1 Corpo Nero

Un corpo caldo emette radiazione elettromagnetica. Un filamento incandescente emette una radiazione che tende a cambiare colore all'aumentare della temperatura. Quando una radiazione elettromagnetica investe un corpo, essa e', almeno in parte, assorbita ed una certa quantità di energia e' trasferita dalla radiazione al corpo. Se il corpo e' a temperatura costante, allora l'energia da esso assorbita deve essere uguale a quella emessa; il corpo e la radiazione sono in equilibrio termico. Secondo la teoria elettromagnetica, l'energia trasportata da un'onda elettromagnetica è proporzionale ai quadrati delle ampiezze massime delle onde elettriche e magnetiche

$$\text{energia} \propto \left(E_{\max}^2 + H_{\max}^2\right)$$

La caratteristica importante di questa relazione è che l'energia dipende solo dall'ampiezza e non dalla frequenza o dalla lunghezza d'onda.

Il sistema più semplice per realizzare l'equilibrio termico tra la materia e la radiazione elettromagnetica e' quello di considerare una cavità le cui pareti sono ad una data temperatura e nel cui interno esiste una radiazione elettromagnetica. Il continuo scambio di energia tra le pareti della cavità ed il campo elettromagnetico assicura l'equilibrio termico. La cavità gode delle seguenti proprietà:

1. il flusso di radiazione deve essere lo stesso in tutte le direzioni
2. il flusso di radiazione deve essere lo stesso in tutti i punti della cavità
3. il flusso di radiazione deve dipendere solo dalla temperatura e non dalla geometria della cavità o dal materiale con il quale è realizzata.

Se una di queste proprietà è violata, vengono violate le leggi della termodinamica. La radiazione elettromagnetica all'interno di una cavità ha la proprietà di essere uguale a quella emessa da una superficie nera, ovvero da una superficie in grado di assorbire tutta la radiazione che la investe. Ad esempio, la grafite assorbe circa il 97 % della radiazione che la investe ed è un ottimo emettitore. La radiazione di corpo nero è un fenomeno di grande importanza semplicemente perché le sue proprietà hanno un carattere universale, ovvero non dipendono dal materiale che compone il corpo.

Indichiamo con

$$u(\nu, T)d\nu$$

l'energia, per unità di volume, della radiazione elettromagnetica corrispondente ad onde la cui frequenza cade nell'intervallo $[\nu, \nu + d\nu]$. La u misurata per un corpo nero è mostrata in figura[1]

[1] Si ricordi che $\lambda\nu = c$ dove c è la velocità della luce.

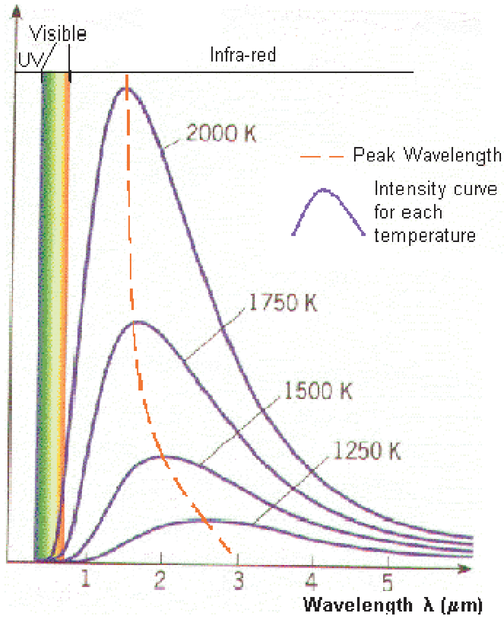

Figure 1:

Il dato sperimentale mostra che il massimo di u si sposta verso la parte visibile dello spettro all'aumentare della temperatura. Si trova che la lunghezza d'onda corrispondente al massimo della densità di energia u è data da[2]

$$\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3} \quad [mK] \tag{1}$$

E' interessante osservare che questa legge consente la stima della temperatura di un corpo a partire da una osservazione di tipo ottico, cioè la misura di $\lambda_{\max}$. Ad esempio, assumendo che il sole si comporti come un corpo nero[3] e sapendo che il massimo è a $\lambda_{\max} = 483nm$ (siamo, circa, nel verde), dalla (1) si ha

$$T = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{483 \times 10^{-9}} = 6000K$$

La temperatura indicata è, naturalmente, quella della superficie solare e non quella degli strati interni. Un'altro dato sperimentale è che la densità d'energia totale è proporzionale alla quarta potenza della temperatura

$$\int_0^\infty u(\nu, T) d\nu \propto T^4 \tag{2}$$

[2] La temperatura è espressa in gradi Kelvin e la lunghezza d'onda in metri.

[3] In genere le stelle si comportano come un corpo nero nel senso che assorbono tutta la radiazione incidente e sono capaci di emettere a tutte le lunghezze d'onda.

La corretta $u(\nu, T)$ fu dedotta da Max Planck nel 1900 introducendo una radicale innovazione rispetto alle idee dell'epoca. Cerchiamo di ripercorrere, brevemente, la deduzione di Planck. Gli esperimenti di Hertz sulle onde elettromagnetiche diedero la conferma finale sulla natura elettromagnetica della luce e questo convinse Planck che il punto nodale doveva essere il modo nel quale un oscillatore elettrico[4] assorbe o emette radiazione elettromagnetica. Stiamo naturalmente assumendo che gli elettroni del corpo nero si comportano come un insieme di oscillatori armonici. In una condizione di equilibrio termico, ci deve essere un ben definito rapporto tra la densità di energia della radiazione (la $u(\nu, T)$) e l'energia media degli oscillatori. Si può, infatti, dimostrare che

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{\varepsilon} \tag{3}$$

dove $\overline{\varepsilon}$ è l'energia media degli oscillatori. Essa è definita da

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon P\left(\varepsilon, T\right) d\varepsilon}{\int_0^\infty P\left(\varepsilon, T\right) d\varepsilon} \tag{4}$$

dove $P\left(\varepsilon, T\right)$ è la probabilità di trovare un oscillatore con energia ε, e T è la temperatura dell'insieme di oscillatori. Qualche tempo prima, Boltzmann, con argomenti molto semplici, dimostrò che

$$P\left(\varepsilon, T\right) = \exp(-\frac{\varepsilon}{K_B T}) \tag{5}$$

dove K_B è la costante di Boltzmann[5]. Inserendo la (5) nella (4) si ha

$$\overline{\varepsilon} = K_B T$$

e quindi

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} K_B T \tag{6}$$

Sfortunatamente questa formula, nota come la legge di Rayleigh e Jeans, non riproduce il dato sperimentale, come mostrato dalla figura che segue.

Più precisamente, la formula funziona alle basse frequenze e va malissimo alle alte, tanto che il suo integrale rispetto a ν diverge invece di riprodurre la (2).

Fu riconosciuto da Planck che il problema doveva essere il calcolo della $\overline{\varepsilon}$. Nella (4) si assume che gli oscillatori possono assumere tutte le energie ε, senza alcuna limitazione. Planck, invece, ipotizzò che l'energia degli oscillatori fosse quantizzata secondo la regola

$$\varepsilon = n\varepsilon_0 \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

[4]Un elettrone che esegue un moto oscillatorio armonico di frequenza ν emette radiazione con la stessa frequenza. Allo stesso modo, una radiazione di frequenza ν induce su un elettrone un moto oscillatorio con la stessa frequenza.

[5]$K_B T$ ha naturalmente le dimensioni di una energia e, a temperatura ambiente ($300K$), vale $25meV$.

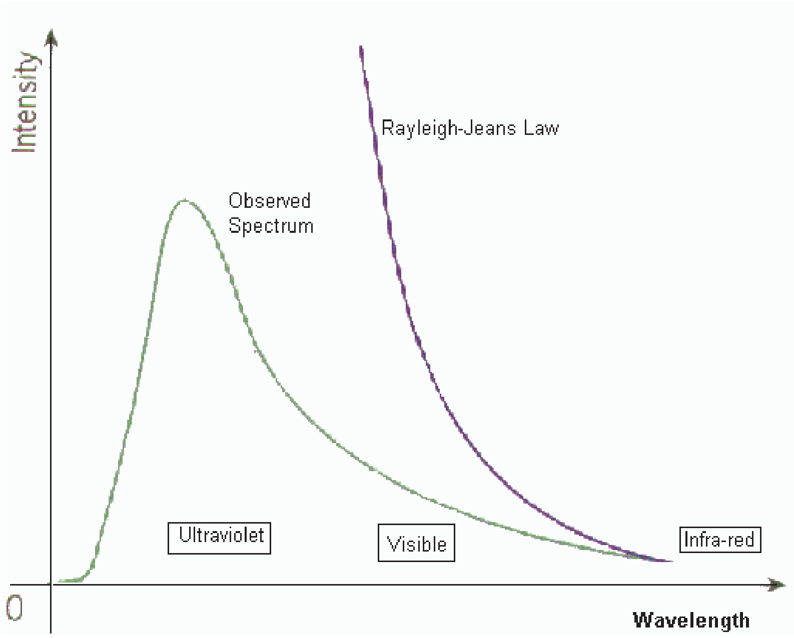

Figure 2:

dove ε_0 è il quanto di energia fondamentale. E' necessario sottolineare che la regola di quantizzzazione (7) non ha nessuna giustificazione dal punto di vista della fisica nota al tempo. La meccanica di Newton non pone nessuna limitazione all'energia di un oscillatore e questa può assumere qualsiasi valore con continuità. Vediamo quali sono le conseguenza della (7). L'energia media (4) ora diventa

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 \exp(\frac{-n\varepsilon_0}{K_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(\frac{-n\varepsilon_0}{K_B T})} \tag{8}$$

Il calcolo delle somme è molto semplice e procede nel seguente modo

$$\overline{\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \varepsilon_0} \right)$$

dove abbiamo posto $\beta = 1/K_B T$. Tenuto conto del fatto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \varepsilon_0} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_0}}$$

si ha

$$\overline{\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta \varepsilon_0} - 1}$$

e quindi dalla (3)

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1}$$

Planck trovò che un perfetto accordo con i dati sperimentali (Figura 1) si ottiene se

$$\varepsilon_0 = h\nu \quad \text{con} \quad h = 6.6256 \times 10^{-34} J \cdot s \tag{9}$$

La h, ora nota come la costante di Planck, ha le dimensioni di un'energia per un tempo e ν è la frequenza di oscillazione sia del campo elettromagnetico che dei singoli oscillatori. Con la ε_0 definita dalla (9), la densità d'energia del corpo nero è

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} \tag{10}$$

e l'accordo con i dati sperimentali è perfetto.

Vale la pena sottolineare le implicazioni della regola di quantizzazione (7). Secondo questa regola, se le energie di un gran numero di oscillatori fossero misurate, alcuni di essi avrebbero energia zero, altri energia $h\nu$, altri ancora $3h\nu$ e così via. Nessuno di essi potrà avere una energia che è una frazione di $h\nu$, ad esempio $3.256h\nu$. Questo implica immediatamente che quando l'energia di un oscillatore cambia, questo deve avvenire in modo discontinuo. D'altra parte, se un oscillatore cambia energia solo in modo discontinuo, questo implica che i processi di assorbimento ed emissione di energia elettromagnetica possono avvenire solo per multipli di $h\nu$.