1 Corda Vibrante

L'equazione che descrive le oscillazioni di una corda vibrante e'

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

dove la funzione $f(x,t)$ e' lo spostamento della corda dalla posizione di equilibrio e v e' una costante che dipende dal materiale con il quale la corda e' realizzata. Cerchiamo soluzioni nella forma (onde stazionarie)

$$f(x,t) = f_1(t) f_2(x) \tag{2}$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ha

$$f_2(x) f_1''(t) - v^2 f_2''(x) f_1(t) = 0$$

e dividendo per il prodotto $f_1(t)f_2(x)$ abbiamo l'equazione

$$\frac{f_1''(t)}{f_1(t)} - v^2 \frac{f_2''(x)}{f_2(x)} = 0 \tag{3}$$

Osserviamo che il primo termine di questa equazione e' funzione solo di t mentre il secondo solo di x. Dovendo essere la somma costante (uguale a zero), devono essere costanti entrambi i termini

$$\tfrac{f_1''(t)}{f_1(t)} = -\omega^2 \qquad \tfrac{f_2''(x)}{f_2(x)} = -k^2 \tag{4}$$

Le costanti di separazione (questo e' il loro nome) ω e k devono soddisfare l'equazione che si ottiene sostituendo la (4) nella (3)

$$-\omega^2 + v^2 k^2 = 0$$

ovvero

$$\omega = vk \tag{5}$$

Questa e' la relazione di dispersione che lega il numero d'onda k alla frequenza ω. Dalla (4) si hanno le seguenti soluzioni

$$\begin{array}{ll} f_1''(t) + \omega^2 f_1(t) = 0 & f_2''(x) + k^2 f_2(x) = 0 \\ \cos(\omega t),\ \sin(\omega t) & \cos(kx),\ \sin(kx) \\ e^{i\omega t},\ e^{-i\omega t} & e^{ikx},\ e^{-ikx} \end{array} \tag{6}$$

Naturalmente si può passare dalle soluzioni con gli esponenziali a quelle con seno e coseno utilizzando le formule

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \cos(kx) + i\sin(kx) \\ e^{-ikx} &= \cos(kx) - i\sin(kx) \end{aligned}$$

Per la parte spaziale possiamo dunque scrivere

$$f_2(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \tag{7}$$

Per una corda fissa agli estremi $x = 0$ e $x = L$ abbiamo le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{array}{lll} f_2(0) = 0 & \Rightarrow & B = 0 \\ f_2(L) = 0 & \Rightarrow & \sin(kl) = 0\ ,\ \ k_n = \frac{n\pi}{L},\ n = 1, 2, 3.... \end{array} \tag{8}$$

A partire dalle soluzioni $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ possiamo costruire qualunque altra soluzione

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)] \tag{9}$$

dove

$$\omega_n = vK_n = v\frac{n\pi}{L} = n\omega_1 \ \text{ con }\ \omega_1 = \frac{v\pi}{L} \tag{10}$$

(verificare che la (9) e (10) soddisfano la equazione (1) mediante sostituzione diretta). I singoli termini della serie (9) si dicono *modi di oscillazione* e sono caratterizzati dalle frequenze ω_n. Il modo con $n = 1$ e' detto fondamentale, quelli con $n > 1$ sono detti *armoniche.* Notiamo che, almeno in questo caso, le frequenze armoniche sono multipli interi della fondamentale. Le costanti A_n e B_n vengono determinate dalle condizioni iniziali che, nel nostro caso, prendiamo della forma

$$\begin{array}{rcl} f(x,o) & = & F(x) \\ \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,|_{t=0} & = & 0 \end{array}$$

la prima delle quali fissa la forma iniziale della corda mentre la seconda da' una velocità iniziale nulla. Dalla prima si ha che

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{11}$$

Il calcolo dei coefficienti A_n procede osservando che l'insieme di funzioni $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ gode della seguente proprietà

$$\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = \begin{cases} 0 \text{ se } m \neq n \\ \frac{L}{2} \text{ se } m = n \end{cases} \tag{12}$$

Moltiplicando ambo i membri della (11) per $\sin(\frac{m\pi}{L}x)$ ed integrando otteniamo

$$\int_0^L F(x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx$$

Tenendo conto della (12) si ha

$$\int_0^L F(x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = A_m\frac{L}{2}$$

e pertanto

$$A_m = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx \tag{13}$$

E' importante osservare che tutte le funzioni continue che si annullano in $x = 0$ e $x = L$ sono espandibili secondo la (11). La condizione iniziale sulla velocità da'

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\left[-\omega_n A_n\sin(\omega_n t) + \omega_n B_n\cos(\omega_n t)\right]$$

da cui

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\omega_n B_n \tag{14}$$

Dovendo essere la (14) nulla, devono annullarsi tutti i coefficienti B_n. La soluzione cercata ha pertanto la forma

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\omega_n t) \tag{15}$$

Per chiarire il significato della soluzione trovata, consideriamo il caso in cui la forma iniziale della corda e' data da

$$F(x) = \sin(\frac{\pi}{L}x)$$

In questo caso si ha

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{\pi}{L}x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = \begin{cases} 0 \text{ se } n > 1 \\ 1 \text{ se } n = 1 \end{cases}$$

La serie si tronca al primo modo di oscillazione

$$f(x,t) = \sin(\frac{\pi}{L}x)\cos(\omega_1 t)$$

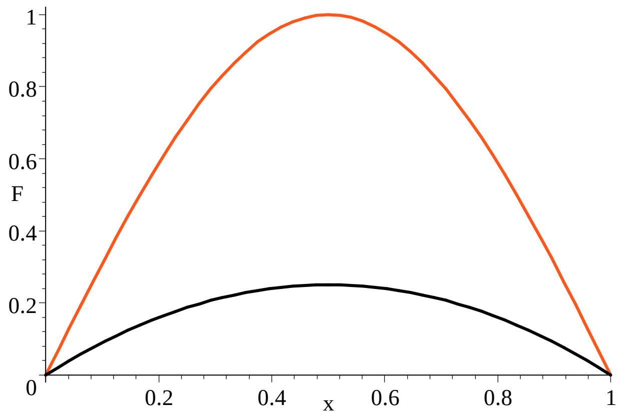
Consideriamo ora il caso

$$F(x) = x(1-x)$$

dove abbiamo posto, per semplicita', $L = 1$. Le frequenze dei modi sono date da

$$\omega_n = vK_n = vn\pi = n\omega_1 \quad \text{con} \quad \omega_1 = v\pi$$

Nella figura e' mostrato il confronto con il caso precedente.



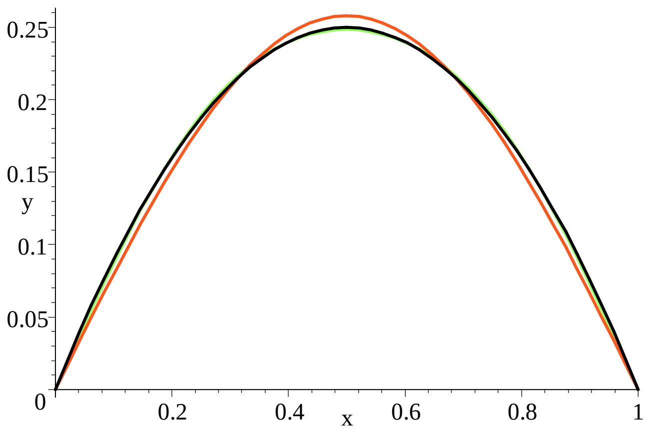
Confronto tra $x(1-x)$ *(nero) e* $\sin(\pi x)$ *(rosso).*

Le due forme iniziali, benché' simili, danno luogo, come vedremo, ad una composizione armonica molto diversa. Dalla equazione (13) si ha

$$A_n = \frac{4}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right)$$

I primi termini della serie per $F(x)$ sono

$$F(x) = \frac{8}{\pi^3}\left(\sin(\pi x) + \frac{1}{27}\sin(3\pi x) + \frac{1}{125}\sin(5\pi x) + ...\right) \tag{16}$$

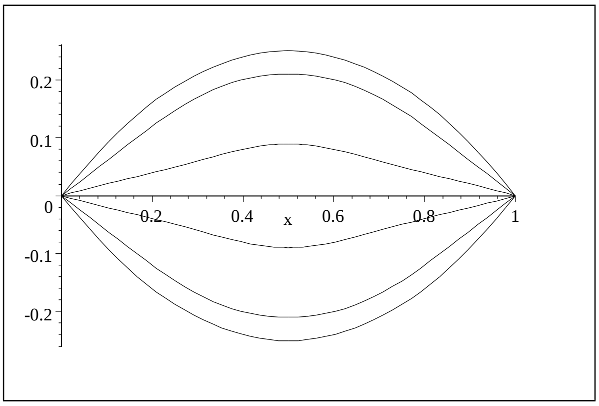


La figura mostra $x(1-x)$ con una linea nera, $\frac{8}{\pi^3}\sin(\pi x)$ con una linea rosa e

$\frac{8}{\pi^3}\left(\sin(\pi x)+\frac{1}{27}\sin(3\pi x)\right)$ con una linea verde rendendo esplicito il fatto che la serie (16) converge rapidamente a $x(1-x)$, consistentemente con il fatto che i coefficienti della serie decrescono come $\frac{1}{n^3}$. La soluzione completa e'

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= \frac{8}{\pi^3}\Bigg(\sin(\pi x)\cos(\omega_1 t)+\frac{1}{27}\sin(3\pi x)\cos(3\omega_1 t) \\
&\quad +\frac{1}{125}\sin(5\pi x)\cos(5\omega_1 t)+....\Bigg)
\end{aligned}
$$

E' interessante osservare che in questa soluzione sono presenti solo le armoniche dispari. La figura che segue mostra la $f(x,t)$ con $v=1$ con $0\le t\le 1$ a passi di 0.2.



La velocita' della corda e' definita da

$$
V(x,t)=\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=-\frac{8}{225\pi^2}\left(225\sin\pi x\sin\pi t+25\sin 3\pi x\sin 3\pi t+9\sin 5\pi x\sin 5\pi t\right)
$$

Il grafico di questa funzione per $x=0.5$ e' mostrato nella figura che segue. La velocita' ha, naturalmente, un andamento oscillante.