

# Condensazione di Einstein in un potenziale armonico

L. P.

12 Novembre 2006

Consideriamo un sistema di  $N$  bosoni di spin 0 e massa  $m$ , sottoposti a un potenziale armonico isotropo

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad (1)$$

dove  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ . Gli stati di singola particella sono identificati da una terna  $\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$  di numeri interi non negativi, e possiedono l'energia

$$\epsilon_\nu = \hbar\omega \left( \nu_x + \nu_y + \nu_z + \frac{3}{2} \right). \quad (2)$$

Il numero medio di occupazione  $\langle n_\nu \rangle$  dello stato  $\nu$  è dato dal fattore di Bose

$$\langle n_\nu \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (3)$$

dove  $\mu$  è il potenziale chimico,  $k_B$  è la costante di Boltzmann, e  $T$  è la temperatura assoluta. In quel che segue, valuteremo  $\mu$  a partire dall'energia di punto zero, pari a  $3\hbar\omega/2$ .

Il numero totale di particelle che si trovano negli stati eccitati (quelli con  $\nu \neq (0, 0, 0)$ ) non può essere superiore al valore corrispondente a  $\mu = 0$ :

$$N_{\max}(T) = \sum_{\nu \neq (0,0,0)} \frac{1}{e^{\hbar\omega k_\nu / k_B T} - 1}, \quad (4)$$

dove abbiamo posto

$$k_\nu = \nu_x + \nu_y + \nu_z. \quad (5)$$

Quindi, per  $T < T_c$ , dove  $T_c$  è definito da  $N_{\max}(T_c) = N$ , un numero macroscopico di particelle, pari a  $N_0 = N - N_{\max}(T)$ , viene a trovarsi nello stato fondamentale ( $\nu = 0$ ) dell'oscillatore.

Possiamo valutare facilmente  $N_{\max}(T)$  per  $\hbar\omega \ll k_B T$ , che è poi la condizione usuale. Riarrangiamo la somma la somma che appare in (4) mettendo insieme gli stati di uguale energia, cioè di uguale  $k_\nu$ :

$$N_{\max}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu} \delta_{k, k_\nu} \frac{1}{e^{\hbar\omega k / k_B T} - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \frac{1}{e^{\hbar\omega k / k_B T} - 1}. \quad (6)$$

Per  $\hbar\omega \ll k_B T$  possiamo approssimare la somma con un integrale:

$$N_{\max}(T) \simeq \int_1^\infty dk \frac{(k+1)(k+2)}{2} \frac{1}{e^{\hbar\omega k/k_B T} - 1}. \quad (7)$$

In questa situazione, l'integrale è dominato dai valori  $k \sim k_B T/\hbar\omega \gg 1$ . Trascurando 1 e 2 rispetto a  $k$ , possiamo cambiare variabile d'integrazione, ottenendo

$$N_{\max} \simeq \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \int_0^\infty dx \frac{x^2}{2} \frac{1}{e^x - 1}. \quad (8)$$

L'integrale a secondo membro si calcola esattamente, e vale  $\zeta_R(3)$ , dove  $\zeta_R(z)$  è la funzione zeta di Riemann: il suo valore numerico è approssimativamente di 1.20206.

Nell'esperimento di Cornell e Wieman del 1995, circa  $N \simeq 2 \cdot 10^3$  atomi di rubidio (Rb) sono stati portati a temperature dell'ordine di 170 nK. In queste condizioni,  $\hbar\omega \sim 0.09 k_B T \simeq 2.10 \cdot 10^{-31}$  J, per cui  $\omega \simeq 2.0 \cdot 10^3$  s<sup>-1</sup>. La massa di un atomo di rubidio è pari a  $87/N_A = 14.25 \cdot 10^{-23}$  g, dove  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$  è il numero di Avogadro. La lunghezza caratteristica  $\ell$  di confinamento è data da  $\ell = \sqrt{\hbar/m\omega} \simeq 0.602$   $\mu\text{m}$ .