} = \sqrt{2g(h - R)} = 3.4304 \text{ m/s}.$$

c) Poiché il centro di massa rimane in quiete, indicando con x la coordinata della sferetta e con X la coordinata del punto estremo di sinistra del carrello quando la sferetta si trova in B, si deve avere

$$mx + MX = 0.$$

D'altra parte la distanza del punto B dal piende della verticale passante per A sul carrello è pari a $\ell = h \cot\alpha$. Si ha quindi la condizione $x - X = \ell = h\cot\alpha$. Risolvendo rispetto a X otteniamo

$$X = -\frac{h\cot\alpha}{1 + M/m} = 5.38 \text{ cm}.$$