Soluzioni dell'Esame Scritto di Meccanica e Termodinamica

L. P.

14 Settembre 2010

Modulo 1

Esercizio n.1

a) Indicando con s l'ascissa curvilinea, l'equazione del moto ha per espressione

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \begin{cases} a, & \text{per } t < t_1, \\ a_1, & \text{per } t > t_1. \end{cases}$$

Il punto A è identificato dall'ascissa $s = l$. Il tempo t_0 che il carrello impiega a raggiungerlo è dato da

$$\frac{a}{2} t_0^2 = l,$$

per cui $t_0 = \sqrt{2l/a}$. In questo istante la velocità del carrello è pari in modulo a $v_0 = at_0 = \sqrt{2al}$, ed è diretta lungo l'asse x positivo. Si ha così: $\boldsymbol{v}_0 = (\sqrt{2al}, 0)$, con $\sqrt{2al} = 6.00\ \mathrm{ms}^{-1}$.

b) Tra A e B, l'accelerazione vettoriale del carrello è data da due componenti:

a) l'accelerazione tangenziale $a_\parallel$, tangente alla traiettoria, e di valore costante e pari ad a;

b) l'accelerazione centripeta $a_\perp$, normale alla traiettoria, e di valore pari a $v(t)^2/r = a^2 t^2/r$.

L'angolo $\theta(t)$ che l'accelerazione forma con la tangente soddisfa l'equazione

$$\tan\theta(t) = \frac{a_\perp}{a_\parallel} = \frac{at^2}{r}.$$

Otteniamo così l'equazione soddisfatta da t_1:

$$\frac{at_1^2}{r} = \tan\theta.$$

In questo istante, il carrello si trova nella posizione di ascissa curvilinea $s_1 = at_1^2/2 = (r\tan\theta)/2 = 20.05$ m.

c) Se un corpo percorre una distanza x con un'accelerazione costante a partendo dalla quiete o arrivandoci, la sua velocità massima è data da $v = \sqrt{2ax}$. Sia v_1 la velocità in t_1, data da $v_1 = \sqrt{2as_1}$. Allora a_1 è data dalla condizione $v_1 = \sqrt{2|a_1|(l + r\alpha - s_1)}$, che impone che la velocità in B sia nulla. Si ha così

$$a_1 = -a\frac{s_1}{l + r\alpha - s_1} = -0.572 \text{ ms}^{-2}.$$

Esercizio n.2

a) Indichiamo con y la quota del blocchetto, assumendo che il centro dell'emisfero si trovi nel piano $y = 0$. Allora, per la conservazione dell'energia meccanica, la velocità $\boldsymbol{v}$ del blocchetto soddisfa la relazione

$$v = \sqrt{2g(r - y)},$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Nel punto di quota y, indichiamo con θ l'angolo che la normale all'emisfero forma con la verticale. Si ha allora $y = r\cos\theta$. Valutiamo la componente radiale della risultante delle forze applicate al blocchetto. La componente radiale del peso vale $-mg\cos\theta$ ed è diretta verso il centro dell'emisfero; la componente radiale della reazione vincolare vale N e non può essere che positiva. Abbiamo quindi la condizione:

$$-mg\cos\theta + N = ma_r = -m\frac{v^2}{r} = -2gm(1 - \cos\theta),$$

che esprime che la componente radiale della forza risultante è pari alla massa per l'accelerazione centripeta.

b) Questa equazione ammette soluzioni con $N > 0$ fin tanto che

$$\cos\theta > 2(1 - \cos\theta).$$

Si ha quindi il distacco per $\theta_{\rm B}$ tale che $\cos\theta_{\rm B} = 2/3$, cioè $\theta_{\rm B} = 48.19°$.

c) Consideriamo la quota $y(t)$ in funzione del tempo t valutato dall'istante in cui il blocchetto si stacca. Essa è data dall'equazione oraria

$$y(y) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

dove

$$y_0 = r\cos\theta_{\rm B} = \frac{2r}{3};$$

$$v_0 = -v\sin\theta_{\rm B} = -\sqrt{\frac{5gr}{9}}.$$

La quota si annulla per $t = t_0$, dove

$$t_0 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g} = \sqrt{\frac{r}{g}}\frac{\sqrt{17} - \sqrt{5}}{6} = 0.0778 \text{ s}.$$

Modulo 2

Esercizio n.3

a) Sulla sfera agiscono le forze seguenti:

1. La forza-peso $m\boldsymbol{g}$ diretta verticalmente verso il basso, e che si può pensare applicata al centro di massa della sfera;
2. La reazione vincolare $\boldsymbol{N}$, diretta normalmente al piano inclinato, applicata nel punto di contatto;
3. La forza d'attrito $\boldsymbol{A}$, diretta tangenzialmente al piano inclinato, in direzione opposta alla velocità della sfera, e di modulo pari a $\mu_d N$ se la sfera striscia sul piano inclinato.

La reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ può essere determinata dalla condizione che l'accelerazione del centro di massa della sfera normale al piano inclinato si annulli. Si ha così la condizione $N = mg\cos\alpha$. Possiamo così scrivere la prima equazione cardinale del moto nella situazione in cui la sfera striscia sul piano inclinato. Indicando con $a_\parallel$ la componente dell'accelerazione del centro di massa parallela al piano inclinato e diretta concordemente alla velocità iniziale della sfera, abbiamo

$$ma_\parallel = -mg\sin\alpha - \mu_d N = -mg\left(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha\right),$$

per cui

$$a_\parallel = -g\left(\sin\alpha + \mu_d\sin\alpha\right).$$

La legge oraria del moto corrispondente è data da

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}a_\parallel t^2,$$

dove x è la coordinata parallela al piano inclinato, misurata a partire dalla posizione in cui il piano inclinato diventa scabro. La velocità all'istante t è data da

$$\dot{x}(t) = v_0 + a_\parallel t.$$

Consideriamo adesso la seconda equazione cardinale, riferita al centro di massa della sfera. In questo caso i momenti della reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ e della forza-peso $m\boldsymbol{g}$ sono nulli, e rimane solo il momento della forza d'attrito. Indicando con I il momento d'inerzia della sfera e con ω la sua velocità angolare (considerata positiva se la rotazione avviene in senso antiorario) otteniamo

$$I\dot{\omega} = -\mu_d rmg\cos\alpha,$$

per cui si ha

$$\omega(t) = -\frac{mgr}{I}\,\mu_d\cos\alpha\, t.$$

b) La condizione di rotolamento può essere espressa come segue:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega(t)r.$$

Otteniamo così una condizione per l'istante t_1 in cui questa condizione viene soddisfatta:

$$v_0 = \left(-a_\parallel + \frac{mgr^2}{I}\,\mu_d \cos\alpha\right) t_1,$$

per cui

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\left[\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha(1 + (mr^2/I))\right]^{-1},$$

dove $mr^2/I = 5/2$. Si ha $t_1 = 0.6583$ s.

c) Durante il rotolamento, le equazioni cardinali assumono la forma

$$m\dot{v} = -mg\sin\alpha + N;$$
$$I\dot{\omega} = -Nr.$$

Debbono valere le condizioni

$$|N| < \mu_s mg\cos\alpha;$$
$$r\dot{\omega} = -\dot{v}.$$

Otteniamo

$$N = \frac{mg\sin\alpha}{1 + mr^2/I},$$

per cui si ha la condizione

$$\frac{\sin\alpha}{1 + mr^2/I} < \mu_s \cos\alpha,$$

ovvero

$$\tan\alpha < \mu_s\left(1 + mr^2/I\right),$$

per cui α deve soddisfare la condizione $\alpha < 19.29°$. Poiché questa condizione non è soddisfatta, il rotolamento non si mantiene.

Esercizio n.4

a) Il calore viene assorbito soltanto nella trasformazione D⟶A. Indicando con ΔS la differenza di entropia tra A e D, si ha

$$\Delta S = \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} C_V\,\frac{\mathrm{d}T}{T} = C_V \ln\frac{T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{D}}}.$$

Quindi

$$Q = C_V\left(T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{D}}\right) = C_V T_{\mathrm{A}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\Delta S/C_V}\right),$$

dove $C_V = 3R/2$ per una mole di gas monoatomico. Si ha $Q = 4973$ J.

b) Dato il rendimento η del ciclo, il lavoro W fornito dalla macchina è dato da

$$W = \eta Q = \eta C_V T_{\mathrm{A}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\Delta S/C_V}\right).$$

Si ha $W = 746$ J.

c) Per la legge delle adiabatiche si ha

$$\frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{A}}} = \left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}\right)^{\gamma-1}.$$

D'altra parte, in analogia con il punto **a)**, il calore Q_1 ceduto nella trasformazione B$\longrightarrow$C è dato da

$$Q_1 = C_V T_B \left(1 - \mathrm{e}^{-\Delta S/C_v}\right),$$

con lo stesso valore di ΔS. Otteniamo così la seguente espressione del rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q} = 1 - \frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{A}}}.$$

Abbiamo quindi ottenuto T_{B}:

$$T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{A}}\,(1-\eta) = 697 \text{ K}..$$

Si ha inoltre

$$T_{\mathrm{D}} = T_{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-\Delta S/C_V} = 421 \text{ K};$$
$$T_{\mathrm{C}} = T_{\mathrm{B}} \mathrm{e}^{-\Delta S/C_V} = 358 \text{ K}.$$