Soluzioni della prova scritta di Meccanica e Termodinamica del 7 Ottobre 2010

L. P.

8 Ottobre 2010

Esercizio 1

a) Prendiamo due sistemi di riferimento in cui l'asse z è verticale e diretto verso l'alto, l'asse x è orizzontale e parallelo e concorde a $\boldsymbol{v}_0$, e l'origine degli assi coincide con il punto del pavimento del furgone verticalmente di sotto alla vite all'istante in cui essa si stacca. Il primo sistema di riferimento, O, è solidale con la strada, mentre il secondo, O$'$, è solidale con il furgone. In O, le equazioni del moto della vite sono date da:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0;$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg;$$

e le condizioni iniziali sono date da

$$x(0) = 0; \qquad \dot{x}(0) = v_0;$$
$$z(0) = h; \qquad \dot{z}(0) = 0.$$

Abbiamo quindi la legge oraria del moto:

$$x(t) = v_0 t; \qquad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2; \quad t > 0.$$

La vite tocca il pavimento del furgone quando $t = t_1 = \sqrt{2h/g} = 0.49$ s. Lo stesso calcolo si può fare in O$'$, notando che l'accelerazione di trascinamento $\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}$ è orizzontale, e quindi non modifica la dipendenza di z da t.

b) In O$'$, le equazioni del moto sono date da

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -a_0;$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg;$$

dove l'accelerazione a_0 è *negativa*. Le condizioni iniziali sono

$$x(0) = 0; \qquad \dot{x}(0) = 0;$$
$$z(0) = h; \qquad \dot{z}(0) = 0.$$

La legge oraria del moto è data da

$$x(t) = \frac{1}{2}|a_0|t^2;$$
$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Per $t = t_1$ si ha

$$\ell_1 = x(t_1) = \frac{|a_0|h}{g} = 0.24 \text{ m}.$$

La velocità relativa $\boldsymbol{v}_1$ è pari a $|a_0|t_1\boldsymbol{i} - gt_1\boldsymbol{k}$, per cui il suo modulo è dato da

$$v_1 = t_1\sqrt{a_0^2 + g^2} = 4.9513 \text{ m/s}.$$

c) Poiché la componente x della velocità della vite non cambia in O, si ha semplicemente

$$\ell_2 = v_0 t_1 = 8.245 \text{ m}.$$

Esercizio 2

a) La lunghezza della molla quando la particella è nel punto B, è data da

$$x = 2r\cos\frac{\theta_\mathrm{B}}{2}.$$

Sia $\boldsymbol{f}$ la forza elastica, $\boldsymbol{p}$ la forza-peso, e $\boldsymbol{N}$ la reazione vincolare. L'equilibrio si ha se la componente tangenziale di $\boldsymbol{f} + m\boldsymbol{g}$ si annulla. Si ha

$$f_\parallel = f\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_\mathrm{B}}{2}\right) = f\sin\frac{\theta_\mathrm{B}}{2};$$
$$p_\parallel = -mg\sin\theta_\mathrm{B}.$$

All'equilibrio si deve quindi avere

$$mg\sin\theta_\mathrm{B} = f\sin\frac{\theta_B}{2},$$

e cioè

$$f = 2mg\cos\frac{\theta_\mathrm{B}}{2}.$$

D'altra parte si ha

$$|f| = kr\left|2\cos\frac{\theta_\mathrm{B}}{2} - 1\right|,$$

per cui otteniamo

$$k_\mathrm{eq} = \frac{2mg\cos\theta_\mathrm{B}/2}{r(2\cos\theta_\mathrm{B}/2 - 1)} = 6.099 \text{ N/m}.$$

b) L'energia meccanica nel punto B, se la particella è in quiete, è data da

$$E = \frac{1}{2}k\,\Delta x^2 + mgh,$$

dove

$$\Delta x = x - r = r\left(2\cos\frac{\theta_{\mathrm{B}}}{2} - 1\right);$$
$$h = r(1 - \cos\theta_{\mathrm{B}}).$$

Se la particella arriva nel punto C con velocità nulla, il corrispandente valore dell'energia meccanica è

$$E' = \frac{1}{2}kr^2.$$

Imponendo $E = E'$ otteniamo

$$k_0 = \frac{mg\,(\cos\theta_{\mathrm{B}} - 1)}{4r\cos\theta_{\mathrm{B}}/2\,(\cos\theta_{\mathrm{B}}/2 - 1)} = 5.99\ \mathrm{N/m}.$$

La reazione vincolare è verticale ed è data da $mg - k_1 r = -1.329$ N. Essa è diretta verso l'*esterno* della guida.

c) Si supponga $|\theta| \ll 1$. La lunghezza della molla è allora $\ell = 2r + \mathrm{O}(\theta^2)$, e la sua componente tangenziale è pari a $-f\sin\theta/2 \simeq -kr\,\theta/2$ La forza tangente sulla particella è quindi $f(\theta) \simeq (-mg + kr/2)\theta$, mentre l'accelerazione a vale $a \simeq r\ddot{\theta}$. Si ha quindi, se $kr < mg$,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r} - \frac{k}{2m}} = 0.9730\ \mathrm{rad/s}.$$

Esercizio 3

a) Si consideri la rotazione istantanea attorno al punto di contatto del rocchetto con il piano inclinato. Poniamo l'asse delle x parallelo al piano inclinato e diretto verso l'alto, e sia τ la componente x della tensione applicata al rocchetto. La componente x del peso del rocchetto (che si può pensare applicato nel centro di massa) è pari a $-Mg\sin\alpha$. I momenti della forza d'attrito e della reazione vincolare rispetto al punto di contatto si annullano. Si ha allora equilibrio se

$$-Mgr\sin\alpha + 2r\tau = 0. \tag{1}$$

Si ha quindi equilibrio se $\tau = Mg/2$. D'altra parte il corpo appeso è in equilibrio se $\tau = mg$. Otteniamo così $m_{\mathrm{eq}} = (M\sin\alpha)/2 = 185$ g.

b) Il problema è descritto dalle seguenti equazioni, dove a rappresenta l'accelerazione del corpo appeso lungo l'asse z, ω la velocità angolare del rocchetto, e $I = Mr^2/2$ è il momento d'inerzia del rocchetto:

$$ma = \tau - mg;$$
$$Ma_{\mathrm{CM}} = \tau + f_{\mathrm{a}} - Mg\sin\alpha;$$
$$I\dot{\omega} = f_{\mathrm{a}}r - \tau r;$$
$$a_{\mathrm{CM}} = -r\dot{\omega};$$
$$a = 2a_{\mathrm{CM}}.$$

Eliminando a e $\dot{\omega}$ mediante le ultime due equazioni otteniamo

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}ma_{\mathrm{CM}} = \tau - mg;\\
&-I\frac{a_{\mathrm{CM}}}{r^2} = f_{\mathrm{a}} - \tau;\\
&Ma_{\mathrm{CM}=f_{\mathrm{a}}} + \tau - Mg\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

Eliminando τ e f_{a} otteniamo

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{2m - M\sin\alpha}{M + m + I/r^2}g = 3.3967\ \mathrm{m/s^2}.$$

c) Si hanno inoltre le equazioni

$$
\begin{aligned}
&\tau = mg - \frac{1}{2}ma_{\mathrm{CM}} = 5.51\ \mathrm{N};\\
&f_{\mathrm{a}} = \tau - \frac{I}{r^2}a_{\mathrm{CM}} = 4.26\ \mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

È da notare il segno di f_{a}, che indica che esso è diretto *verso l'alto.*

Esercizio 4

a) Nell'espansione libera da A a B il sistema non scambia calore né lavoro con l'esterno. Quindi la variazione della sua energia interna è nulla. Poiché il gas è perfetto, la sua energia interna dipende solo dalla temperatura, per cui $T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{A}}$. D'altra parte, per la legge dei gas perfetti, $T_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}/nR = 288.6$ K. Si ha quindi $p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}}\,(V_{\mathrm{A}}/V_{\mathrm{B}}) = 6.0 \cdot 10^4$ Pa.

b) Per la legge delle adiabatiche reversibili, $p_{\mathrm{A}}T_{\mathrm{A}}^{1/(1-\gamma^{-1})} = p_{\mathrm{C}}T_{\mathrm{C}}^{1/(1-\gamma^{-1})}$, dove si ha $\gamma = 7/5$ e $p_{\mathrm{C}} = p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}}(V_{\mathrm{A}}/V_{\mathrm{B}})$. Otteniamo così

$$T_{\mathrm{C}} = T_{\mathrm{A}}\left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}\right)^{1-\gamma^{-1}} = 236.7\ \mathrm{K},$$

e, evidentemente, $Q_{\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{C}} = nc_{\mathrm{p}}(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{A}})$, con $c_{\mathrm{p}} = \frac{7}{2}R$, quindi $Q = 377.6$ J. Poiché il sistema scambia calore con l'esterno solo durante questa trasformazione, questo è anche il calore totale scambiato.

c) $\Delta S_{\mathrm{s}} = 0$ lungo un ciclo, perché l'entropia è una funzione di stato. D'altra parte il ciclo non è reversibile, quindi l'entropia dell'universo aumenta. L'ambiente riceve calore durante la trasformazione B $\longrightarrow$ C: si ha:

$$\Delta S_{\mathrm{u}} = -\int_{T_{\mathrm{B}}}^{T_{\mathrm{C}}} \mathrm{d}T\,\frac{nc_{\mathrm{p}}}{T} = nc_{\mathrm{p}}\ln\frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{C}}} = nc_{\mathrm{p}}\left(1-\gamma^{-1}\right)\ln\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}.$$

È più facile tenere conto del fatto che il sistema produce entropia nell'espansione libera A $\longrightarrow$ B, che poi deve cedere all'ambiente. Nella trasformazione C $\longrightarrow$ A non c'è scambio di calore (né d'entropia), quindi l'entropia ceduta all'ambiente nella trasformazione B $\longrightarrow$ C è pari a quella prodotta nell'espansione libera A $\longrightarrow$ B, e cioè $nR\ln V_{\mathrm{B}}/V_{\mathrm{A}} = 1.44$ J/K. Si può controllare che questo risultato è uguale a quello derivato prima.