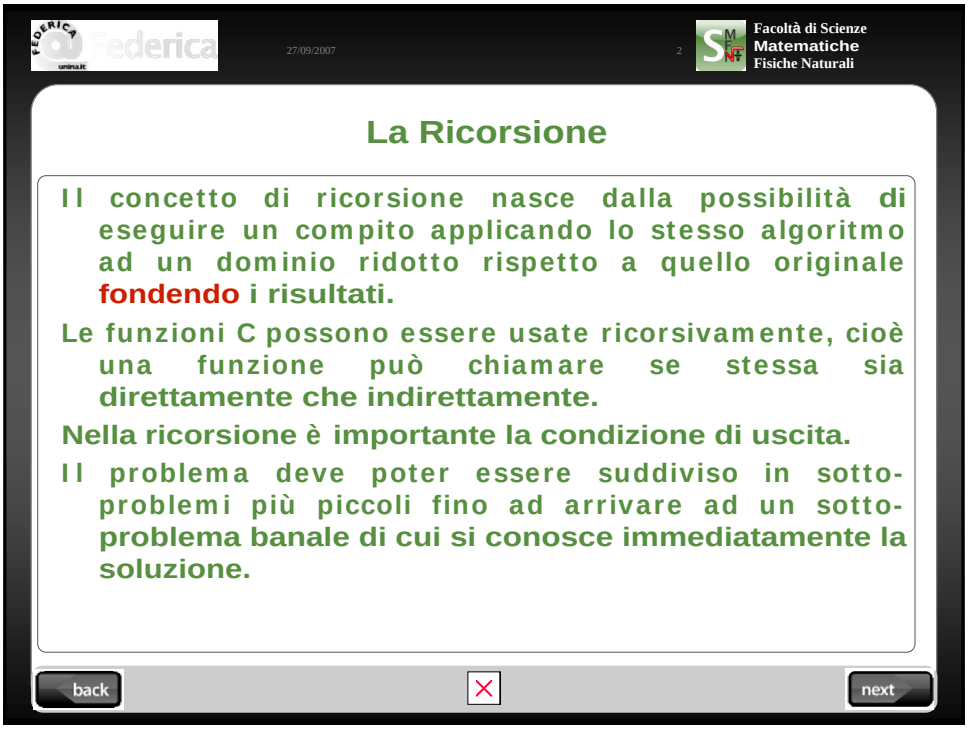

Federica
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Laboratorio di
Algoritmi e Strutture Dati
Prof. Aniello Murano
Ordinamento, Ricorsione e Code di Priorità
Corso di Laurea
Codice insegnamento
Email docente
Anno accademico
Informatica
13917
murano@na.infn.it
2007/2008
Lezione numero: 3
Parole chiave: Ordinamento, Insertion sort, Heapsort,
next
e-Learning


Federica
27/09/2007
2
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
La Ricorsione
Il concetto di ricorsione nasce dalla possibilità di eseguire un compito applicando lo stesso algoritmo ad un dominio ridotto rispetto a quello originale fondendo i risultati.
Le funzioni C possono essere usate ricorsivamente, cioè una funzione può chiamare se stessa sia direttamente che indirettamente.
Nella ricorsione è importante la condizione di uscita.
Il problema deve poter essere suddiviso in sotto-problemi più piccoli fino ad arrivare ad un sotto-problema banale di cui si conosce immediatamente la soluzione.
back
next

Soluzione ricorsiva di un problema

PROBLEMA: Voglio lavare una pila di 15 piatti.

Ho un sistema che riesce a lavare i piatti se ha in input una pila più piccola:
(intuitivamente, il calcolatore è in grado di lavare 14 piatti)

Algoritmo *RICORSIVO:* ***un po' più semplice*** *del problema intero*

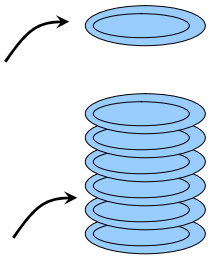
prendo un piatto,

resta una pila di 14 piatti:

il calcolatore li lava

lavo il mio piatto

facilissimo



back next

Esempio

```
void lava_piatti(n)
{
      if (nessun_piatto_da_lavare)      // caso base
          riposati!
      else                              // passo ricorsivo
      {
          Prendi un piatto
          Lavalo
          lava_piatti(n-1)
      }
}
```

Condizione di terminazione

Chiamata Ricorsiva

il numero di piatti da lavare decresce:
la terminazione e' garantita!

Una funzione ricorsiva:

- Ha una o più condizioni di terminazione (casi base)
- Chiama se stessa ricor-sivamete.
- Ad ogni chiamata ci si avvicina alla condizione di terminazione

back next

Stampa dei primi N interi positivi

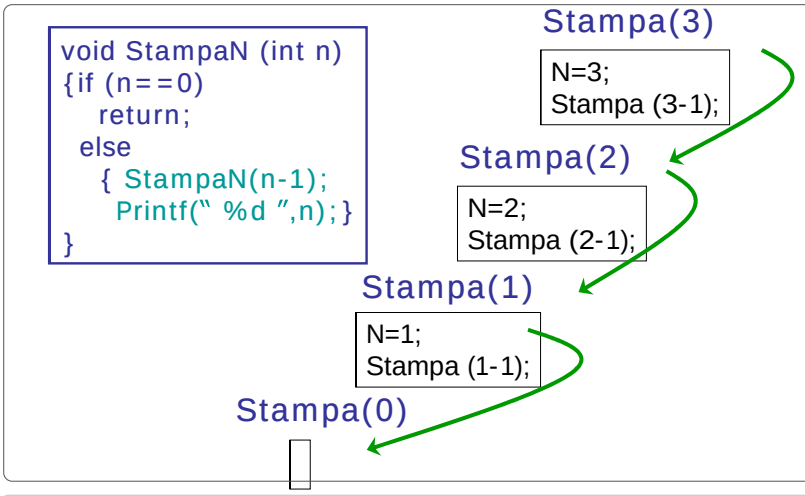
Sia N=3.
Assumiamo che il calcolatore sappia fare la stampa di N-1 interi (I primi due interi).
Il mio risultato è dato da:
dopo aver stampato i primi N-1 interi (2 interi) stampa l'ennesimo intero (l'intero 3)
Attenzione: Gli elementi devono essere stampati in ordine crescente!

Considerazioni:

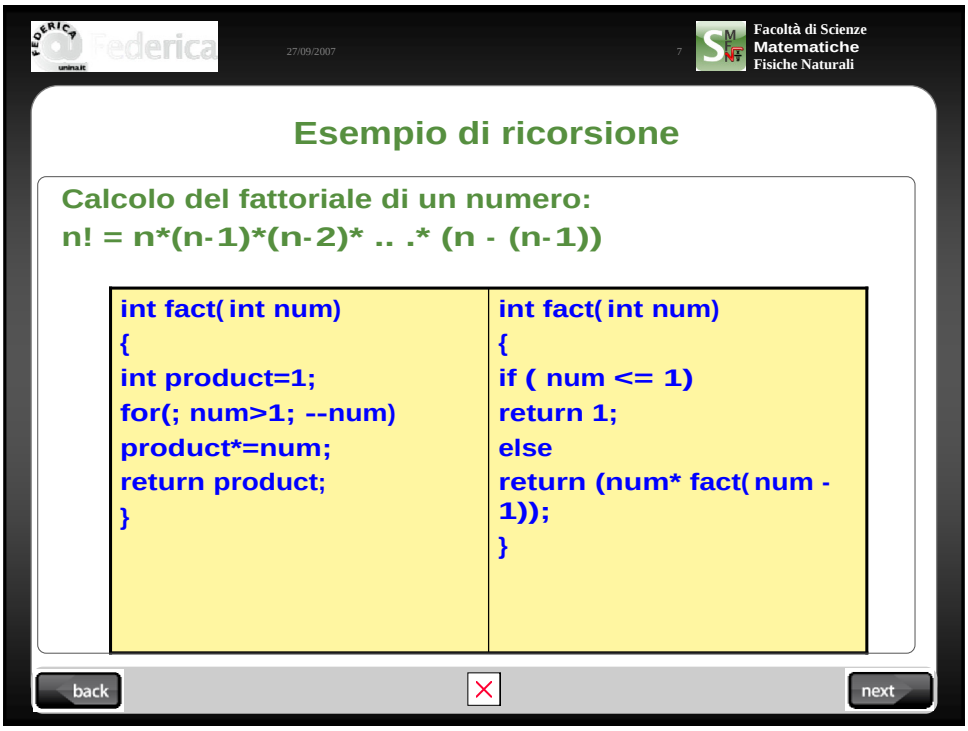
- Assumiamo sempre che la chiamata ricorsiva svolge sempre il suo compito correttamente.
- Bisogna concentrarsi solo sull'ultimo passo di elaborazione per ottenere la soluzione corretta.

back next


```
void StampaN (int n)
{if (n==0)
   return;
 else
   { StampaN(n-1);
     Printf(" %d ",n);}
}
```

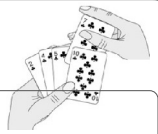


back next


Federica
27/09/2007
7
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Esempio di ricorsione
Calcolo del fattoriale di un numero:
n! = n*(n-1)*(n-2)* .. .* (n - (n-1))
int fact(int num)
{
int product=1;
for(; num>1; --num)
product*=num;
return product;
}
int fact(int num)
{
if (num <= 1)
return 1;
else
return (num* fact(num - 1));
}
back
next


Federica
27/09/2007
8
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Esempio di ricorsione
Calcolo del numero di Fibonacci
f (n) = f (n-1) + f (n-2); f(0) = 0 ; f(1) =1;
RICORSIVO:
#include < stdio.h>
int num;
main() {
printf("\ n numero? ");
scanf("%d",&num);
printf("\ n risultato %d ",fib(num));
}
ITERATIVO:
int fib(int num) {
int tmp=0, ris=1, prec=0;
switch (num) {
case 0: return 0;break;
case 1: return 1;break;
default: {
for (; num>1;--num) {
tmp=ris;
ris+=prec;
prec=tmp; }
return ris; } }}
RICORSIVO:
int fib(int num)
{
switch (num) {
case 0: return 0;break;
case 1: return 1;break;
default:
return (fib(num-1) + fib(num-2));
}
}
back
next

Algoritmi di ordinamento



Insertion Sort

- L'Insertion Sort è uno algoritmo di ordinamento molto efficiente per ordinare un piccolo numero di elementi
- L'idea di ordinamento è quella che potrebbe usare un persona per ordinare le carte nella propria mano.
- Si inizia con la mano vuota e le carte capovolte sul tavolo
- Poi si prende una carta alla volta dal tavolo e si inserisce nella giusta posizione
- Per trovare la giusta posizione per una carta, la confrontiamo con le altre carte nella mano, da destra verso sinistra.
- Ogni carta più grande verrà spostata verso destra in modo da fare posto alla carta da inserire.

Funzione Insertion Sort

```
void insertion(int interi[20],int tot)
{
 int  temp;       /* Indice temporaneo per scambiare elementi */
 int  prossimo;
 int  attuale;

 for (prossimo=1;prossimo<tot;prossimo++)
          {
           temp=interi[prossimo];
           attuale=prossimo-1;
           while ((attuale>=0) && (interi[attuale]>temp))
         {
             interi[attuale+1]=interi[attuale];
             attuale=attuale-1;
           }
           interi[attuale+1]=temp;
          }
}
```

2	4	5	3	6	9	8	1

Programma per Insertion Sort

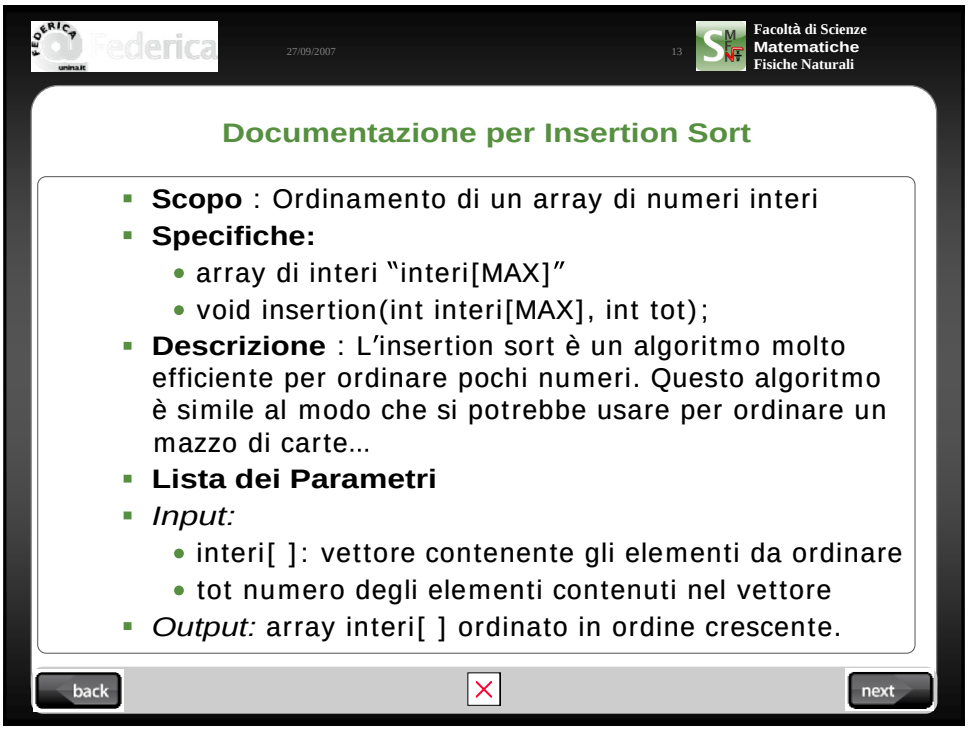
```
# include <stdio.h>
# define MAX 20
int  i,j;                  /* Indici di scorrimento dell'array */
void insertion(int interi[MAX],int tot);
main()
{
int  interi[MAX]   /* Array che contiene i valori da ordinare */
int  tot;              /* Numero totale di elementi nell'array */
 printf("\ nQuanti elementi deve contenere l'array: ");
 scanf("%d",&tot);
 while (tot>20)
   {printf("\ n max 20 elementi: ");
   scanf("%d",&tot);}
 for (i=0;i<tot;i++)
          { printf("\ nInserire il %d° elemento: ",i+1);
           scanf("%d",&interi[i]);}
   insertion(interi,tot);
   printf("\ nArray Ordinato:");
   for (i=0;i<tot;i++)
     printf(" %d",interi[i]);
}
```

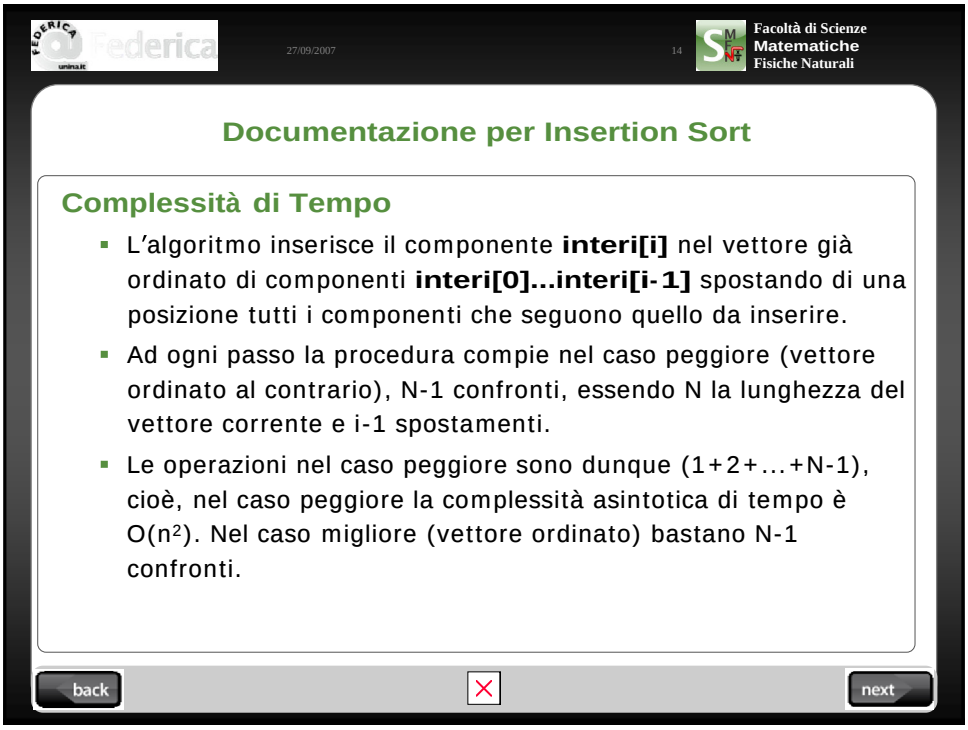

Ingegneria del software...

Autore: **Nome, Cognome, matricola ...**
Titolo: **nome della funzione (o modulo) implementata.**
Scopo: **obiettivi dell'algoritmo implementato(sintetico)**
Specifiche: **Nomi di funzioni, array, variabili importanti**
Descrizione: **Informazioni sull'algoritmo implementato.**
Lista dei Parametri: **Parametri input e output**
Complessità di Tempo e Di Spazio
Altri parametri eventualmente vuoti:

- **Indicatori di Errore:**
- **Routine Ausiliarie**
- **Indicazioni sull'utilizzo**

Implementazione


Federica
27/09/2007
13
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Documentazione per Insertion Sort
Scopo : Ordinamento di un array di numeri interi
Specifiche:
array di interi "interi[MAX]"
void insertion(int interi[MAX], int tot);
Descrizione : L'insertion sort è un algoritmo molto efficiente per ordinare pochi numeri. Questo algoritmo è simile al modo che si potrebbe usare per ordinare un mazzo di carte…
Lista dei Parametri
Input:
interi[ ]: vettore contenente gli elementi da ordinare
tot numero degli elementi contenuti nel vettore
Output: array interi[ ] ordinato in ordine crescente.
back
next


Federica
27/09/2007
14
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Documentazione per Insertion Sort
Complessità di Tempo
L'algoritmo inserisce il componente interi[i] nel vettore già ordinato di componenti interi[0]…interi[i-1] spostando di una posizione tutti i componenti che seguono quello da inserire.
Ad ogni passo la procedura compie nel caso peggiore (vettore ordinato al contrario), N-1 confronti, essendo N la lunghezza del vettore corrente e i-1 spostamenti.
Le operazioni nel caso peggiore sono dunque (1+2+…+N-1), cioè, nel caso peggiore la complessità asintotica di tempo è O(n²). Nel caso migliore (vettore ordinato) bastano N-1 confronti.
back
next

Documentazione per Insertion Sort

Complessità di Spazio:

La struttura dati utilizzata per implementare l'algoritmo è un ARRAY monodimensionale, contenente i valori da ordinare, di conseguenza la complessità di spazio è O(n).

Esempi di esecuzione:

- Dati in ingresso i numeri: 20 11 45, si ottiene in uscita: 11 20 45

Risorse:

Documentazione Insertion Sort

QuickSort

Heapsort

L'Heapsort è un algoritmo di ordinamento molto efficiente:

Come l'insertion Sort e il Quicksort, l'Heapsort ordina sul posto

Meglio dell'Insertion Sort e del Quicksort, il running time dell'Heapsort è 0(nlogn) nel caso peggiore

L'algoritmo di Heapsort basa la sua potenza sull'utilizzo di una struttura dati chiamata Heap, che gestisce intelligentemente le informazioni durante l'esecuzione dell'algoritmo di ordinamento.

Heap

La struttura dati Heap (binaria) è un array che può essere visto come un albero binario completo

Proprietà fondamentale degli Heap è che il valore associato al nodo padre è sempre maggiore o uguale a quello associato ai nodi figli

Un Array A per rappresentare un Heap ha bisogno di due attributi:

- Lunghezza dell'array
- Elementi dell'Heap memorizzati nell'array

Organizzazione dell'array

La radice dell'Heap è sempre memorizzata nel primo elemento dell'array.

Dato un nodo i, il suo nodo padre, figlio sx e dx possono essere calcolati nel modo seguente:

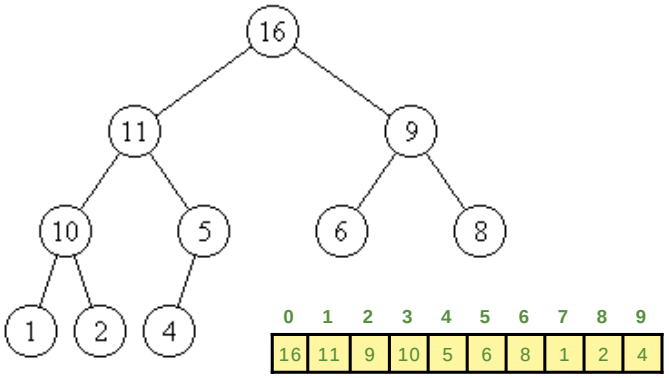
- int left(int i) { return 2*i+1;}
- int right(int i) { return 2*i+2;}
- int parent (int i) {return (i-1)/2;}

N.B. Nel C il primo elemento di un vettore A è A[0]. Nel libro di testo "Algoritmi e Strutture Dati", il primo elemento è invece A[1] e i valori precedenti sono dati dalle seguenti pseudo-funzioni:

- Parent (i) return$\lfloor i/2 \rfloor$
- Left (i) return 2i
- Right(i) return 2i+1

Esempio di Heap

Heap con 10 vertici



back next

Heapify

Una subroutine molto importante per la manipolazione degli Heap è Heapfy.

Questa routine ha il compito di assicurare il rispetto della proprietà fondamentale degli Heap. Cioè, che il valore di ogni nodo non è inferiore di quello dei propri figli.

Di seguito mostriamo una funzione ricorsiva Heapify che ha il compito di far scendere il valore di un nodo che viola la proprietà di Heap lungo i suoi sottoalberi.

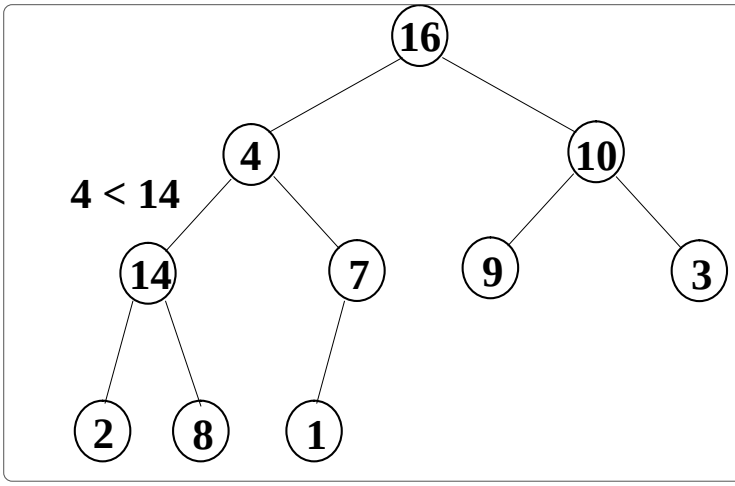
back next

Implementazione di Heapify

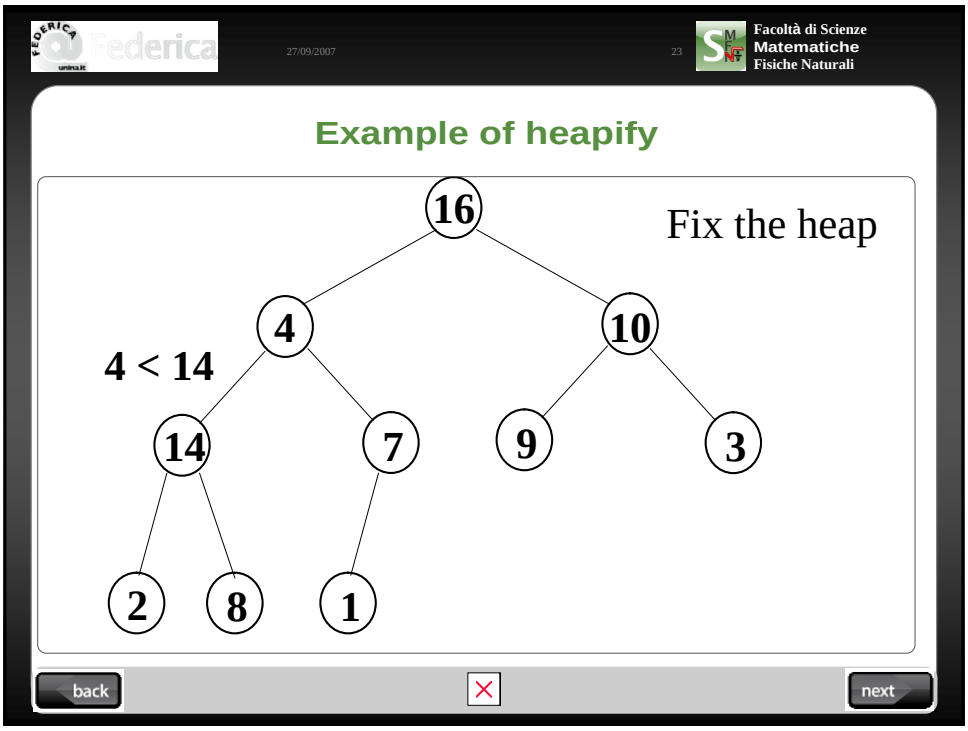
```
void Heapify(int A[MAX], int i)
{
        int l,r,largest;
        l = left(i);
        r = right(i);
        if (l < HeapSize && A[l] > A[i])
                largest = l;
        else largest = i;
        if (r < HeapSize && A[r] > A[largest])
                largest = r;

        if (largest != i) {
                swap(A, i, largest);
                Heapify(A, largest);
        }
}
```

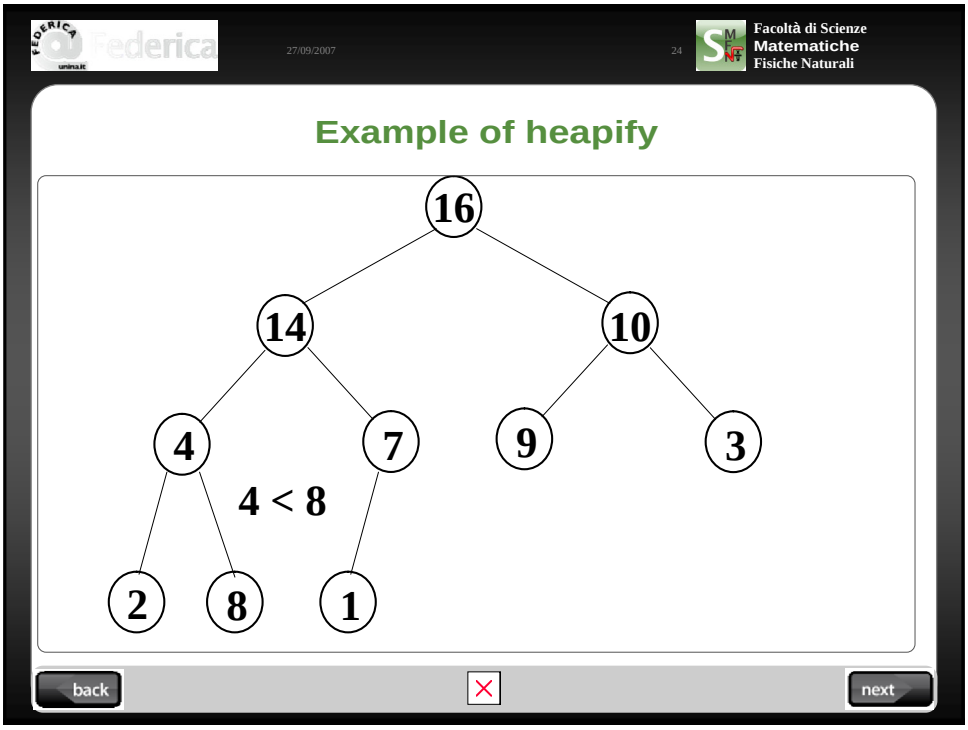
back next

Example of heapify

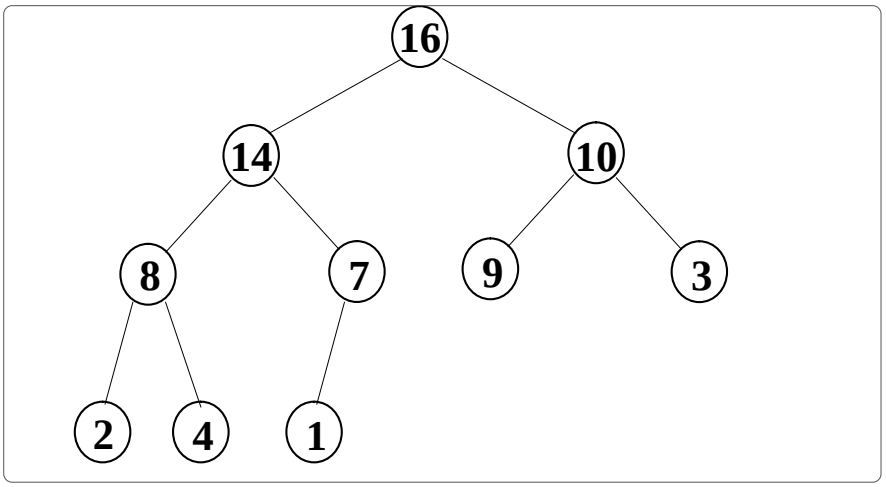


back next


Federica
27/09/2007
23
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Example of heapify
Fix the heap
16
4
10
4 < 14
14
7
9
3
2
8
1
back
next


Federica
27/09/2007
24
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Example of heapify
16
14
10
4
7
9
3
4 < 8
2
8
1
back
next

Example of heapify



Costruire un Heap

La seguente procedura serve a costruire un Heap da un array:

```
void BuildHeap(int A[MAX])
{
int i;
    HeapSize = ArraySize;
    for (i=ArraySize/2; i>=0; i--)
     Heapify(A, i);
}
```

Risorse:

Esempio di Costruzione dell'heap

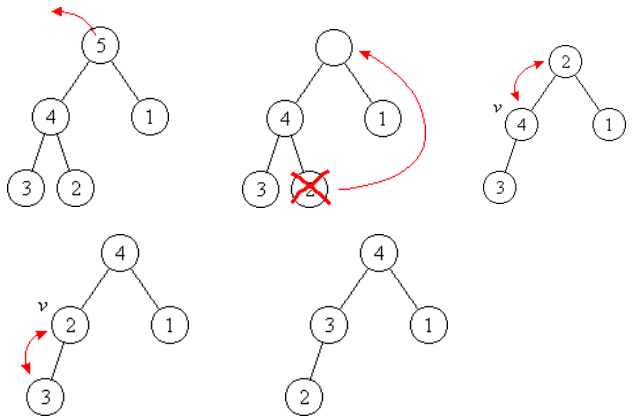
Funzione HeapSort

```
void HeapSort(int A[MAX])
{
int i;
        BuildHeap(A);
        for (i=ArraySize-1; i>=1; i--) {
                swap(A, 0, i);
                HeapSize--;
                Heapify(A, 0);
        }
}
```

Risorse:

Esempio di HeapSort

Simulazione



Algoritmo di HeapSort

```
#include <stdlib.h>
#define MAX 20
int ArraySize, HeapSize, tot;
int left(int i)   { return 2*i+1;}
int right(int i) { return 2*i+2;}
int p(int i)      {return (i-1)/2;}
void swap(int A[MAX], int i, int j)
          {int tmp = A[i];
          A[i] = A[j];
          A[j] =tmp;}
void Heapify(int A[MAX], int i);
void BuildHeap(int A[MAX]);
void HeapSort(int A[MAX]);
```

back next

Main di HeapSort

```
main(){
int A[MAX], k;
 printf("\ nQuanti elementi deve contenere l'array: ");
 scanf("%d",&tot);
 while (tot>MAX)
   { printf("\ n max 20 elementi: ");   scanf("%d",&tot);}
 for (k=0;k<tot;k++) {
           printf("\ nInserire il %d° elemento: ",k+1);
           scanf("%d",&A[k]); }
 HeapSize=ArraySize=tot;
 HeapSort(A);
 printf("\ nArray Ordinato:");
  for (k=0;k<tot;k++)
     printf(" %d",A[k]);
}
```

back next

Complessità

- Il running time di Heapify è O(h) dove h è l'altezza dell'Heap. Siccome l'heap è un albero binario completo, il running time è O(logn). Più in dettaglio la sua complessità è la soluzione della ricorrenza $T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$ utilizzando il master method (caso 2).
- BuildHeap fa O(n) chiamate a Heapify. Per cui il running time di Buildheap è sicuramente O(nlogn). Si noti che le chiamate a Heapify avvengono su nodi ad altezza variabile minore di h. Da un'analisi dettagliata, risulta che il running time di Heapify è O(n).
- Heapsort fa O(n) chiamate a Heapify. Dunque il running time di Heapsort è O(nlogn)
- La complessità di spazio di Heapsort è invece O(n), visto che oltre il vettore di input necessita solamente di un numero costante di variabili per implementare l'algoritmo.

back next

Code di Priorità

Le code di priorità rappresentano una delle applicazioni più efficienti della struttura dati Heap.

Una coda di priorità è una struttura dati utilizzata per mantenere un insieme S di elementi, a ciascuno associato un valore chiamato "chiave".

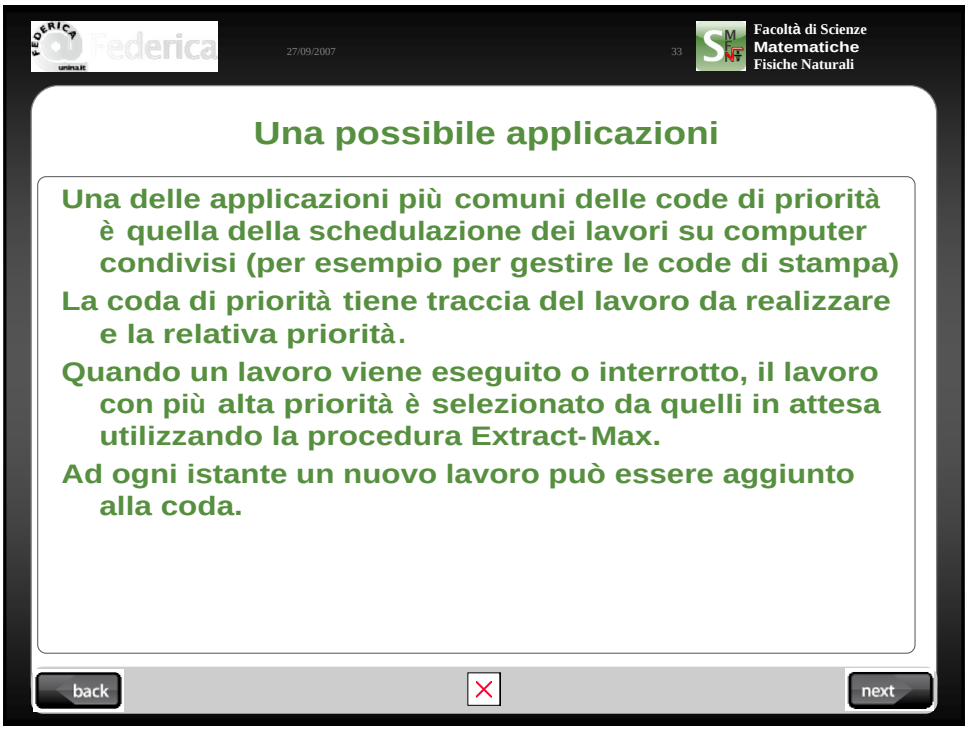
Una coda di priorità supporta le seguenti operazioni

Insert(S,x): Inserisce l'elemento x nell'insieme S.

Maximum(S): Restituisce l'elemento di S con la chiave più grande.

Extract-Max(S): Rimuove e ritorna l'elemento di S con la chiave più grande.

back next


Federica
27/09/2007
33
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
Una possibile applicazioni
Una delle applicazioni più comuni delle code di priorità è quella della schedulazione dei lavori su computer condivisi (per esempio per gestire le code di stampa)
La coda di priorità tiene traccia del lavoro da realizzare e la relativa priorità.
Quando un lavoro viene eseguito o interrotto, il lavoro con più alta priorità è selezionato da quelli in attesa utilizzando la procedura Extract-Max.
Ad ogni istante un nuovo lavoro può essere aggiunto alla coda.
back
next