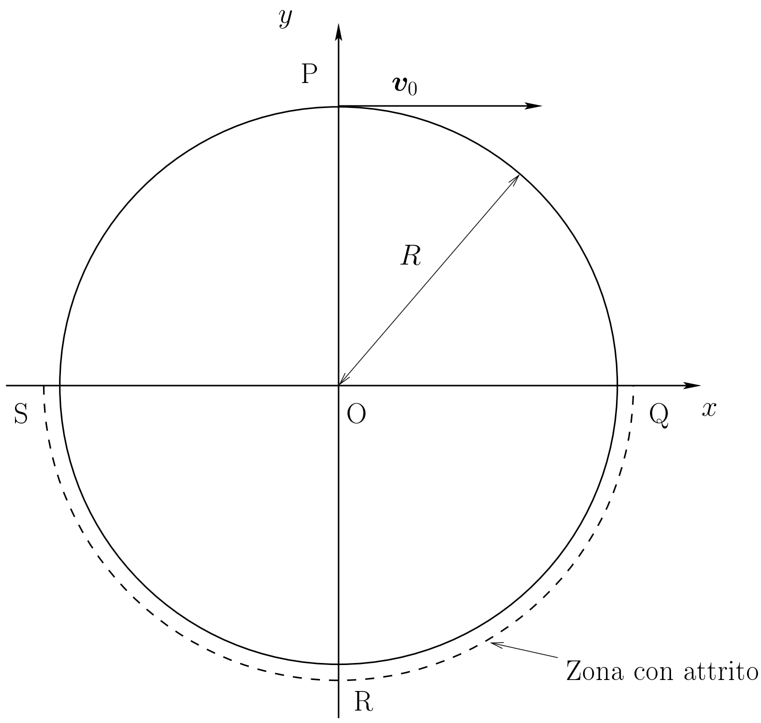
Prova InterCorso di **Meccanica e Termodinamica** n. 2

(12 aprile 2010)

Esercizio n. 1

Un blocchetto (puntiforme) di massa m si muove in una guida circolare di raggio r disposta su di un piano orizzontale. Si consideri un sistema di assi cartesiani x e y con origine nel centro della guida e un sistema di ascissa curvilinea introdotto sulla circonferenza (con origine nell'intersezione con il semiasse positivo x e verso antiorario). La parte della guida contenuta nel primo e secondo quadrante è priva di attrito, mentre la parte contenuta nel terzo e quarto quadrante presenta attrito sul fondo, con un coefficiente di attrito dinamico μ_d. Inizialmente il blocchetto si trova nel punto di intersezione della guida con il semiasse positivo y ed ha velocità (scalare) v_0 positiva.



Si determini

a) il valore di v_0 tale che il blocchetto si fermi esattamente alla fine del tratto di guida con attrito;

b) le componenti cartesiane dell'accelerazione (vettoriale) del blocchetto quando esso passa per il punto diametralmente opposto alla posizione iniziale e le componenti cartesiane della reazione vincolare $\boldsymbol{N}$, esercitata dalla guida, nello stesso punto.

c) le componenti cartesiane dell'accelerazione (vettoriale) del blocchetto quando si ferma.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 150$ g; $\mu_d = 0.3$; $R = 0.65$ m.

Soluzione

Nel tratto PQ il corpo è soggetto alla forza-peso $\boldsymbol{f}_\mathrm{P} = m\boldsymbol{g}$ (diretta parallelamente all'asse z, verticalmente verso il basso) alla reazione vincolare $\boldsymbol{N} = -m\boldsymbol{g}$ esercitata dal piano d'appoggio, e alla reazione vincolare $\boldsymbol{f}_\perp$ della guida circolare, diretta in ogni punto della traiettoria verso il centro O. Poiché la risultante di queste forze è in ogni istante normale alla traiettoria, il modulo della velocità non varia, e il corpo si muove di moto circolare uniforme. A partire dal punto Q il corpo è soggetto anche alla forza di attrito dinamico $\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}$, diretta come la tangente alla traiettoria in verso opposto alla velocità e di modulo pari a $\mu_{\mathrm{d}}N = \mu_{\mathrm{d}}mg$. Conseguentemente la sua accelerazione tangenziale vale $a_{\|} = \mu_{\mathrm{d}}g$ ed è diretta in verso opposto alla velocità. La legge oraria del moto, mentre il corpo percorre l'arco QRS, è quindi data da

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu_{\mathrm{d}} g t^2, \tag{1}$$

dove $s(t)$ è la lunghezza dell'arco tra Q e il punto occupato dal corpo all'istante t. All'istante generico t, in queste condizioni, il modulo della velocità del corpo vale

$$v(t) = v_0 - \mu_{\mathrm{d}} g t. \tag{2}$$

La velocità $v(t)$ si annulla all'istante t^* espresso da

$$t^* = \frac{v_0}{\mu_{\mathrm{d}} g}. \tag{3}$$

a) Imponendo che $s(t^*) = \pi R$ (corrispondente alla lunghezza dell'arco QRS) otteniamo l'equazione per v_0:

$$\pi R = \frac{v_0^2}{\mu_{2\mathrm{d}} g},$$

da cui si ottiene

$$v_0 = \sqrt{2\pi R \mu_{\mathrm{d}} g} = 3.46 \ \mathrm{ms}^{-1}.$$

Lo stesso risultato si può ottenere dal teorema dell'energia cinetica: poiché il lavoro della forza d'attrito è pari a $W_{\mathrm{A}} = -\mu_{\mathrm{d}} mgs$, il risultato si ottiene ponendo $s = \pi R$ e imponendo $W_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$.

b) Il tempo t_1 in cui il punto passa per R è dato da

$$\frac{\pi R}{2} = v_0 t_1 - \frac{1}{2}\mu_{\mathrm{d}} g t_1^2,$$

che ammette le soluzioni

$$t_1 =_0 \pm\sqrt{v_0^2 - \pi R \mu_{\mathrm{d}} g},$$

cui corrispondono le velocità

$$v_1 = v(t_1) = v_0 - v_0 \mp \sqrt{v_0^2 - \pi R \mu_{\mathrm{d}} g}.$$

Occorre prendere la soluzione (per t_1) con il segno meno per avere una velocità positiva. Si ha così

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \pi R \mu_{\mathrm{d}} g} = \sqrt{\pi R \mu_{\mathrm{d}} g}.$$

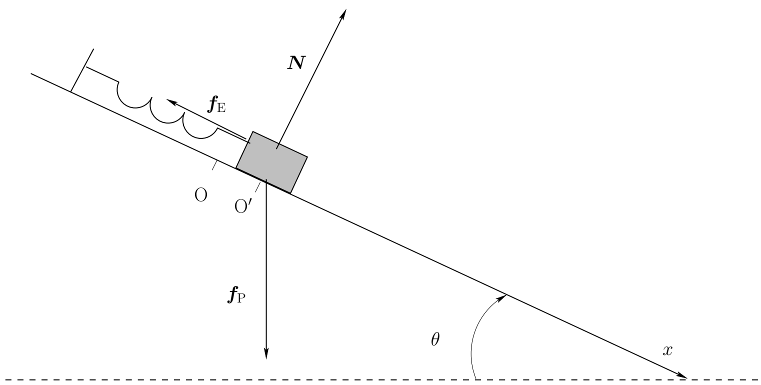
Nel punto R l'accelerazione ha due componenti non nulle:

- L'accelerazione centripeta, diretta lungo l'asse y positivo, che vale $v_1^2/R = \pi\mu_{\mathrm{d}} g = 0.236 \ \mathrm{ms}^{-2}$;
- L'accelerazione tangenziale, diretta lungo l'asse x positivo, che vale $\mu_{\mathrm{d}} g = 2.94 \ \mathrm{ms}^{-2}$.

c) Quando il corpo raggiunge il punto S la velocità del corpo e quindi l'accelerazione centripeta si annulla, ma l'accelerazione tangenziale (dovuta alla forza di attrito) vale ancora $\mu_{\mathrm{d}} g = 2.94 \ \mathrm{ms}^{-2}$ in modulo. Essa è diretta lungo l'asse y negativo.

Esercizio n. 2

Un corpo di massa m scivola senza attrito su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Esso è agganciato a una molla di costante elastica pari a k e l'origine O dell'asse x (parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso) è stata scelta coincidente con la posizione dell'estremo libero (senza il corpo) della molla quando essa è a riposo.



a) Determinare l'ascissa x_c del punto d'equilibrio O′ del corpo;

b) Determinare i moduli $|\boldsymbol{f}_{\mathrm{P}}|$ della forza-peso, $|\boldsymbol{N}|$ della reazione vincolare e $|\boldsymbol{f}_{\mathrm{E}}|$ della forza elastica applicate al corpo se esso si trova in quiete nel punto O′;

c) Supponendo che il corpo si trovi inizialmente in quiete nel punto O, determinare la legge oraria del moto $x(t)$, il periodo delle oscillazioni e la velocità massima del corpo.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 0.3\,kg$; $\theta = 35°$; $k = 8\,N/m$.

Soluzione

a) Nel punto O′ il corpo è soggetto alle seguenti forze:

- La forza-peso $\boldsymbol{f}_{\mathrm{P}}$, diretta verticalmente verso il basso, e di modulo pari a mg;
- La forza elastica $\boldsymbol{f}_{\mathrm{E}}$, diretta parallelamente all'asse x, nella direzione delle x negative, e di modulo pari a kx_{c} (posto $x = 0$ nel punto O corrispondente alla lunghezza a riposo della molla);
- La reazione vincolare $\boldsymbol{N}$, normale all'asse x, e opposta alla componente normale della forza-peso.

Perché il corpo rimanga in quiete, la risultante di queste forze deve annullarsi. Poiché la forza vincolare è normale all'asse x, la componente x della forza-peso deve essere bilanciata dalla forza elastica. Otteniamo così la condizione di equilibrio:

$$-kx_{\mathrm{c}} + mg\sin\theta = 0,$$

da cui si ottiene

$$x_c = \frac{mg\sin\theta}{k} = 0.21 \text{ m}; \tag{4}$$

b) Da quanto detto sopra, si ottiene $|\boldsymbol{f}_{\mathrm{P}}| = mg = 2.94$ N; $|\boldsymbol{N}| = mg\cos\theta = 2.41; (N)$; $|\boldsymbol{f}_{\mathrm{E}}| = mg\sin\theta = 0.69$ N.

c) L'equazione del moto ha l'espressione

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta - kx.$$

La sua soluzione generale è data da

$$x(t) = x_{\mathrm{c}} + A\cos(\omega t - \phi),$$

dove $\omega^2 = k/m$, e A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali, che sono date risettivamente da $x(0) = 0$, $dx/dt|_{t=0} = 0$. La velocità all'istante 0 è pari a $-\omega A \sin\phi$. Otteniamo così $A = x_{\mathrm{c}}$, $\phi = \pi$, per cui la legge oraria del moto è data da

$$x(t) = x_{\mathrm{c}}(1 - \cos\omega t). \tag{5}$$

Il periodo delle oscillazioni è dato da $T = 2\pi/\omega = 1.26$ s, e la velocità massima è data da $v_{\mathrm{max}} = x_{\mathrm{c}}\omega = 1.08\ \mathrm{ms}^{-1}$.